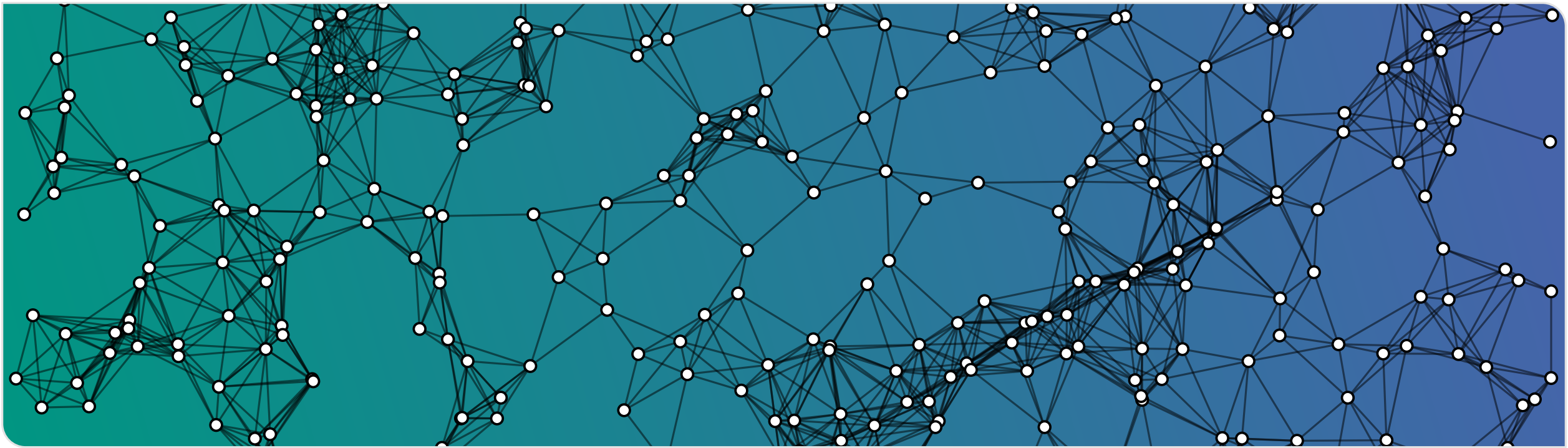
Karlsruher Institut für Technologie

# Algorithmen 1

## Union-Find



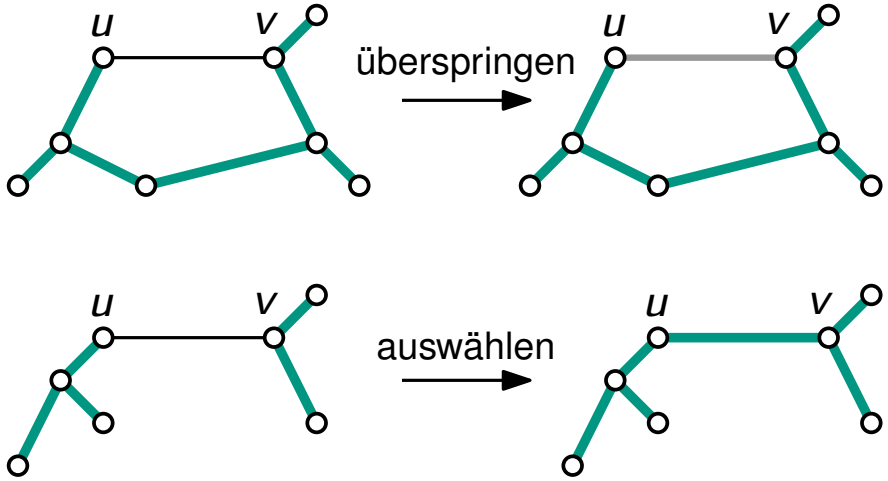
# Motivation: Union–Find

## Letzte Vorlesung: Algorithmus von Kruskal

- wähle in jedem Schritt minimale Kante
- unter allen Kanten, die keinen Kreis mit schon gewählten Kanten bilden

## Was wollen wir erreichen?

- schnell testen ob $\{u, v\}$ Kreis schließt
- äquivalent: $u$ und $v$ liegen in der selben Komponente
- Einfügen einer Kante vereinigt zwei Komponenten
- gewünschte Operationen
  - **union**$(u, v)$: vereinige Komponenten von $u$ und $v$
  - **find**$(v)$: Komponente* von $v$
- Test ob $u$ und $v$ in der selben Komponente liegen: **find**$(u) =$ **find**$(v)$



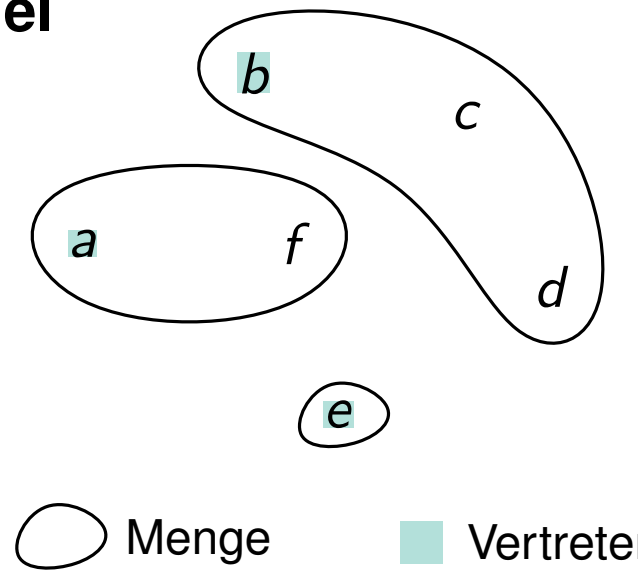

*Umsetzung: bestimme für jede Komponente einen eindeutigen Vertreter und gib diesen zurück

# Union–Find

## Etwas formaler (und ohne die Anwendung im Hinterkopf)

- Ausgangssituation: endliche Menge von disjunkten einelementigen Mengen
- Beispiel: $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}\}$
- **union**$(x, y)$: vereinige die Mengen, die $x$ und $y$ enthalten
- **find**$(x)$: liefere einen eindeutigen Vertreter der Menge, die $x$ enthält

## Beispiel




**union**$(a, f)$

**union**$(c, d)$

**find**$(a) \to a$

**find**$(f) \to a$

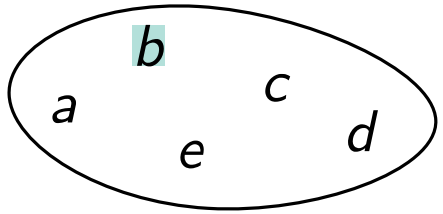
**find**$(c) \to c$

**union**$(b, d)$

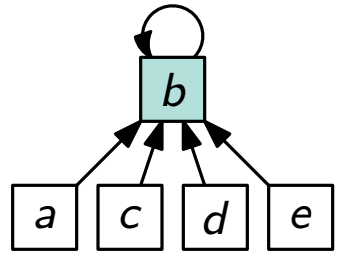
**find**$(c) \to b$

# Vorüberlegung: maximale Ordnung

## Fokus auf find: Was hätten wir gerne?




- optimal: jedes Element kennt den Vertreter der eigenen Menge
- Verzeigerte Struktur
  - jedes Element ist ein Knoten
  - jeder Knoten hat einen Zeiger zum Vertreter der Menge
- **find**: nur einen Zeiger verfolgen $\rightarrow \Theta(1)$




## Problem für union

- alle Elemente aus einer der beiden Mengen müssen umgehängt werden $\rightarrow \Theta(n)$
- maximale Ordnung aufrecht zu erhalten ist teuer

## Lösung: erlaube etwas Unordnung

- weniger Zeiger umhängen $\rightarrow$ schnelles **union**
- kein direkter Zeiger zum Vertreter $\rightarrow$ langsameres **find**
- Ziel: genug Ordnung, dass **find** weiterhin schnell ist

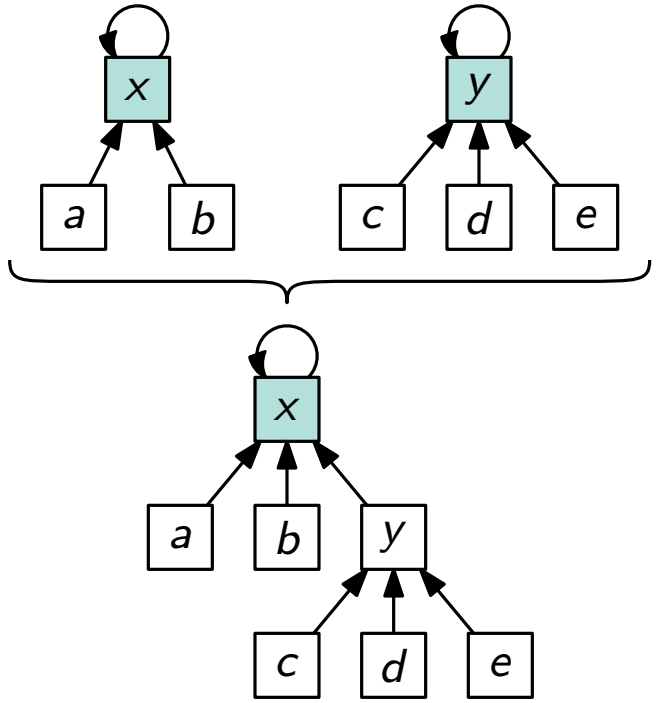
**Erinnerung: Operationen**

- **union**$(x, y)$: vereinige die Mengen, die $x$ und $y$ enthalten
- **find**$(x)$: liefere einen eindeutigen Vertreter der Menge, die $x$ enthält

# Schnelleres Union: erlaube etwas Unordnung

## Plan für schnelles union

- Situation: vereinige $X$ und $Y$ mit Vertretern $x \in X$ und $y \in Y$
- wähle $x$ als neuen Vertreter von $X \cup Y$
- neuer Zeiger: $y \to x$
- für alle anderen $y' \in Y$: behalte Zeiger zu $y$




## Mehr Aufwand für find

- verfolge ggf. mehrere Zeiger, um den Vertreter zu finden
- Hoffnung: die Pfade von Zeigern werden nicht so lang

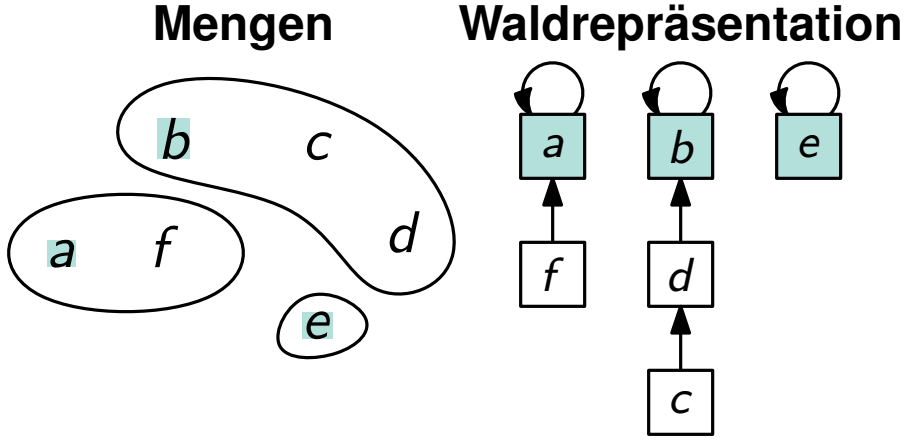
## Worst-Case Kosten und Baumhöhe

- resultierender Baum hat Höhe $h \to$ Kosten $O(h)$ pro Operation
- Plan: wähle neuen Vertreter, sodass Höhe möglichst klein

# Was genau machen wir jetzt?

## Repräsentation der Menge als gewurzelten Wald

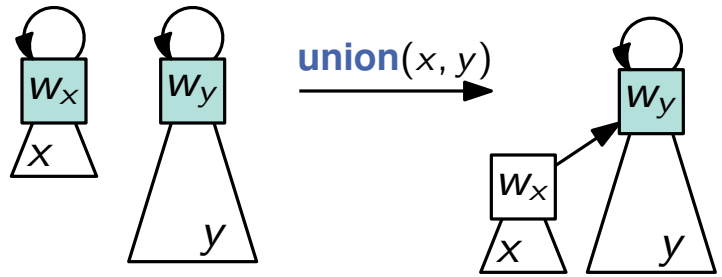
- jeder Baum gehört zu einer Menge
- Wurzel jedes Baums ist der Vertreter der Menge




**find($x$):** verfolge Zeiger zum Elter bis zur Wurzel

**union($x, y$)**

- finde zunächst Wurzeln: $w_x =$ **find**$(x)$ und $w_y =$ **find**$(y)$
- seien $h_x$ und $h_y$ die Höhen der Bäume
- o.B.d.A. $h_x \leq h_y \rightarrow$ füge $w_x$ als Kind von $w_y$ ein



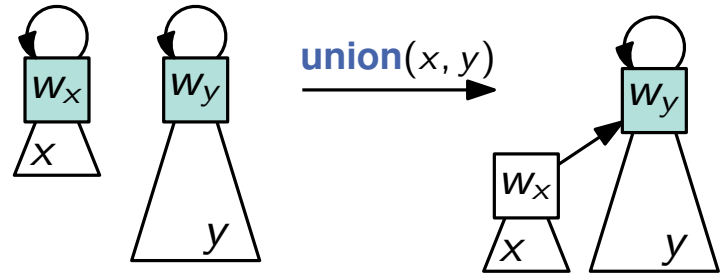

## Anmerkungen

- speichere Höhe des Baums an der Wurzel $\rightarrow$ ggf. update bei **union**
- Laufzeit: dominiert durch die Höhe bei **find**

# Höhe des Baumes

**union(*x*, *y*)**

- finde zunächst Wurzeln: $w_x = \textbf{find}(x)$ und $w_y = \textbf{find}(y)$
- seien $h_x$ und $h_y$ die Höhen der Bäume
- o.B.d.A. $h_x \leq h_y \rightarrow$ füge $w_x$ als Kind von $w_y$ ein

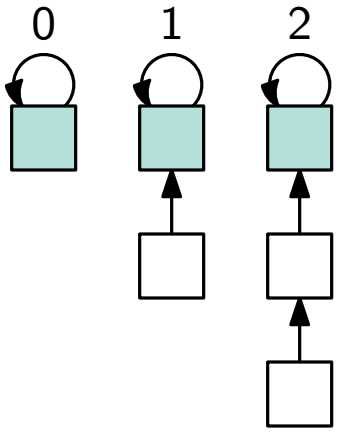



**Lemma**
Ein solcher Baum der Höhe $h$ enthält mindestens $2^h$ Knoten. Damit gilt $h \in O(\log n)$.

**Beweis:** Induktion über $h$

- Anfang: $h = 0 \Rightarrow 1 = 2^0$ Knoten
- Höhe $h + 1$ entsteht nur durch **union** zweier Bäume der Höhe $h$
- nach Induktionsvoraussetzung: mindestens $2 \cdot 2^h = 2^{h+1}$ Knoten

Höhe:



# Geht es besser?

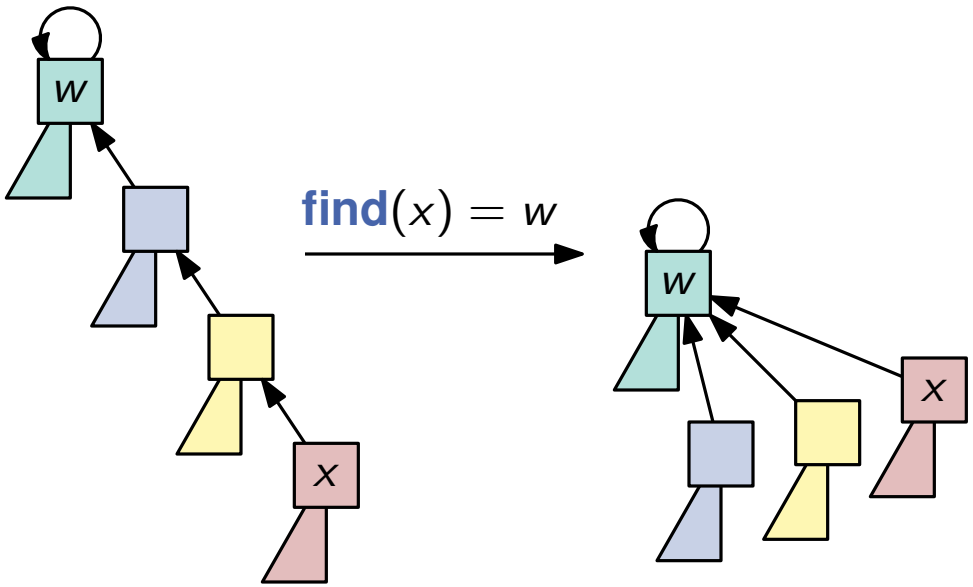
**Theorem**
Es gibt eine Union–Find Datenstruktur, bei der **union** und **find** je $O(\log n)$ Zeit benötigen.

## Idee

- Höhe verringern durch gelegentliches Aufräumen
- optimal: alle Knoten sind direkte Kinder der Wurzel
- Aufräumen $\equiv$ Knoten direkt an die Wurzel hängen

## find($x$) mit Pfadkompression

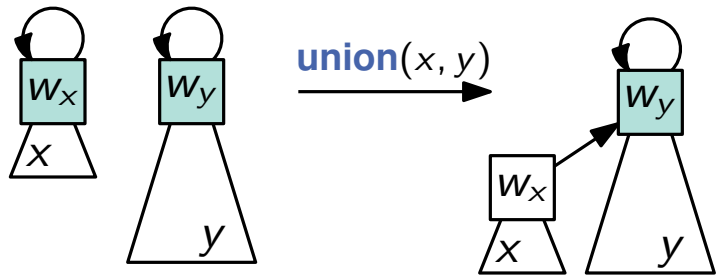
- sei $\pi$ der Pfad von $x$ zur Wurzel $w$
- hänge jeden Knoten auf $\pi$ direkt an $w$
- asymptotisch keine zusätzlichen Kosten für **find**($x$)
- aber: spätere Aufrufe von **find** ggf. schneller



# Union by Rank

## Problem

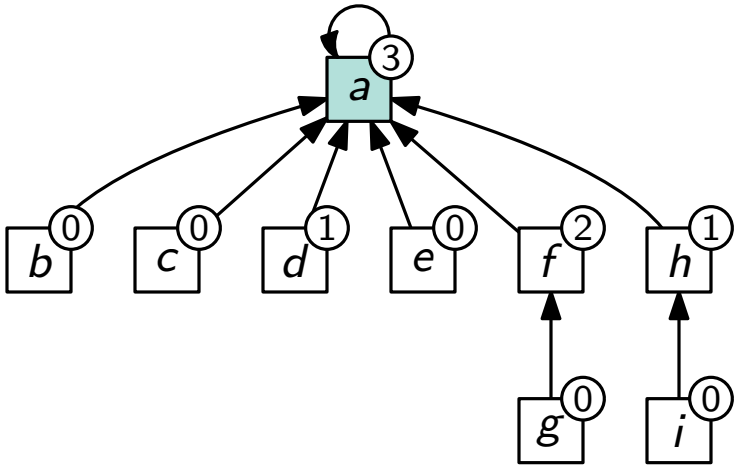
- Pfadkompression verringert ggf. die Höhe des Baumes, ohne dass wir es merken
- bei späteren **union** Operationen kennen wir ggf. nicht die korrekte Höhe
- **union** nutzt die Höhe um zu entscheiden, welcher Baum unter welchen gehängt wird




## Gar nicht schlimm

- nenne die in der Wurzel gespeicherte Zahl nicht Höhe, sondern **Rang**
- **union** wie bisher: hänge Wurzel mit kleinerem Rang an Wurzel mit größerem Rang
- es gilt weiterhin: Teilbaum unter Wurzel $w$ mit Rang $r$ hat mindestens $2^r$ Knoten
- außerdem: Teilbaum unter einem Knoten mit Rang $r$ hat höchstens Höhe $r$

# Beispiel




## Operationen

**union**$(a, b)$
**union**$(b, c)$
**union**$(d, e)$
**union**$(f, g)$
**union**$(h, i)$
**union**$(a, d)$
**union**$(f, h)$
**find**$(e)$
**union**$(a, f)$
**find**$(h)$

## Tiebreaker

- **union** zwei Wurzeln mit gleichem Rang
- wähle alphabetisch kleineren Knoten als Wurzel

# Laufzeitanalyse: Grundlegende Invarianten

**Lemma**
Jeder Knoten hat einen größeren Rang als jedes seiner Kinder.

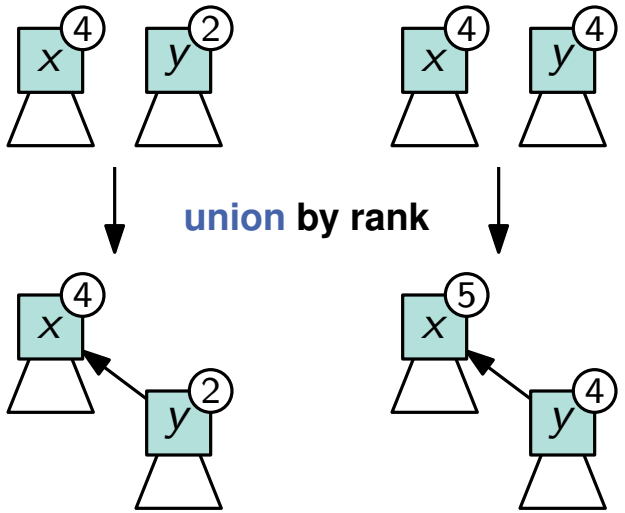
**Lemma**
Es gibt höchstens $n/2^r$ Knoten mit Rang gleich $r$.

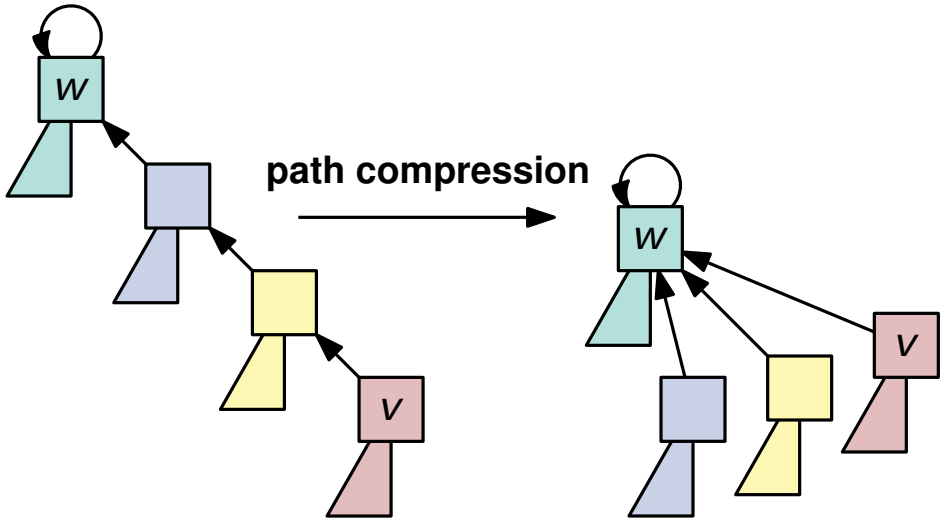
**Lemma**
Es gibt höchstens $n/2^r$ Knoten mit Rang größer $r$.

**Beweis**

- bilde Summe über alle größeren Ränge:

$$\sum_{i>r} \frac{n}{2^i} \leq 2 \cdot \frac{n}{2^{r+1}} = \frac{n}{2^r}$$

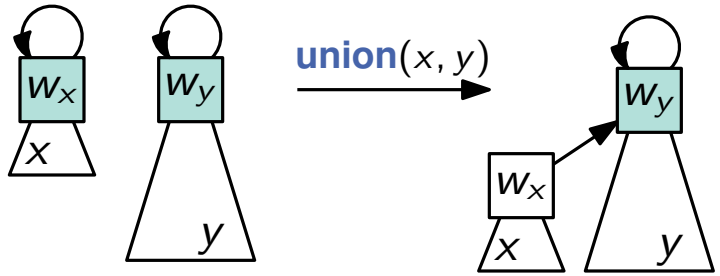


# Laufzeitanalyse: neue Operation link

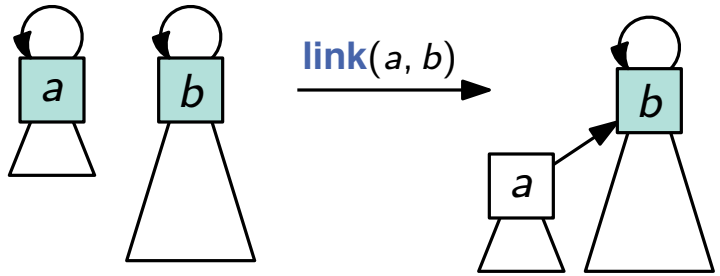
## Die drei Schritte von union$(x, y)$

- $w_x = \textbf{find}(x)$
- $w_y = \textbf{find}(y)$
- hänge $w_x$ unter $w_y$ oder umgekehrt




## Neue Operation: link

- genauso wie **union**, aber nur für Wurzeln
- die beiden **find** Operationen fallen dann weg



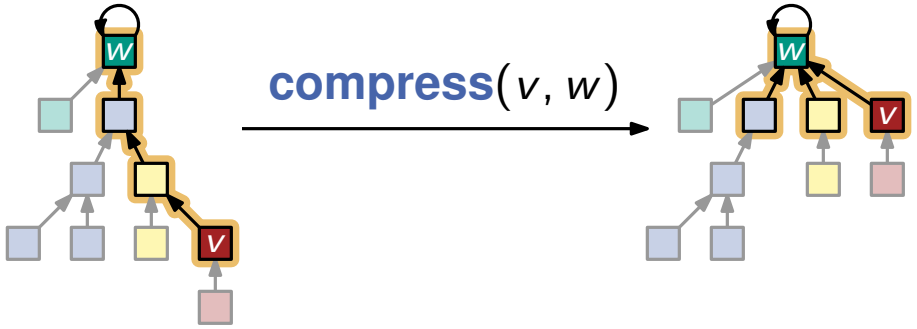

## Warum machen wir das?

- Plan: analysiere Kosten für **union** und **find** getrennt voneinander
- Problem: lässt sich kaum trennen, wenn jedes **union** zwei Mal **find** ausführt
- Lösung: ersetze Sequenz von $n$ **union** und $m$ **find** durch $n$ **link** und $2n + m$ **find**

# Laufzeitanalyse: neue Operation compress

## Die zwei Schritte von find($v$)

- Finden der Wurzel $w$
- Kompression des Pfades von $v$ nach $w \rightarrow$ bezeichne diesen Schritt mit **compress**$(v, w)$




**Grundsätzliches Vorgehen**

- Ziel: Analysiere Laufzeit von Algo $A$
- analysiere stattdessen einen anderen Algo $B$
- zeige: Laufzeit von $A$ ist nicht größer als die von $B$
- damit: Laufzeit von $B$ gibt Schranke an Laufzeit von $A$

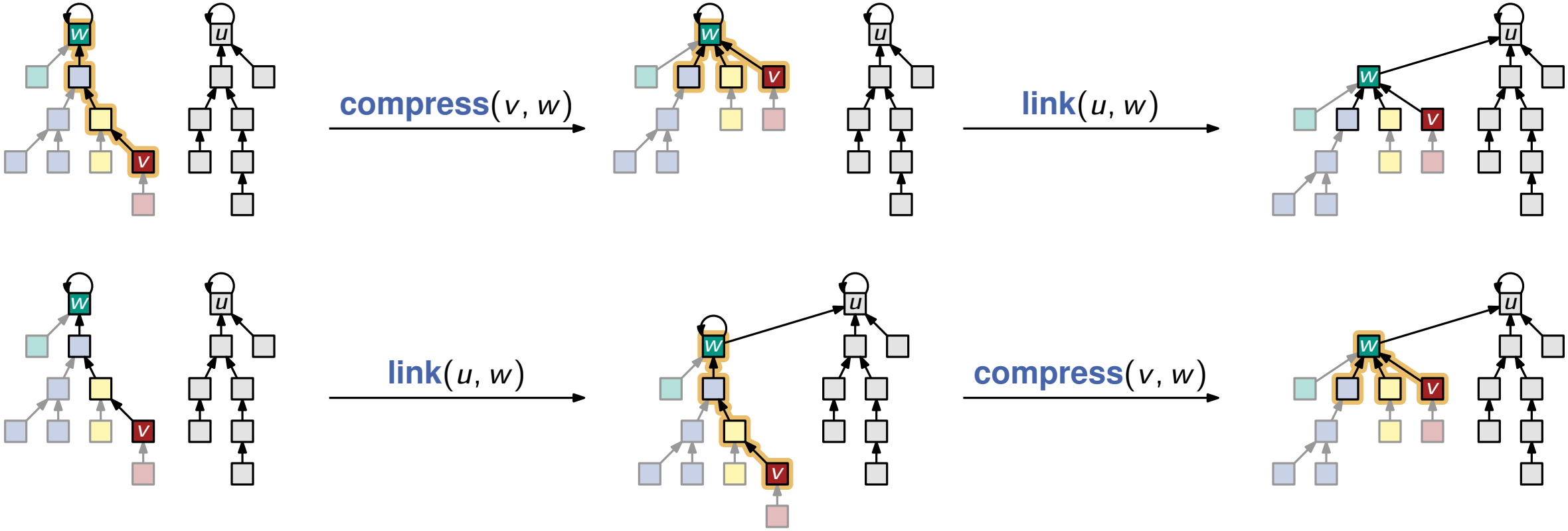
## Betrachte compress statt find

- ersetze in Folge von **link** und **find** Operationen jedes **find** durch passendes **compress**
- beachte: resultierende Folge liefert zu jedem Zeitpunkt die selbe Datenstruktur
- außerdem: asymptotische Laufzeit bleibt gleich
- gleich: sortiere **compress** nach hinten

# Laufzeitanalyse: Umsortieren der Operationen

## Tausche compress nach hinten

- Ergebnis und Laufzeit werden durch den Tausch nicht geändert
- wir können annehmen: zunächst alle **link** und dann alle **compress** Operationen



# Laufzeitanalyse: Zwischenstand

## Umbau der Folge von Operationen

- eigentlich: $n$ **union** und $m$ **find** in beliebiger Reihenfolge
- stattdessen: $n$ **link** gefolgt von $2n + m$ **compress**

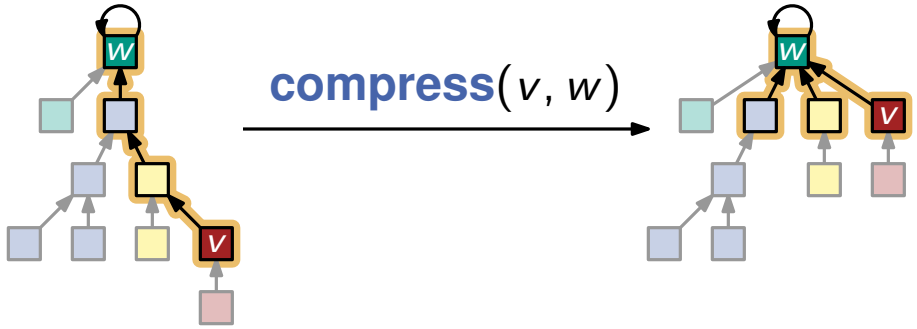
} machen sehr unterschiedliche Dinge, aber: selbe asymptotische Laufzeit

## Die $n$ link Operationen

- **link** läuft in Konstanter Zeit $\rightarrow \Theta(n)$
- Ergebnis: Wald mit höchstens $N = 2n$ nicht-isolierten Knoten

## Was wir noch tun müssen

- analysiere $M = 2n + m$ **compress** Operationen auf einem Wald mit $N$ Knoten




## Invarianten für die Ränge der Knoten

**Lemma**
Jeder Knoten hat einen größeren Rang als jedes seiner Kinder.

**Lemma**
Es gibt höchstens $N/2^r$ Knoten mit Rang größer $r$.

# Laufzeitanalyse: Einteilung in Ranggruppen

## Gruppen von Rängen

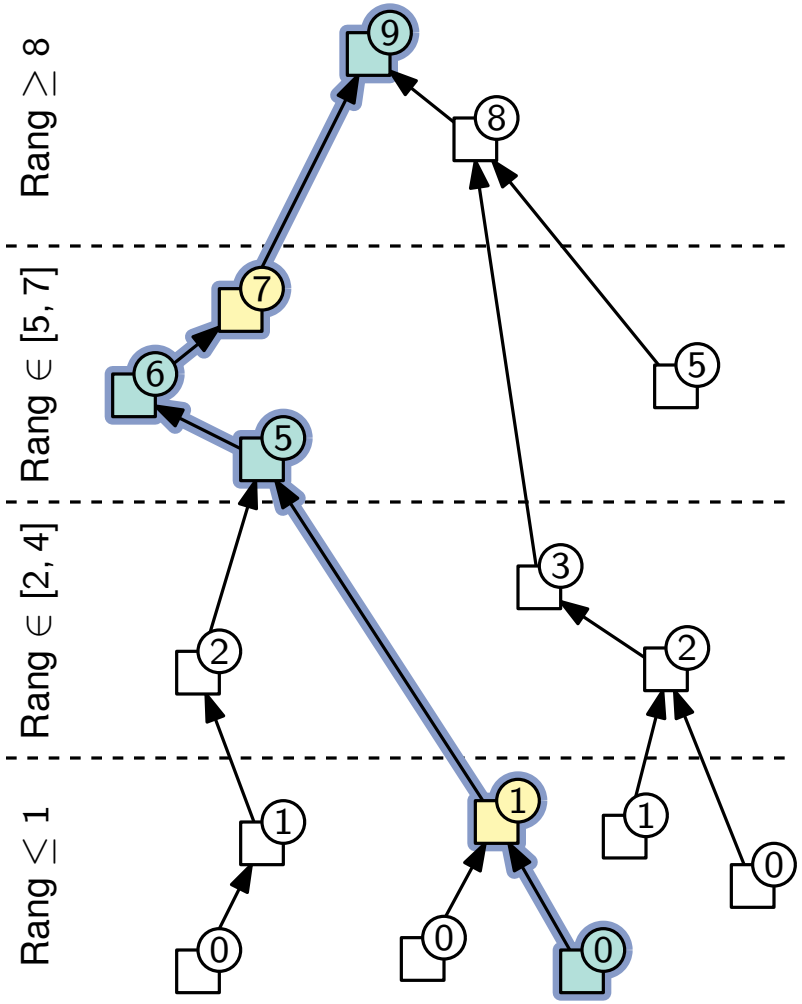
- gruppiere Knoten nach ihrem Rang in $k$ Gruppen
- zwei Typen von Knoten bei einem **compress**-Pfad
  - Typ 1: Elter ist in der selben Gruppe
  - Typ 2: Elter ist in einer höheren Gruppe

## Wie oft hängen wir Typ 2 Knoten um?

- höchstens $k$ Typ 2 Knoten pro **compress**
- $M$ mal **compress** $\rightarrow$ insgesamt $O(kM)$ Zeit

## Wie oft hängen wir Typ 1 Knoten um?

- betrachte beliebigen Knoten $v$
- $v$ wird umgehängt $\rightarrow$ neuer Elter hat größeren Rang
- kleiner Bereich von Rängen pro Gruppe
  $\rightarrow$ $v$ kann nicht oft Typ 1 sein bevor $v$ Typ 2 wird



# Laufzeitanalyse: Type 1 Operationen

**Lemma**
Sei Gruppe $i$ die Menge aller Knoten mit Rang in $(r_i, r_{i-1}]$ für $r_0 > r_1 > \cdots > r_k$. In jeder Folge von **compress** Operationen werden insgesamt höchstens $N \cdot \frac{r_{i-1}}{2^{r_i}}$ Knoten aus Gruppe $i$ von Typ 1 umgehängt.

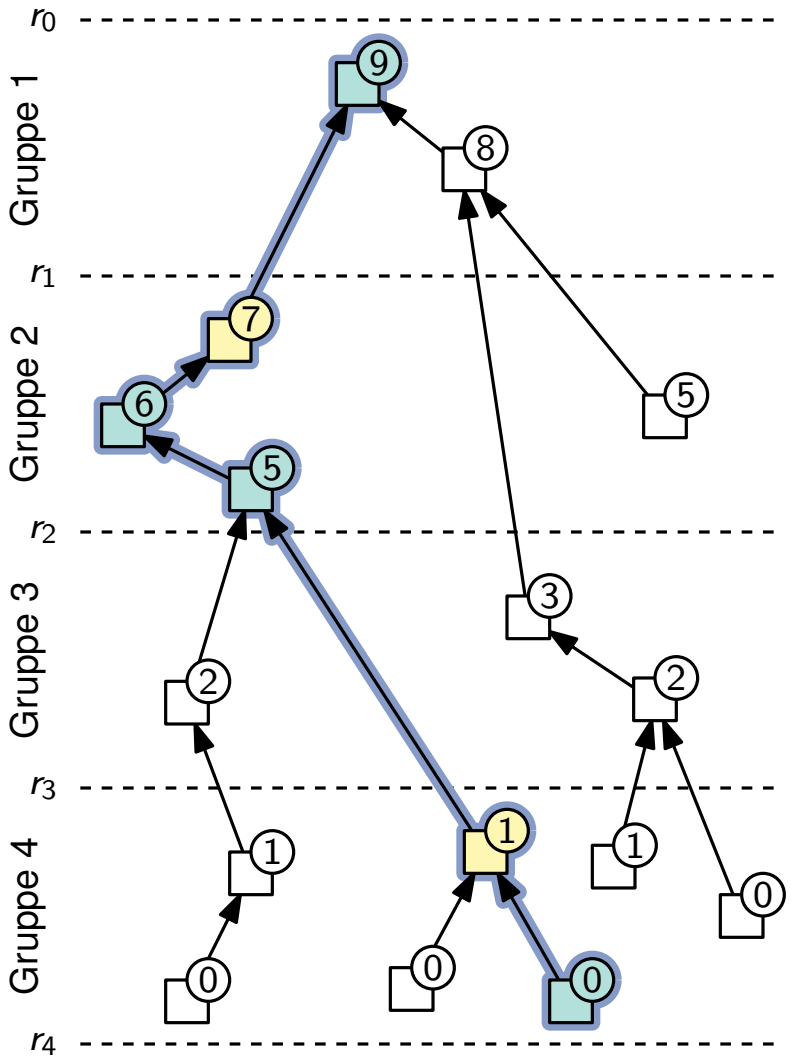
**Beweis**

**Lemma**
Jeder Knoten hat einen größeren Rang als jedes seiner Kinder.

- $v$ wird umgehängt $\rightarrow$ neuer Elter hat größeren Rang
- jeder Knoten in Gruppe $i$ ist höchstens $r_{i-1}$ mal Typ 1

**Lemma**
Es gibt höchstens $N/2^r$ Knoten mit Rang größer $r$.

- jeder Knoten in Gruppe $i$ hat Rang größer $r_i$
- davon gibt es höchstens $N/2^{r_i}$ viele



# Laufzeitanalyse: Wahl der Gruppen

**Lemma**
Es werden insgesamt höchstens $N \cdot \frac{r_{i-1}}{2^{r_i}}$ Knoten aus Gruppe $i$ von Typ 1 umgehängt.
($N$: Anzahl Knoten)

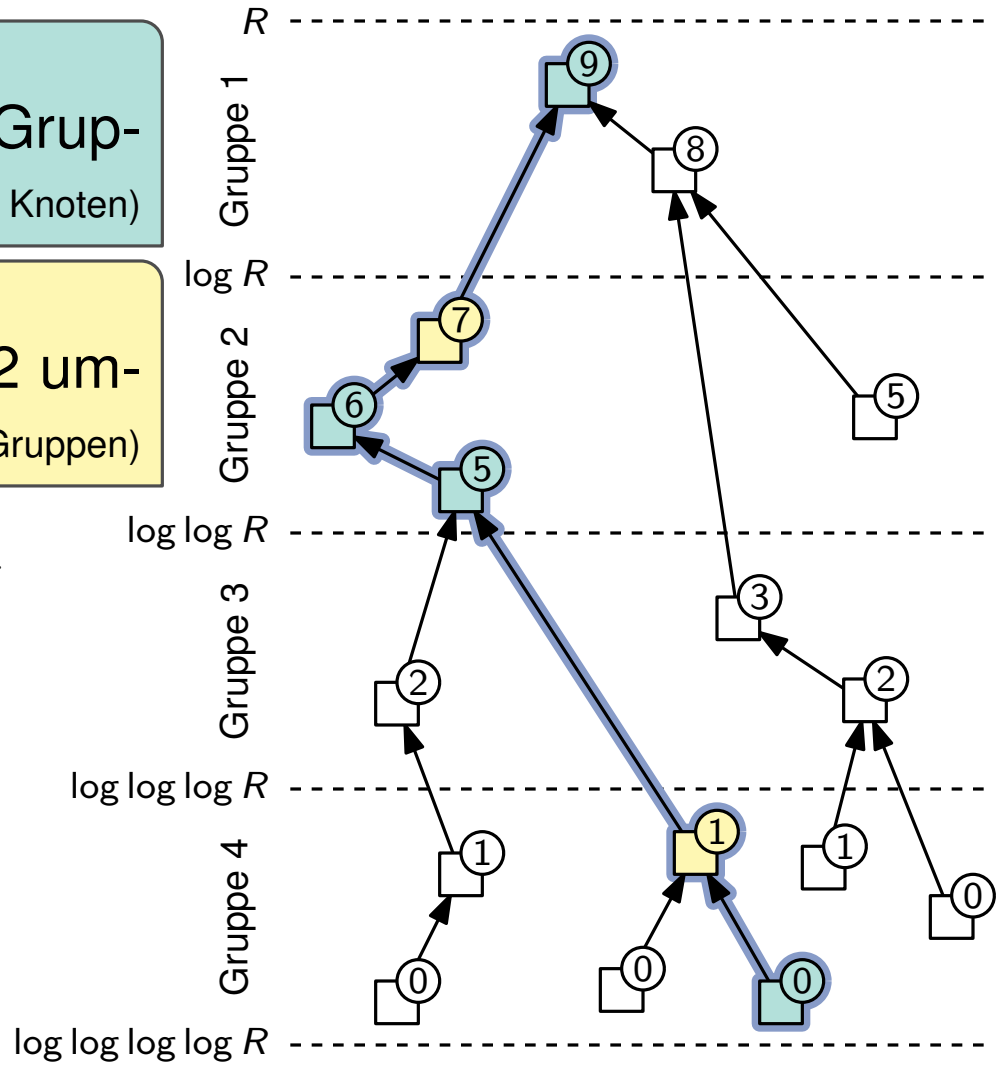
**Lemma**
Es werden insgesamt nur $O(kM)$ Knoten von Typ 2 umgehängt.
($M$: Anzahl **compress** Operationen, $k$: Anzahl Gruppen)

**Wähle: $r_0 = R$ (maximaler Rang) und $r_i = \log r_{i-1}$**

- dann: Kosten für Typ 1 in Gruppe $i$ in $O(N)$
- Typ 1 insgesamt: $O(kN)$

**Wie viele Gruppen bekommen wir dann?**

- Nach wie vielen log ist das Ergebnis $\leq 1$?
- diese Anzahl heißt **iterierten Logarithmus** $\log^* R$
- beachte: $R \in O(\log N)$



# Laufzeitanalyse

**Folgerung**
Eine Folge von $M$ **compress** Operationen in einem Wald mit $N$ Knoten benötigt nur $O((N+M)\log^* N)$ Umhängeoperationen.

**Zurück zu union und find**

- was wir analysieren wollten: $n$ **union** und $m$ **find** Operationen
- was wir analysiert haben:
  - $n$ **link** $\rightarrow$ liefert Wald mit höchstens $N = 2n$ Knoten in $\Theta(n)$ Zeit
  - $M = 2n + m$ **compress** auf Wald mit $N$ Knoten in $O((N+M)\log^* N)$
- wir wissen: **union**, **find**-Folge hat gleiche Laufzeit wie **link**, **compress**-Folge

**Theorem**
Eine beliebige Folge von $n$ **union** und $m$ **find** Operationen mit Union-by-Rank und Pfadkompression benötigt $O((n+m)\log^* n)$ Zeit. Also amortisiert $O(\log^* n)$ pro Operation.

# Wie cool ist das denn?

**Theorem**
Eine beliebige Folge von $n$ **union** und $m$ **find** Operationen mit Union-by-Rank und Pfadkompression benötigt $O((n+m)\log^* n)$ Zeit. Also amortisiert $O(\log^* n)$ pro Operation.

## Wie schnell wächst $\log^*(n)$?

- betrachte Potenzturm der Höhe $k$: $n = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}$
- dann gilt: $\log^* n = k$
- mit größer werdendem $k$ wächst $n$ extrem schnell
  $\rightarrow$ mit größer werdendem $n$ wächst $\log^* n$ extrem langsam

## Zum Vergleich

- für $n \in (65\,536, 2^{65\,536}]$ gilt $\log^* n = 5$ und $\log n \in (16, 65\,536]$
- $2^{65\,536} > 10^{19\,728}$
- das beobachtbare Universum hat zwischen $10^{78}$ und $10^{82}$ Atome

# Zusammenfassung

## Union–Find

- sehr nützliche Datenstruktur
- in vielen Programmiersprachen (z.B. C++, Java) nicht Teil des Standards
- aber: nicht so schwer selbst zu implementieren (Analyse kompliziert, Algo selbst leicht)

## Laufzeitanalyse

- spannende Technik: baue den Algorithmus zum Zweck der Analyse um
- der analysierte Algo macht ggf. gar nicht das gewünschte oder ist nicht umsetzbar
- aber: die Analyse des anderen Algos liefert trotzdem Schranke für den eigentlichen Algo

## Ausblick: Da geht noch was

- kann verbessert werden auf amortisierte Laufzeit $\Theta(\alpha(n))$ pro Operation (das ist tight)
- $\alpha(n)$: inverse Ackermannfunktion
- $\alpha(n)$ wächst noch langsamer als $\log^* n$