

Algorithmen 1

Prioritätswarteschlange: binärer Heap



Erinnerung: Priority-Queue für Dijkstra

Dijkstras Algorithmus (Berechnung kürzester Wege)

- pro Schritt: finde unexplorierten Knoten mit kleinster aktuell bekannter Distanz
- gewünschte Datenstruktur: Priority-Queue
 - **push**($v, 7$): füge v mit Priorität 7 ein
 - **popMin**(): extrahiere Element mit kleinster Priorität
 - **decPrio**($v, 4$): verkleinere Priorität von v auf 4

Erinnerung: Priority-Queue für Dijkstra

Dijkstras Algorithmus (Berechnung kürzester Wege)

- pro Schritt: finde unexplorierten Knoten mit kleinster aktuell bekannter Distanz
- gewünschte Datenstruktur: Priority-Queue
 - **push**($v, 7$): füge v mit Priorität 7 ein
 - **popMin**(): extrahiere Element mit kleinster Priorität
 - **decPrio**($v, 4$): verkleinere Priorität von v auf 4

Anmerkung

- Priorität wird oft auch **Schlüssel (key)** genannt
- weitere gängige Namen für die Operationen: **insert**, **extractMin**, **decreaseKey**

Erinnerung: Priority-Queue für Dijkstra

Dijkstras Algorithmus (Berechnung kürzester Wege)

- pro Schritt: finde unexplorierten Knoten mit kleinster aktuell bekannter Distanz
- gewünschte Datenstruktur: Priority-Queue
 - **push**($v, 7$): füge v mit Priorität 7 ein
 - **popMin**(): extrahiere Element mit kleinster Priorität
 - **decPrio**($v, 4$): verkleinere Priorität von v auf 4

Anmerkung

- Priorität wird oft auch **Schlüssel (key)** genannt
- weitere gängige Namen für die Operationen: **insert**, **extractMin**, **decreaseKey**

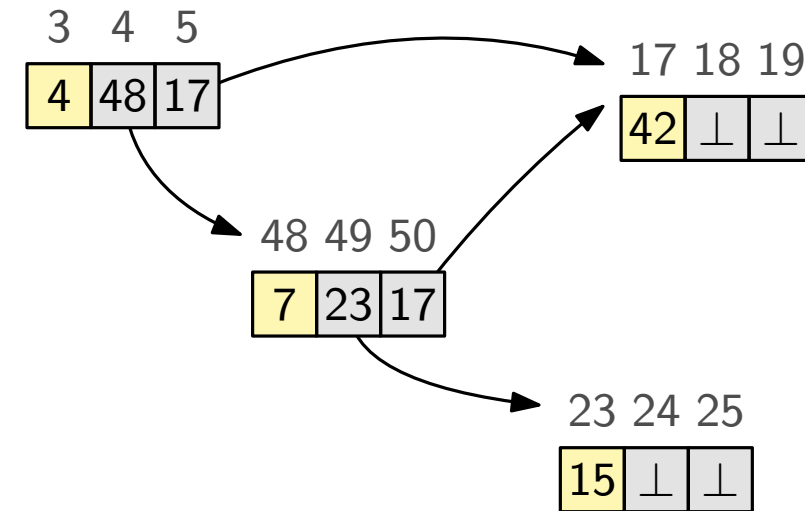
Ziel für heute

- Datenstruktur entwickeln, die diese Operationen unterstützt
- jede Operation sollte schnell sein ($O(\log n)$)
- zunächst: nur **push** und **popMin**

Erinnerung und Anmerkung: Verzeigerte Strukturen

Verzeigerte Strukturen

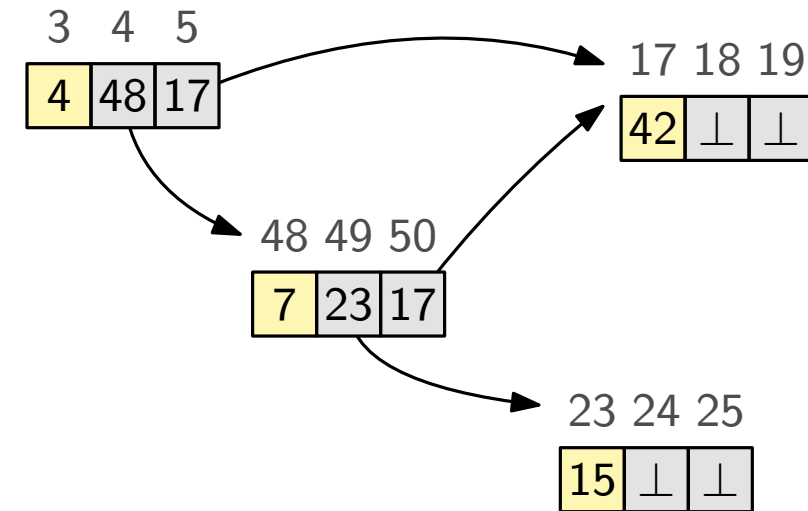
- viele kleine Stückchen Speicher (Knoten)
- ein Knoten speichert:
 - Daten, die uns tatsächlich interessieren
 - Speicheradressen anderer Knoten (Zeiger)
- Zugriff durch Navigation entlang Zeiger



Erinnerung und Anmerkung: Verzeigerte Strukturen

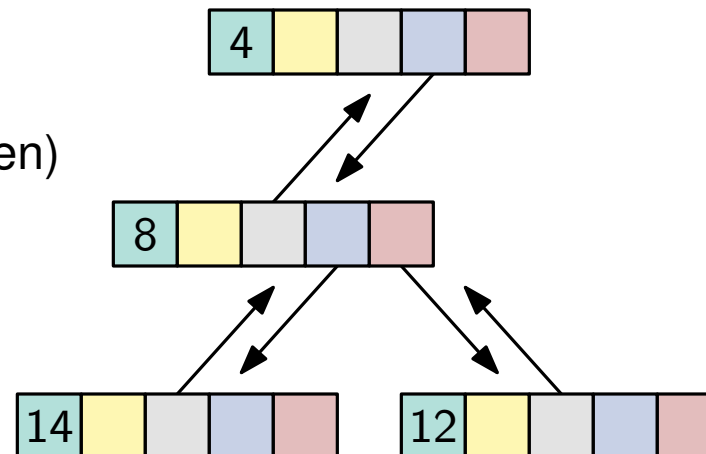
Verzeigerte Strukturen

- viele kleine Stückchen Speicher (Knoten)
- ein Knoten speichert:
 - Daten, die uns tatsächlich interessieren
 - Speicheradressen anderer Knoten (Zeiger)
- Zugriff durch Navigation entlang Zeiger



Heute: Binärer Baum

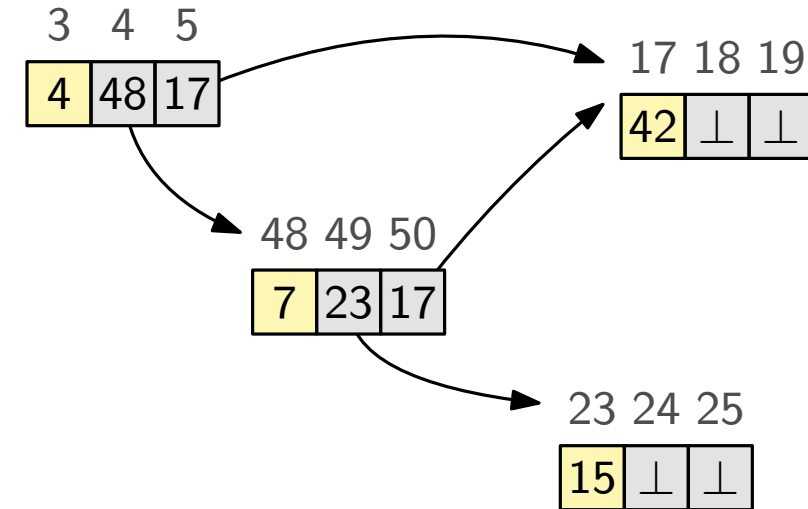
- jeder Knoten speichert:
 - **Priorität**
 - **andere Daten** (z.B. Knoten eines Graphen)
 - **linkes und rechtes Kind**
 - **Elternknoten**



Erinnerung und Anmerkung: Verzeigerte Strukturen

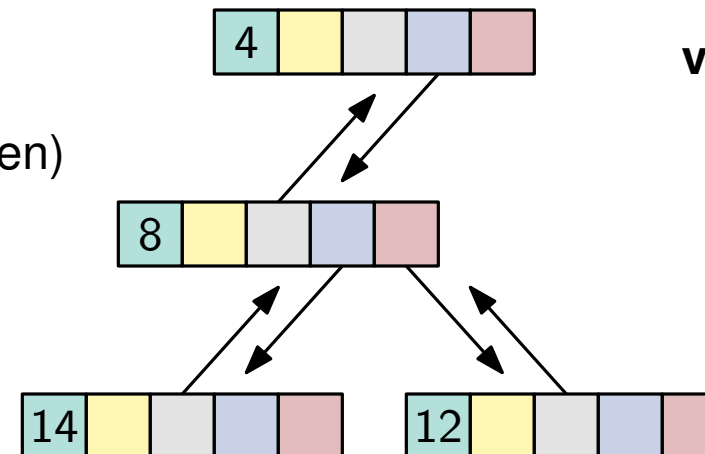
Verzeigerte Strukturen

- viele kleine Stückchen Speicher (Knoten)
- ein Knoten speichert:
 - Daten, die uns tatsächlich interessieren
 - Speicheradressen anderer Knoten (Zeiger)
- Zugriff durch Navigation entlang Zeiger

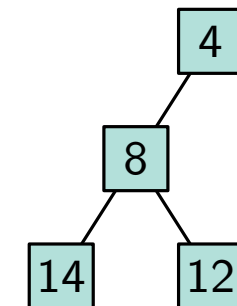


Heute: Binärer Baum

- jeder Knoten speichert:
 - **Priorität**
 - **andere Daten** (z.B. Knoten eines Graphen)
 - **linkes und rechtes Kind**
 - **Elternknoten**
- vereinfachte Darstellung: zeige nur Prioritäten; alles andere ist implizit



vereinfachte Darstellung



Wo liegt die Schwierigkeit?

Lösung 1: extreme Ordnung

- speichere Elemente als sortierte Folge (nach Priorität)
- super: **popMin** geht in $O(1)$
- Problem: **push** ist schwierig $\rightarrow \Theta(n)$
(das leidige Problem: in Listen ist Suche langsam, in Arrays ist Einfügen langsam)

Erinnerung:

- **push**(x): Element mit Priorität x einfügen
- **popMin**(): Element mit kleinster Priorität extrahieren

Wo liegt die Schwierigkeit?

Lösung 1: extreme Ordnung

- speichere Elemente als sortierte Folge (nach Priorität)
- super: **popMin** geht in $O(1)$
- Problem: **push** ist schwierig $\rightarrow \Theta(n)$
(das leidige Problem: in Listen ist Suche langsam, in Arrays ist Einfügen langsam)

Lösung 2: extreme Unordnung

- speichere Elemente als (unsortierte) Folge
- super: **push** geht in $O(1)$
- Problem: **popMin** ist schwierig $\rightarrow \Theta(n)$

Erinnerung:

- **push**(x): Element mit Priorität x einfügen
- **popMin**(): Element mit kleinster Priorität extrahieren

Wo liegt die Schwierigkeit?

Lösung 1: extreme Ordnung

- speichere Elemente als sortierte Folge (nach Priorität)
- super: **popMin** geht in $O(1)$
- Problem: **push** ist schwierig $\rightarrow \Theta(n)$
 (das leidige Problem: in Listen ist Suche langsam, in Arrays ist Einfügen langsam)

Lösung 2: extreme Unordnung

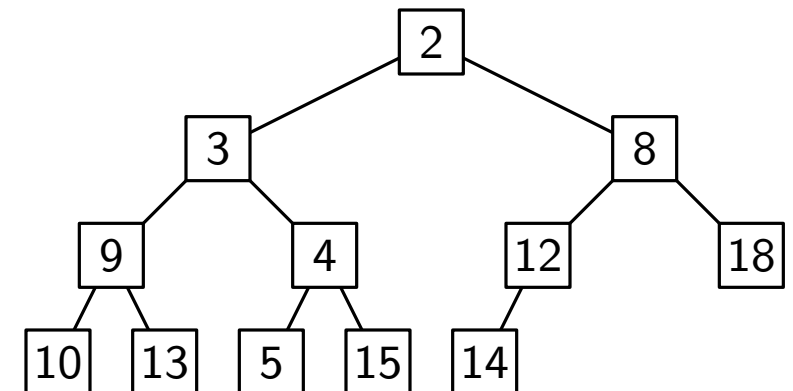
- speichere Elemente als (unsortierte) Folge
- super: **push** geht in $O(1)$
- Problem: **popMin** ist schwierig $\rightarrow \Theta(n)$

Gute Lösung: Binärbaum mit ein bisschen Ordnung

- sortiere jeden Pfad von der Wurzel zu einem Blatt
- genug Ordnung um das Minimum schnell zu finden
- kurze sortierte Pfade \rightarrow Sortierung aufrechterhalten billig

Erinnerung:

- **push**(x): Element mit Priorität x einfügen
- **popMin**(): Element mit kleinster Priorität extrahieren



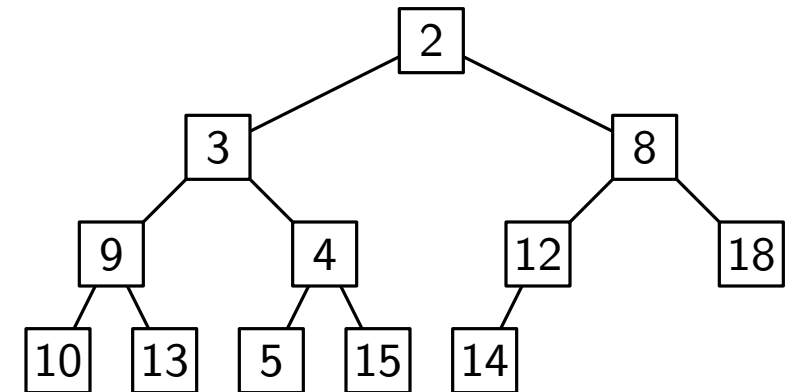
Binärer Min-Heap

Min-Heap Eigenschaft

- Priorität eines Knotens \leq Prioritäten der Kinder
- damit gilt: alle Wurzel–Blatt Pfade sind sortiert
- und: Minimum in der Wurzel

Erinnerung:

- **push**(x): Element mit Priorität x einfügen
- **popMin**(): Element mit kleinster Priorität extrahieren



Binärer Min-Heap

Min-Heap Eigenschaft

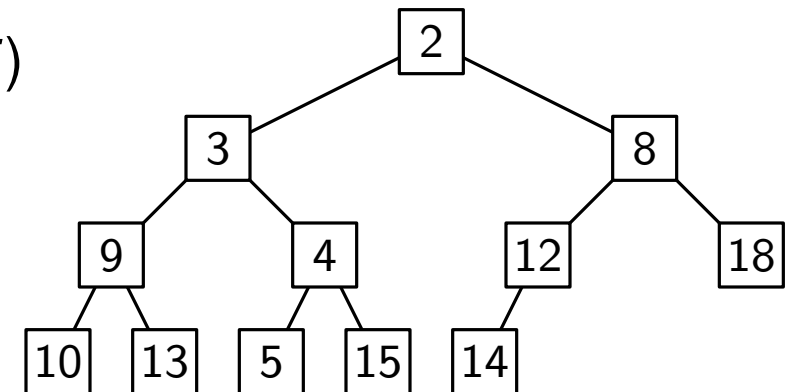
- Priorität eines Knotens \leq Prioritäten der Kinder
- damit gilt: alle Wurzel–Blatt Pfade sind sortiert
- und: Minimum in der Wurzel

Form des Baumes: vollständiger Binärbaum

- außer letztes Layer: alle voll besetzt (2^i Knoten auf Layer i)
- letztes Layer: von links nach rechts gefüllt
- beachte: $\Theta(\log n)$ viele Layer

Erinnerung:

- **push**(x): Element mit Priorität x einfügen
- **popMin**(): Element mit kleinster Priorität extrahieren



Binärer Min-Heap

Min-Heap Eigenschaft

- Priorität eines Knotens \leq Prioritäten der Kinder
- damit gilt: alle Wurzel–Blatt Pfade sind sortiert
- und: Minimum in der Wurzel

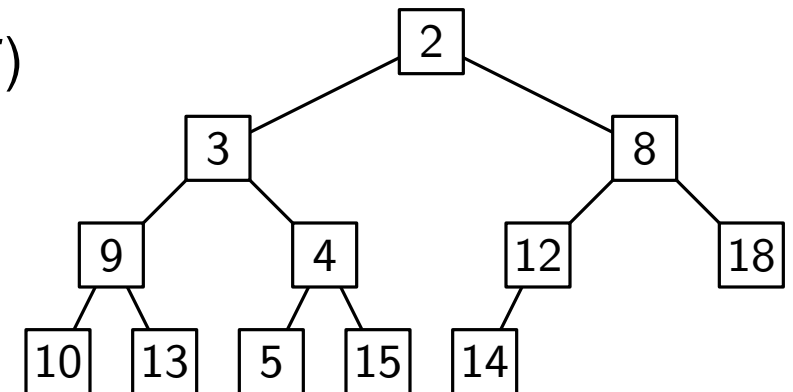
Form des Baumes: vollständiger Binärbaum

- außer letztes Layer: alle voll besetzt (2^i Knoten auf Layer i)
- letztes Layer: von links nach rechts gefüllt
- beachte: $\Theta(\log n)$ viele Layer

Todo: Aufrechterhalten dieser beiden Eigenschaften

Erinnerung:

- **push**(x): Element mit Priorität x einfügen
- **popMin**(): Element mit kleinster Priorität extrahieren



Binärer Min-Heap

Min-Heap Eigenschaft

- Priorität eines Knotens \leq Prioritäten der Kinder
- damit gilt: alle Wurzel–Blatt Pfade sind sortiert
- und: Minimum in der Wurzel

Form des Baumes: vollständiger Binärbaum

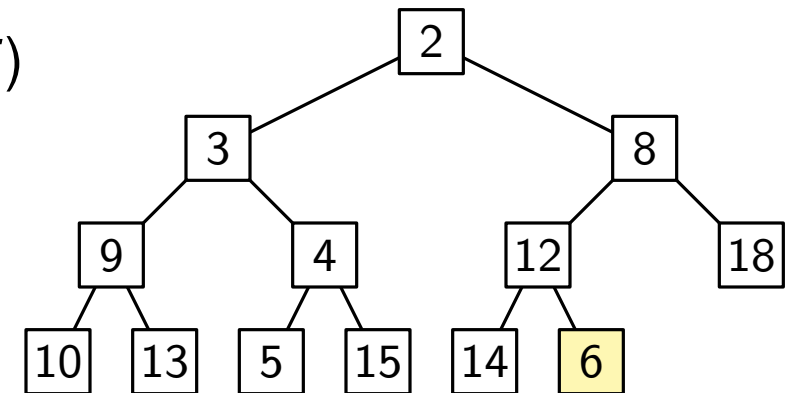
- außer letztes Layer: alle voll besetzt (2^i Knoten auf Layer i)
- letztes Layer: von links nach rechts gefüllt
- beachte: $\Theta(\log n)$ viele Layer

Todo: Aufrechterhalten dieser beiden Eigenschaften

- **push**(x): x erstmal als neues Blatt unten anhängen

Erinnerung:

- **push**(x): Element mit Priorität x einfügen
- **popMin**(): Element mit kleinster Priorität extrahieren



Binärer Min-Heap

Min-Heap Eigenschaft

- Priorität eines Knotens \leq Prioritäten der Kinder
- damit gilt: alle Wurzel–Blatt Pfade sind sortiert
- und: Minimum in der Wurzel

Form des Baumes: vollständiger Binärbaum

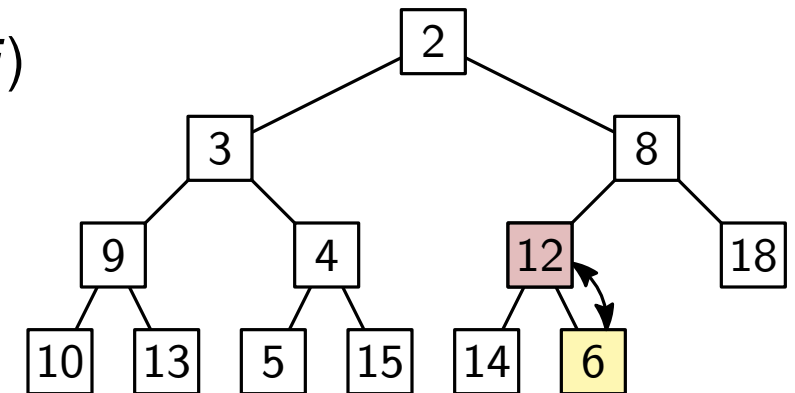
- außer letztes Layer: alle voll besetzt (2^i Knoten auf Layer i)
- letztes Layer: von links nach rechts gefüllt
- beachte: $\Theta(\log n)$ viele Layer

Todo: Aufrechterhalten dieser beiden Eigenschaften

- **push**(x): x erstmal als neues Blatt unten anhängen
- dann: x auf dem Pfad zur Wurzel nach oben tauschen (bubble-up)

Erinnerung:

- **push**(x): Element mit Priorität x einfügen
- **popMin**(): Element mit kleinster Priorität extrahieren



Binärer Min-Heap

Min-Heap Eigenschaft

- Priorität eines Knotens \leq Prioritäten der Kinder
- damit gilt: alle Wurzel–Blatt Pfade sind sortiert
- und: Minimum in der Wurzel

Form des Baumes: vollständiger Binärbaum

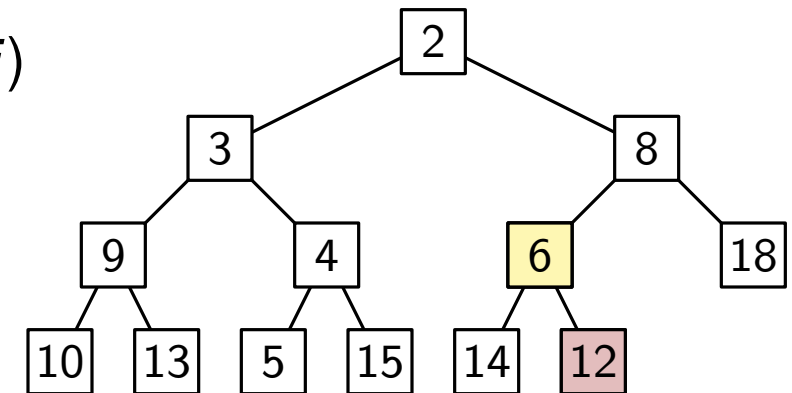
- außer letztes Layer: alle voll besetzt (2^i Knoten auf Layer i)
- letztes Layer: von links nach rechts gefüllt
- beachte: $\Theta(\log n)$ viele Layer

Todo: Aufrechterhalten dieser beiden Eigenschaften

- **push**(x): x erstmal als neues Blatt unten anhängen
- dann: x auf dem Pfad zur Wurzel nach oben tauschen (bubble-up)

Erinnerung:

- **push**(x): Element mit Priorität x einfügen
- **popMin**(): Element mit kleinster Priorität extrahieren



Binärer Min-Heap

Min-Heap Eigenschaft

- Priorität eines Knotens \leq Prioritäten der Kinder
- damit gilt: alle Wurzel–Blatt Pfade sind sortiert
- und: Minimum in der Wurzel

Form des Baumes: vollständiger Binärbaum

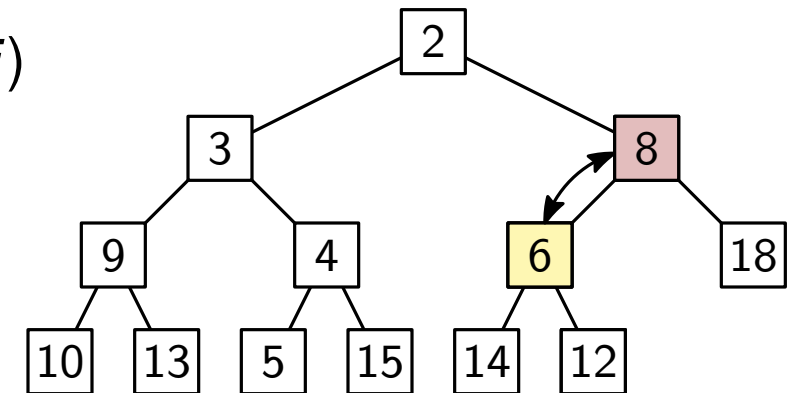
- außer letztes Layer: alle voll besetzt (2^i Knoten auf Layer i)
- letztes Layer: von links nach rechts gefüllt
- beachte: $\Theta(\log n)$ viele Layer

Todo: Aufrechterhalten dieser beiden Eigenschaften

- **push**(x): x erstmal als neues Blatt unten anhängen
- dann: x auf dem Pfad zur Wurzel nach oben tauschen (bubble-up)

Erinnerung:

- **push**(x): Element mit Priorität x einfügen
- **popMin**(): Element mit kleinster Priorität extrahieren



Binärer Min-Heap

Min-Heap Eigenschaft

- Priorität eines Knotens \leq Prioritäten der Kinder
- damit gilt: alle Wurzel–Blatt Pfade sind sortiert
- und: Minimum in der Wurzel

Form des Baumes: vollständiger Binärbaum

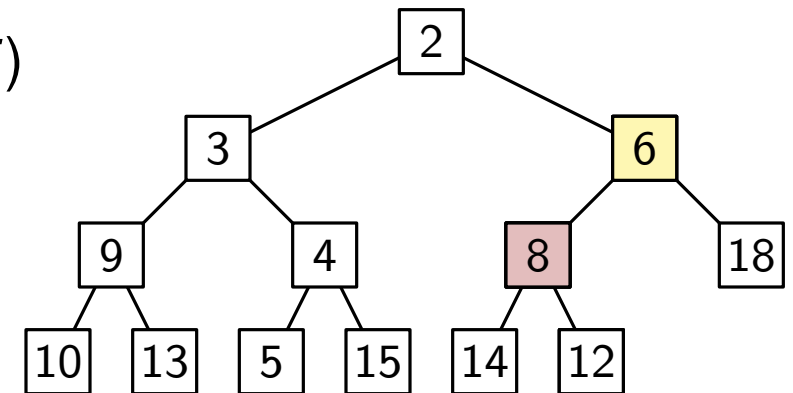
- außer letztes Layer: alle voll besetzt (2^i Knoten auf Layer i)
- letztes Layer: von links nach rechts gefüllt
- beachte: $\Theta(\log n)$ viele Layer

Todo: Aufrechterhalten dieser beiden Eigenschaften

- **push**(x): x erstmal als neues Blatt unten anhängen
- dann: x auf dem Pfad zur Wurzel nach oben tauschen (bubble-up)

Erinnerung:

- **push**(x): Element mit Priorität x einfügen
- **popMin**(\cdot): Element mit kleinster Priorität extrahieren



Binärer Min-Heap

Min-Heap Eigenschaft

- Priorität eines Knotens \leq Prioritäten der Kinder
- damit gilt: alle Wurzel–Blatt Pfade sind sortiert
- und: Minimum in der Wurzel

Form des Baumes: vollständiger Binärbaum

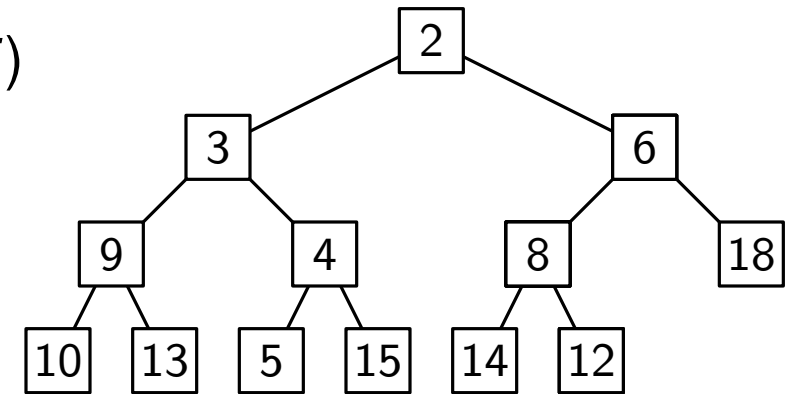
- außer letztes Layer: alle voll besetzt (2^i Knoten auf Layer i)
- letztes Layer: von links nach rechts gefüllt
- beachte: $\Theta(\log n)$ viele Layer

Todo: Aufrechterhalten dieser beiden Eigenschaften

- **push**(x): x erstmal als neues Blatt unten anhängen
- dann: x auf dem Pfad zur Wurzel nach oben tauschen (bubble-up)

Erinnerung:

- **push**(x): Element mit Priorität x einfügen
- **popMin**(): Element mit kleinster Priorität extrahieren



Binärer Min-Heap

Min-Heap Eigenschaft

- Priorität eines Knotens \leq Prioritäten der Kinder
- damit gilt: alle Wurzel–Blatt Pfade sind sortiert
- und: Minimum in der Wurzel

Form des Baumes: vollständiger Binärbaum

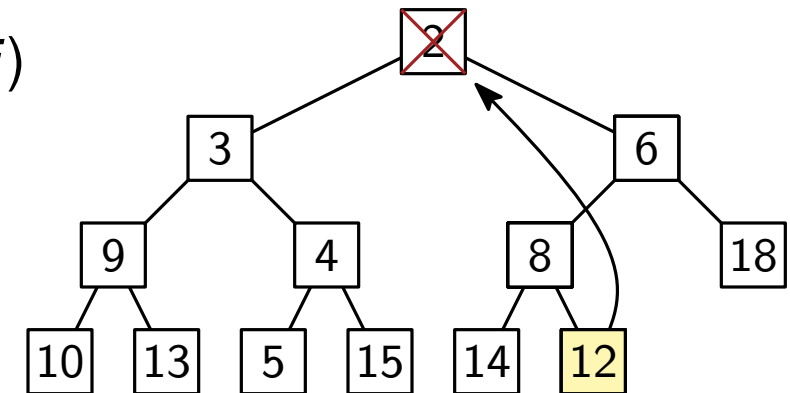
- außer letztes Layer: alle voll besetzt (2^i Knoten auf Layer i)
- letztes Layer: von links nach rechts gefüllt
- beachte: $\Theta(\log n)$ viele Layer

Todo: Aufrechterhalten dieser beiden Eigenschaften

- **push**(x): x erstmal als neues Blatt unten anhängen
- dann: x auf dem Pfad zur Wurzel nach oben tauschen (bubble-up)
- **popMin**(): Wurzel entfernen und durch letztes Blatt ersetzen

Erinnerung:

- **push**(x): Element mit Priorität x einfügen
- **popMin**(): Element mit kleinster Priorität extrahieren



Binärer Min-Heap

Min-Heap Eigenschaft

- Priorität eines Knotens \leq Prioritäten der Kinder
- damit gilt: alle Wurzel–Blatt Pfade sind sortiert
- und: Minimum in der Wurzel

Form des Baumes: vollständiger Binärbaum

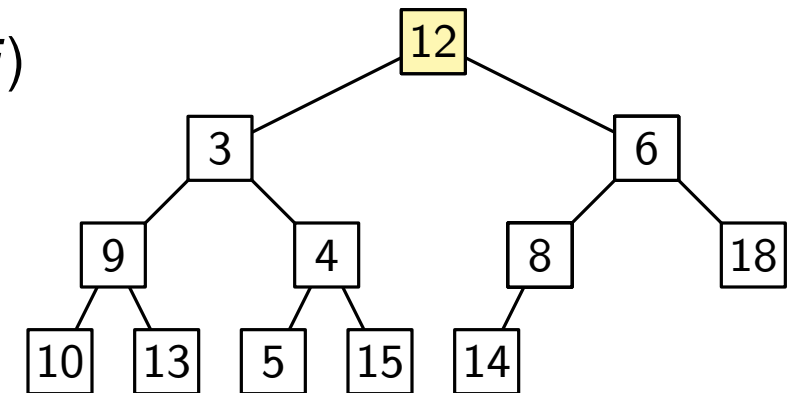
- außer letztes Layer: alle voll besetzt (2^i Knoten auf Layer i)
- letztes Layer: von links nach rechts gefüllt
- beachte: $\Theta(\log n)$ viele Layer

Todo: Aufrechterhalten dieser beiden Eigenschaften

- **push**(x): x erstmal als neues Blatt unten anhängen
- dann: x auf dem Pfad zur Wurzel nach oben tauschen (bubble-up)
- **popMin**(\cdot): Wurzel entfernen und durch letztes Blatt ersetzen

Erinnerung:

- **push**(x): Element mit Priorität x einfügen
- **popMin**(\cdot): Element mit kleinster Priorität extrahieren



Binärer Min-Heap

Min-Heap Eigenschaft

- Priorität eines Knotens \leq Prioritäten der Kinder
- damit gilt: alle Wurzel–Blatt Pfade sind sortiert
- und: Minimum in der Wurzel

Form des Baumes: vollständiger Binärbaum

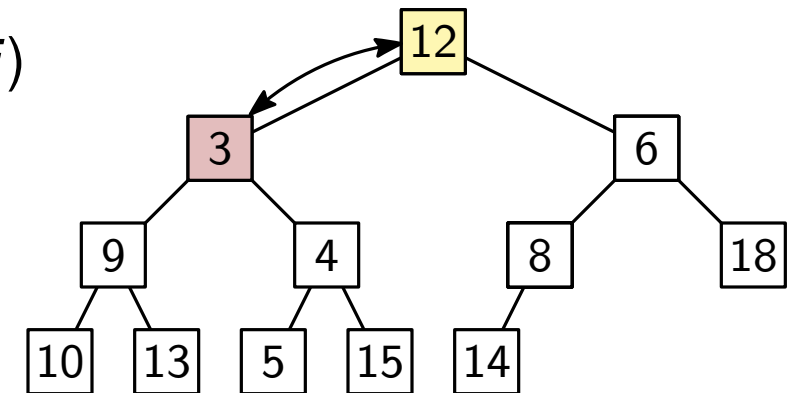
- außer letztes Layer: alle voll besetzt (2^i Knoten auf Layer i)
- letztes Layer: von links nach rechts gefüllt
- beachte: $\Theta(\log n)$ viele Layer

Todo: Aufrechterhalten dieser beiden Eigenschaften

- **push**(x): x erstmal als neues Blatt unten anhängen
- dann: x auf dem Pfad zur Wurzel nach oben tauschen (bubble-up)
- **popMin**(): Wurzel entfernen und durch letztes Blatt ersetzen
- dann: Wurzel zum kleineren Kind nach unten tauschen (sink-down)

Erinnerung:

- **push**(x): Element mit Priorität x einfügen
- **popMin**(): Element mit kleinster Priorität extrahieren



Binärer Min-Heap

Min-Heap Eigenschaft

- Priorität eines Knotens \leq Prioritäten der Kinder
- damit gilt: alle Wurzel–Blatt Pfade sind sortiert
- und: Minimum in der Wurzel

Form des Baumes: vollständiger Binärbaum

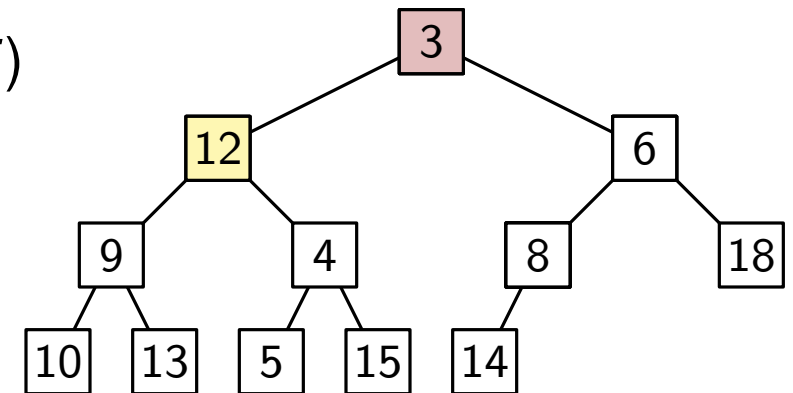
- außer letztes Layer: alle voll besetzt (2^i Knoten auf Layer i)
- letztes Layer: von links nach rechts gefüllt
- beachte: $\Theta(\log n)$ viele Layer

Todo: Aufrechterhalten dieser beiden Eigenschaften

- **push**(x): x erstmal als neues Blatt unten anhängen
- dann: x auf dem Pfad zur Wurzel nach oben tauschen (bubble-up)
- **popMin**(): Wurzel entfernen und durch letztes Blatt ersetzen
- dann: Wurzel zum kleineren Kind nach unten tauschen (sink-down)

Erinnerung:

- **push**(x): Element mit Priorität x einfügen
- **popMin**(): Element mit kleinster Priorität extrahieren



Binärer Min-Heap

Min-Heap Eigenschaft

- Priorität eines Knotens \leq Prioritäten der Kinder
- damit gilt: alle Wurzel–Blatt Pfade sind sortiert
- und: Minimum in der Wurzel

Form des Baumes: vollständiger Binärbaum

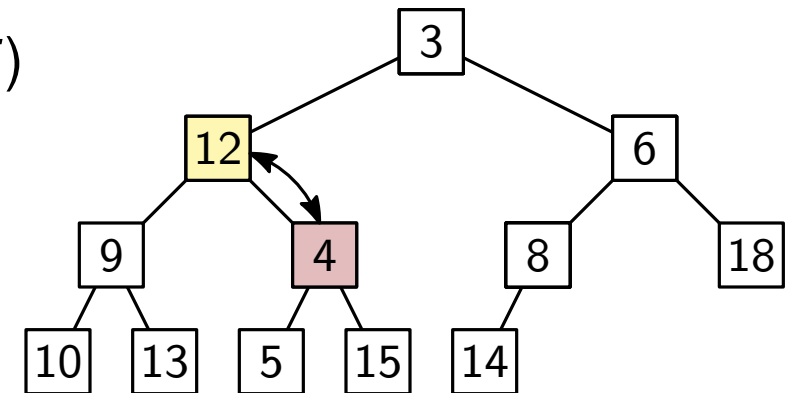
- außer letztes Layer: alle voll besetzt (2^i Knoten auf Layer i)
- letztes Layer: von links nach rechts gefüllt
- beachte: $\Theta(\log n)$ viele Layer

Todo: Aufrechterhalten dieser beiden Eigenschaften

- **push**(x): x erstmal als neues Blatt unten anhängen
- dann: x auf dem Pfad zur Wurzel nach oben tauschen (bubble-up)
- **popMin**(): Wurzel entfernen und durch letztes Blatt ersetzen
- dann: Wurzel zum kleineren Kind nach unten tauschen (sink-down)

Erinnerung:

- **push**(x): Element mit Priorität x einfügen
- **popMin**(): Element mit kleinster Priorität extrahieren



Binärer Min-Heap

Min-Heap Eigenschaft

- Priorität eines Knotens \leq Prioritäten der Kinder
- damit gilt: alle Wurzel–Blatt Pfade sind sortiert
- und: Minimum in der Wurzel

Form des Baumes: vollständiger Binärbaum

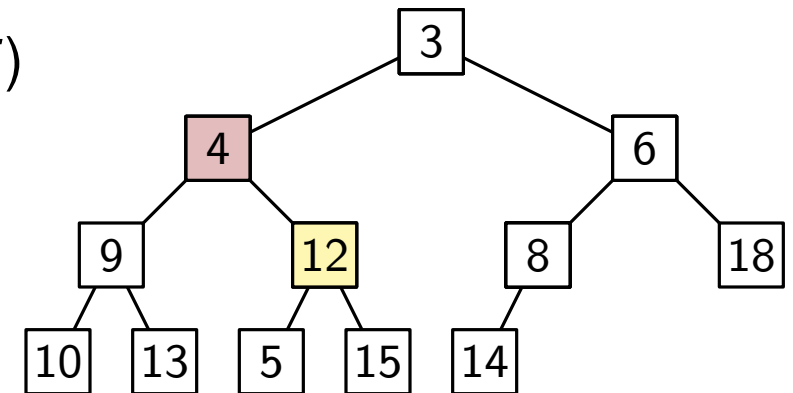
- außer letztes Layer: alle voll besetzt (2^i Knoten auf Layer i)
- letztes Layer: von links nach rechts gefüllt
- beachte: $\Theta(\log n)$ viele Layer

Todo: Aufrechterhalten dieser beiden Eigenschaften

- **push**(x): x erstmal als neues Blatt unten anhängen
- dann: x auf dem Pfad zur Wurzel nach oben tauschen (bubble-up)
- **popMin**(): Wurzel entfernen und durch letztes Blatt ersetzen
- dann: Wurzel zum kleineren Kind nach unten tauschen (sink-down)

Erinnerung:

- **push**(x): Element mit Priorität x einfügen
- **popMin**(): Element mit kleinster Priorität extrahieren



Binärer Min-Heap

Min-Heap Eigenschaft

- Priorität eines Knotens \leq Prioritäten der Kinder
- damit gilt: alle Wurzel–Blatt Pfade sind sortiert
- und: Minimum in der Wurzel

Form des Baumes: vollständiger Binärbaum

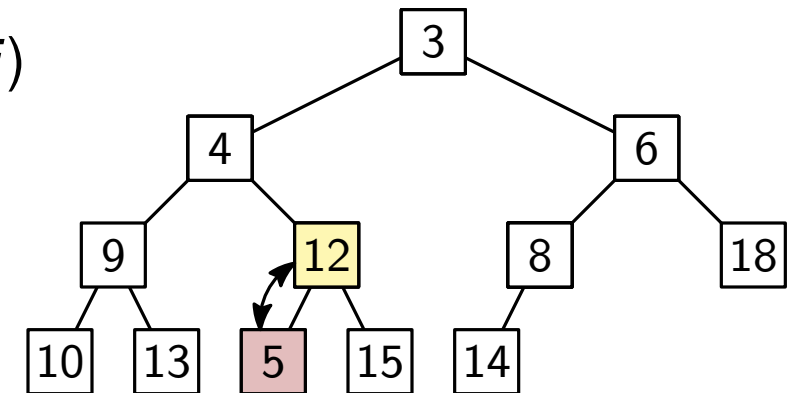
- außer letztes Layer: alle voll besetzt (2^i Knoten auf Layer i)
- letztes Layer: von links nach rechts gefüllt
- beachte: $\Theta(\log n)$ viele Layer

Todo: Aufrechterhalten dieser beiden Eigenschaften

- **push**(x): x erstmal als neues Blatt unten anhängen
- dann: x auf dem Pfad zur Wurzel nach oben tauschen (bubble-up)
- **popMin**(): Wurzel entfernen und durch letztes Blatt ersetzen
- dann: Wurzel zum kleineren Kind nach unten tauschen (sink-down)

Erinnerung:

- **push**(x): Element mit Priorität x einfügen
- **popMin**(): Element mit kleinster Priorität extrahieren



Binärer Min-Heap

Min-Heap Eigenschaft

- Priorität eines Knotens \leq Prioritäten der Kinder
- damit gilt: alle Wurzel–Blatt Pfade sind sortiert
- und: Minimum in der Wurzel

Form des Baumes: vollständiger Binärbaum

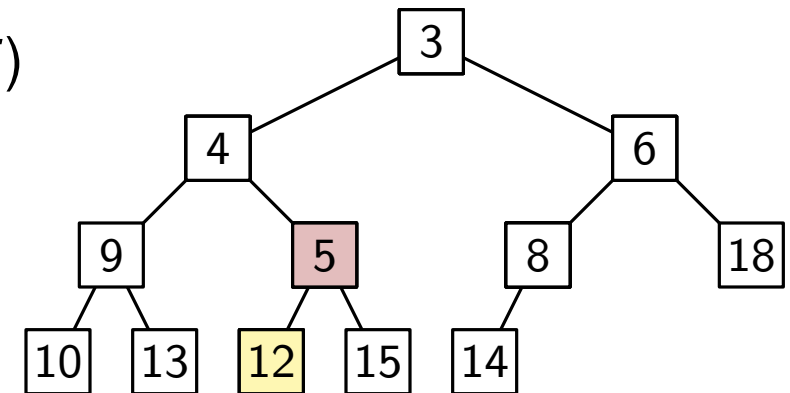
- außer letztes Layer: alle voll besetzt (2^i Knoten auf Layer i)
- letztes Layer: von links nach rechts gefüllt
- beachte: $\Theta(\log n)$ viele Layer

Todo: Aufrechterhalten dieser beiden Eigenschaften

- **push**(x): x erstmal als neues Blatt unten anhängen
- dann: x auf dem Pfad zur Wurzel nach oben tauschen (bubble-up)
- **popMin**(): Wurzel entfernen und durch letztes Blatt ersetzen
- dann: Wurzel zum kleineren Kind nach unten tauschen (sink-down)

Erinnerung:

- **push**(x): Element mit Priorität x einfügen
- **popMin**(): Element mit kleinster Priorität extrahieren



Binärer Min-Heap

Min-Heap Eigenschaft

- Priorität eines Knotens \leq Prioritäten der Kinder
- damit gilt: alle Wurzel–Blatt Pfade sind sortiert
- und: Minimum in der Wurzel

Form des Baumes: vollständiger Binärbaum

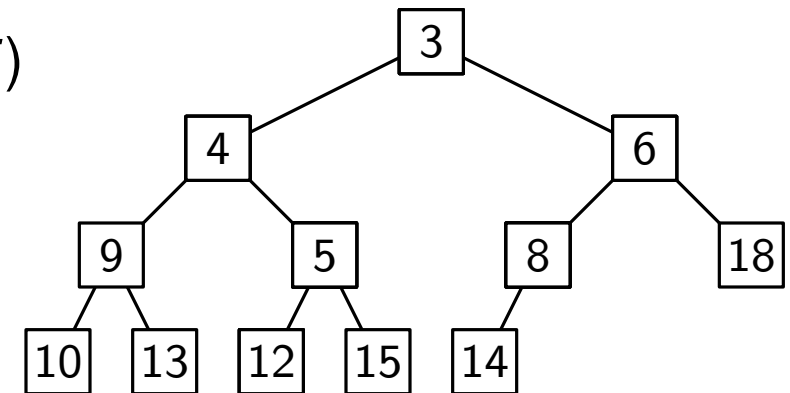
- außer letztes Layer: alle voll besetzt (2^i Knoten auf Layer i)
- letztes Layer: von links nach rechts gefüllt
- beachte: $\Theta(\log n)$ viele Layer

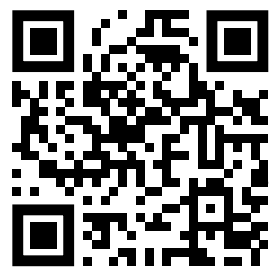
Todo: Aufrechterhalten dieser beiden Eigenschaften

- **push**(x): x erstmal als neues Blatt unten anhängen
- dann: x auf dem Pfad zur Wurzel nach oben tauschen (bubble-up)
- **popMin**(): Wurzel entfernen und durch letztes Blatt ersetzen
- dann: Wurzel zum kleineren Kind nach unten tauschen (sink-down)

Erinnerung:

- **push**(x): Element mit Priorität x einfügen
- **popMin**(): Element mit kleinster Priorität extrahieren





Binärer Min-Heap

Min-Heap Eigenschaft

- Priorität eines Knotens \leq Prioritäten der Kinder
- damit gilt: alle Wurzel–Blatt Pfade sind sortiert
- und: Minimum in der Wurzel

Form des Baumes: vollständiger Binärbaum

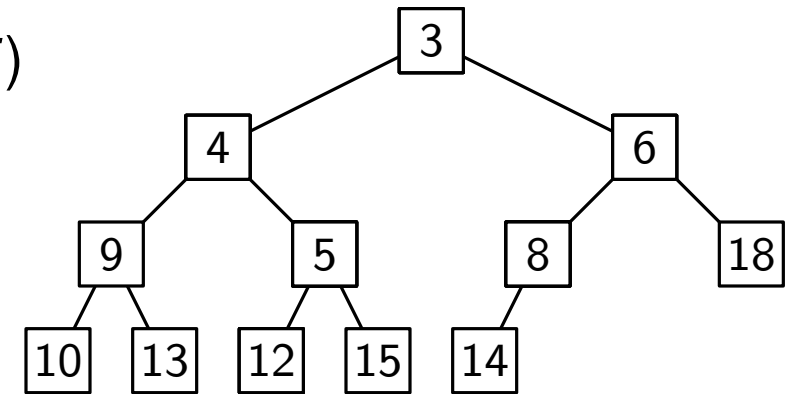
- außer letztes Layer: alle voll besetzt (2^i Knoten auf Layer i)
- letztes Layer: von links nach rechts gefüllt
- beachte: $\Theta(\log n)$ viele Layer

Todo: Aufrechterhalten dieser beiden Eigenschaften

- **push**(x): x erstmal als neues Blatt unten anhängen
- dann: x auf dem Pfad zur Wurzel nach oben tauschen (bubble-up)
- **popMin**(): Wurzel entfernen und durch letztes Blatt ersetzen
- dann: Wurzel zum kleineren Kind nach unten tauschen (sink-down)

Erinnerung:

- **push**(x): Element mit Priorität x einfügen
- **popMin**(): Element mit kleinster Priorität extrahieren



Laufzeit?

Binärer Min-Heap

Min-Heap Eigenschaft

- Priorität eines Knotens \leq Prioritäten der Kinder
- damit gilt: alle Wurzel–Blatt Pfade sind sortiert
- und: Minimum in der Wurzel

Form des Baumes: vollständiger Binärbaum

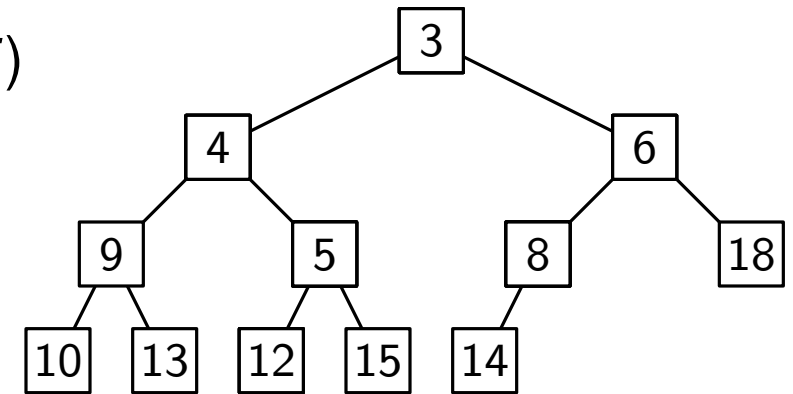
- außer letztes Layer: alle voll besetzt (2^i Knoten auf Layer i)
- letztes Layer: von links nach rechts gefüllt
- beachte: $\Theta(\log n)$ viele Layer

Todo: Aufrechterhalten dieser beiden Eigenschaften

- **push**(x): x erstmal als neues Blatt unten anhängen
- dann: x auf dem Pfad zur Wurzel nach oben tauschen (bubble-up)
- **popMin**(): Wurzel entfernen und durch letztes Blatt ersetzen
- dann: Wurzel zum kleineren Kind nach unten tauschen (sink-down)

Erinnerung:

- **push**(x): Element mit Priorität x einfügen
- **popMin**(): Element mit kleinster Priorität extrahieren



Laufzeit: $\Theta(\log n)$

Binärer Min-Heap: Überblick

Invariante

- Heap-Eigenschaft: Elter \leq Kind
- Form: vollständiger Binärbaum

Operation `push(x)`

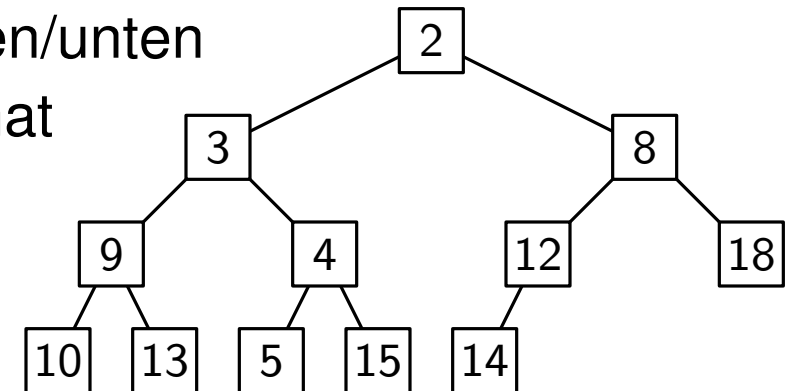
- füge x als neues Blatt ein
- tausche x hoch solange nötig

Operation `popMin()`

- ersetze Wurzel durch letztes Blatt x
- tausche x runter solange nötig

Beachte

- erster Schritt der Operationen verletzt Heap-Eigenschaft nur an einer Stelle
- Fix: tausche den entsprechenden Knoten iterativ nach oben/unten
- nur $\Theta(\log n)$ Tauschoperationen, da Baum Höhe $\Theta(\log n)$ hat



Binärer Min-Heap: Überblick

Invariante

- Heap-Eigenschaft: Elter \leq Kind
- Form: vollständiger Binärbaum

Operation **push(x)**

- füge x als neues Blatt ein
- tausche x hoch solange nötig

Operation **popMin()**

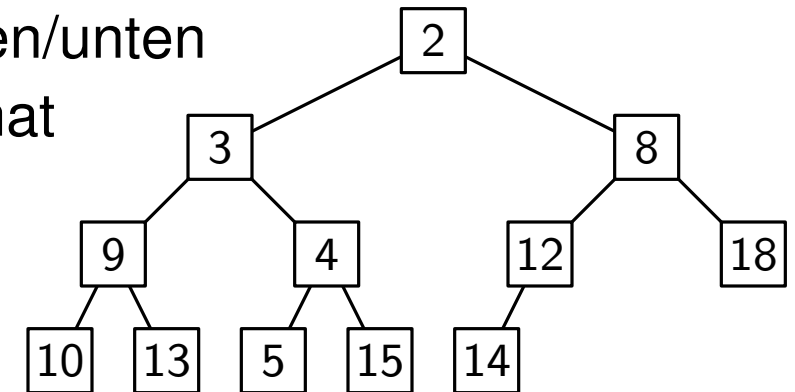
- ersetze Wurzel durch letztes Blatt x
- tausche x runter solange nötig

Beachte

- erster Schritt der Operationen verletzt Heap-Eigenschaft nur an einer Stelle
- Fix: tausche den entsprechenden Knoten iterativ nach oben/unten
- nur $\Theta(\log n)$ Tauschoperationen, da Baum Höhe $\Theta(\log n)$ hat

Weitere Operationen: Priorität ändern, Eintrag löschen

- können ähnlich implementiert werden



Binärer Min-Heap: Überblick

Invariante

- Heap-Eigenschaft: Elter \leq Kind
- Form: vollständiger Binärbaum

Operation `push(x)`

- füge x als neues Blatt ein
- tausche x hoch solange nötig

Operation `popMin()`

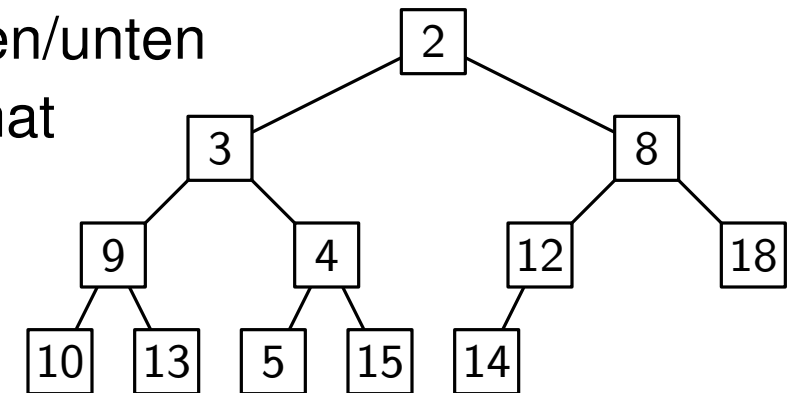
- ersetze Wurzel durch letztes Blatt x
- tausche x runter solange nötig

Beachte

- erster Schritt der Operationen verletzt Heap-Eigenschaft nur an einer Stelle
- Fix: tausche den entsprechenden Knoten iterativ nach oben/unten
- nur $\Theta(\log n)$ Tauschoperationen, da Baum Höhe $\Theta(\log n)$ hat

Weitere Operationen: Priorität ändern, Eintrag löschen

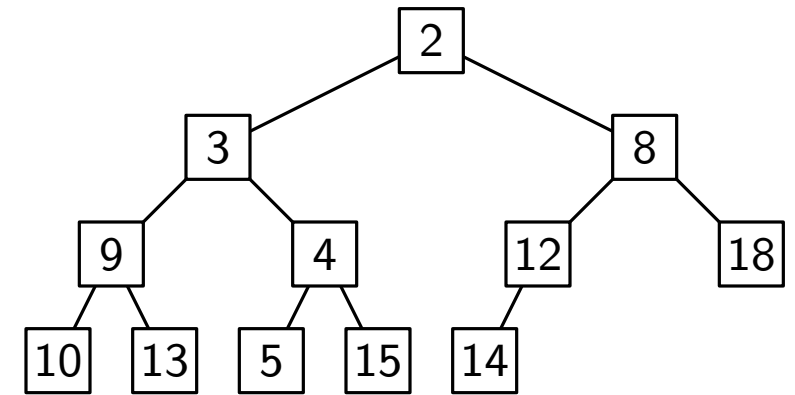
- können ähnlich implementiert werden
- in vielen Implementierungen nicht verfügbar
- Trick: Lazy Evaluation (später)



Umsetzung als Array

In der Praxis effiziente Repräsentation

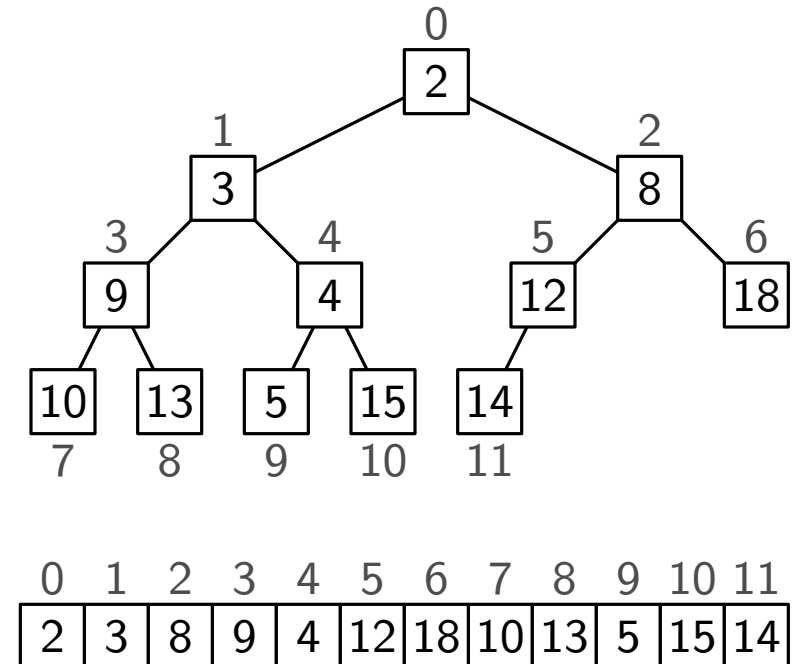
- Arrays oft effizienter als verzeigerte Struktur
- Struktur eigentlich klar: vollständiger Binärbaum



Umsetzung als Array

In der Praxis effiziente Repräsentation

- Arrays oft effizienter als verzeigerte Struktur
- Struktur eigentlich klar: vollständiger Binärbaum
- speichere Knoten hintereinander in einem Array



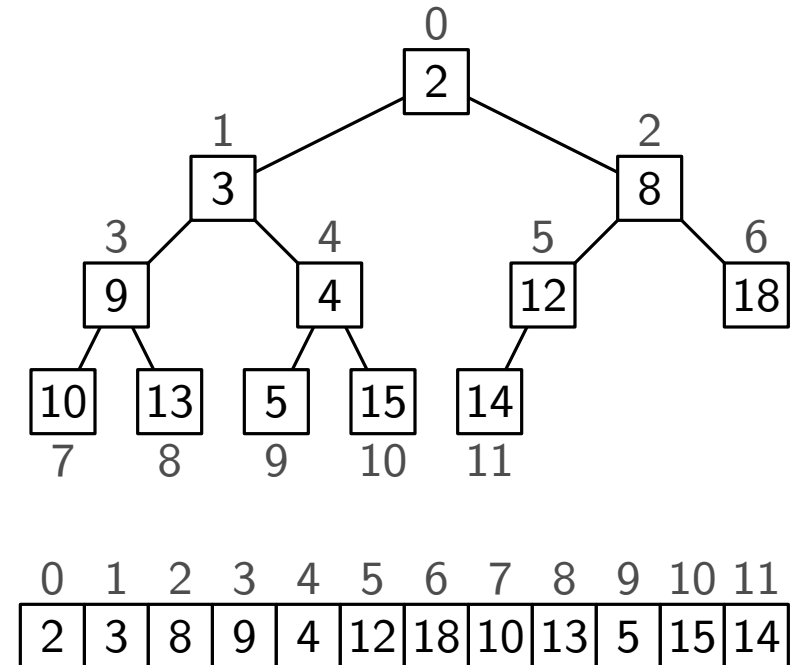
Umsetzung als Array

In der Praxis effiziente Repräsentation

- Arrays oft effizienter als verzeigerte Struktur
- Struktur eigentlich klar: vollständiger Binärbaum
- speichere Knoten hintereinander in einem Array

Repräsentation eines Knotens

- sei $v \in [0, n)$ eine ganze Zahl
- v repräsentiert den Knoten an Stelle v im Array





Umsetzung als Array

In der Praxis effiziente Repräsentation

- Arrays oft effizienter als verzeigerte Struktur
- Struktur eigentlich klar: vollständiger Binärbaum
- speichere Knoten hintereinander in einem Array

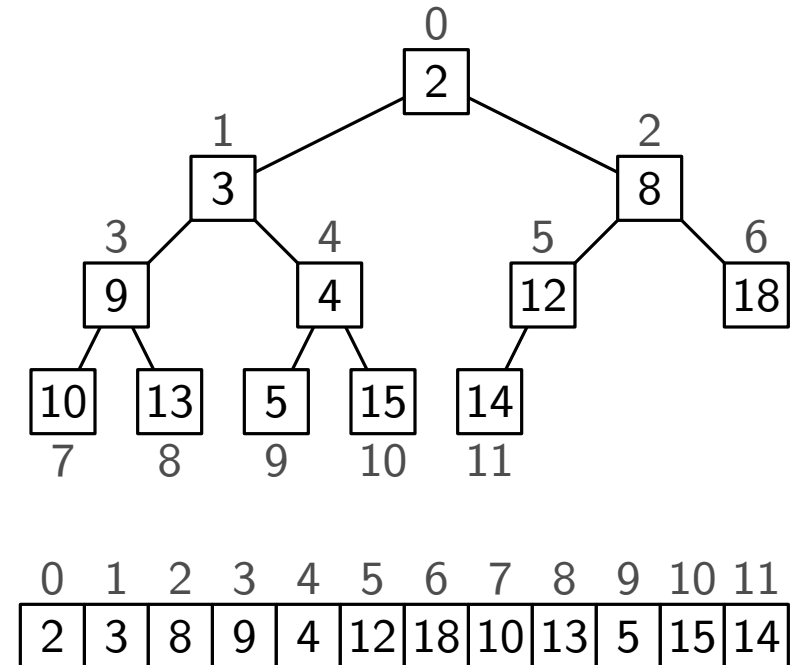
Repräsentation eines Knotens

- sei $v \in [0, n)$ eine ganze Zahl
- v repräsentiert den Knoten an Stelle v im Array

Wo finde ich das linke Kind von v ?

Wo finde ich das rechte Kind von v ?

Wo finde ich den Elternknoten von v ?



Umsetzung als Array

In der Praxis effiziente Repräsentation

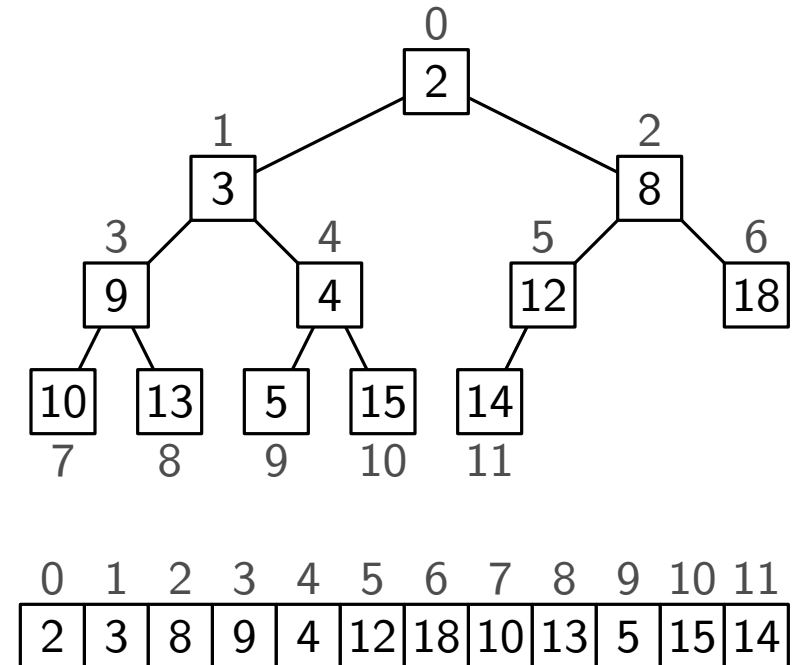
- Arrays oft effizienter als verzeigerte Struktur
- Struktur eigentlich klar: vollständiger Binärbaum
- speichere Knoten hintereinander in einem Array

Repräsentation eines Knotens

- sei $v \in [0, n)$ eine ganze Zahl
- v repräsentiert den Knoten an Stelle v im Array

Kind- und Elternknoten von v

- linkes Kind: $2v + 1$
- rechtes Kind: $2v + 2$
- Elternknoten: $\lfloor \frac{v-1}{2} \rfloor$



Umsetzung als Array

In der Praxis effiziente Repräsentation

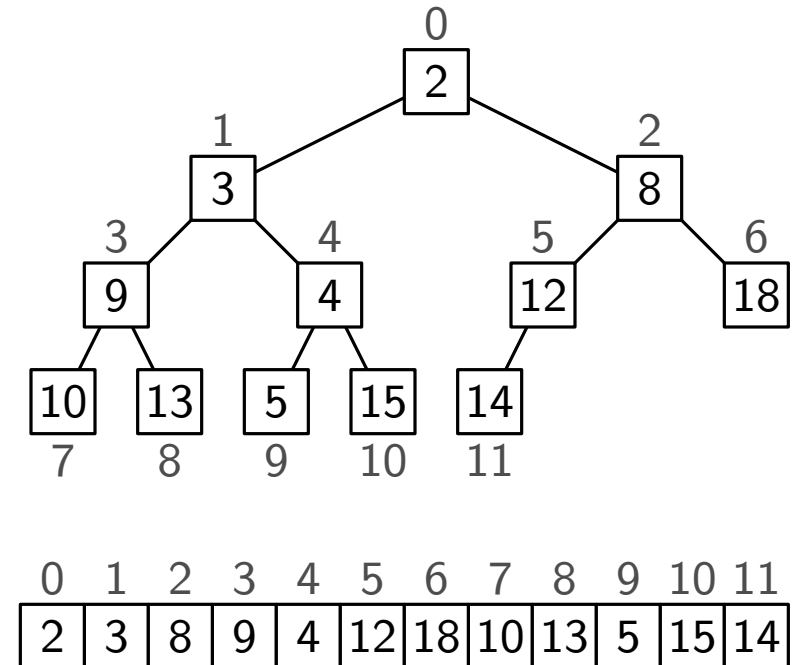
- Arrays oft effizienter als verzeigerte Struktur
- Struktur eigentlich klar: vollständiger Binärbaum
- speichere Knoten hintereinander in einem Array

Repräsentation eines Knotens

- sei $v \in [0, n)$ eine ganze Zahl
- v repräsentiert den Knoten an Stelle v im Array

Kind- und Elternknoten von v

- linkes Kind: $2v + 1$
- rechtes Kind: $2v + 2$
- Elternknoten: $\lfloor \frac{v-1}{2} \rfloor$



Beweisskizze

- Knoten auf Lage $i - 1$: $[2^{i-1} - 1, 2^i - 2]$
- Knoten auf Lage i : $[2^i - 1, 2^{i+1} - 2]$

Algorithmus → Pseudocode (Grundoperationen)

class MINHEAP

Array A // tree as array

n()

| **return** $A.size()$

leftChild(Node v)

| **return** $2v + 1$

rightChild(Node v)

| **return** $2v + 2$

parent(Node v)

| **return** $\lfloor \frac{v-1}{2} \rfloor$

swap(Node u , Node v)

| $A[u], A[v] := A[v], A[u]$

Algorithmus → Pseudocode (Grundoperationen)

class MINHEAP

Array A // tree as array

$n()$

| **return** $A.size()$

leftChild(Node v)

| **return** $2v + 1$

rightChild(Node v)

| **return** $2v + 2$

parent(Node v)

| **return** $\lfloor \frac{v-1}{2} \rfloor$

swap(Node u , Node v)

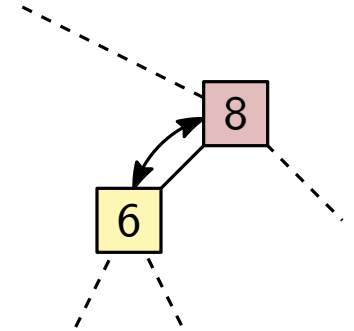
| $A[u], A[v] := A[v], A[u]$

bubbleUp(Node v)

| **if** $v \neq 0$ **and** $A[v] < A[\text{parent}(v)]$ **then**

| | **swap**(v , $\text{parent}(v)$)

| | **bubbleUp**($\text{parent}(v)$)



Algorithmus → Pseudocode (Grundoperationen)

class MINHEAP

Array A // tree as array

$n()$

| **return** $A.size()$

leftChild(Node v)

| **return** $2v + 1$

rightChild(Node v)

| **return** $2v + 2$

parent(Node v)

| **return** $\lfloor \frac{v-1}{2} \rfloor$

swap(Node u , Node v)

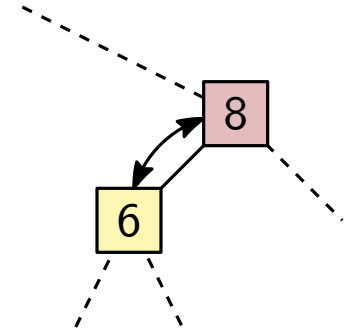
| $A[u], A[v] := A[v], A[u]$

bubbleUp(Node v)

| **if** $v \neq 0$ **and** $A[v] < A[\text{parent}(v)]$ **then**

| | **swap**(v , $\text{parent}(v)$)

| | **bubbleUp**($\text{parent}(v)$)



sinkDown(Node v)

| $u_\ell, u_r := \text{leftChild}(v), \text{rightChild}(v)$

| $u := v$ // minimum of the three nodes

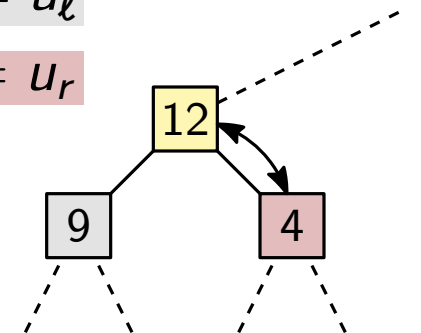
| **if** $u_\ell < n()$ **and** $A[u_\ell] < A[u]$ **then** $u := u_\ell$

| **if** $u_r < n()$ **and** $A[u_r] < A[u]$ **then** $u := u_r$

| **if** $u \neq v$ **then**

| | **swap**(u , v)

| | **sinkDown**(u)



Algorithmus → Pseudocode

class MINHEAP

Array A // tree as array

$n()$

leftChild(Node v)

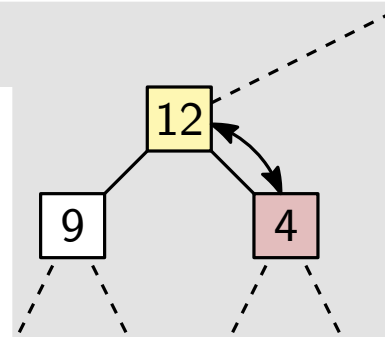
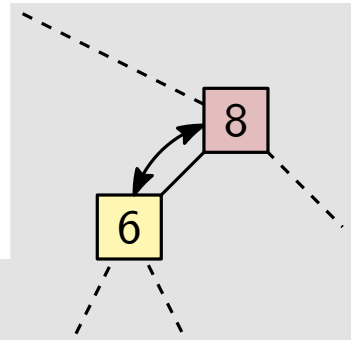
rightChild(Node v)

parent(Node v)

swap(Node u , Node v)

bubbleUp(Node v)

sinkDown(Node v)



Algorithmus → Pseudocode

class MINHEAP

Array A // tree as array

$n()$

leftChild(Node v)

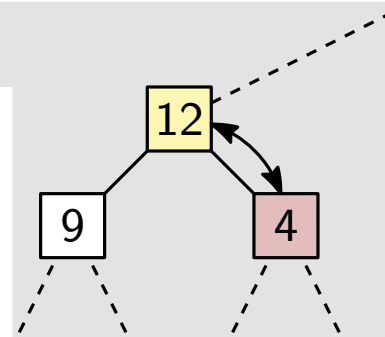
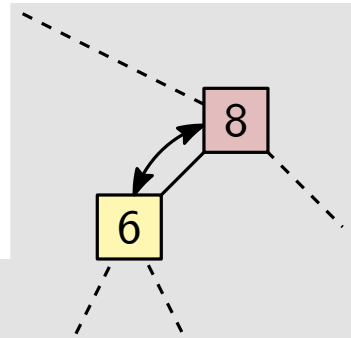
rightChild(Node v)

parent(Node v)

swap(Node u , Node v)

bubbleUp(Node v)

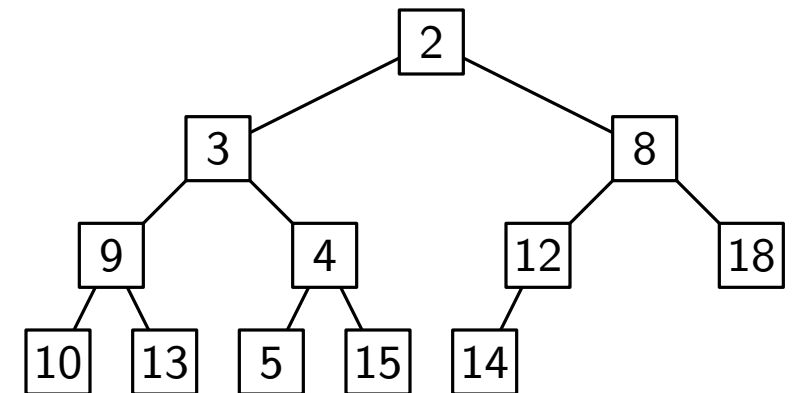
sinkDown(Node v)



push(Priority x)

A .pushBack(x)

bubbleUp($n() - 1$)



Algorithmus → Pseudocode

class MINHEAP

Array A // tree as array

$n()$

leftChild(Node v)

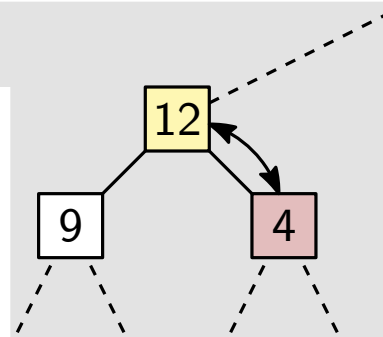
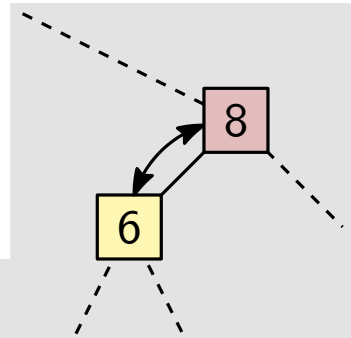
rightChild(Node v)

parent(Node v)

swap(Node u , Node v)

bubbleUp(Node v)

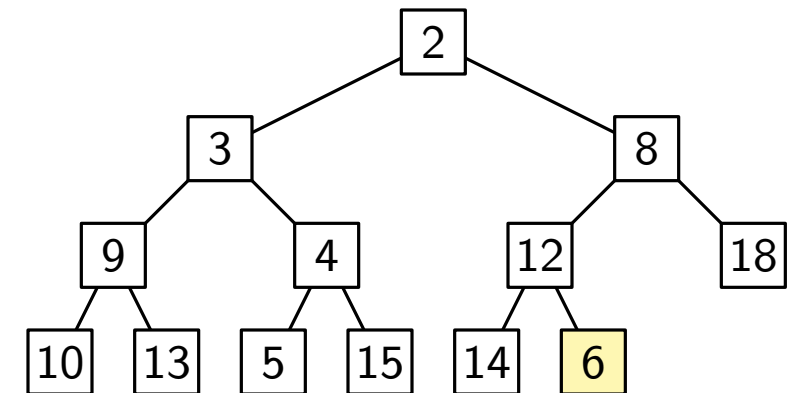
sinkDown(Node v)



push(Priority x)

A .pushBack(x)

bubbleUp($n() - 1$)



Algorithmus → Pseudocode

class MINHEAP

Array A // tree as array

$n()$

leftChild(Node v)

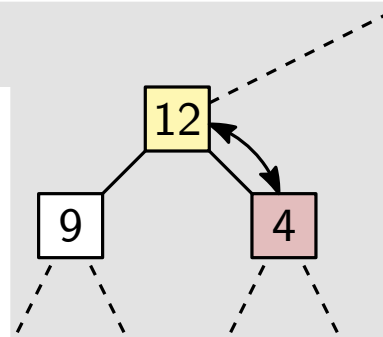
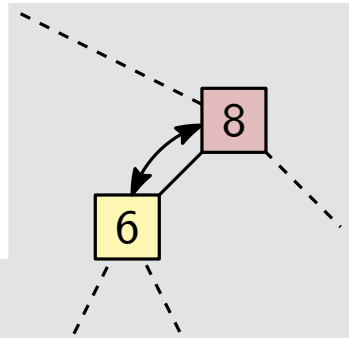
rightChild(Node v)

parent(Node v)

swap(Node u , Node v)

bubbleUp(Node v)

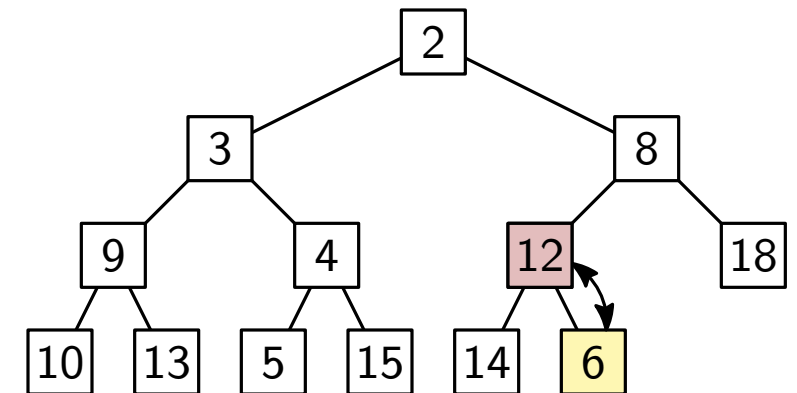
sinkDown(Node v)



push(Priority x)

A .pushBack(x)

bubbleUp($n() - 1$)



Algorithmus → Pseudocode

class MINHEAP

Array A // tree as array

$n()$

leftChild(Node v)

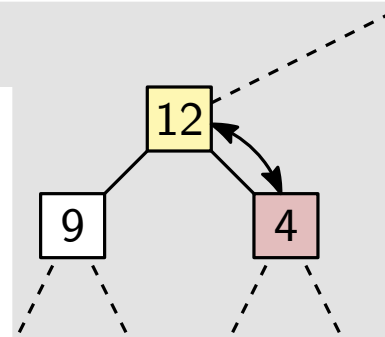
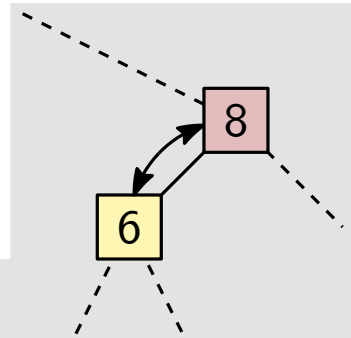
rightChild(Node v)

parent(Node v)

swap(Node u , Node v)

bubbleUp(Node v)

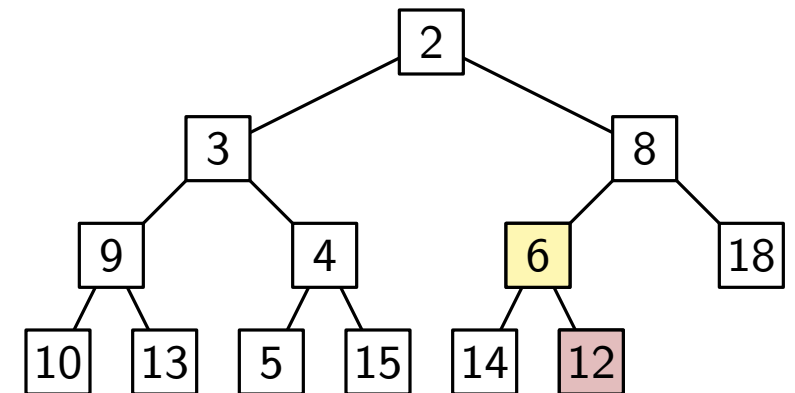
sinkDown(Node v)



push(Priority x)

A .pushBack(x)

bubbleUp($n() - 1$)



Algorithmus → Pseudocode

class MINHEAP

Array A // tree as array

$n()$

leftChild(Node v)

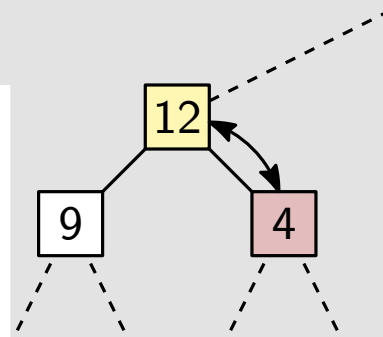
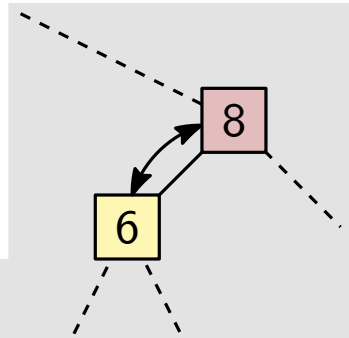
rightChild(Node v)

parent(Node v)

swap(Node u , Node v)

bubbleUp(Node v)

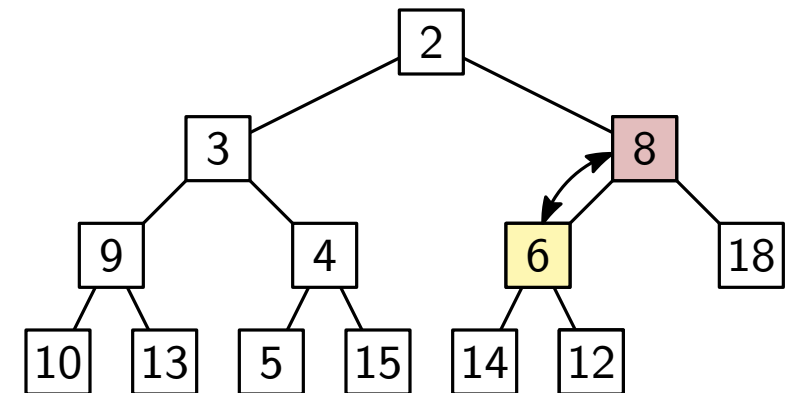
sinkDown(Node v)



push(Priority x)

A .pushBack(x)

bubbleUp($n() - 1$)



Algorithmus → Pseudocode

class MINHEAP

Array A // tree as array

$n()$

leftChild(Node v)

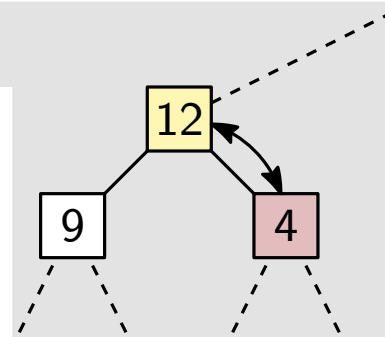
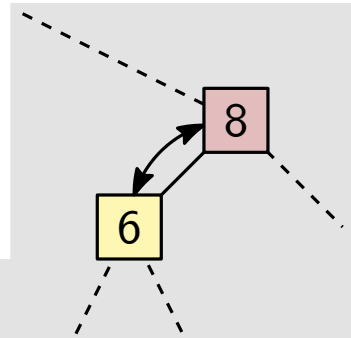
rightChild(Node v)

parent(Node v)

swap(Node u , Node v)

bubbleUp(Node v)

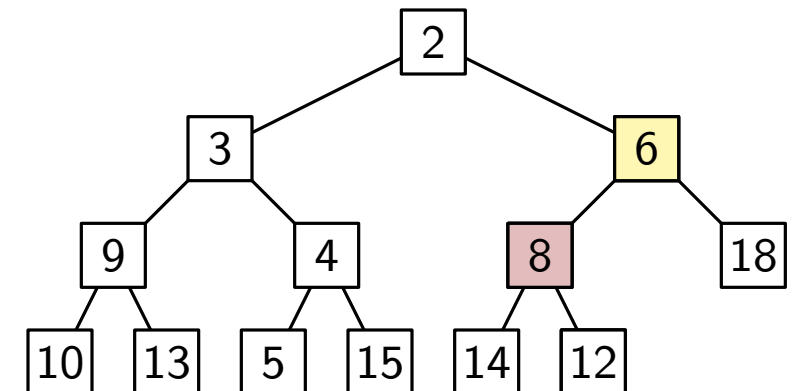
sinkDown(Node v)



push(Priority x)

A .pushBack(x)

bubbleUp($n() - 1$)



Algorithmus → Pseudocode

class MINHEAP

Array A // tree as array

$n()$

leftChild(Node v)

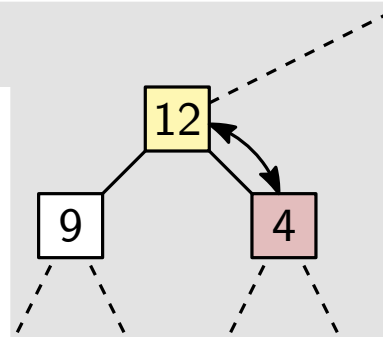
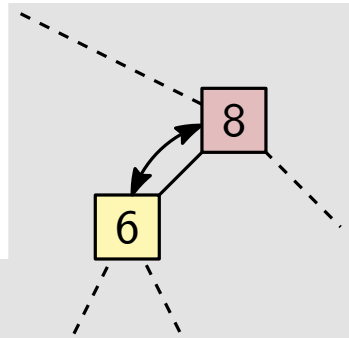
rightChild(Node v)

parent(Node v)

swap(Node u , Node v)

bubbleUp(Node v)

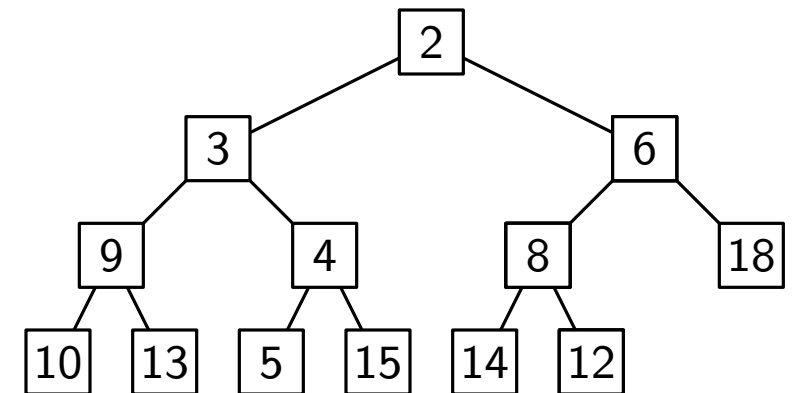
sinkDown(Node v)



push(Priority x)

A .pushBack(x)

bubbleUp($n() - 1$)



Algorithmus → Pseudocode

class MINHEAP

Array A // tree as array

$n()$

leftChild(Node v)

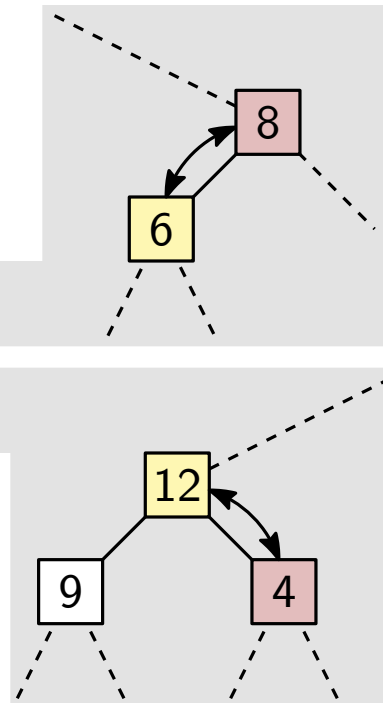
rightChild(Node v)

parent(Node v)

swap(Node u , Node v)

bubbleUp(Node v)

sinkDown(Node v)



push(Priority x)

A .**pushBack**(x)

bubbleUp($n() - 1$)

popMin()

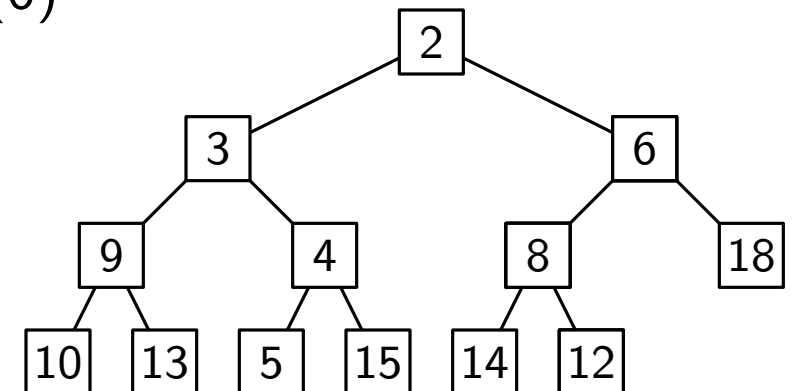
res := $A[0]$

swap(0, $n() - 1$)

A .**popBack**()

sinkDown(0)

return res



Algorithmus → Pseudocode

class MINHEAP

Array A // tree as array

$n()$

leftChild(Node v)

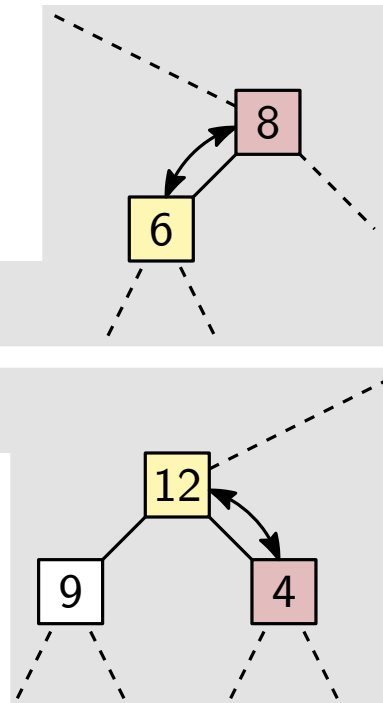
rightChild(Node v)

parent(Node v)

swap(Node u , Node v)

bubbleUp(Node v)

sinkDown(Node v)



push(Priority x)

A .**pushBack**(x)

bubbleUp($n() - 1$)

popMin()

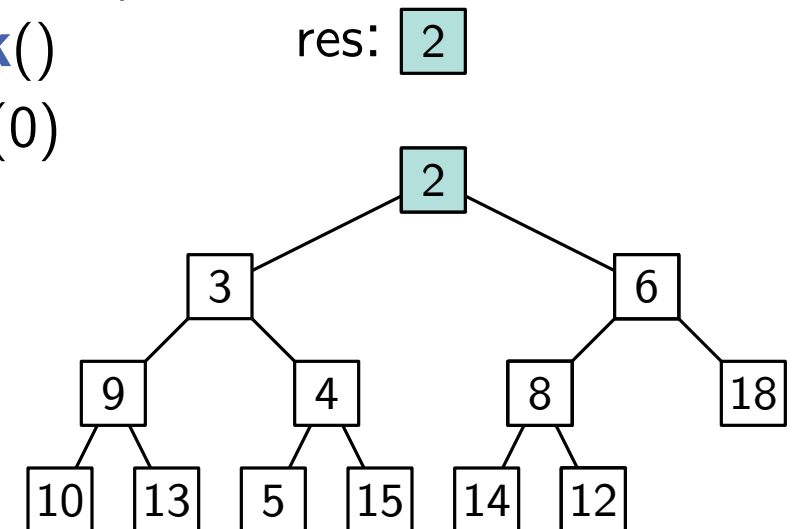
$res := A[0]$

swap($0, n() - 1$)

A .**popBack**()

sinkDown(0)

return res



Algorithmus → Pseudocode

class MINHEAP

Array A // tree as array

$n()$

leftChild(Node v)

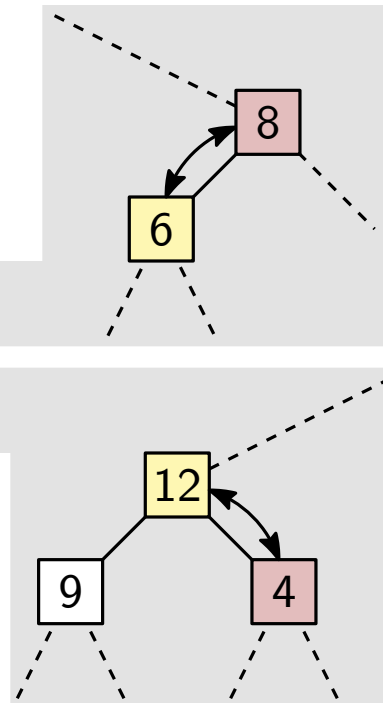
rightChild(Node v)

parent(Node v)

swap(Node u , Node v)

bubbleUp(Node v)

sinkDown(Node v)



push(Priority x)

$A.$ **pushBack**(x)

bubbleUp($n() - 1$)

popMin()

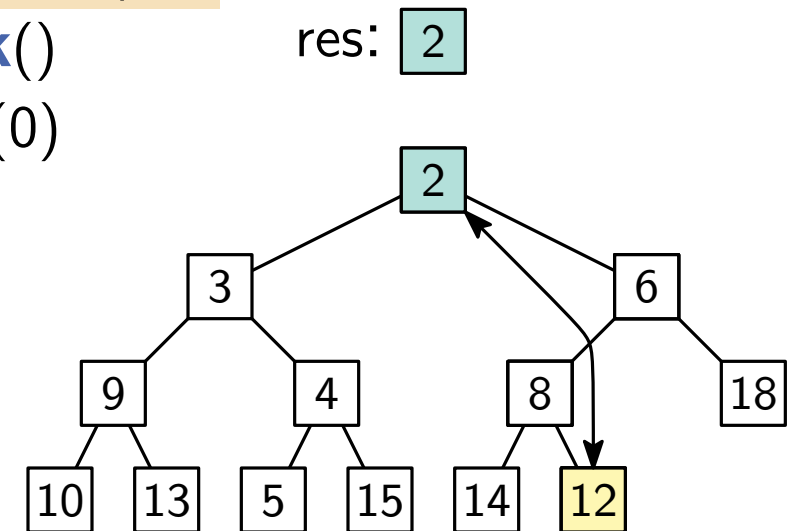
res := $A[0]$

swap($0, n() - 1$)

$A.$ **popBack**()

sinkDown(0)

return res



Algorithmus → Pseudocode

class MINHEAP

Array A // tree as array

$n()$

leftChild(Node v)

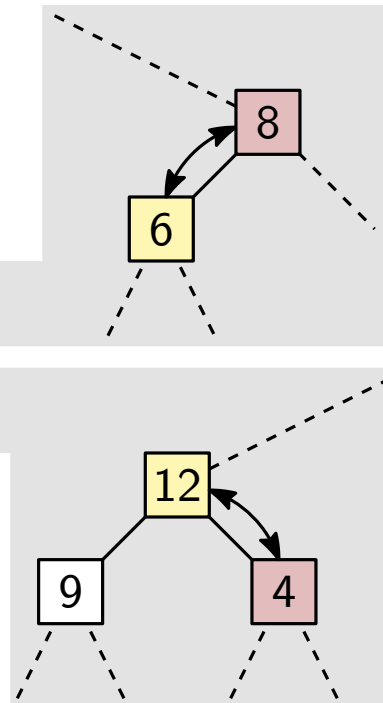
rightChild(Node v)

parent(Node v)

swap(Node u , Node v)

bubbleUp(Node v)

sinkDown(Node v)



push(Priority x)

A .pushBack(x)

bubbleUp($n() - 1$)

popMin()

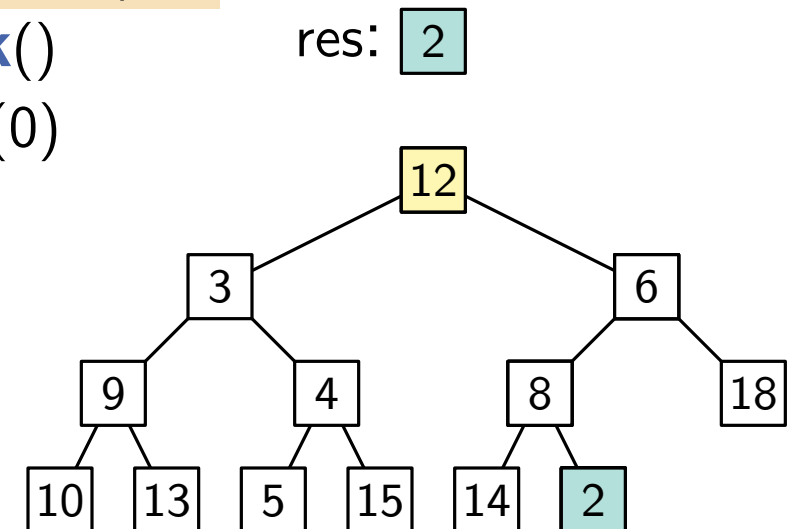
res := $A[0]$

swap(0, $n() - 1$)

A .popBack()

sinkDown(0)

return res



Algorithmus → Pseudocode

class MINHEAP

Array A // tree as array

$n()$

leftChild(Node v)

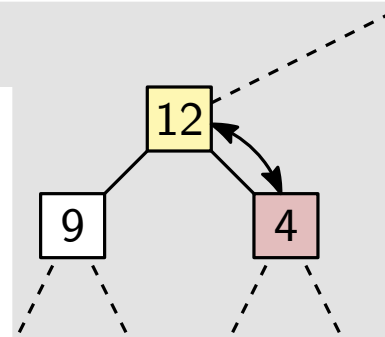
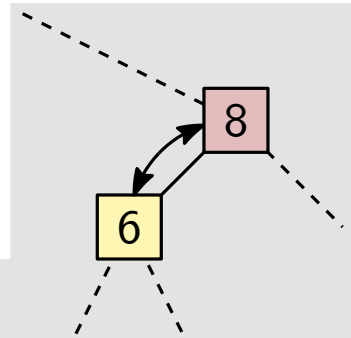
rightChild(Node v)

parent(Node v)

swap(Node u , Node v)

bubbleUp(Node v)

sinkDown(Node v)



push(Priority x)

$A.$ **pushBack**(x)

bubbleUp($n() - 1$)

popMin()

res := $A[0]$

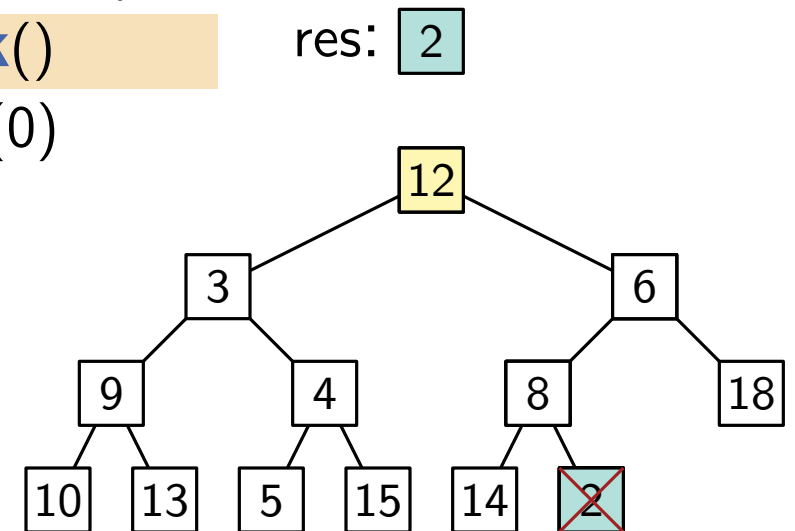
swap(0, $n() - 1$)

$A.$ **popBack**()

res: 2

sinkDown(0)

return res



Algorithmus → Pseudocode

class MINHEAP

Array A // tree as array

$n()$

$\text{leftChild}(\text{Node } v)$

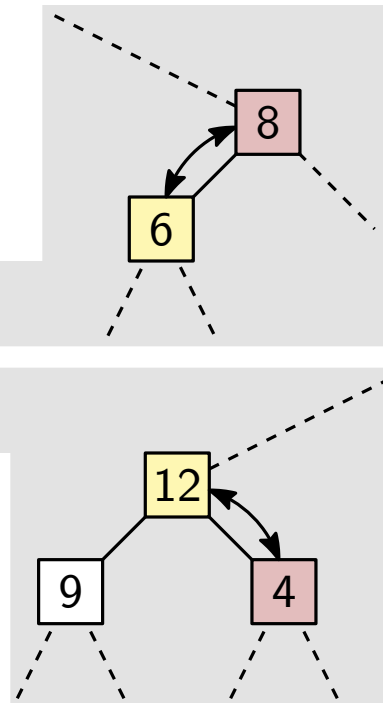
$\text{rightChild}(\text{Node } v)$

$\text{parent}(\text{Node } v)$

$\text{swap}(\text{Node } u, \text{Node } v)$

$\text{bubbleUp}(\text{Node } v)$

$\text{sinkDown}(\text{Node } v)$



$\text{push}(\text{Priority } x)$

$A.\text{pushBack}(x)$

$\text{bubbleUp}(n() - 1)$

$\text{popMin}()$

$\text{res} := A[0]$

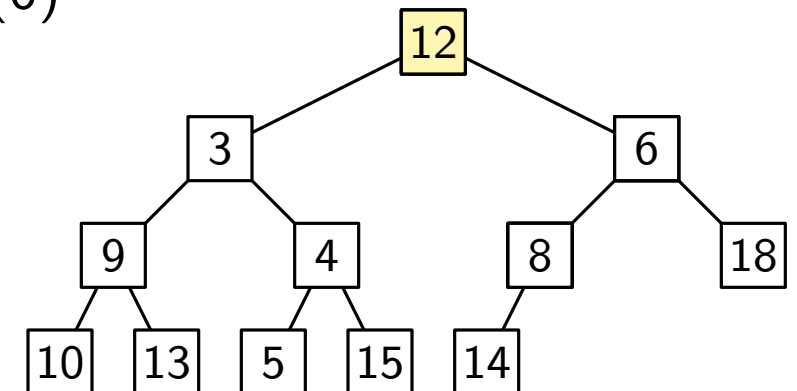
$\text{swap}(0, n() - 1)$

$A.\text{popBack}()$

res: 2

$\text{sinkDown}(0)$

return res



Algorithmus → Pseudocode

class MINHEAP

Array A // tree as array

$n()$

leftChild(Node v)

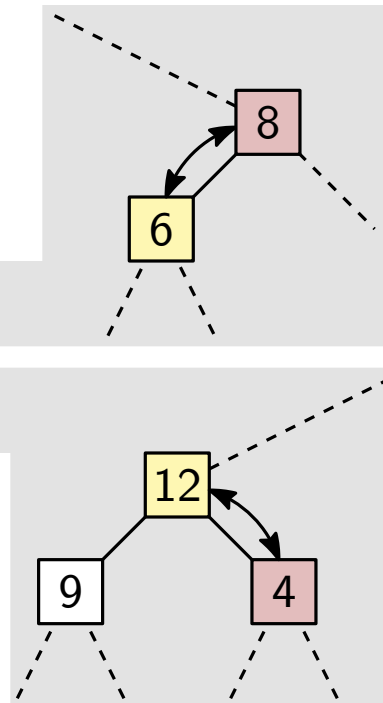
rightChild(Node v)

parent(Node v)

swap(Node u , Node v)

bubbleUp(Node v)

sinkDown(Node v)



push(Priority x)

$A.$ **pushBack**(x)

bubbleUp($n() - 1$)

popMin()

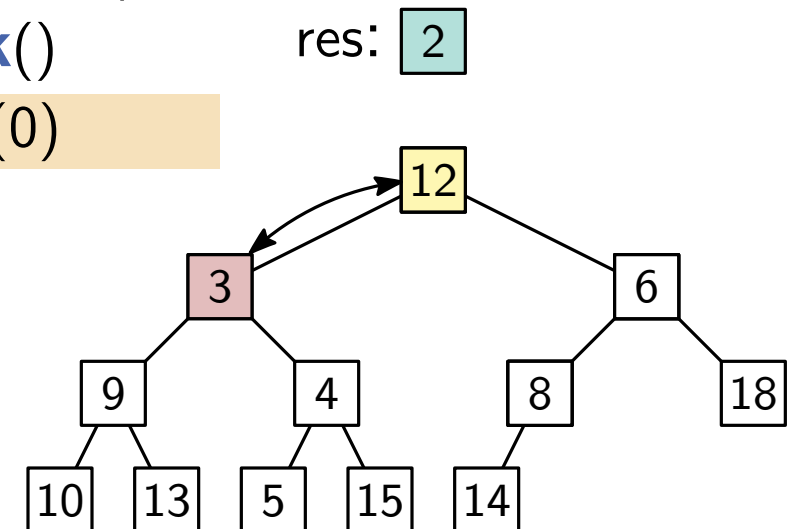
res := $A[0]$

swap(0, $n() - 1$)

$A.$ **popBack**()

sinkDown(0)

return res



Algorithmus → Pseudocode

class MINHEAP

Array A // tree as array

$n()$

leftChild(Node v)

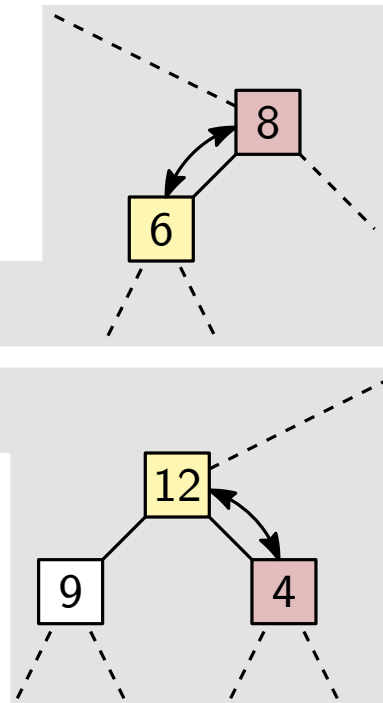
rightChild(Node v)

parent(Node v)

swap(Node u , Node v)

bubbleUp(Node v)

sinkDown(Node v)



push(Priority x)

A .**pushBack**(x)

bubbleUp($n() - 1$)

popMin()

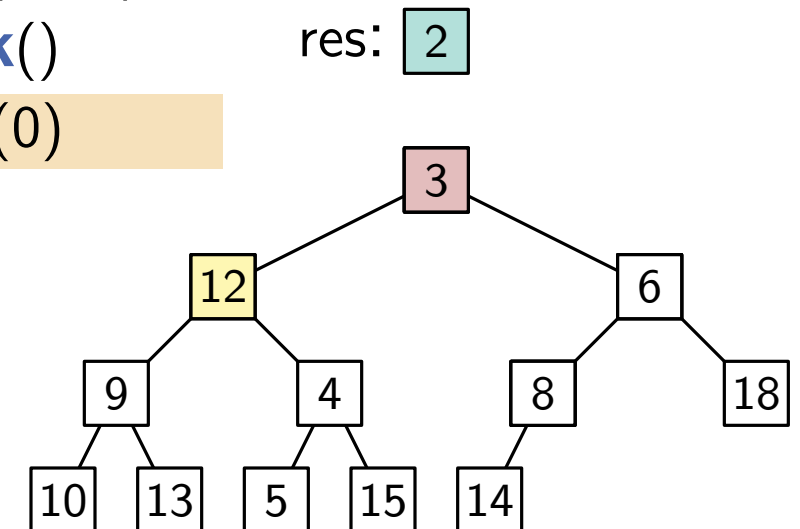
res := $A[0]$

swap(0, $n() - 1$)

A .**popBack**()

sinkDown(0)

return res



Algorithmus → Pseudocode

class MINHEAP

Array A // tree as array

$n()$

leftChild(Node v)

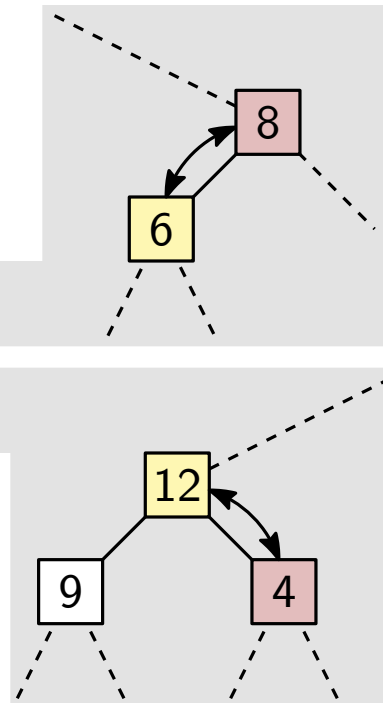
rightChild(Node v)

parent(Node v)

swap(Node u , Node v)

bubbleUp(Node v)

sinkDown(Node v)



push(Priority x)

A .**pushBack**(x)

bubbleUp($n() - 1$)

popMin()

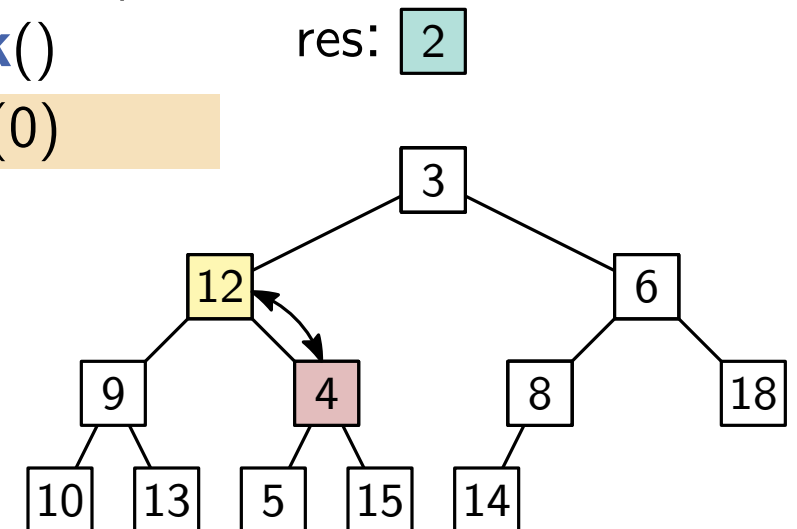
res := $A[0]$

swap(0, $n() - 1$)

A .**popBack**()

sinkDown(0)

return res



Algorithmus → Pseudocode

class MINHEAP

Array A // tree as array

$n()$

leftChild(Node v)

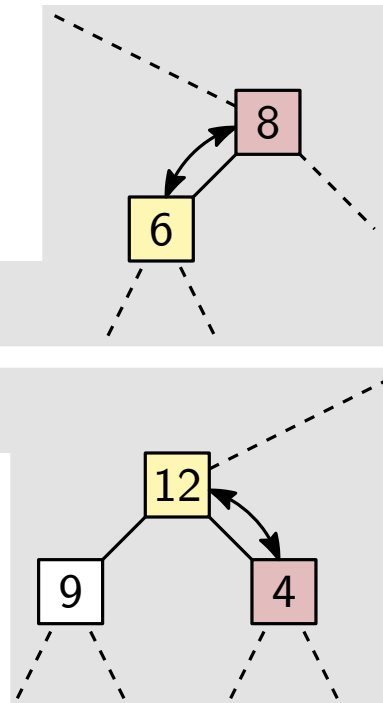
rightChild(Node v)

parent(Node v)

swap(Node u , Node v)

bubbleUp(Node v)

sinkDown(Node v)



push(Priority x)

A .**pushBack**(x)

bubbleUp($n() - 1$)

popMin()

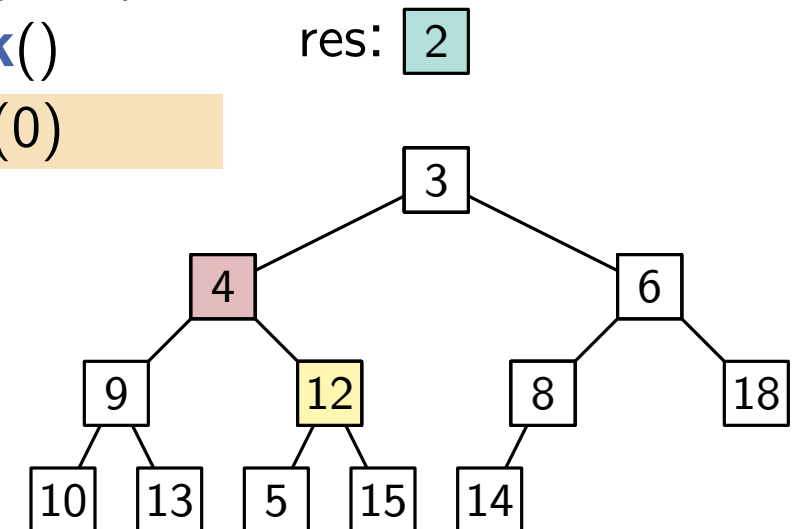
res := $A[0]$

swap(0, $n() - 1$)

A .**popBack**()

sinkDown(0)

return res



Algorithmus → Pseudocode

class MINHEAP

Array A // tree as array

$n()$

leftChild(Node v)

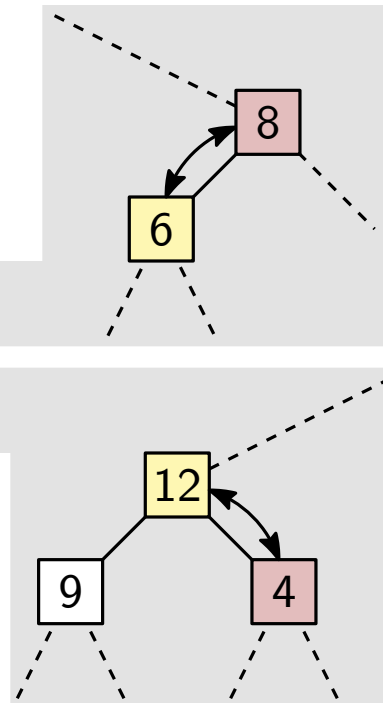
rightChild(Node v)

parent(Node v)

swap(Node u , Node v)

bubbleUp(Node v)

sinkDown(Node v)



push(Priority x)

$A.$ **pushBack**(x)

bubbleUp($n() - 1$)

popMin()

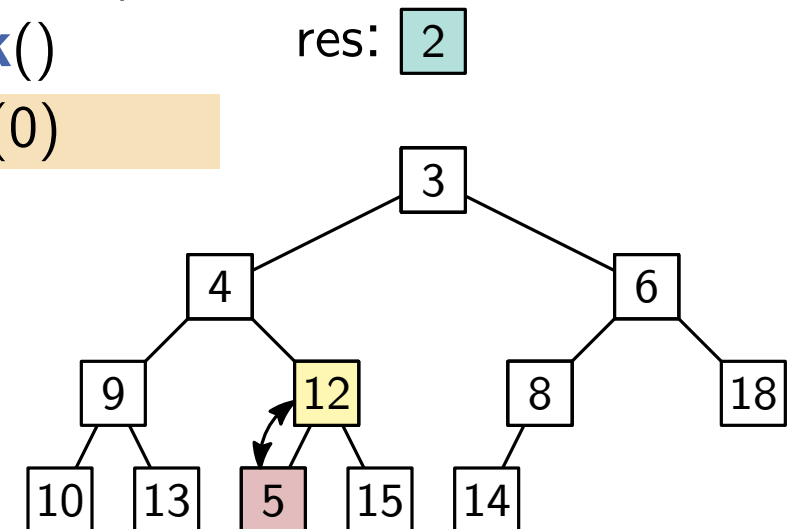
res := $A[0]$

swap(0, $n() - 1$)

$A.$ **popBack**()

sinkDown(0)

return res



Algorithmus → Pseudocode

class MINHEAP

Array A // tree as array

$n()$

leftChild(Node v)

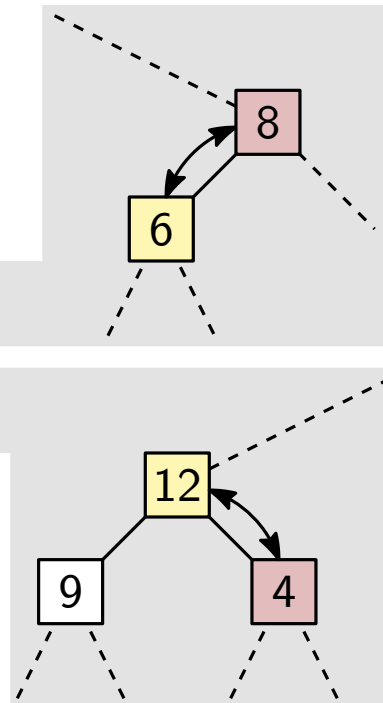
rightChild(Node v)

parent(Node v)

swap(Node u , Node v)

bubbleUp(Node v)

sinkDown(Node v)



push(Priority x)

A .**pushBack**(x)

bubbleUp($n() - 1$)

popMin()

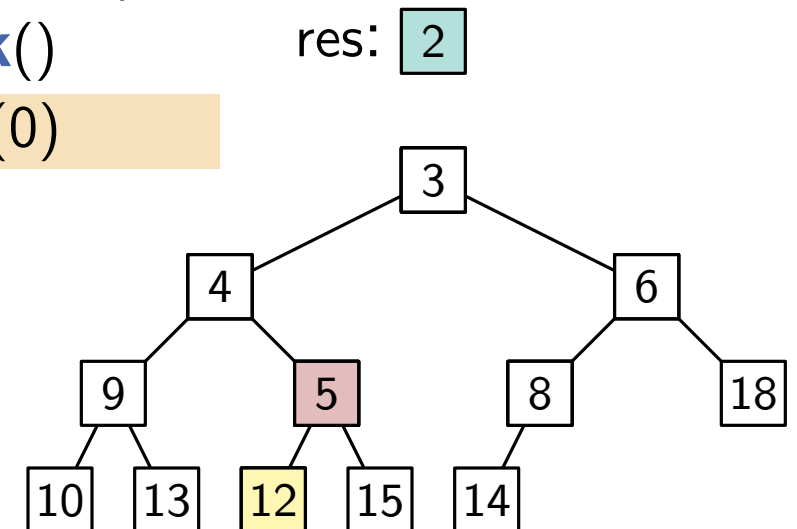
res := $A[0]$

swap(0, $n() - 1$)

A .**popBack**()

sinkDown(0)

return res



Algorithmus → Pseudocode

class MINHEAP

Array A // tree as array

$n()$

leftChild(Node v)

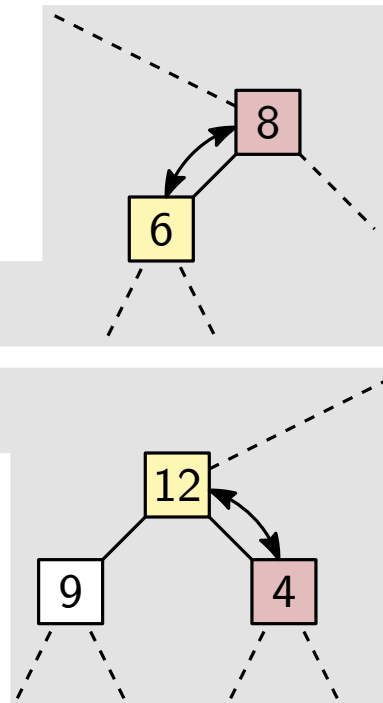
rightChild(Node v)

parent(Node v)

swap(Node u , Node v)

bubbleUp(Node v)

sinkDown(Node v)



push(Priority x)

$A.$ **pushBack**(x)

bubbleUp($n() - 1$)

popMin()

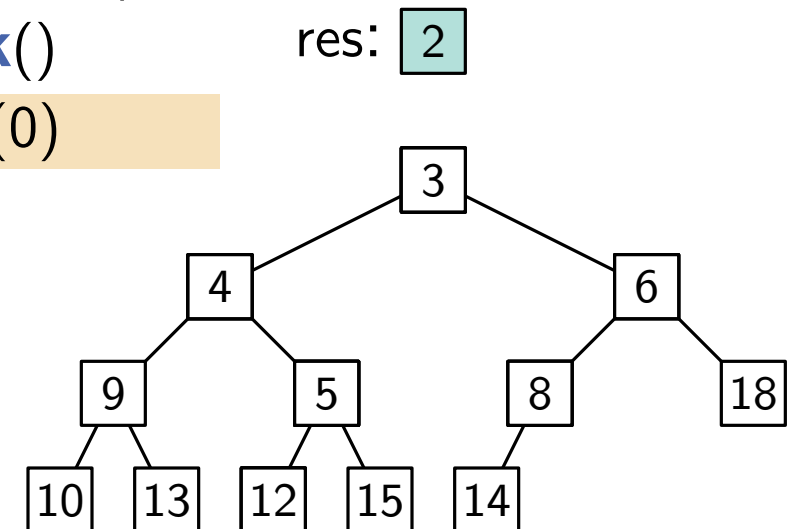
res := $A[0]$

swap(0, $n() - 1$)

$A.$ **popBack**()

sinkDown(0)

return res



Algorithmus → Pseudocode

class MINHEAP

Array A // tree as array

$n()$

leftChild(Node v)

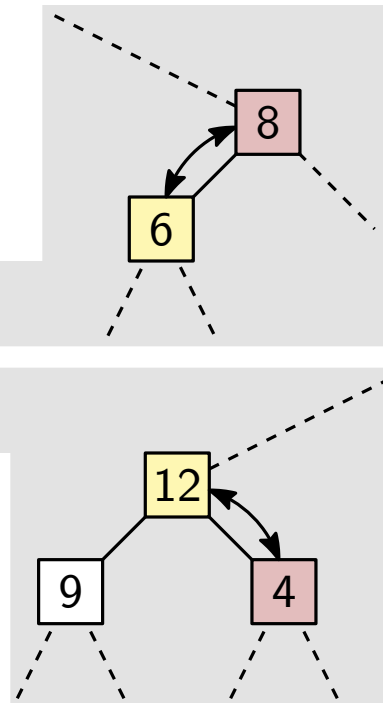
rightChild(Node v)

parent(Node v)

swap(Node u , Node v)

bubbleUp(Node v)

sinkDown(Node v)



push(Priority x)

A .**pushBack**(x)

bubbleUp($n() - 1$)

popMin()

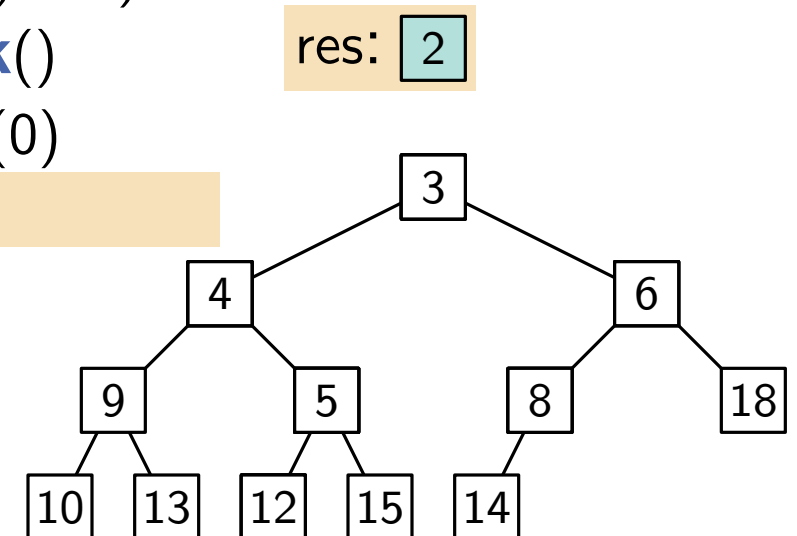
res := $A[0]$

swap(0, $n() - 1$)

A .**popBack**()

sinkDown(0)

return res



Anmerkungen

Prioritäten müssen keine Zahlen sein

- das einzige, was wir mit den Prioritäten machen: vergleichen
- Prioritäten können Elemente einer beliebigen geordneten Menge sein; z.B. Strings
- Laufzeit: $\Theta(\log n)$ Vergleiche pro Operation

Anmerkungen

Prioritäten müssen keine Zahlen sein

- das einzige, was wir mit den Prioritäten machen: vergleichen
- Prioritäten können Elemente einer beliebigen geordneten Menge sein; z.B. Strings
- Laufzeit: $\Theta(\log n)$ Vergleiche pro Operation

Heapsort

- Schritt 1: alle n Elemente mit **push** einfügen $\Theta(n \log n)$
- Schritt 2: n mal das minimale Element mit **popMin** entfernen $\Theta(n \log n)$
- damit: Elemente werden aufsteigend sortiert entnommen

Anmerkungen

Prioritäten müssen keine Zahlen sein

- das einzige, was wir mit den Prioritäten machen: vergleichen
- Prioritäten können Elemente einer beliebigen geordneten Menge sein; z.B. Strings
- Laufzeit: $\Theta(\log n)$ Vergleiche pro Operation

Heapsort

- Schritt 1: alle n Elemente mit **push** einfügen $\Theta(n \log n)$
- Schritt 2: n mal das minimale Element mit **popMin** entfernen $\Theta(n \log n)$
- damit: Elemente werden aufsteigend sortiert entnommen

Untere Schranke

- vergleichsbasiertes Sortieren braucht $\Omega(n \log n)$ → **push** oder **popMin** braucht $\Omega(\log n)$
- schlagbar, wenn Prioritäten kleine ganze Zahlen sind:
benutze Buckets, wie bei Bucketsort mit den Prioritäten als Indizes eines Arrays

Initialer Aufbau

Situation

- gegeben: Folge von Prioritäten (unsortiert)
- Ziel: mache daraus einen Heap
- einfache Lösung: rufe n mal **push** auf \rightarrow Laufzeit $\Theta(n \log n)$
- Geht es besser?

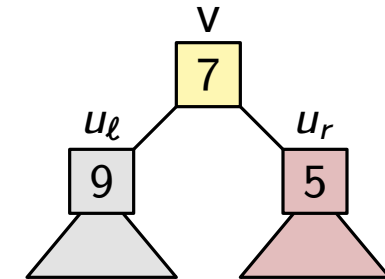
Initialer Aufbau

Situation

- gegeben: Folge von Prioritäten (unsortiert)
- Ziel: mache daraus einen Heap
- einfache Lösung: rufe n mal **push** auf \rightarrow Laufzeit $\Theta(n \log n)$
- Geht es besser?

Beobachtung

- Annahme: Teilbaum unter u_ℓ und u_r ist bereits Heap
- dann: **sinkDown**(v) macht Teilbaum unter v zum Heap
- Algo: rufe bottom-up für jeden Knoten einmal **sinkDown** auf



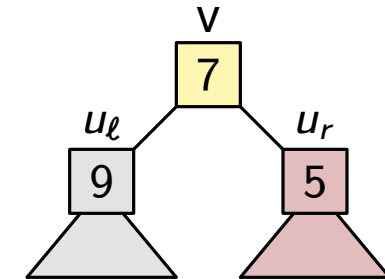
Initialer Aufbau

Situation

- gegeben: Folge von Prioritäten (unsortiert)
- Ziel: mache daraus einen Heap
- einfache Lösung: rufe n mal **push** auf \rightarrow Laufzeit $\Theta(n \log n)$
- Geht es besser?

Beobachtung

- Annahme: Teilbaum unter u_ℓ und u_r ist bereits Heap
- dann: **sinkDown**(v) macht Teilbaum unter v zum Heap
- Algo: rufe bottom-up für jeden Knoten einmal **sinkDown** auf



Vorüberlegung zur Laufzeit

- Kosten für die Wurzel: $\Theta(\log n)$
- aber: Knoten weiter unten im Baum können auch nicht so weit sinken
- und: die meisten Knoten liegen weiter unten im Baum

Initialer Aufbau: Umsetzung im Detail

```
class MINHEAP
```

```
  Array A // tree as array
```

```
  n()
```

```
  sinkDown(Node v)
```

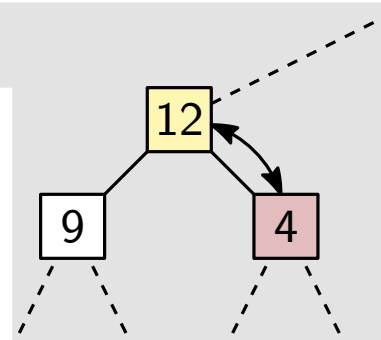
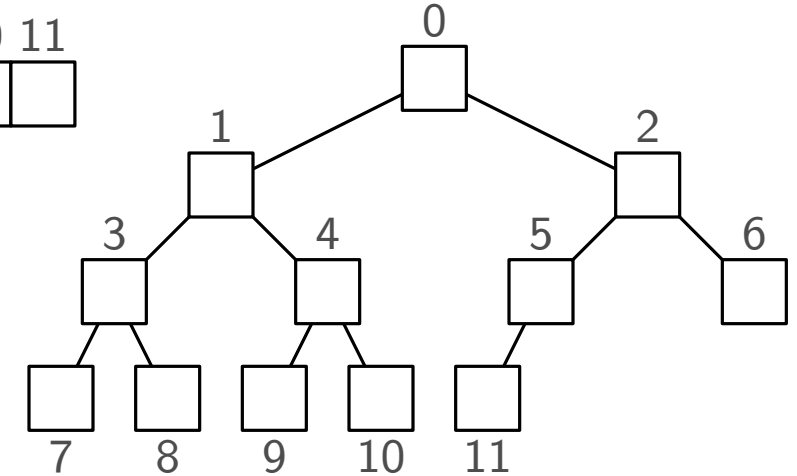
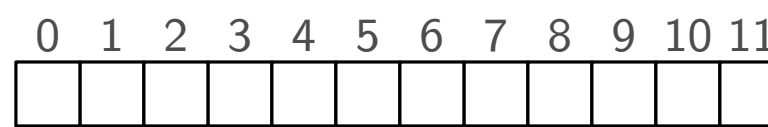
```
  buildHeap(Array priorities)
```

```
    A := priorities
```

```
    for v = n() - 1, ..., 0 do
```

```
      sinkDown(v)
```

Erinnerung: Array-Repräsentation des Baums



Initialer Aufbau: Umsetzung im Detail

```
class MINHEAP
```

```
  Array A      // tree as array
```

```
  n()
```

```
  sinkDown(Node v)
```

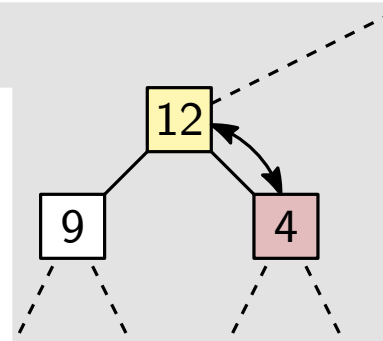
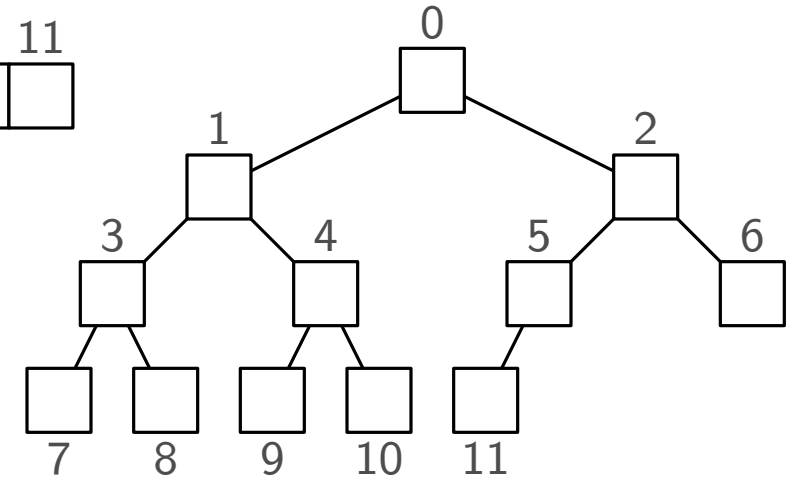
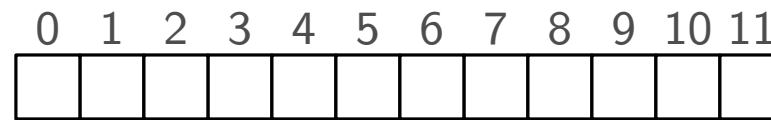
```
  buildHeap(Array priorities)
```

```
    A := priorities
```

```
    for v = n() - 1, ..., 0 do
```

```
      sinkDown(v)
```

Erinnerung: Array-Repräsentation des Baums



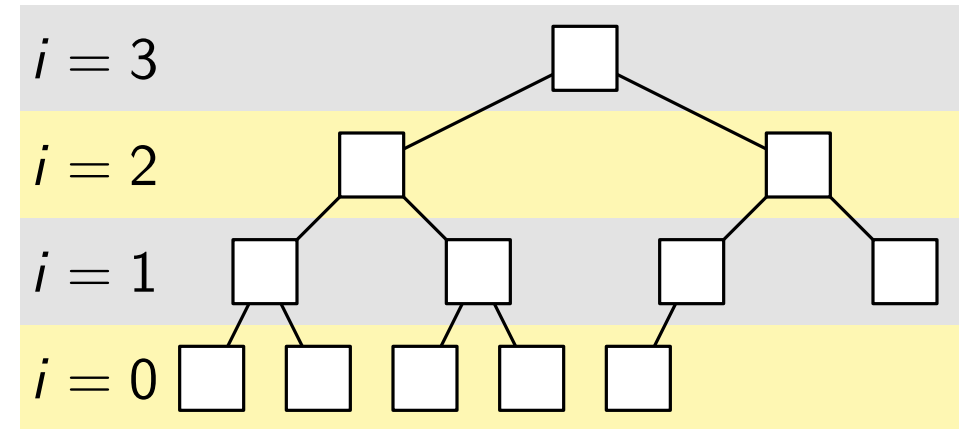
Anmerkung: Korrektheit

- **sinkDown** wird bottom-up angewendet: tieferes Layer fertig bevor höheres beginnt
- induktiv: beim Aufruf **sinkDown**(v) sind Teilbäume unter den Kindern von v schon Heaps
- nach **sinkDown**(v) ist Teilbaum unter v ein Heap

Initialer Aufbau: Laufzeit

Kosten für den Aufruf `sinkDown(v)`

- sei i die Distanz von v zu einem Blatt
- v wandert höchstens i Schritte nach unten
- Laufzeit: $\Theta(i + 1)$

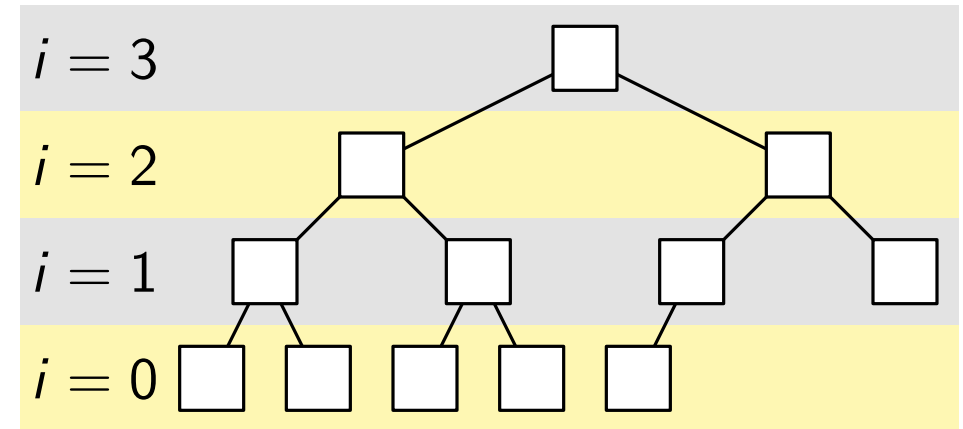




Initialer Aufbau: Laufzeit

Kosten für den Aufruf `sinkDown(v)`

- sei i die Distanz von v zu einem Blatt
- v wandert höchstens i Schritte nach unten
- Laufzeit: $\Theta(i + 1)$



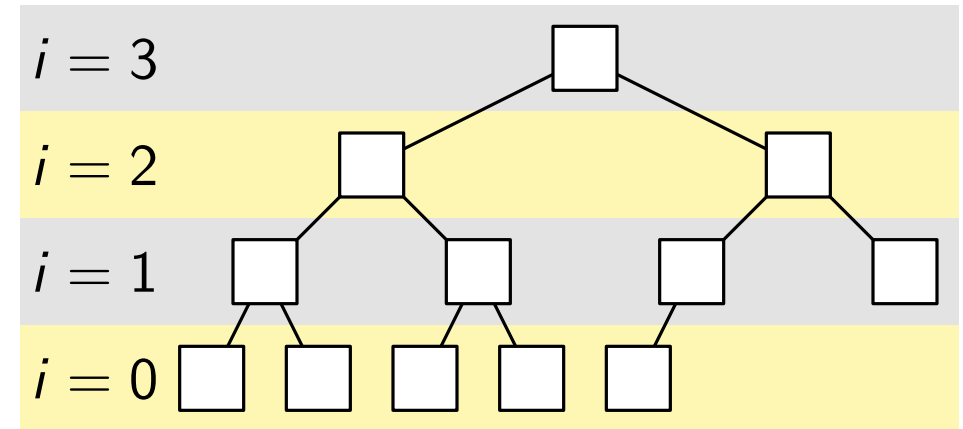
Wie viele Knoten haben wir für ein gegebenes i ?

Initialer Aufbau: Laufzeit

Kosten für den Aufruf `sinkDown(v)`

- sei i die Distanz von v zu einem Blatt
- v wandert höchstens i Schritte nach unten
- Laufzeit: $\Theta(i + 1)$

Anzahl Knoten für festes i : $\Theta\left(\frac{n}{2^i}\right)$



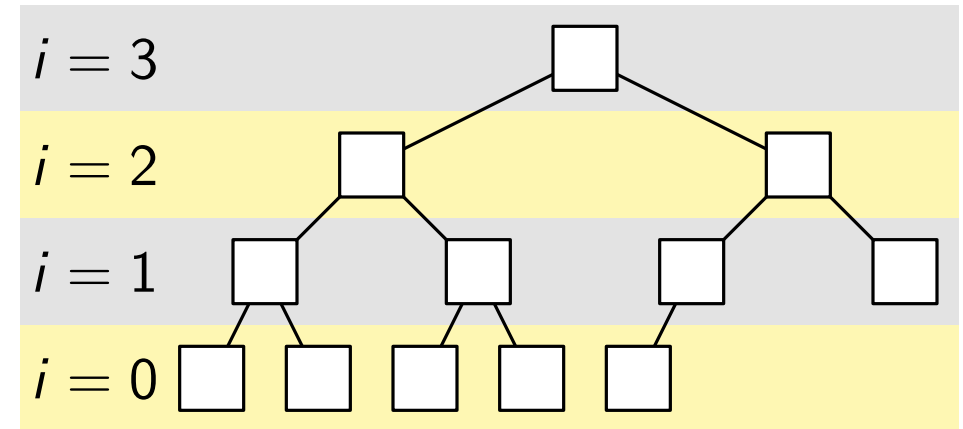
Initialer Aufbau: Laufzeit

Kosten für den Aufruf `sinkDown(v)`

- sei i die Distanz von v zu einem Blatt
- v wandert höchstens i Schritte nach unten
- Laufzeit: $\Theta(i + 1)$

Anzahl Knoten für festes i : $\Theta\left(\frac{n}{2^i}\right)$

Gesamtkosten: $\Theta\left(\sum \frac{n \cdot i}{2^i}\right) = \Theta(n)$



Initialer Aufbau: Laufzeit

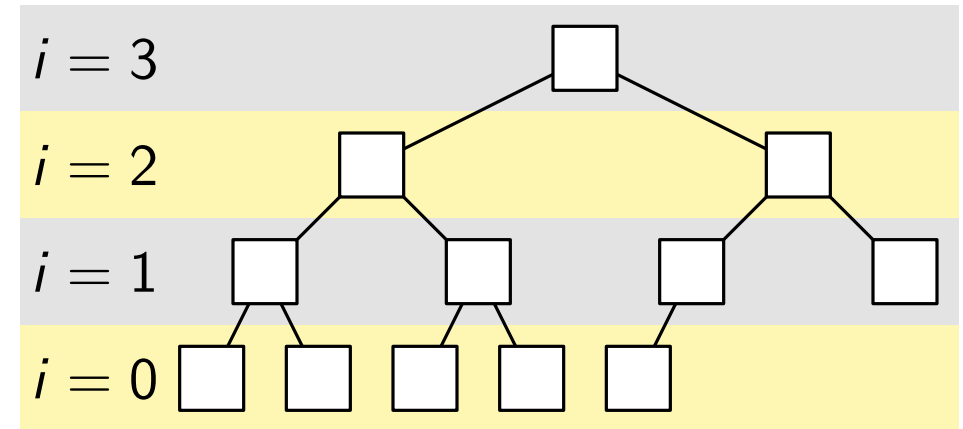
Kosten für den Aufruf `sinkDown(v)`

- sei i die Distanz von v zu einem Blatt
- v wandert höchstens i Schritte nach unten
- Laufzeit: $\Theta(i + 1)$

Anzahl Knoten für festes i : $\Theta\left(\frac{n}{2^i}\right)$

Gesamtkosten: $\Theta\left(\sum \frac{n \cdot i}{2^i}\right) = \Theta(n)$

Nebenrechnung:
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots$$



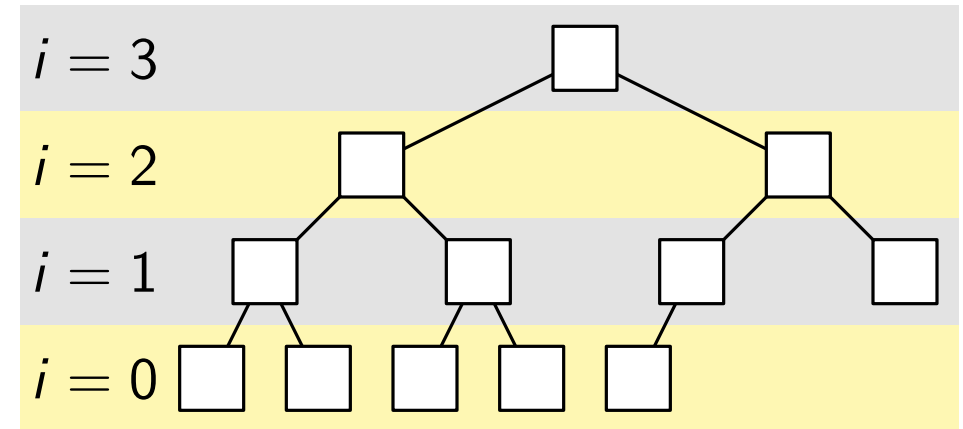
Initialer Aufbau: Laufzeit

Kosten für den Aufruf `sinkDown(v)`

- sei i die Distanz von v zu einem Blatt
- v wandert höchstens i Schritte nach unten
- Laufzeit: $\Theta(i + 1)$

Anzahl Knoten für festes i : $\Theta\left(\frac{n}{2^i}\right)$

Gesamtkosten: $\Theta\left(\sum \frac{n \cdot i}{2^i}\right) = \Theta(n)$



Nebenrechnung:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$+ \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$+ \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$\vdots$$

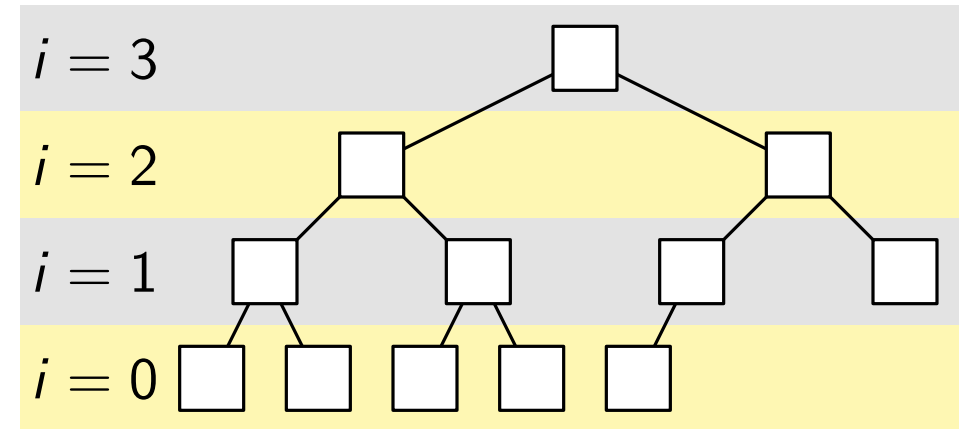
Initialer Aufbau: Laufzeit

Kosten für den Aufruf `sinkDown(v)`

- sei i die Distanz von v zu einem Blatt
- v wandert höchstens i Schritte nach unten
- Laufzeit: $\Theta(i + 1)$

Anzahl Knoten für festes i : $\Theta\left(\frac{n}{2^i}\right)$

Gesamtkosten: $\Theta\left(\sum \frac{n \cdot i}{2^i}\right) = \Theta(n)$



Nebenrechnung:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \leq 1$$

$$+ \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \leq \frac{1}{2}$$

$$+ \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \leq \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

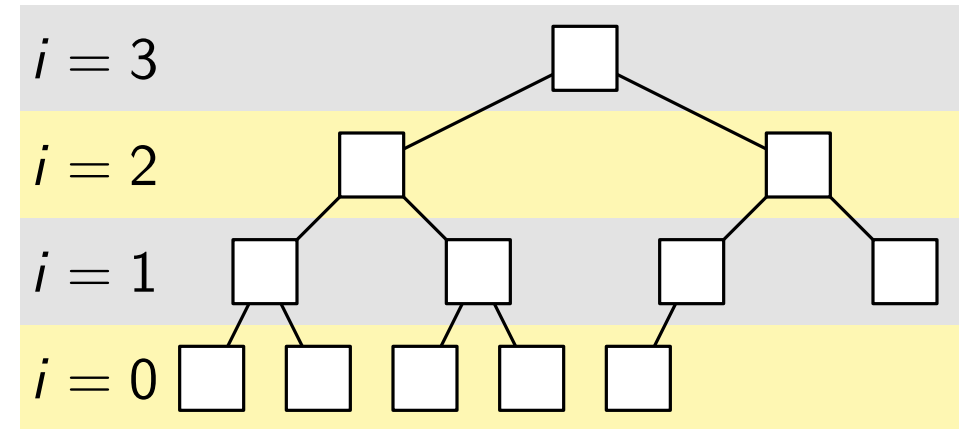
Initialer Aufbau: Laufzeit

Kosten für den Aufruf `sinkDown(v)`

- sei i die Distanz von v zu einem Blatt
- v wandert höchstens i Schritte nach unten
- Laufzeit: $\Theta(i + 1)$

Anzahl Knoten für festes i : $\Theta\left(\frac{n}{2^i}\right)$

Gesamtkosten: $\Theta\left(\sum \frac{n \cdot i}{2^i}\right) = \Theta(n)$



Nebenrechnung:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots = \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \leq 1 \\ + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \leq \frac{1}{2} \\ + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \leq \frac{1}{4} \\ \vdots \end{array} \right\} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leq 2$$

Priority-Queues in der Wildnis

C++

https://en.cppreference.com/w/cpp/container/priority_queue

std::priority_queue

A priority queue is a container adaptor that provides constant time lookup of the largest (by default) element, at the expense of logarithmic insertion and extraction.

A user-provided Compare can be supplied to change the ordering, e.g. using `std::greater<T>` would cause the smallest element to appear as the `top()`.

<code>top</code>	accesses the top element (public member function)
<code>push</code>	inserts element and sorts the underlying container (public member function)
<code>pop</code>	removes the top element (public member function)

Beachte

- unterstützt keine weiteren Operationen wie **decPrio** (für Dijkstra nötig)
- nutze dafür Lazy Evaluation Trick (gleich)

Priority-Queues in der Wildnis

Java <https://docs.oracle.com/en/java/javase/17/docs/api/java.base/java/util/PriorityQueue.html>
Class PriorityQueue<E>

The *head* of this queue is the *least* element with respect to the specified ordering. If multiple elements are tied for least value, the head is one of those elements -- ties are broken arbitrarily.

Implementation note: this implementation provides $O(\log(n))$ time for the enqueueing and dequeuing methods (`offer`, `poll` and `add`); linear time for the `remove(Object)` and `contains(Object)` methods; and constant time for the retrieval methods (`peek` and `size`).

Method Summary

Modifier and Type	Method	Description
boolean	<code>add(E e)</code>	Inserts the specified element into this priority queue.
boolean	<code>offer(E e)</code>	Inserts the specified element into this priority queue.
E	<code>peek()</code>	Retrieves, but does not remove, the head of this queue, or returns null if this queue is empty.
E	<code>poll()</code>	Retrieves and removes the head of this queue, or returns null if this queue is empty.

Priority-Queues in der Wildnis

Java <https://docs.oracle.com/en/java/javase/17/docs/api/java.base/java/util/PriorityQueue.html>
Class PriorityQueue<E>

The *head* of this queue is the *least* element with respect to the specified ordering. If multiple elements are tied for least value, the head is one of those elements -- ties are broken arbitrarily.

Implementation note: this implementation provides $O(\log(n))$ time for the enqueueing and dequeuing methods (`offer`, `poll` and `add`); linear time for the `remove(Object)` and `contains(Object)` methods; and constant time for the retrieval methods (`peek` and `size`).

Method Summary

Modifier and Type	Method	Description
boolean	<code>add(E e)</code>	Inserts the specified element into this priority queue.
boolean	<code>offer(E e)</code>	Inserts the specified element into this priority queue.
E	<code>peek()</code>	Returns, but does not remove, the head of this queue.

Beachte

- unterstützt keine weiteren Operationen wie **decPrio** (für Dijkstra nötig)
- nutze dafür Lazy Evaluation Trick (gleich)

decPrio mittels Lazy Evaluation

Grundsätzliche Idee

- markiere zu ändernden Knoten als veraltet
- füge Änderung als neuen Knoten ein
- überspringe veraltete Knoten bei **popMin**

decPrio mittels Lazy Evaluation

Grundsätzliche Idee

- markiere zu ändernden Knoten als veraltet
- füge Änderung als neuen Knoten ein
- überspringe veraltete Knoten bei **popMin**

Tatsächliche Laufzeit

- **decPrio** hat dann die selbe Laufzeit wie **push**
- **popMin** ist aber manchmal teuer: viele veraltete Knoten müssen übersprungen werden
- **decPrio** ist also faul und hinterlässt zusätzliche Arbeit für **popMin**

decPrio mittels Lazy Evaluation

Grundsätzliche Idee

- markiere zu ändernden Knoten als veraltet
- füge Änderung als neuen Knoten ein
- überspringe veraltete Knoten bei **popMin**

Tatsächliche Laufzeit

- **decPrio** hat dann die selbe Laufzeit wie **push**
- **popMin** ist aber manchmal teuer: viele veraltete Knoten müssen übersprungen werden
- **decPrio** ist also faul und hinterlässt zusätzliche Arbeit für **popMin**

Amortisierte Laufzeit

- charge zusätzliche Kosten bei **popMin** auf verantwortlichen **decPrio**-Aufruf
- **popMin** wird so alle Kosten los außer für ein nicht-veraltetes Element $\rightarrow \Theta(\log n)$
- jedem **decPrio**-Aufruf wird nur einmal Kosten zugewiesen $\rightarrow \Theta(\log n)$

Lazy Evaluation für Dijkstra

Dijkstra(*Graph G, Node s*)

$d :=$ Array of size n initialized with ∞

$d[s] := 0$

PriorityQueue $Q :=$ empty priority queue

for Node v in V **do**

$Q.\text{push}(v, d[v])$

while $Q \neq \emptyset$ **do**

$u := Q.\text{popMin}()$

for Node v in $N(u)$ **do**

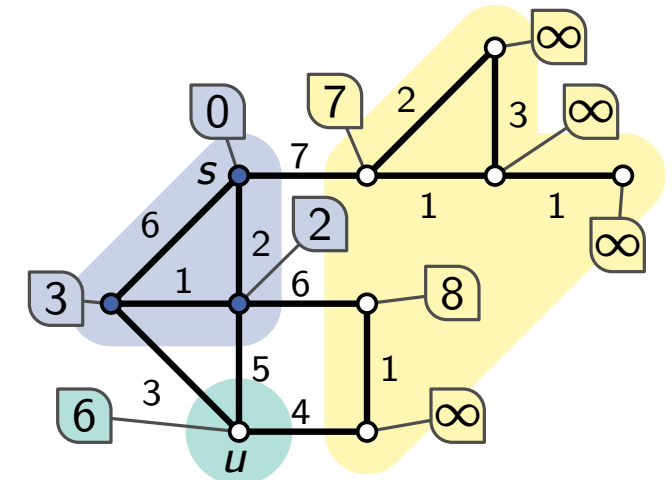
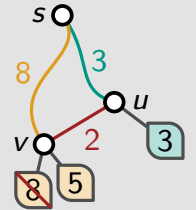
if $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$ **then**

$d[v] := d[u] + \text{len}(u, v)$

$Q.\text{decPrio}(v, d[v])$

Erinnerung: Explorieren von u

- betrachte alle Nachbarn v von u
- falls $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



- bereits exploriert
- noch nicht exploriert
- X aktueller Wert für $d[\cdot]$

Lazy Evaluation für Dijkstra

Dijkstra(*Graph G, Node s*)

$d :=$ Array of size n initialized with ∞
 $d[s] := 0$

PriorityQueue $Q :=$ empty priority queue

for Node v in V **do**

$Q.\text{push}(v, d[v])$

while $Q \neq \emptyset$ **do**

$u := Q.\text{popMin}()$

for Node v in $N(u)$ **do**

if $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$ **then**

$d[v] := d[u] + \text{len}(u, v)$

$Q.\text{decPrio}(v, d[v])$

Dijkstra(*Graph G, Node s*)

$d :=$ Array of size n initialized with ∞
 $d[s] := 0$

PriorityQueue $Q :=$ PQ containing only s

done := Array of size n init with FALSE

while $Q \neq \emptyset$ **do**

$u := Q.\text{popMin}()$

if done[u] **then continue**

for Node v in $N(u)$ **do**

if $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$ **then**

$d[v] := d[u] + \text{len}(u, v)$

$Q.\text{push}(v, d[v])$

 done[u] = TRUE

Zusammenfassung

Priority-Queue

- **push**(x) Element mit Priorität x einfügen
- **popMin**() Element mit minimaler Priorität extrahieren
- Trick für weitere Operationen (z.B. **decPrio**): Lazy Evaluation
 - markiere zu ändernden Knoten als veraltet → merken wir bei **popMin**

Zusammenfassung

Priority-Queue

- **push**(x) Element mit Priorität x einfügen
- **popMin**() Element mit minimaler Priorität extrahieren
- Trick für weitere Operationen (z.B. **decPrio**): Lazy Evaluation
 - markiere zu ändernden Knoten als veraltet → merken wir bei **popMin**

Binärer Heap

- ausreichend viel Ordnung, um Minimum schnell zu finden
- ausreichend wenig Ordnung, um diese nach einer Änderung wieder herzustellen
- Operationen in $\Theta(\log n)$ und sehr schnell in der Praxis

Zusammenfassung

Priority-Queue

- **push**(x) Element mit Priorität x einfügen
- **popMin**() Element mit minimaler Priorität extrahieren
- Trick für weitere Operationen (z.B. **decPrio**): Lazy Evaluation
 - markiere zu ändernden Knoten als veraltet → merken wir bei **popMin**

Binärer Heap

- ausreichend viel Ordnung, um Minimum schnell zu finden
- ausreichend wenig Ordnung, um diese nach einer Änderung wieder herzustellen
- Operationen in $\Theta(\log n)$ und sehr schnell in der Praxis

Geht es besser?

- etwas mehr Unordnung → aufräumen wenn nötig
- Binomial-Heap: verbessert **push** auf amortisiert $\Theta(1)$
- Fibonacci-Heap: verbessert zusätzlich **decPrio** auf amortisiert $\Theta(1)$