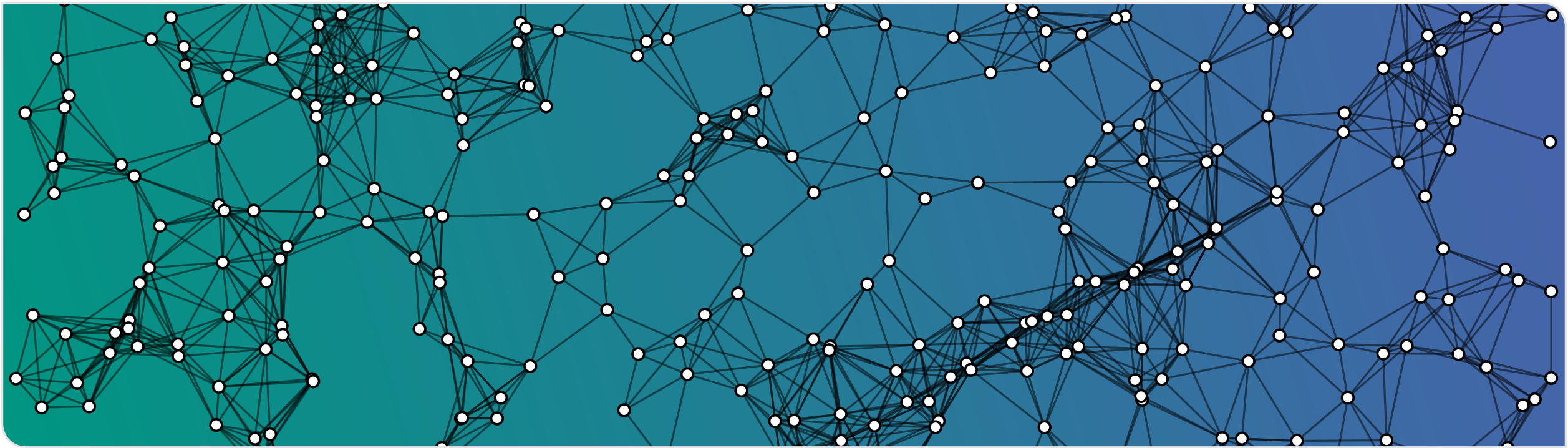
Karlsruher Institut für Technologie

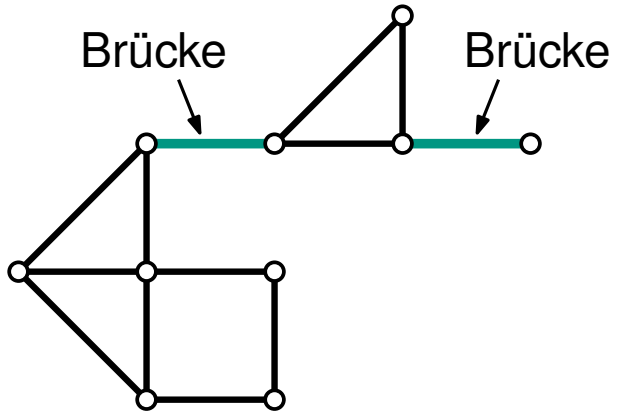
Algorithmen 1

Tiefensuche: Brücken finden



Brücken in Graphen

Definition
Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Kante $e = \{u, v\} \in E$ heißt **Brücke**, wenn u und v in $G - e$ in verschiedenen Zusammenhangskomponenten liegen.



Ziel heute

- finde alle Brücken
- lerne dabei die Tiefensuche (DFS) besser kennen

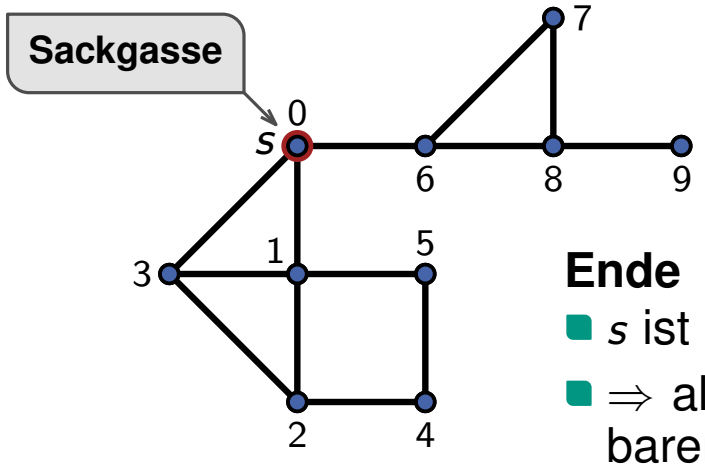
Warum interessieren uns Brücken?

- interessante graphtheoretische Struktur $\rightarrow$ kleinstmögliche Schnitte
- zerlegt den Graphen in mehrere Komponenten $\rightarrow$ gut für Teile und Herrsche

Erinnerung: Graphtraversierung

Tiefensuche (DFS)

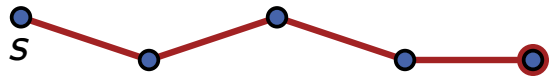
- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



Ende

- s ist Sackgasse
- $\Rightarrow$ alle von s erreichbaren Knoten gefärbt

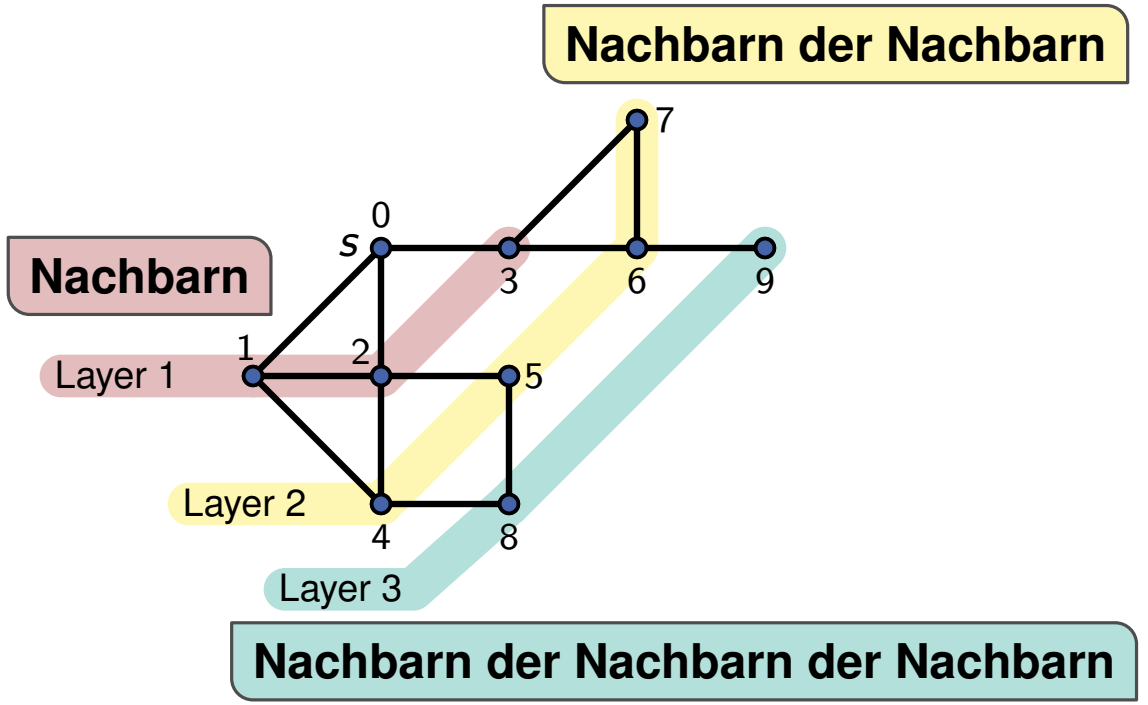
- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten



Pfad zum aktuellen Knoten

Breitensuche (BFS)

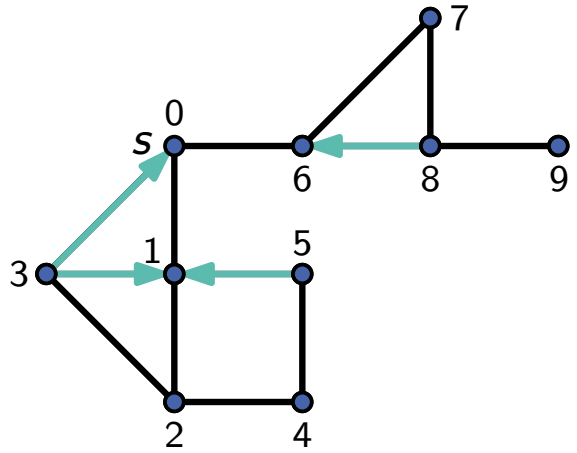
- starte bei einem Knoten s
- besuche alle Nachbarn von s
- dann alle Nachbarn der Nachbarn usw.



DFS-Baum

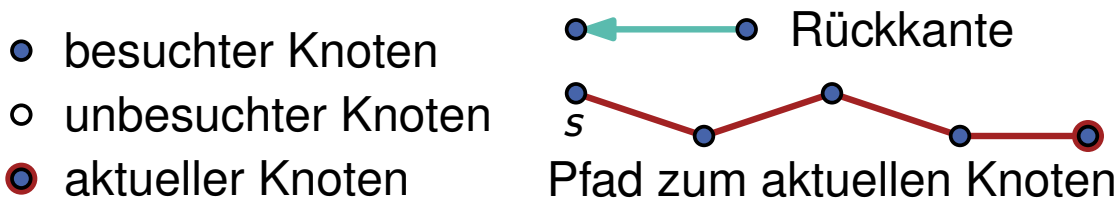
Beobachtung

- beim Explorieren eines Knotens überspringen wir Kanten zu schon besuchten Knoten
- wir nennen sie auch **Rückkanten**
- nicht-übersprungene Kanten bilden einen Baum → **Baumkanten**



Anmerkung: Rückkanten

- zeigen immer zu einem Vorgänger im DFS-Baum
- englisch: back edge
- gerichtete Graphen: weitere Kantentypen



Charakterisierung von Brücken via DFS-Baum

Brücken und Bäume

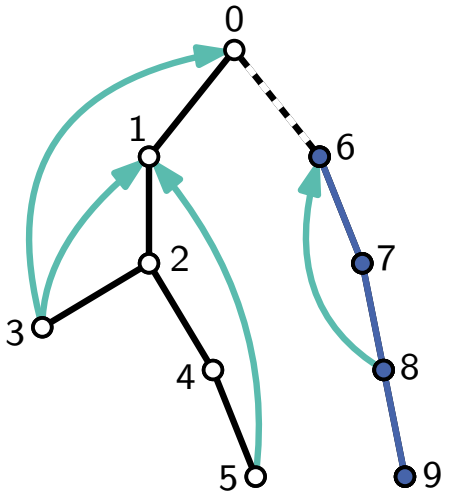
- in einem Baum ist jede Kante eine Brücke
- die Rückkanten sind entscheidend

Anmerkung: Notation

- Knoten sind hier mit ihrer DFS-Nummer bezeichnet
- Rückkanten sehen wir als gerichtet an

Beispiel: Warum ist $\{0, 6\}$ eine Brücke?

- löschen von $\{0, 6\}$ trennt im DFS-Baum den Teilbaum unter 6 vom Rest ab
- es gibt keine Rückkante aus dem Teilbaum zu einem Vorgänger von 6
- man erreicht insbesondere nicht mehr die Wurzel (0)



Wann ist eine Baumkante $\{u, v\}$ eine Brücke?

- sei u der Elter und v das Kind
- $\{u, v\}$ ist Brücke $\Leftrightarrow$ keine Rückkante aus dem Teilbaum unter v nach oberhalb von v

Außerdem: Rückkanten sind nie Brücken

Beweis der strukturellen Einsicht

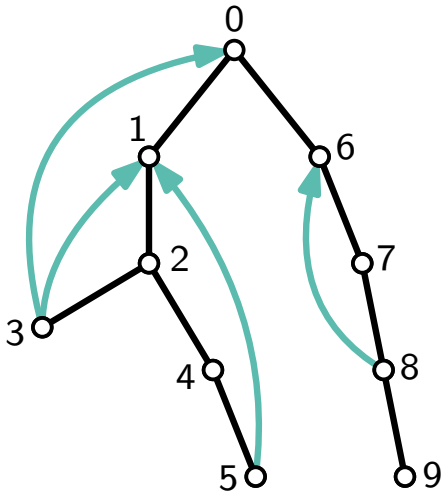
Theorem **(strukturell)**

Eine Kante $\{u, v\}$ ist genau dann eine Brücke, wenn

- $\{u, v\}$ ist eine Baumkante mit Elter u und Kind v und (1)
- keine Rückkante aus dem Teilbaum unter v endet oberhalb von v. (2)

Grober Plan: Fallunterscheidung

- Fall 1: $\{u, v\}$ ist eine Rückkante $\Rightarrow$ keine Brücke
- Fall 2: $\{u, v\}$ ist eine Baumkante $\Rightarrow$ $\big[$Brücke $\Leftrightarrow$ (2) gilt$\big]$
  - Fall 2.1: (2) gilt nicht (es gibt Rückkante) $\Rightarrow$ keine Brücke
  - Fall 2.2: (2) gilt (es gibt keine Rückkante) $\Rightarrow$ Brücke



Beachte

- die Fallunterscheidung deckt alle Fälle ab
- zeige: in jedem Fall ist die Aussage des Theorems erfüllt

Beweis der strukturellen Einsicht

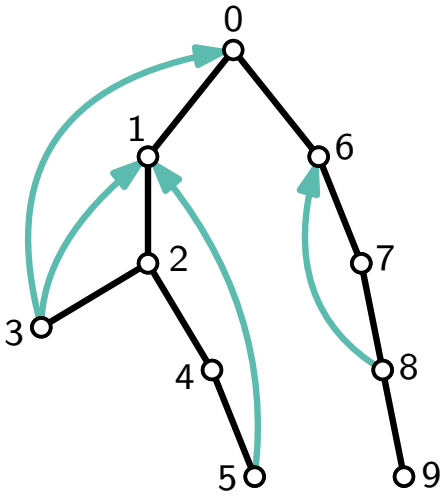
Theorem **(strukturell)**

Eine Kante $\{u, v\}$ ist genau dann eine Brücke, wenn

- $\{u, v\}$ ist eine Baumkante mit Elter u und Kind v und (1)
- keine Rückkante aus dem Teilbaum unter v endet oberhalb von v. (2)

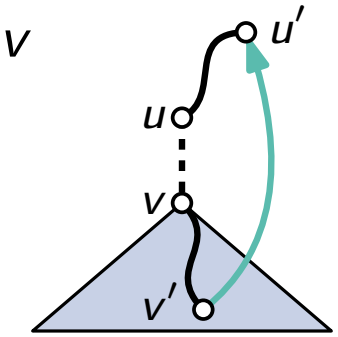
Zeige für Fall 1: $\{u, v\}$ ist eine Rückkante $\Rightarrow$ keine Brücke

- es gibt einen Pfad zwischen u und v im DFS-Baum
- u und v bleiben in der selben Komponente, wenn man $\{u, v\}$ löscht



Zeige für Fall 2.1: (2) gilt nicht (es gibt Rückkante) $\Rightarrow$ keine Brücke

- sei $\{v', u'\}$ die Rückkante, sodass v' im Teilbaum von v und u' über v liegt
- (Baumpfad $v, \ldots, v'$) + $\{v', u'\}$ + (Baumpfad $u', \ldots, u$) $\Rightarrow$ u und v bleiben in der selben Komponente



Beweis der strukturellen Einsicht

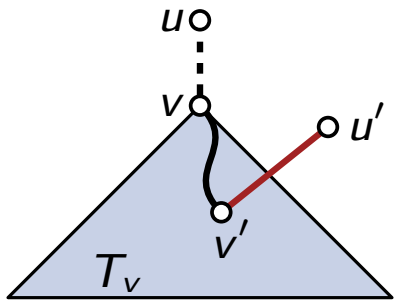
Theorem **(strukturell)**

Eine Kante $\{u, v\}$ ist genau dann eine Brücke, wenn

- $\{u, v\}$ ist eine Baumkante mit Elter u und Kind v und (1)
- keine Rückkante aus dem Teilbaum unter v endet oberhalb von v. (2)

Zeige für Fall 2.2: (2) gilt (es gibt keine Rückkante) $\Rightarrow$ Brücke

- sei $T_v = (V_v, E_v)$ der Teilbaum unter v (inklusive v)
- $\{u, v\}$ ist die einzige Kante zwischen T_v und Knoten außerhalb, denn:
  - angenommen es gibt weitere Kante $\{u', v'\}$ mit $v' \in V_v$ und $u' \notin V_v$
  - $\{u', v'\}$ ist keine Baumkante, sonst wäre u' in T_v
  - $\{u', v'\}$ ist also Rückkante und u' ist Vorgänger von v' im DFS-Baum
  - da $u' \notin V_v$ muss u' auch oberhalb von v liegen $\Rightarrow$ (2) gilt nicht
- $\{u, v\}$ löschen trennt T_v vom Rest des Graphen $\Rightarrow$ $\{u, v\}$ ist Brücke



Von der strukturellen zur algorithmischen Sichtweise

Theorem **(strukturell)**

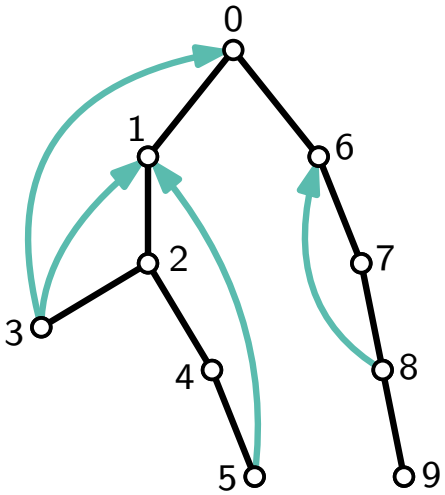
Eine Kante $\{u, v\}$ ist genau dann eine Brücke, wenn

- $\{u, v\}$ ist eine Baumkante mit Elter u und Kind v und (1)
- keine Rückkante aus dem Teilbaum unter v endet oberhalb von v. (2)

Algorithmische Sichtweise

- (1) ist leicht zu überprüfen für eine Kante $\{u, v\}$
- Problem bei (2): den ganzen Teilbaum unter v anschauen ist teuer

  (linear in der Größe des Teilbaums $\rightarrow$ potentiell quadratisch insgesamt)



Plan im Folgenden

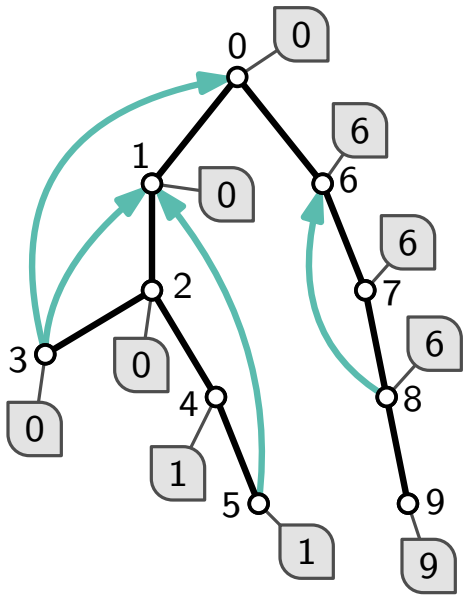
- definiere einen Wert $\text{low}(v)$ für jeden Knoten v
- sodass man an $\text{low}(v)$ ablesen kann, ob (2) für v erfüllt ist
- berechne diese $\text{low}(v)$ während der DFS gleich mit

Algorithmische Umsetzung

Definition
Sei **low(v)** das Minimum aus der DFS-Nummer von v und der kleinsten DFS-Nummer, die man von einem Knoten im Teilbaum unter v mit einer Rückkante erreichen kann.

Wann ist eine Baumkante $\{u, v\}$ eine Brücke?

- keine Rückkante (2) $\Rightarrow \text{low}(v) = \text{DFS-Nummer von } v$
- Rückkante (nicht 2) $\Rightarrow \text{low}(v) < \text{DFS-Nummer von } v$
- also: $\{u, v\}$ ist Brücke $\Leftrightarrow \text{low}(v) = \text{DFS-Nummer von } v$



Wie berechnen wir low(v)?

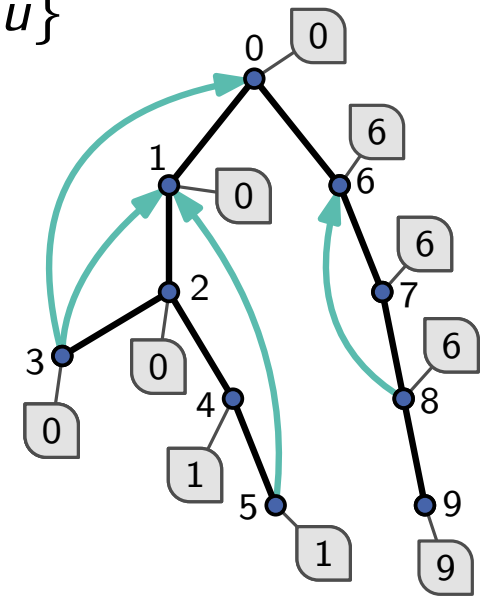
- können wir on-the-fly bei der DFS erledigen
- grob: $\text{low}(v)$ ergibt sich aus
  - der DFS-Nummer von v
  - den Rückkanten von v
  - den Werten $\text{low}(u_1), \ldots, \text{low}(u_k)$ der Kinder $u_1, \ldots, u_k$ von v

Berechnung von low(v)

Definition
Sei **low(v)** das Minimum aus der DFS-Nummer von v und der kleinsten DFS-Nummer, die man von einem Knoten im Teilbaum unter v mit einer Rückkante erreichen kann.

Situationen in denen wir low(v) anpassen

- v das erste Mal gesehen: $\text{low}(v) := \text{DFS-Nummer von } v$
- Rückkante $\{v, u\}$ gefunden: $\text{low}(v) := \min\{\text{low}(v), \text{DFS-Nummer von } u\}$
- backtracken von einem Kind u von v: $\text{low}(v) := \min\{\text{low}(v), \text{low}(u)\}$



Korrektheit

- zeige: wenn man von v zum Elter backtrackt, dann ist low(v) korrekt
- strukturelle Induktion:
  - es gilt für die Blätter (Anfang)
  - angenommen es gilt für die Kinder von v (Voraussetzung)
  - dann gilt es auch für v (Schritt)

Algorithmus → Rekursive Implementierung

Erinnerung: Situationen in denen wir low[v] anpassen

- v das erste Mal gesehen: $\text{low}[v] := \text{dfs}[v]$
- Rückkante $\{v, u\}$: $\text{low}[v] := \min\{\text{low}[v], \text{dfs}[u]\}$
- backtracken von Kind u zu v: $\text{low}[v] := \min\{\text{low}[v], \text{low}[u]\}$

```
DFS(Graph G, Node v, Node p)
    dfs[v] := next_dfs
    next_dfs := next_dfs + 1
    low[v] := dfs[v]
    for Node u in N(v) do
        if u = p then continue
        if dfs[u] = ∞ then
            DFS(G, u, v)
            low[v] = min{low[v], low[u]}
        else
            low[v] = min{low[v], dfs[u]}
```

← erster Besuch bei v

← Achtung: wir müssen u überspringen, wenn u der Elter von v ist
(sonst interpretieren wir die Baumkante von u nach v als Rückkante von v nach u)

← DFS für Kind u fertig → backtracken von u zu v

← Nachbar u vorher schon gesehen → Rückkante

Algorithmus → Implementierung

Anmerkung zur Umsetzung in (Pseudo)code

- zwei Varianten
  - rekursiv: jeder Knoten ruft DFS für alle seine Kinder auf
  - iterativ: ohne rekursive Aufrufe

Rekursive Implementierung

- schön einfach
- backtracking passiert quasi automatisch
- Problem: möglicherweise tiefe Rekursion → verbraucht viel Stack-Speicher
- Stack-Speicher ist statisch alloziert → wenn der voll ist bricht das Programm ab (stack overflow)

Iterative Implementierung

- umständlich, wenn man beim Backtracken etwas tun möchte
- man muss sich dann im Prinzip den Rekursionsbaum manuell mitverwalten
- Vorteil: verbraucht hauptsächlich (dynamisch allozierten) Heap-Speicher

Zusammenfassung & Ausblick

DFS – Tiefensuche

- sehr grundlegender Algorithmus zur Graphtraversierung
- Basis für das Lösen vieler verschiedener Probleme
- zwei wichtige Zeitpunkte:
  - entdecken eines Knotens
  - backtracken von einem Kind zum Elter

Ein bisschen Graphentheorie

- Brücken in Graphen
- strukturelle Einsicht $\rightarrow$ effizienter Algorithmus

Nächstes Mal

- mehr DFS auf gerichteten Graphen
- Wie zieht man sich richtig an?