

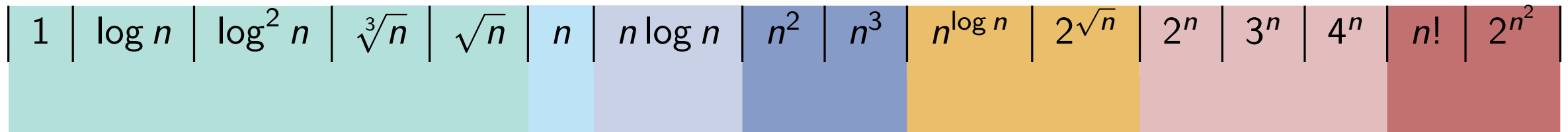
# Algorithmen 1

## Vorlesung 20 Average-Case Analyse, Zusammenfassung & Ausblick

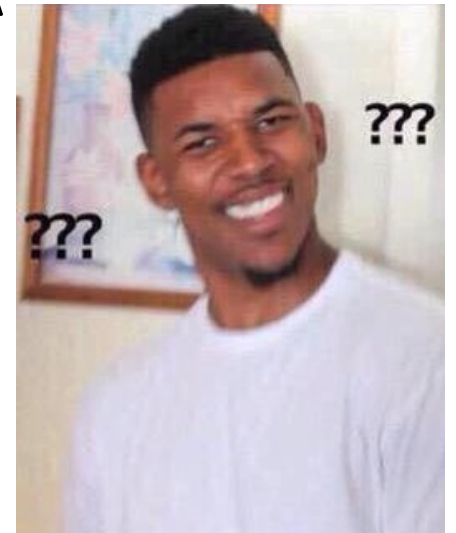


# Why is everything so heavy?

- die Welt braucht effiziente Algorithmen
- elementare Funktionen die Laufzeiten beschreiben



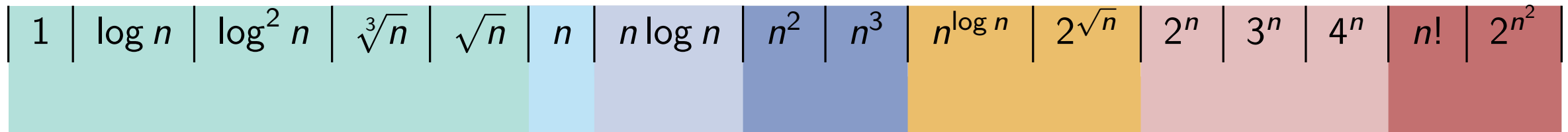
- super viele praktisch relevante Probleme **scheinen** hier zu leben
- Was heißt das?
  - Wir wissen, dass diese Probleme gleich schwer zu lösen sind
  - Wir kennen keine (unbedingten) unteren Schranken
  - Bisher hat niemand einen polynomiellen Algorithmus gefunden
- Bekannte Algorithmen haben exponentielle Laufzeit im Worst Case
- Ändert nichts daran, dass wir sie in der Praxis trotzdem lösen müssen .
- Häufig sind die Algorithmen in der Praxis super effizient



<https://i.imgflip.com/o63vh.jpg?a460593> (cropped)

# Why is everything so easy?

- die Welt braucht effiziente Algorithmen
- elementare Funktionen die Laufzeiten beschreiben



Praxis ... ← ... Theorie

- theoretische Analyse ~~unbrauchbar?~~  
zu pessimistisch!
- bisher typischerweise betrachtet: Worst-Case Laufzeit
- ein Adversary kennt den Algorithmus und baut eine Instanz die die Laufzeit maximiert
- so gut wie immer die richtige Sichtweise (stärkst-mögliche Aussage, insbesondere beim Entwurf von Algorithmen)
- aber... so entstehen keine Instanzen in der Praxis ...

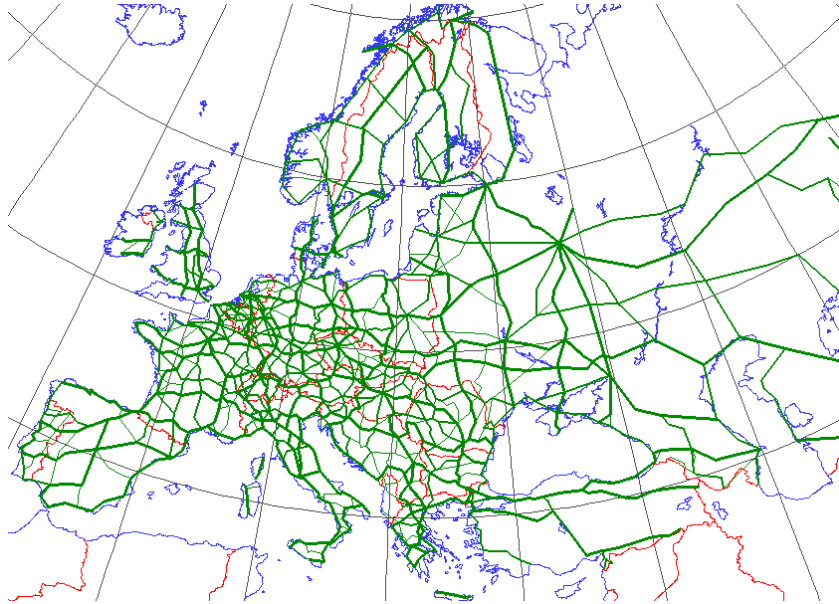
Algorithmen



<https://i.imgflip.com/3w723.jpg?a460595> (cropped)

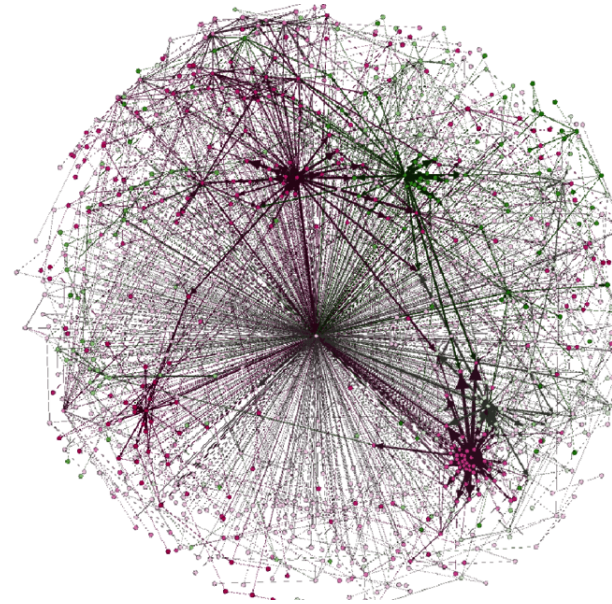
# Praktische Instanzen: Graphen

Straßen



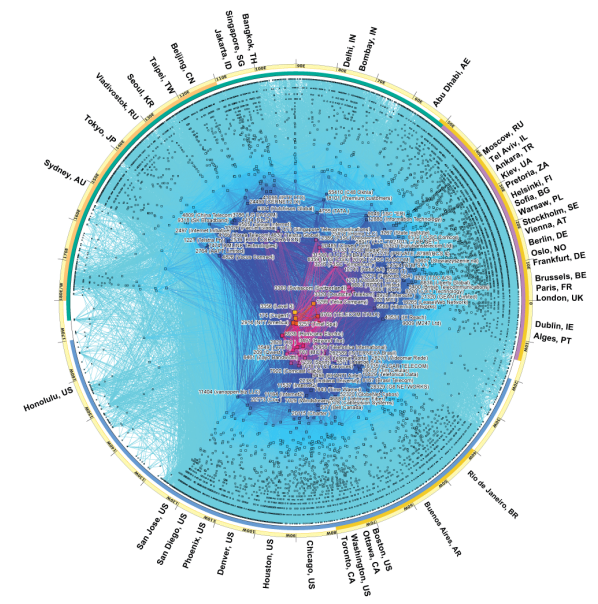
[http://en.wikipedia.org/wiki/Image:International\\_E\\_Road\\_Network.png](http://en.wikipedia.org/wiki/Image:International_E_Road_Network.png)

Soziale Interaktionen



Nia et al. SIN: A Platform to Make Interactions in Social Networks Accessible, SocialInformatics 2012

Internet



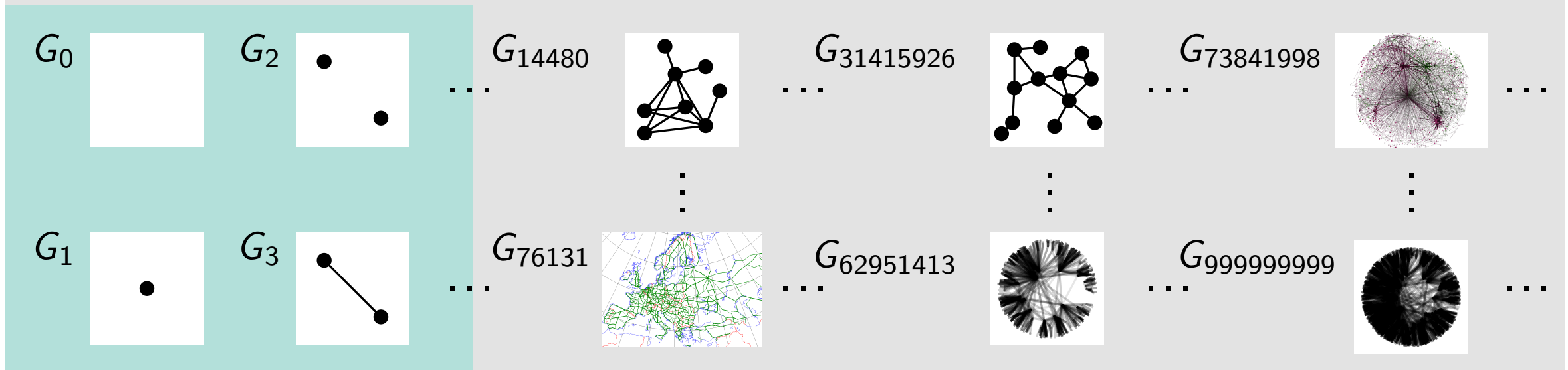
<https://www.caida.org/projects/as-core/pics/2017/ascore-2017-feb-ipv4-standalone-1000x1037.png>

- werden nicht gebaut um deinen Algorithmus langsam zu machen
- echte Netzwerke unterscheiden sich von Worst-Case Instanzen

# Zurück in die Theorie?

- theoretisch erklären warum Algorithmen in der Praxis schnell sind → Analyse einschränken auf realistische Instanzen

## Menge aller Graphen

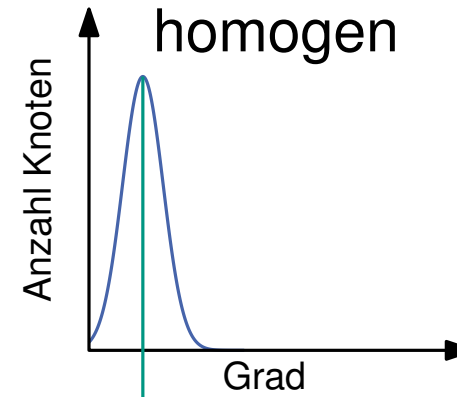
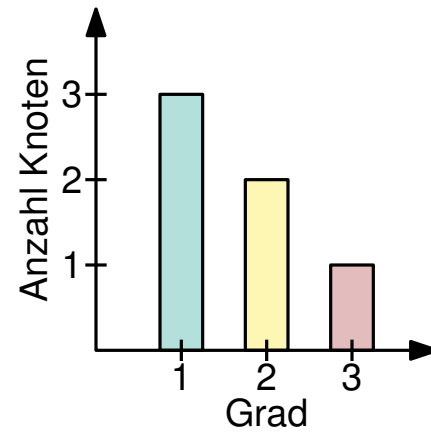
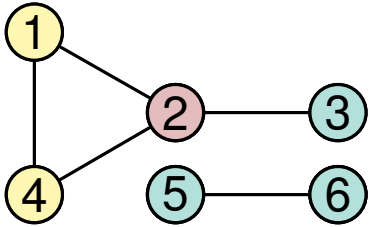


- Wie können wir mathematisch beschreiben wie der Adversary Instanzen wählen darf?
  - “alle Graphen mit Maximalgrad höchstens 2” ← Einschränkung über Eigenschaften von Graphen
- Welche Eigenschaften haben realistische Instanzen?

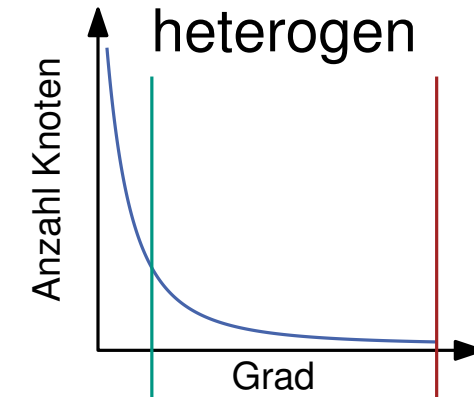


# Eigenschaften von echten Graphen

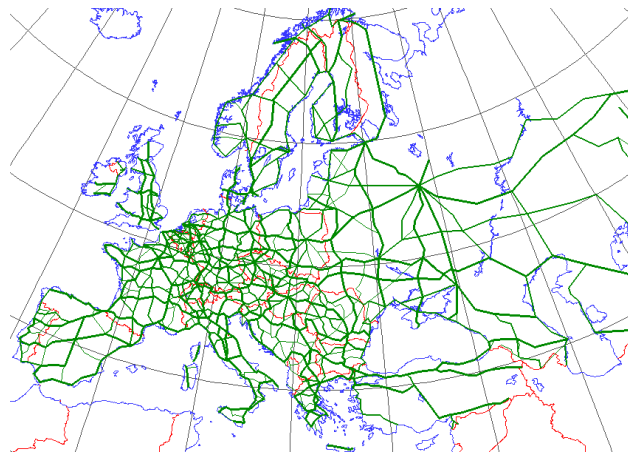
## Gradverteilung



konstanter Durchschnittsgrad



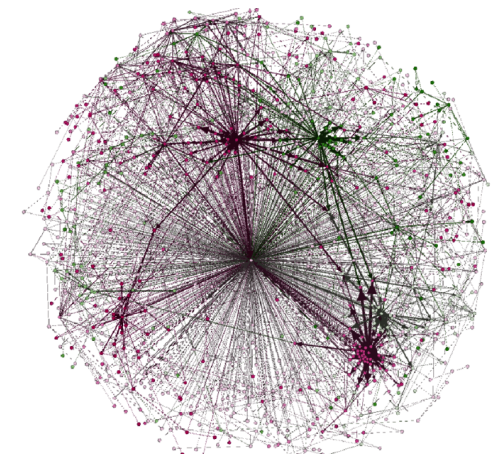
wurzeliger Maximalgrad



[http://en.wikipedia.org/wiki/Image:International\\_E\\_Road\\_Network.png](http://en.wikipedia.org/wiki/Image:International_E_Road_Network.png)

Die Gradverteilung eines Straßennetzwerks ist eher...

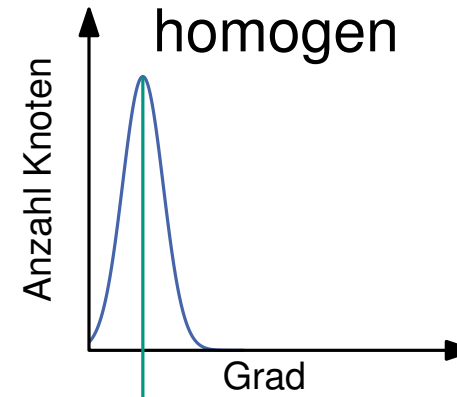
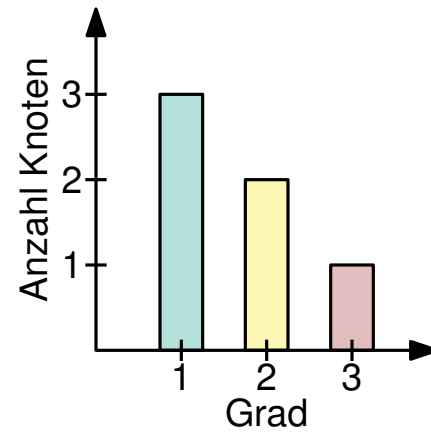
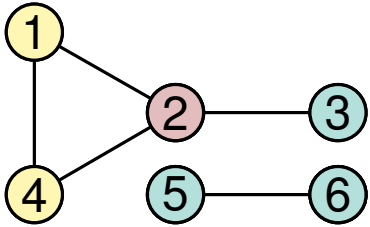
Die Gradverteilung eines sozialen Netzwerks ist eher...



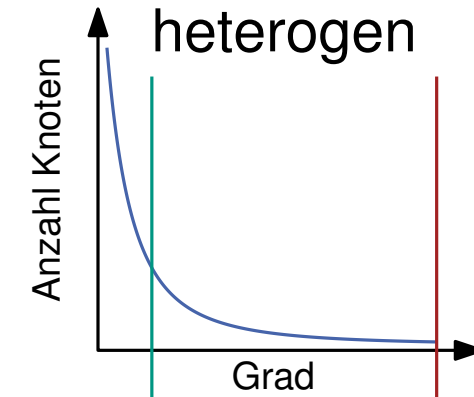
Nia et al. SIN: A Platform to Make Interactions in Social Networks Accessible, SocialInformatics 2012

# Eigenschaften von echten Graphen

## Gradverteilung



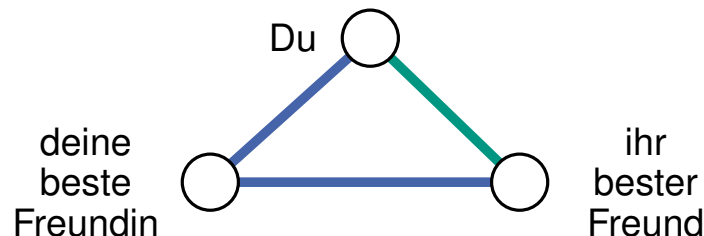
konstanter Durchschnittsgrad



wurzeliger Maximalgrad

## Lokalität

- “Kanten sind kurz”
- Kanten verbinden Knoten zwischen denen es schon kurze Pfade gibt



## Durchmesser

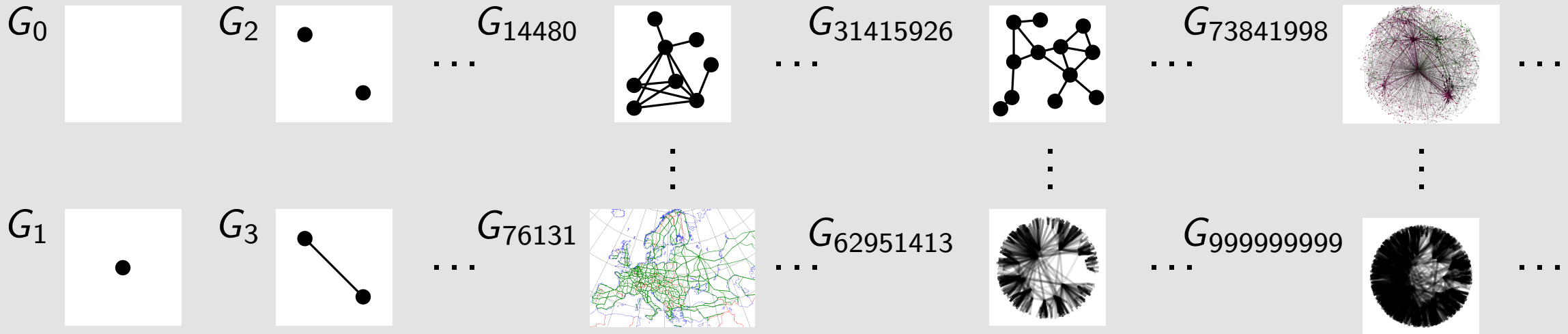
- “Jeder kennt jeden über 6 Ecken”
- der längste kürzeste Pfad ist kurz
- in Facebook kennt jeder jeden über 3.57 Ecken (im Durchschnitt)

<https://research.facebook.com/blog/2016/2/three-and-a-half-degrees-of-separation/>

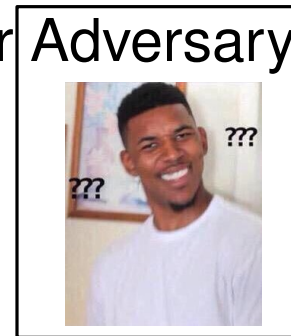
- in Straßennetzwerken eher nicht

# Zurück in die Theorie?

## Menge aller Graphen



- Wie können wir mathematisch beschreiben wie der Adversary Instanzen wählen darf?
  - “Graphen mit heterogener Gradverteilung”
  - “... und hoher Lokalität”
  - “... und kleinem Durchmesser”
- Das ist alles zu unkonkret!



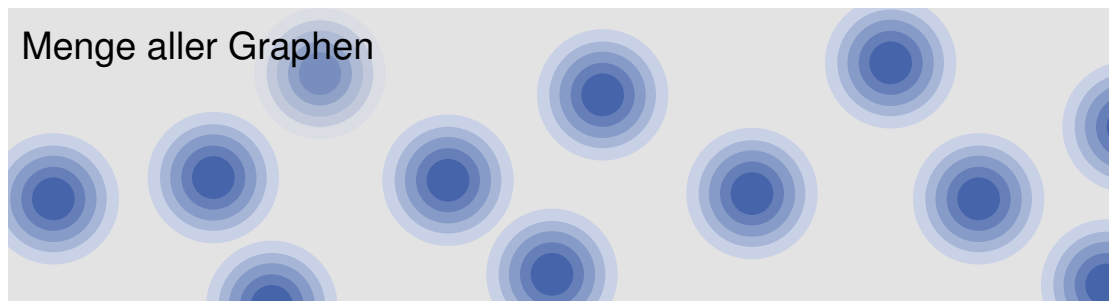
<https://i.imgflip.com/o63vh.jpg?a460593> (cropped)

# Zufallsgraph

Ein **Zufallsgraph** ist ein Graph  $G = (V, E)$  bei dem  $E$  eine Zufallsvariable ist.

## ■ Erdős-Rényi Modell

- $V = \{1, \dots, n\}$
- $X_{u,v}$  Indikatorzufallsvariable mit  $p(X_{u,v} = 1) = p$  für alle  $1 \leq u < v \leq n$ .
- $E = \{\{u, v\} \in \binom{V}{2} \mid X_{u,v} = 1\}$ 
  - folgt einer Verteilung über alle Graphen mit  $n$  Knoten



Menge aller Graphen

(unter der Annahme, dass wir nach der Generierung die Knoten-IDs vergessen)

“Adversary soll Erdős-Rényi Zufallsgraph generieren”

## Beispiel

$$V = \{1, \dots, 5\}$$

$$p = 1/2$$

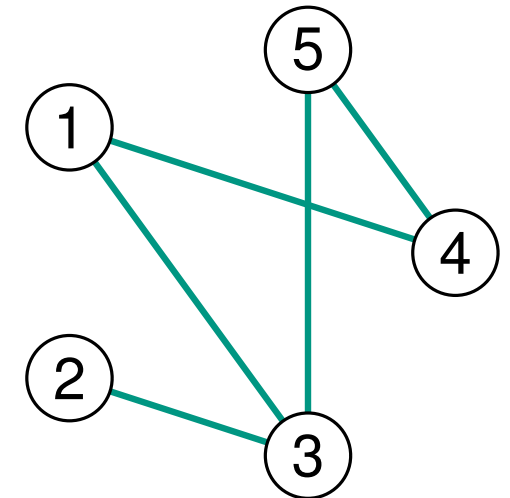
$$X_{1,2} = 0 \quad X_{2,4} = 0$$

$$X_{1,3} = 1 \quad X_{2,5} = 0$$

$$X_{1,4} = 1 \quad X_{3,4} = 0$$

$$X_{1,5} = 0 \quad X_{3,5} = 1$$

$$X_{2,3} = 1 \quad X_{4,5} = 1$$



## Eigenschaften

- erwarteter Grad eines Knotens homogen  

$$\mathbb{E}[\deg(v)] = \sum_{u \neq v} X_{u,v} = p \cdot (n - 1)$$
- Kanten unabhängig keine Lokalität

# Geometrischer Zufallsgraph

## ■ Euklidisch

- $V = \{1, \dots, n\}$
- $X_v$  gleichverteilt aus dem Einheitskreis
- $E = \{\{u, v\} \in \binom{V}{2} \mid \|X_u - X_v\|_2 \leq R\}$

## ■ Lokalität Sind zwei Knoten mit gemeinsamem Nachbar wahrscheinlicher verbunden, als zwei zufällig gewählte Knoten?

- $u, w$  sind zwei zufällig gewählte Knoten

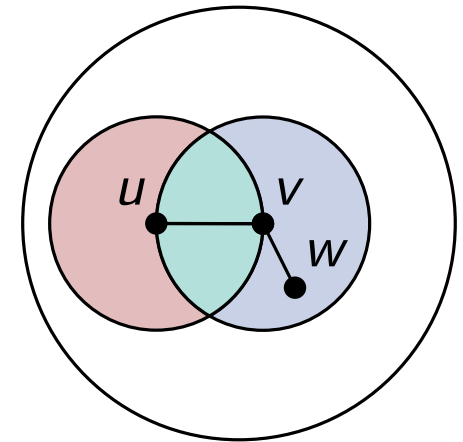
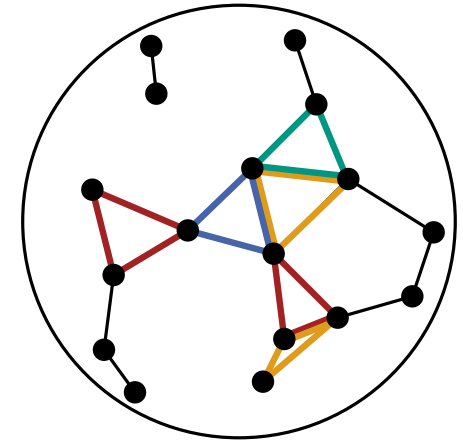
$$\begin{aligned} \{u, w\} \in E &\leftrightarrow \|X_u - X_w\|_2 \leq R \\ &\leftrightarrow w \in \odot \end{aligned}$$

$$\Pr[\{u, v\} \in E] \leq \frac{A(\odot)}{A(\bigcirc)} = \frac{\pi R^2}{\pi 1^2} = R^2 = 0.25$$

- $u, w$  haben Nachbar  $v \rightarrow w \in \odot$
- $\{u, w\} \in E \leftrightarrow w \in \odot \xrightarrow{\quad} w \in \odot$

$$\Pr[\{u, w\} \in E \mid \{u, v\}, \{v, w\} \in E] = \frac{A(\odot)}{A(\bigcirc)} \gtrapprox 0.391$$

$$R = 1/2$$



# Geometrischer Zufallsgraph

## ■ Euklidisch

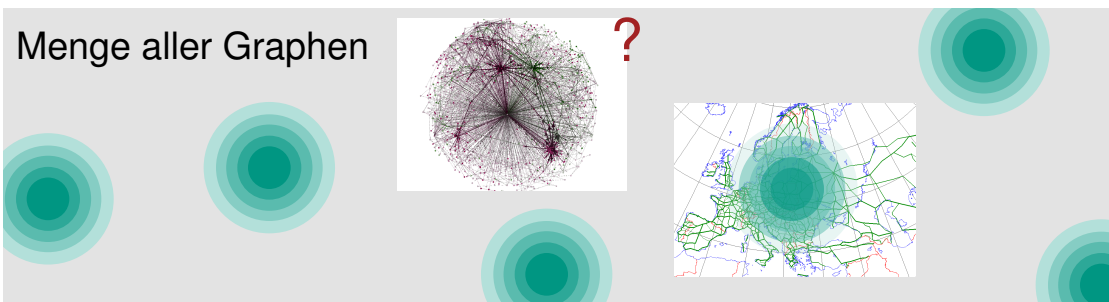
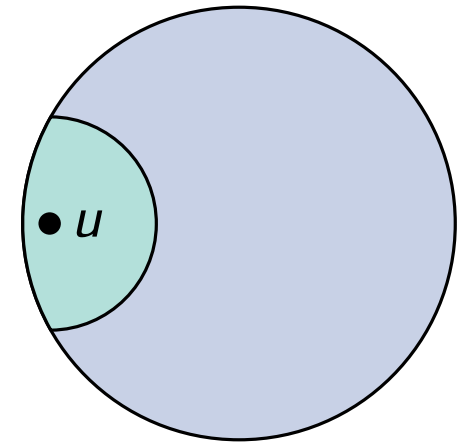
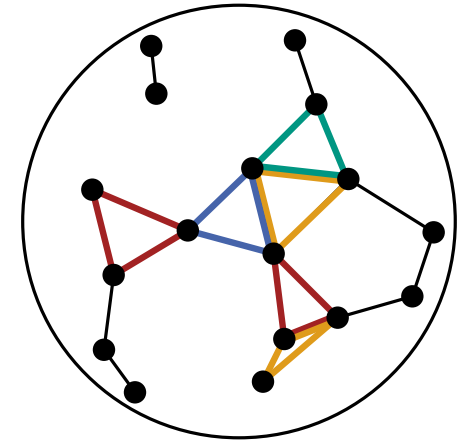
- $V = \{1, \dots, n\}$
- $X_v$  gleichverteilt aus dem Einheitskreis
- $E = \{\{u, v\} \in \binom{V}{2} \mid \|X_u - X_v\|_2 \leq R\}$

## ■ Lokalität ✓

## ■ Gradverteilung homogen

- $\mathbb{E}[\deg(u)] \leq n \cdot \frac{A(\odot)}{A(\bigcirc)} = n \cdot 0.25 \dots$  aber nicht beliebig klein

$$R = 1/2$$



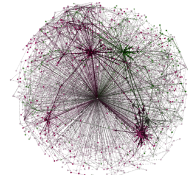
# Geometrischer Zufallsgraph

## ■ Hyperbolisch

- $V = \{1, \dots, n\}$
- $X_v$  gleichverteilt aus einem Kreis in der hyperbolischen Ebene  $\mathbb{H}$
- $E = \{\{u, v\} \in \binom{V}{2} \mid \text{dist}_{\mathbb{H}}(u, v) \leq R\}$

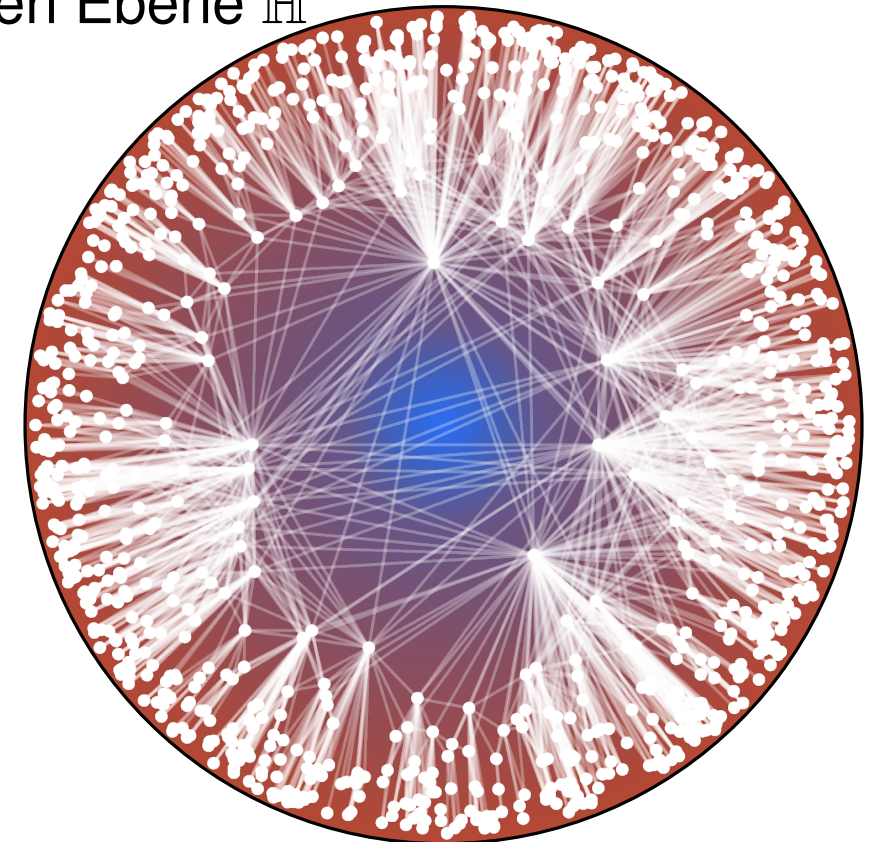
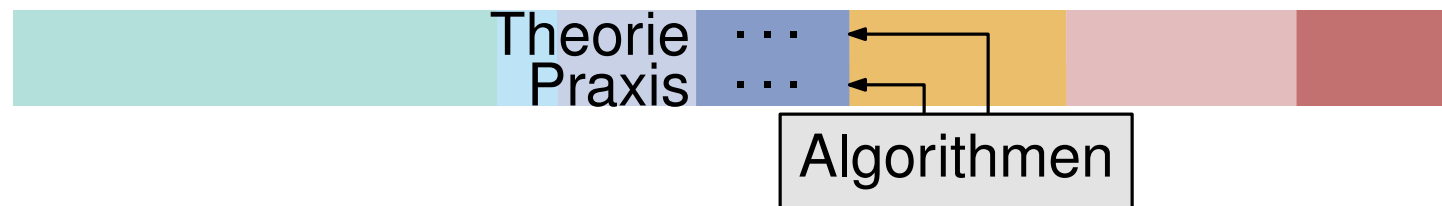
## ■ Lokalität ✓

## ■ Gradverteilung heterogen



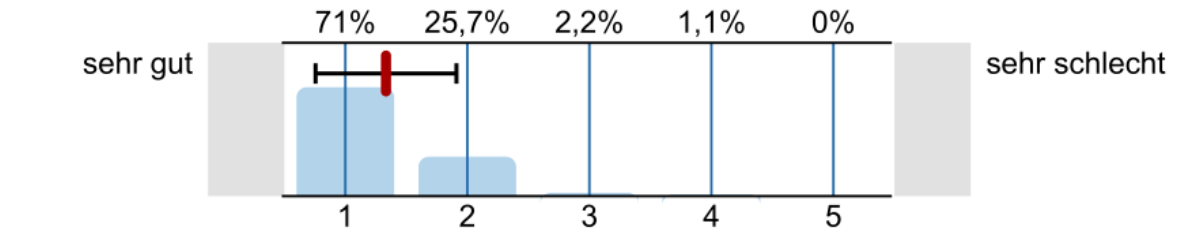
## ■ Average-Case Analyse

- Eingabe für den Algorithmus: ein hyperbolischer Zufallsgraph
- geringe Laufzeit mit hoher Wahrscheinlichkeit

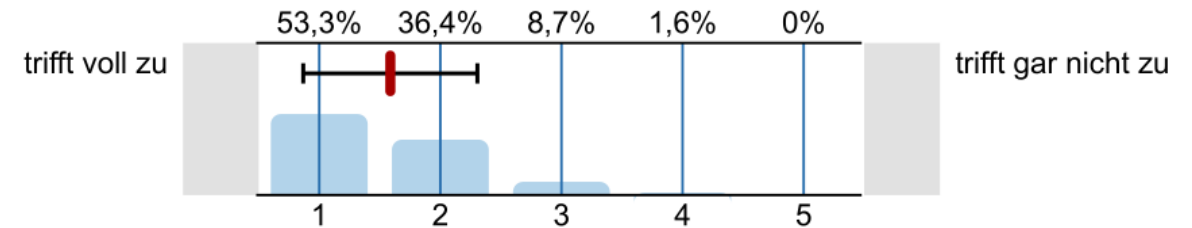


# Eval – Gesamteindruck

Bitte benoten Sie die Lehrveranstaltung insgesamt



In dieser Lehrveranstaltung lerne ich viel.



Schöne Folien und gute Quizfragen.

Dozent wirkt immer motiviert und gestaltet die Vorlesung damit auch interessant.

## Bemühungen die Vorlesung aufzulockern

Die didaktische Herangehensweise des Dozenten und der Übungsleitung, man kann der Vorlesung sehr gut folgen und lernt die Inhalte auf nachhaltige Art und Weise.



# Eval – Klicker

25×

Die Kurzumfragen während der Vorlesung

Die Umfragen die viel Helfen

Die regelmäßigen Umfragen die auch als Pause dienen, welche es sehr angenehm machen der VL zu folgen.

9×

Die Zeiten für die Umfragen sind manchmal zu lang

Manchmal schon etwas lange Wartezeit nach Quizfragen. (So 5 min wenn 2 gereicht hätten ca.)

Die Pausen für die Klicker Umfragen ist teilweise sehr lang, da könnte man wahrscheinlich etwas Zeit einsparen. Aber ist jetzt auch kein wirkliches Problem

**Was ist eure Meinung zu den Umfragen?**

# Eval – Vortragsstil

23×

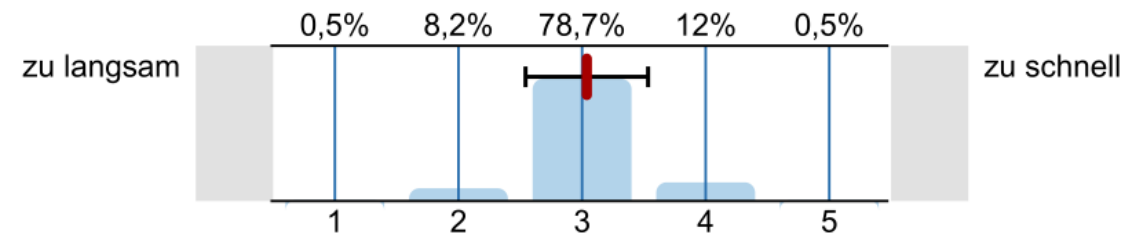
Das freie vortragen des Profs

die Motivation des Dozenten  
die Atmosphäre, das Sprechtempo

Klare Kommunikation warum man etwas betrachtet

Anschauliche gut verständliche presentation von zum Teil komplexen Sachverhalten

Geschwindigkeit



4×

Der Dozent spricht zu schnell :D

Teilweise ist es bisschen zu schnell

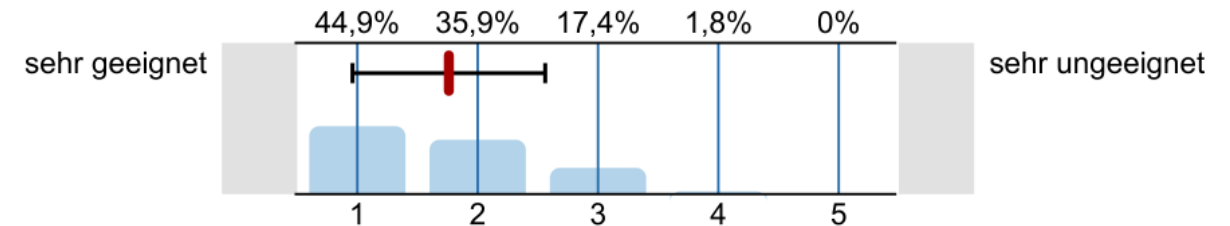
3×

Etwas laute Sprechweise während der VL

Das Mikrofon könnte lauter sein, dafür könnte Thomas nicht so schreien (nicht böse gemeint)

# Eval – Lernmaterialien

## Eignung der Lernmaterialien



40×

### Sehr übersichtliche Folien

Die Folien sind sehr übersichtlich und optisch ansprechend gestaltet, sie eignen sich sehr gut zum Lernen.

Die vielen Graphiken auf den Folien auch, dass diese farblich gekennzeichnet waren. Genauer: relevanter Text und korrespondierendes Stück im Bild in der gleichen Farbe

4×

Kein Skript leider

Es wäre eventuell hilfreich ein komplettes Skript zur Verfügung zu stellen.

Fehlendes (Kurz-)Skript, um Wissen kompakt zu bündeln

Da es keine Sammlung von Informationen gibt (Algorithmen, Laufzeiten...) führt dazu dass ich oft Algorithmen verwechsle

auf der Homepage: Dokument mit Lernzielen, Literaturhinweisen und Glossar

# Eval – Plattformen

14× Schnelle antworten auf discord Der Discord Server für Fragen und Memes

Discord führt dazu, dass (anders als bei Ilias) viele Fragen gestellt (und dann auch beantwortet) werden.

Die Kombination aus Discord und Webseite ist sehr gut. Vor allem Discord als ständige Anlaufstelle für Fragen.

4× Kein ilias, Vorlesung mach ihr eigenes ding (unnötig)

Die deutlich überwiegende Verwendung von Discord und extra Webseite im Gegensatz zu Ilias

Discord ist vielleicht nicht die beste Plattform für offizielle Foren und Ankündigungen.

# Eval – Sonstiges

6× Es ist meist zu laut in der VL, v.a. gegen Ende Allgemeine Lautstärke im Hörsaal  
Die Lautstärke im Hörsaal, was ja eher die Schuld der Kommilitonen ist.  
Manchmal hat mein/e SitznachbarIn mich abgelenkt ?

4× Die Grumpy-Cat ist verschollen!! Grumpy-Cat taucht nicht mehr auf ?



Bild: Grumpy cat line art / XXspiritwolf2000XX / Creative Commons

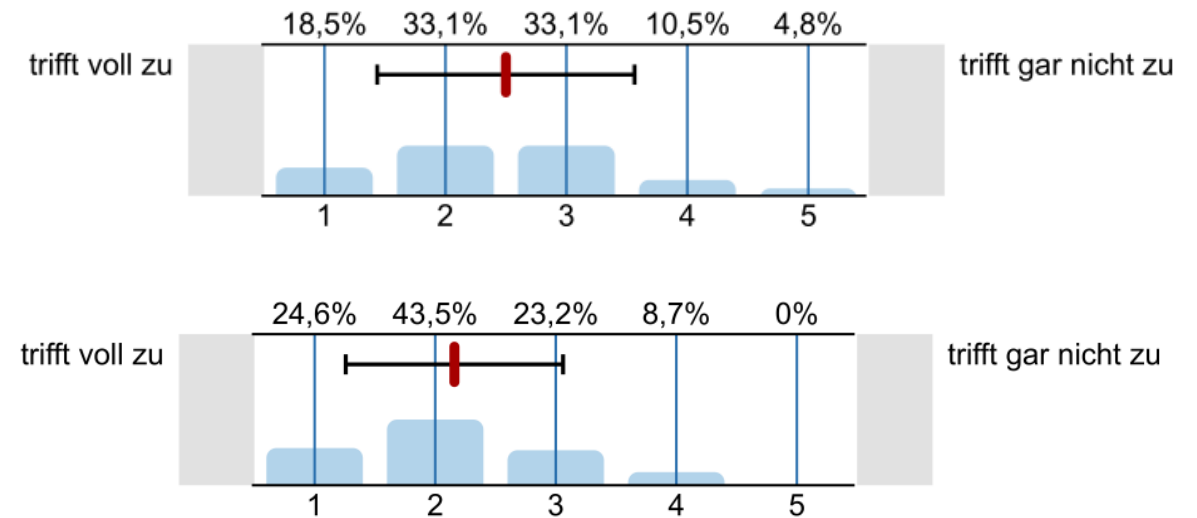
# Eval – Übung

## Letztes Jahr

In dieser Lehrveranstaltung lerne ich viel.

## Dieses Jahr

In dieser Lehrveranstaltung lerne ich viel.



Didaktische Herangehensweise der Übungsleitung, man hat wirklich das Gefühl dass es der Übungsleitung am Herzen liegt dass man nachhaltig viel lernt

die Übungsblätter sind super (insbesondere die Biber)

```

      .---.
      @  @  )
      ^  |
      [] |##
      /  |####
      (  |####
      \  |#BP#
      /  |###
      /  |)##
      \  |#
      /,,/_,,_#

```

# Was haben wir gelernt?

## Datenstrukturen

- Welche Datenstrukturen haben wir kennen gelernt?
- Für welchen Zweck ist welche Datenstruktur geeignet?
- Wie funktioniert die effiziente Umsetzung?

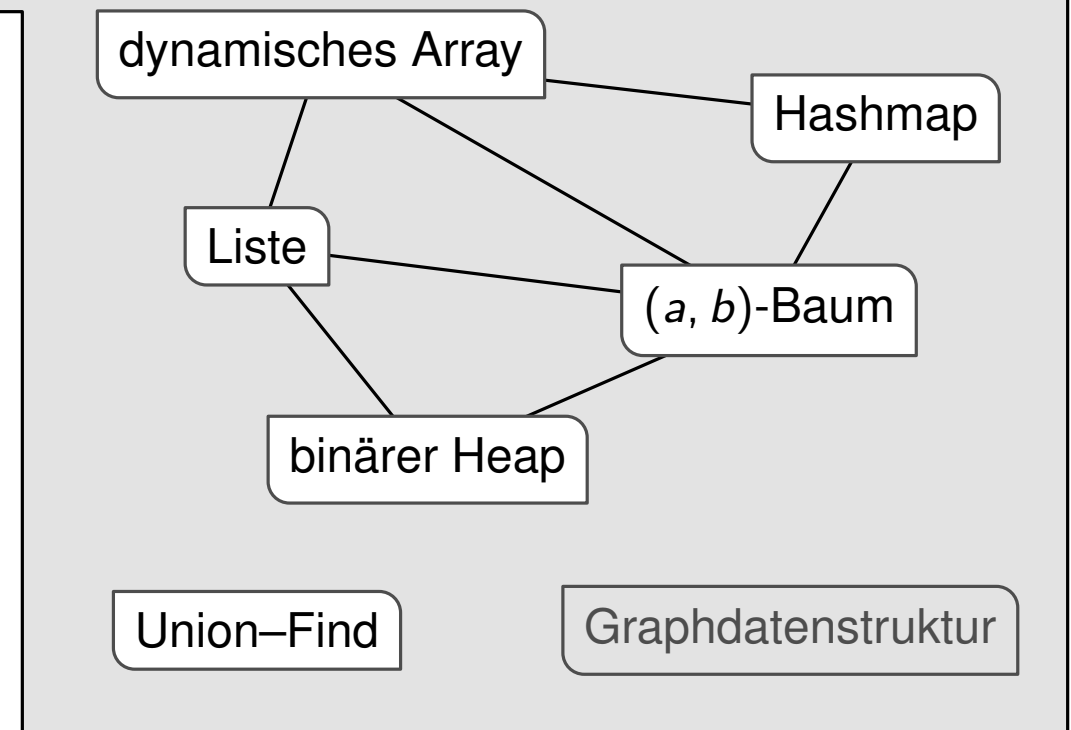
**Kante:** Überleg dir, was jeweils die Vor- und Nachteile der beiden Strukturen im Vergleich miteinander sind. Kennst du für beide Richtungen Situationen, in denen jeweils die eine der anderen überlegen ist?

## Algorithmen

- Welche Algorithmen haben wir kennen gelernt?
- Wie und warum funktionieren sie?

## Methoden und Techniken

- Formalisierung
- Algorithmenentwurf
- Detailumsetzung
- Korrektheit
- Laufzeit



# Was haben wir gelernt?

## Datenstrukturen

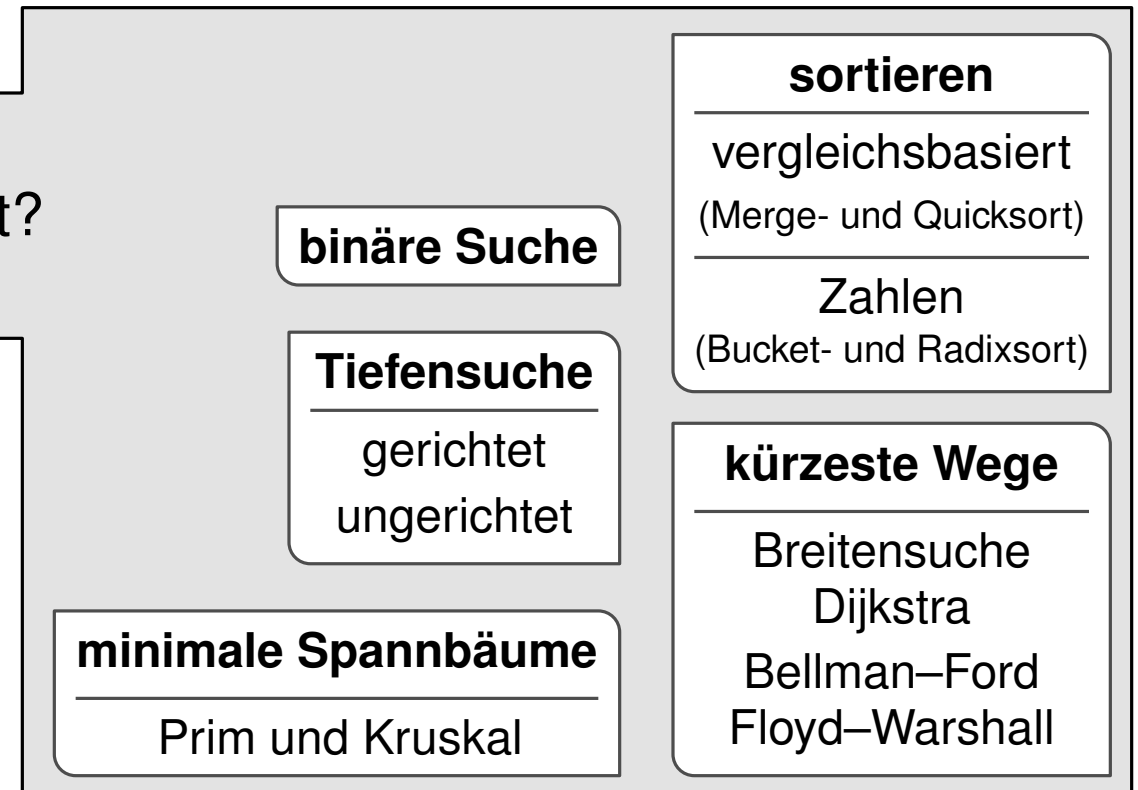
- Welche Datenstrukturen haben wir kennen gelernt?
- Für welchen Zweck ist welche Datenstruktur geeignet?
- Wie funktioniert die effiziente Umsetzung?

## Algorithmen

- Welche Algorithmen haben wir kennen gelernt?
- Wie und warum funktionieren sie?

## Methoden und Techniken

- Formalisierung
- Algorithmenentwurf
- Detailumsetzung
- Korrektheit
- Laufzeit



# Was haben wir gelernt?

## Datenstrukturen

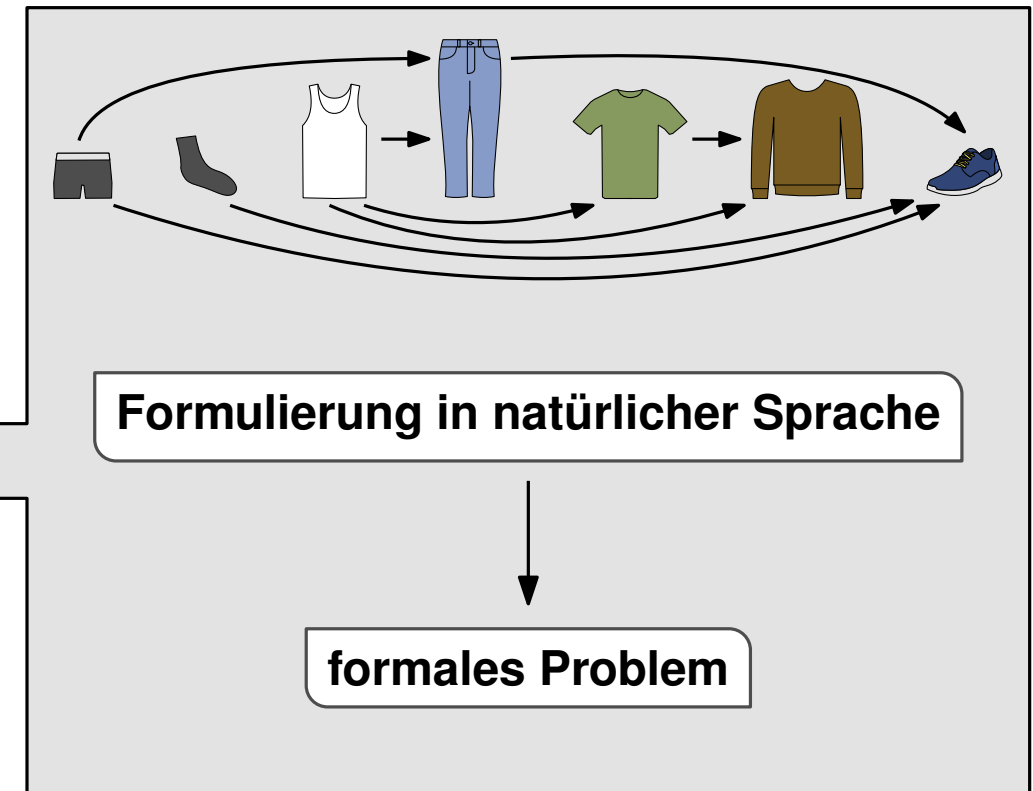
- Welche Datenstrukturen haben wir kennen gelernt?
- Für welchen Zweck ist welche Datenstruktur geeignet?
- Wie funktioniert die effiziente Umsetzung?

## Algorithmen

- Welche Algorithmen haben wir kennen gelernt?
- Wie und warum funktionieren sie?

## Methoden und Techniken

- Formalisierung
- Algorithmenentwurf
- Detailumsetzung
- Korrektheit
- Laufzeit



# Was haben wir gelernt?

## Datenstrukturen

- Welche Datenstrukturen haben wir kennen gelernt?
- Für welchen Zweck ist welche Datenstruktur geeignet?
- Wie funktioniert die effiziente Umsetzung?

## Algorithmen

- Welche Algorithmen haben wir kennen gelernt?
- Wie und warum funktionieren sie?

## Methoden und Techniken

- Formalisierung
- Algorithmenentwurf
- Detailumsetzung
- Korrektheit
- Laufzeit

Teile und Herrsche

Greedy

dynamische Programmierung

### kleinere Tricks

etwas Unordnung erlauben  
Lazy Evaluation  
nutze Zahlen als Arrayindex

# Was haben wir gelernt?

## Datenstrukturen

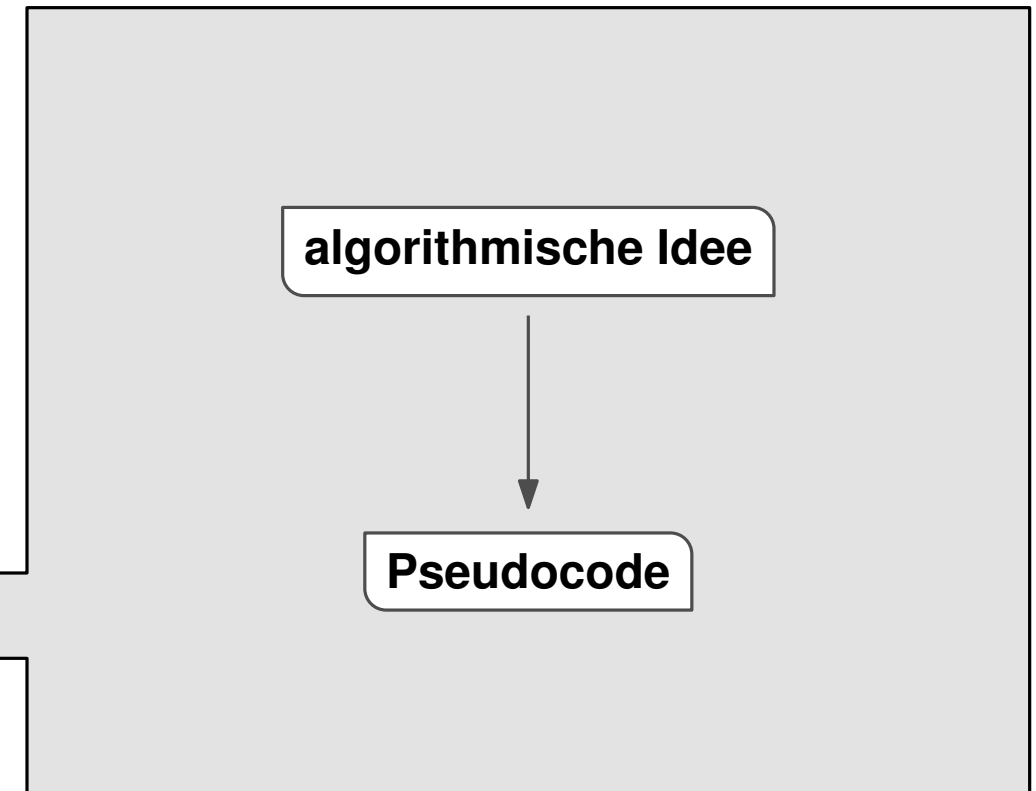
- Welche Datenstrukturen haben wir kennen gelernt?
- Für welchen Zweck ist welche Datenstruktur geeignet?
- Wie funktioniert die effiziente Umsetzung?

## Algorithmen

- Welche Algorithmen haben wir kennen gelernt?
- Wie und warum funktionieren sie?

## Methoden und Techniken

- Formalisierung
- Algorithmenentwurf
- Detailumsetzung
- Korrektheit
- Laufzeit



# Was haben wir gelernt?

## Datenstrukturen

- Welche Datenstrukturen haben wir kennen gelernt?
- Für welchen Zweck ist welche Datenstruktur geeignet?
- Wie funktioniert die effiziente Umsetzung?

## Algorithmen

- Welche Algorithmen haben wir kennen gelernt?
- Wie und warum funktionieren sie?

## Methoden und Techniken

- Formalisierung
- Algorithmenentwurf
- Detailumsetzung
- Korrektheit
- Laufzeit

Invarianten

Induktion

**Widerspruchsbeweis**  
(minimales Gegenbeispiel)

**Austauschargument (Greedy)**

(es gibt aber meist kein Kochrezept)

# Was haben wir gelernt?

## Datenstrukturen

- Welche Datenstrukturen haben wir kennen gelernt?
- Für welchen Zweck ist welche Datenstruktur geeignet?
- Wie funktioniert die effiziente Umsetzung?

## Algorithmen

- Welche Algorithmen haben wir kennen gelernt?
- Wie und warum funktionieren sie?

## Methoden und Techniken

- Formalisierung
- Algorithmenentwurf
- Detailumsetzung
- Korrektheit
- Laufzeit

**Asymptotik:  $O$ -Notation**

**Rekurrenzen auflösen**  
(via Rekursionsbaum)

**exponentielle Summen**

**amortisierte Analyse**

**Average-Case Analyse**  
(randomisierte Algorithmen)

**Adversary Argument**

$\sum_{v \in V} \deg(v) \in \Theta(m)$

# Klausur (31. August, 8 Uhr)

## Materialien

- Folien für Vorlesung und Übung (Homepage)
- Übungsblätter mit Lösungen (Homepage)
- Lernziele, Literaturhinweise und Glossar (Homepage)
- Aufzeichnung von Vorlesung und Übung (Ilias)
- alte Klausuren (Fachschaft, Homepage)

## Zusätzliche Angebote

- Zusatztutorien jede Woche jeweils Montag und Mittwoch 9:45 in Raum –101/–102
- digitale Sprechstunde (via Twitch): Mittwoch 2.8. um 18 Uhr und voraussichtlich nochmal in der Woche 21.8. – 25.8.

## Erlaubte Hilfsmittel

- Spickzettel: ein A4 Blatt (Vor- und Rückseite), mit beliebigem Inhalt
- Empfehlung: selbst erstellen und nicht von Kommiliton:innen kopieren

# Algorithmen-Vorlesungen am KIT

## Im Bachelor belegbar

- (Theoretische Grundlagen der Informatik)
- Algorithmen 2
- Algorithmen für planare Graphen
- Basispraktikum ICPC

## Vertiefungsvorlesungen für den Master

- Fortgeschrittenes algorithmisches Programmieren
- Algorithm Engineering
- Fortgeschrittene Datenstrukturen
- Parallele Algorithmen
- Text-Indexierung
- Randomisierte Algorithmik
- Modelle der Parallelverarbeitung
- Algorithmische Geometrie
- Parametrisierte Algorithmen
- Algorithmen für Routenplanung
- Algorithmische Graphentheorie
- Algorithmen zur Visualisierung von Graphen

Welche Vorlesungen genau angeboten werden ist natürlich immer etwas im Wandel.

# Todo für euch

Meldet euch für die Klausur an!

Bereitet euch gut darauf vor!

Schreibt eine gute Klausur!

**Wir wünschen viel Erfolg!**