

Übungsblatt 06

Algorithmen I — Sommersemester 2023

Abgabe im ILIAS bis 09.06.2023, 18:00 Uhr

Die Abgabe erfolgt als *eine* PDF-Datei über das Übungsmodul in der Gruppe deines Tutoriums im ILIAS.

Beachte bitte die Hinweise zum Bearbeiten auf der Webseite.

Falls nicht anders spezifiziert, bezeichnen wir mit „Graph“ einen einfachen, ungerichteten und ungewichteten Graphen.

Aufgabe 1 - Verwirrung Biberischen Ausmaßes (8 Punkte)

Da die Biber absolut keinen Plan hatten, wie man mit Daten wie Stabilitätszahlen effizient umgehen kann, hat Dr. Meta sie in die Vorlesung geschickt, um etwas über Datenstrukturen und Algorithmen zu lernen. Das ging leider komplett nach hinten los. Die Biber sind jetzt total verwirrt, weil in der Vorlesung erzählt wurde, dass *Bäume* zusammenhängende und kreisfreie Graphen sind und es wurde irgendwas von *Blättern* erzählt. Die Verwirrung *stammt* zum einen daher, dass die Biber sonst immer mit Bäumen arbeiten an denen keine Blätter mehr sind. Des Weiteren sind sich alle Biber einig, dass Bäume Graphen mit genau $n - 1$ Kanten sind, wobei einige zusätzlich Zusammenhang fordern, während andere Kreisfreiheit als zweites Kriterium ansehen.

Nun liegt es an dir, die Verwirrung zu beseitigen und die Biber zu vereinen, indem du zeigst, dass sie eigentlich alle über das gleiche reden! Im Folgenden beschränkst du dich dabei auf Graphen mit mindestens einem Knoten.

- a) Zeige, dass jeder Baum mindestens ein Blatt, also einen Knoten mit Grad höchstens 1, enthält. (2 Punkte)
- b) Sei T ein Graph mit n Knoten. Angenommen, T hat zwei der folgenden Eigenschaften
 - 1) T ist zusammenhängend,
 - 2) T ist kreisfrei,
 - 3) T hat $n - 1$ Kanten.

Zeige, dass T dann auch die dritte Eigenschaft hat. (6 Punkte)

Aufgabe 2 - BFS Varianten (6 Punkte)

Die Breitensuche (BFS) ist ein mächtiges Werkzeug zum Explorieren von Graphen. In der Vorlesung wurde Pseudocode vorgestellt, um mittels einer BFS die Knoten eines Graphen einzufärben (siehe Vorlesung 8, Folie 8, *Pseudocode (Endergebnis) BFS(...)*). Im Folgenden sollen Adaptionen der BFS entwickelt werden, die ihre asymptotische Laufzeit nicht verändern.

Hinweis: Du darfst annehmen, dass die n Knoten in einem Graphen durch die Zahlen $0, \dots, n-1$ repräsentiert werden. Achte darauf, in welcher Aufgabe Pseudocode gefordert ist und wo Algorithmen textuell beschrieben werden sollen.

- a) Wir möchten für einen gegebenen Graphen G und Knoten s eine Datenstruktur berechnen, mit der für jeden Knoten t in Zeit $O(1)$ die Distanz $\text{dist}(s, t)$ in G abgelesen werden kann. Beschreibe welche Datenstruktur hier geeignet ist, wie die Breitensuche angepasst werden muss um die Daten korrekt zu berechnen und wie anschließend Distanzen abgelesen werden können. (3 Punkte)
- b) Zusätzlich zur Distanz zwischen zwei Knoten s und t sollen nun die Knoten eines kürzesten Pfades zwischen ihnen bestimmt werden. Die Idee hierfür ist, für jeden Knoten einen Vorgänger zu speichern, der angibt, von wo aus dieser Knoten entdeckt wurde. Schreibe Pseudocode für einen Algorithmus, der einen gerichteten und ungewichteten Graph G zusammen mit zwei Knoten s und t erhält und die Knoten auf einem kürzesten Pfad von s nach t ausgibt.

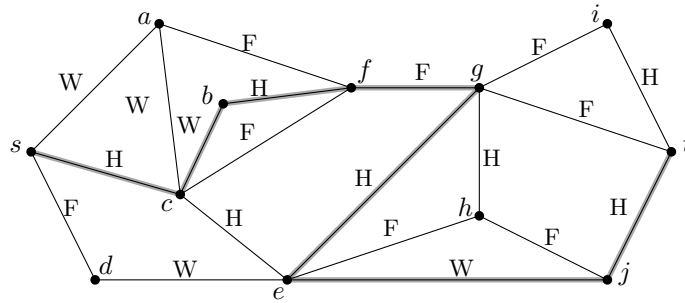
Tipp: Diese Anpassung des Algorithmus sollte seine asymptotische Laufzeit nicht verändern. (3 Punkte)

Aufgabe 3 - Abwechslungsreiche Wege (6 Punkte)

Wir planen eine Radtour von zu Hause zu einer Eisdielen und sind auf der Suche nach einer abwechslungsreichen Route. In unseren Kartendaten haben wir jeden Streckenabschnitt bereits entweder als hügelig (H), im Wald (W) oder am Fluss (F) markiert. Eine Route ist abwechslungsreich, wenn nie zwei gleiche Abschnitte direkt aufeinander folgen.

Da wir nach jedem Streckenabschnitt auf die Karte schauen müssen, sind wir an Routen interessiert die aus möglichst wenigen Streckenabschnitten bestehen. Im Folgenden möchten wir einen Algorithmus entwickeln, um eine abwechslungsreiche Route mit möglichst wenigen Streckenabschnitten zu finden. Falls keine abwechslungsreiche Route existiert, soll dies ausgegeben werden.

Hier ist ein Beispiel für ein Netzwerk mit beschrifteten Streckenabschnitten und einer abwechslungsreichen Route von s nach t .



- a) Ist die oben eingezeichnete Route so kurz wie möglich? Falls nein, gib eine kürzere abwechslungsreiche Route an. (1 Punkt)
- b) Gib eine geeignete Formalisierung des algorithmischen Problems an. Welche Form haben Eingabe und Ausgabe unseres Algorithmus und welche Eigenschaften muss eine gültige Ausgabe erfüllen?
Tipp: Das Netzwerk aus Streckenabschnitten lässt sich gut als Graph modellieren. Welche weiteren Informationen sind benötigt und welche Eigenschaften muss die Ausgabe erfüllen? (1 Punkt)
- c) Beschreibe einen Algorithmus in Worten, der unser Problem löst. Begründe die Korrektheit des Algorithmus und analysiere seine asymptotische Laufzeit. (4 Punkte)

Dr. Meta hat sich bereits an einen geheimen Urlaubsdamm zurückgezogen, um sich von dem beruflichen Stress der letzten Wochen zu erholen.
 Er wünscht eine erholsame Pfingst-Pause!