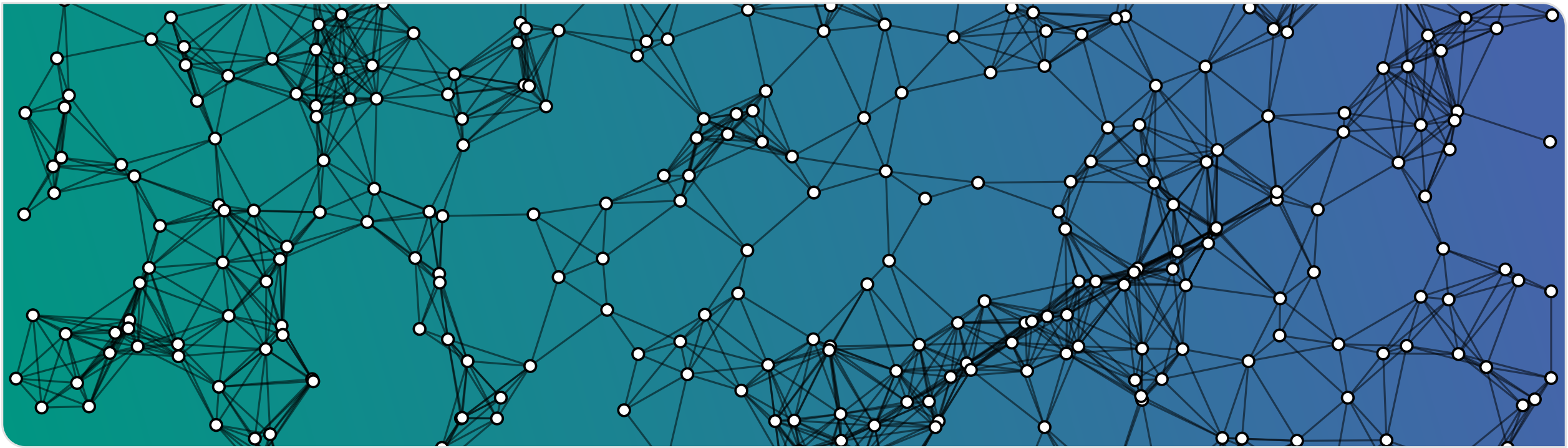
Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen 1

Prioritätswarteschlange: binärer Heap



Erinnerung: Priority-Queue für Dijkstra

Dijkstras Algorithmus (Berechnung kürzester Wege)

- pro Schritt: finde unexplorierten Knoten mit kleinster aktuell bekannter Distanz
- gewünschte Datenstruktur: Priority-Queue
  - **push**$(v, 7)$: füge v mit Priorität 7 ein
  - **popMin**$()$: extrahiere Element mit kleinster Priorität
  - **decPrio**$(v, 4)$: verkleinere Priorität von v auf 4

Anmerkung

- Priorität wird oft auch **Schlüssel (key)** genannt
- weitere gängige Namen für die Operationen: **insert**, **extractMin**, **decreaseKey**

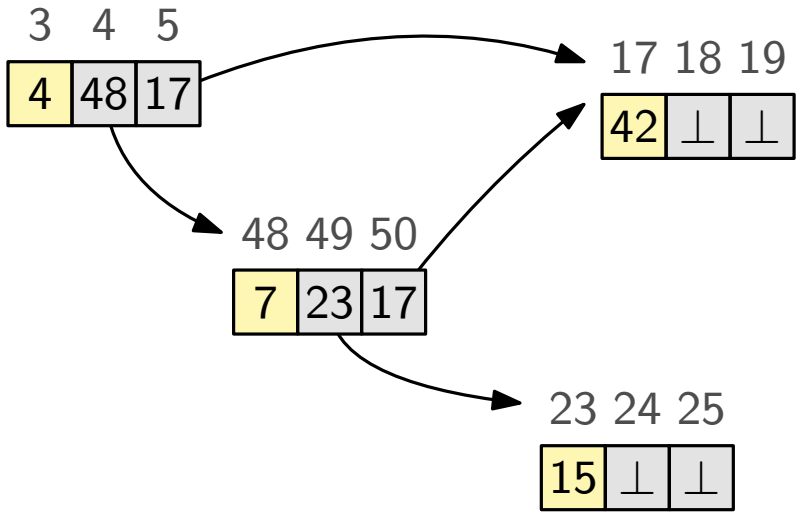
Ziel für heute

- Datenstruktur entwickeln, die diese Operationen unterstützt
- jede Operation sollte schnell sein ($O(\log n)$)
- zunächst: nur **push** und **popMin**

Erinnerung und Anmerkung: Verzeigerte Strukturen

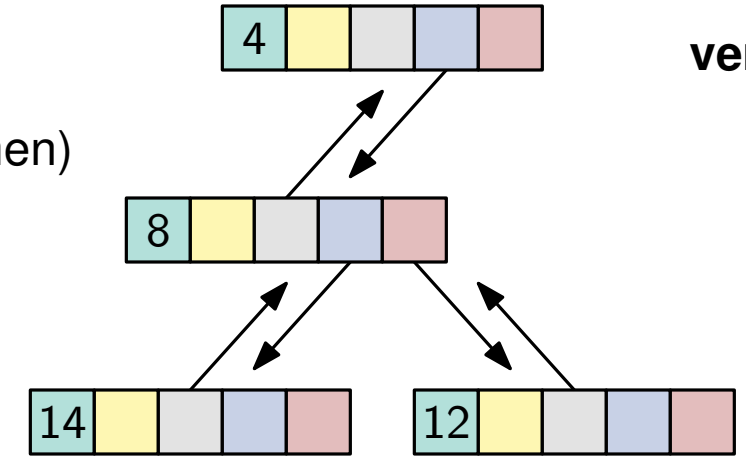
Verzeigerte Strukturen

- viele kleine Stückchen Speicher (Knoten)
- ein Knoten speichert:
  - Daten, die uns tatsächlich interessieren
  - Speicheradressen anderer Knoten (Zeiger)
- Zugriff durch Navigation entlang Zeiger

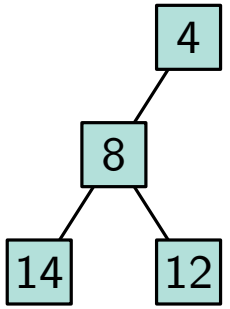


Heute: Binärer Baum

- jeder Knoten speichert:
  - Priorität
  - andere Daten (z.B. Knoten eines Graphen)
  - linkes und rechtes Kind
  - Elternknoten
- vereinfachte Darstellung: zeige nur Prioritäten; alles andere ist implizit



vereinfachte Darstellung



Wo liegt die Schwierigkeit?

Lösung 1: extreme Ordnung

- speichere Elemente als sortierte Folge (nach Priorität)
- super: **popMin** geht in $O(1)$
- Problem: **push** ist schwierig $\rightarrow \Theta(n)$

  (das leidige Problem: in Listen ist Suche langsam, in Arrays ist Einfügen langsam)

Erinnerung:

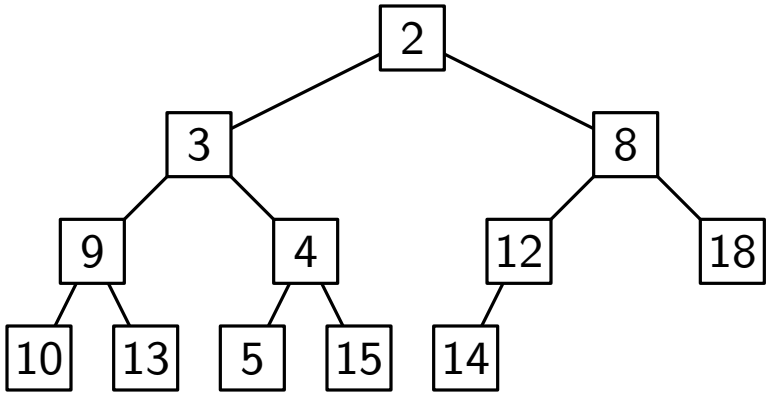
- **push**(x): Element mit Priorität x einfügen
- **popMin**$()$: Element mit kleinster Priorität extrahieren

Lösung 2: extreme Unordnung

- speichere Elemente als (unsortierte) Folge
- super: **push** geht in $O(1)$
- Problem: **popMin** ist schwierig $\rightarrow \Theta(n)$

Gute Lösung: Binärbaum mit ein bisschen Ordnung

- sortiere jeden Pfad von der Wurzel zu einem Blatt
- genug Ordnung um das Minimum schnell zu finden
- kurze sortierte Pfade $\rightarrow$ Sortierung aufrechterhalten billig



Binärer Min-Heap

Min-Heap Eigenschaft

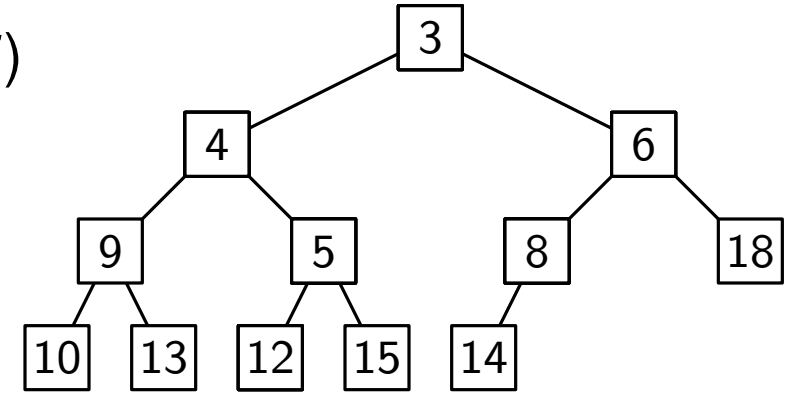
- Priorität eines Knotens $\leq$ Prioritäten der Kinder
- damit gilt: alle Wurzel–Blatt Pfade sind sortiert
- und: Minimum in der Wurzel

Erinnerung:

- **push**(x): Element mit Priorität x einfügen
- **popMin**$()$: Element mit kleinster Priorität extrahieren

Form des Baumes: vollständiger Binärbaum

- außer letztes Layer: alle voll besetzt (2^i Knoten auf Layer i)
- letztes Layer: von links nach rechts gefüllt
- beachte: $\Theta(\log n)$ viele Layer



Todo: Aufrechterhalten dieser beiden Eigenschaften

- **push**(x): x erstmal als neues Blatt unten anhängen
- dann: x auf dem Pfad zur Wurzel nach oben tauschen (bubble-up)
- **popMin**$()$: Wurzel entfernen und durch letztes Blatt ersetzten
- dann: Wurzel zum kleineren Kind nach unten tauschen (sink-down)

Laufzeit: $\Theta(\log n)$

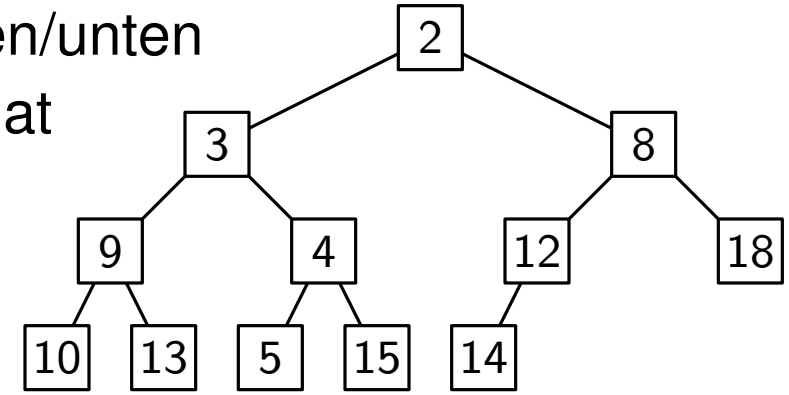
Binärer Min-Heap: Überblick

Invariante
- Heap-Eigenschaft: Elter $\leq$ Kind
- Form: vollständiger Binärbaum

Operation push(x)
- füge x als neues Blatt ein
- tausche x hoch solange nötig

Operation popMin()
- ersetze Wurzel durch letztes Blatt x
- tausche x runter solange nötig

Beachte
- erster Schritt der Operationen verletzt Heap-Eigenschaft nur an einer Stelle
- Fix: tausche den entsprechenden Knoten iterativ nach oben/unten
- nur $\Theta(\log n)$ Tauschoperationen, da Baum Höhe $\Theta(\log n)$ hat

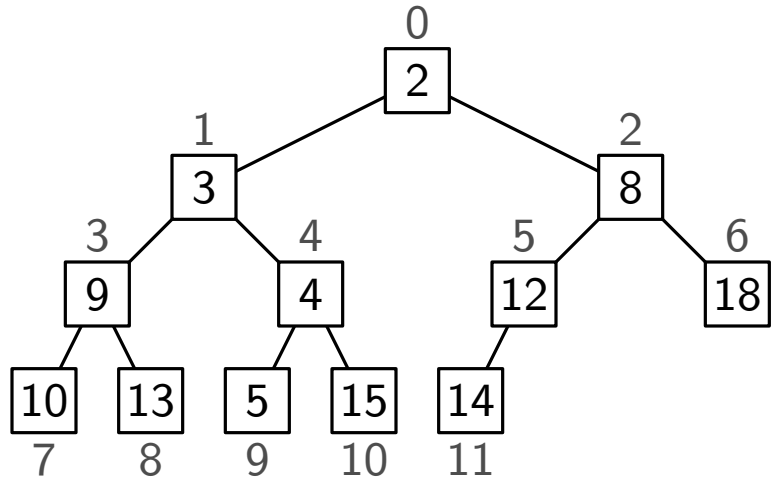


Weitere Operationen: Priorität ändern, Eintrag löschen
- können ähnlich implementiert werden
- in vielen Implementierungen nicht verfügbar
- Trick: Lazy Evaluation (später)

Umsetzung als Array

In der Praxis effiziente Repräsentation

- Arrays oft effizienter als verzeigerte Struktur
- Struktur eigentlich klar: vollständiger Binärbaum
- speichere Knoten hintereinander in einem Array



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	8	9	4	12	18	10	13	5	15	14

Repräsentation eines Knotens

- sei $v \in [0, n)$ eine ganze Zahl
- v repräsentiert den Knoten an Stelle v im Array

Kind- und Elternknoten von v

- linkes Kind: $2v + 1$
- rechtes Kind: $2v + 2$
- Elternknoten: $\left\lfloor \frac{v-1}{2} \right\rfloor$

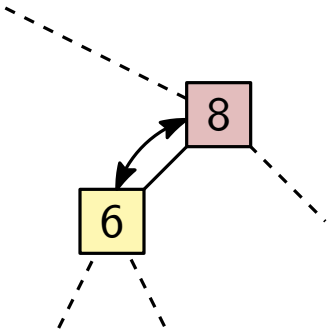
Beweisskizze

- Knoten auf Lage $i - 1$: $[2^{i-1} - 1, 2^i - 2]$
- Knoten auf Lage i: $[2^i - 1, 2^{i+1} - 2]$

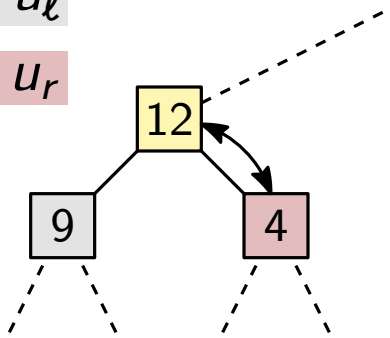
Algorithmus → Pseudocode (Grundoperationen)

```
class MinHeap
    Array A       // tree as array
    n()
        return A.size()
    leftChild(Node v)
        return 2v + 1
    rightChild(Node v)
        return 2v + 2
    parent(Node v)
        return ⌊(v−1)/2⌋
    swap(Node u, Node v)
        A[u], A[v] := A[v], A[u]
```

```
bubbleUp(Node v)
    if v ≠ 0 and A[v] < A[parent(v)] then
        swap(v, parent(v))
        bubbleUp(parent(v))
```

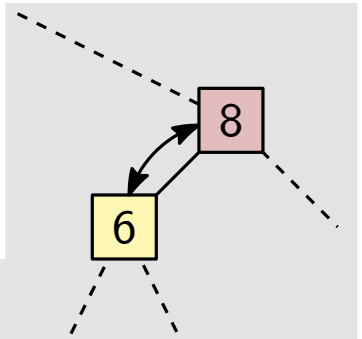


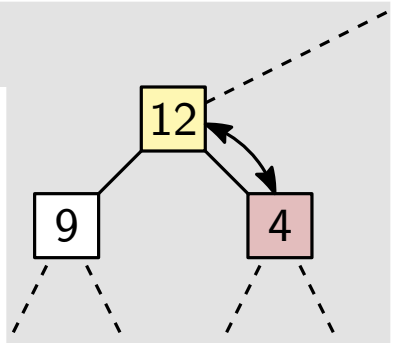

```
sinkDown(Node v)
    u_ℓ, u_r := leftChild(v), rightChild(v)
    u := v      // minimum of the three nodes
    if u_ℓ < n() and A[u_ℓ] < A[u] then u := u_ℓ
    if u_r < n() and A[u_r] < A[u] then u := u_r
    if u ≠ v then
        swap(u, v)
        sinkDown(u)
```



Algorithmus → Pseudocode

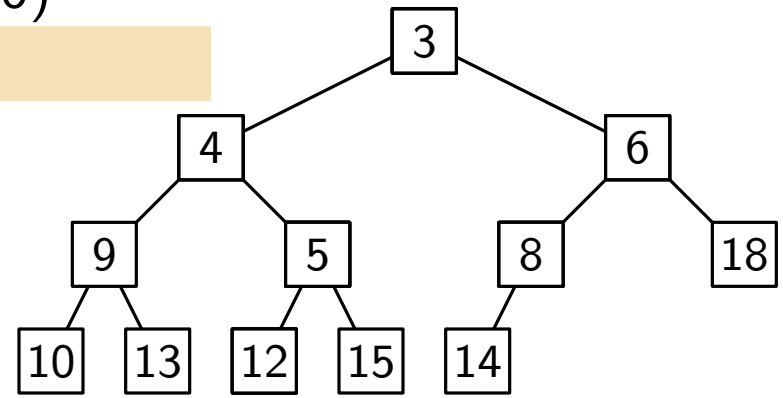
```
class MinHeap
    Array A      // tree as array
    n()
    leftChild(Node v)
    rightChild(Node v)
    parent(Node v)
    swap(Node u, Node v)

    bubbleUp(Node v)

    sinkDown(Node v)
```






```
push(Priority x)
    A.pushBack(x)
    bubbleUp(n() − 1)

popMin()
    res := A[0]
    swap(0, n() − 1)
    A.popBack()
    sinkDown(0)
    return res
```

res: 2



Anmerkungen

Prioritäten müssen keine Zahlen sein

- das einzige, was wir mit den Prioritäten machen: vergleichen
- Prioritäten können Elemente einer beliebigen geordneten Menge sein; z.B. Strings
- Laufzeit: $\Theta(\log n)$ Vergleiche pro Operation

Heapsort

- Schritt 1: alle n Elemente mit **push** einfügen $\Theta(n \log n)$
- Schritt 2: n mal das minimale Element mit **popMin** entfernen $\Theta(n \log n)$
- damit: Elemente werden aufsteigend sortiert entnommen

Untere Schranke

- vergleichsbasiertes Sortieren braucht $\Omega(n \log n) \rightarrow$ **push** oder **popMin** braucht $\Omega(\log n)$
- schlagbar, wenn Prioritäten kleine ganze Zahlen sind:
  benutze Buckets, wie bei Bucketsort mit den Prioritäten als Indizes eines Arrays

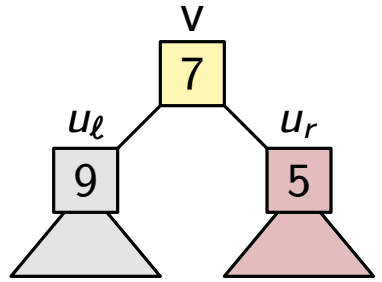
Initialer Aufbau

Situation

- gegeben: Folge von Prioritäten (unsortiert)
- Ziel: mache daraus einen Heap
- einfache Lösung: rufe n mal **push** auf $\rightarrow$ Laufzeit $\Theta(n \log n)$
- Geht es besser?

Beobachtung

- Annahme: Teilbaum unter u_ℓ und u_r ist bereits Heap
- dann: **sinkDown**(v) macht Teilbaum unter v zum Heap
- Algo: rufe bottom-up für jeden Knoten einmal **sinkDown** auf

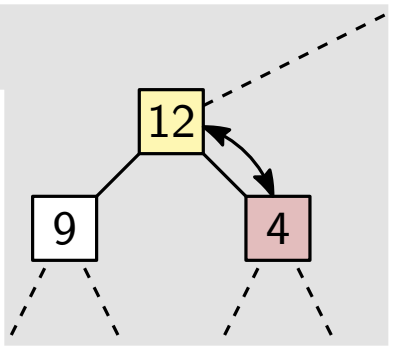


Vorüberlegung zur Laufzeit

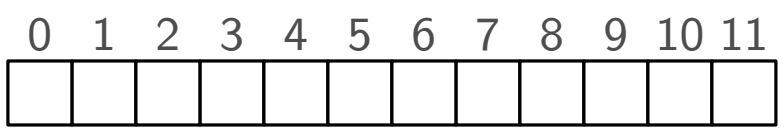
- Kosten für die Wurzel: $\Theta(\log n)$
- aber: Knoten weiter unten im Baum können auch nicht so weit sinken
- und: die meisten Knoten liegen weiter unten im Baum

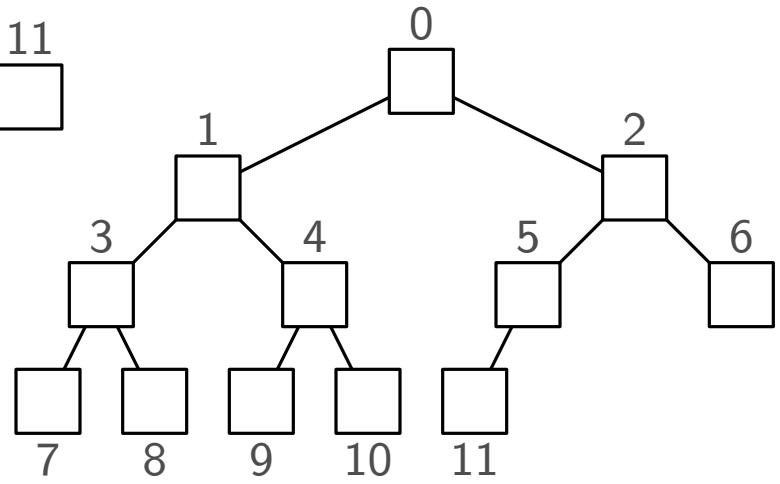
Initialer Aufbau: Umsetzung im Detail

```
class MinHeap
    Array A       // tree as array
    n()

    sinkDown(Node v)

    buildHeap(Array priorities)
        A := priorities
        for v = n() − 1, . . . , 0 do
            sinkDown(v)
```



Erinnerung: Array-Repräsentation des Baums





Anmerkung: Korrektheit

- **sinkDown** wird bottom-up angewendet: tieferes Layer fertig bevor höheres beginnt
- induktiv: beim Aufruf **sinkDown**(v) sind Teilbäume unter den Kindern von v schon Heaps
- nach **sinkDown**(v) ist Teilbaum unter v ein Heap

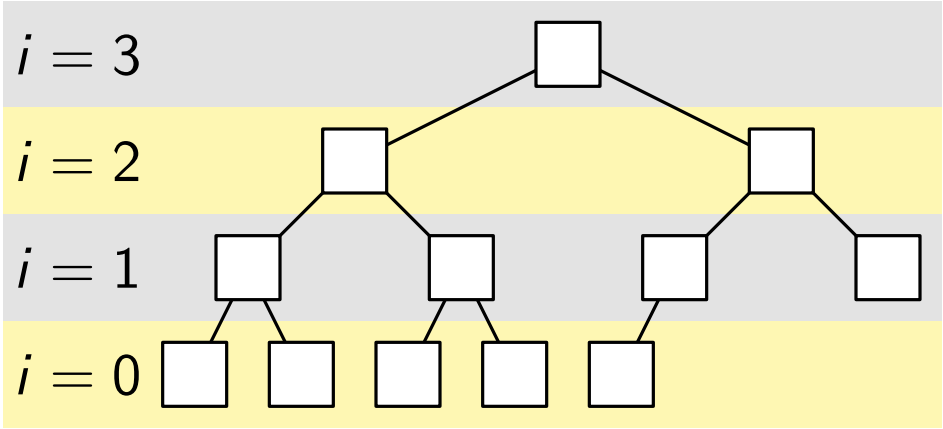
Initialer Aufbau: Laufzeit

Kosten für den Aufruf sinkDown(v)

- sei i die Distanz von v zu einem Blatt
- v wandert höchstens i Schritte nach unten
- Laufzeit: $\Theta(i+1)$

Anzahl Knoten für festes i: $\Theta\left(\frac{n}{2^i}\right)$

Gesamtkosten: $\Theta\left(\sum \frac{n \cdot i}{2^i}\right) = \Theta(n)$



Nebenrechnung:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots = \left.\begin{array}{rl} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots & \leq 1 \\ + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots & \leq \frac{1}{2} \\ + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots & \leq \frac{1}{4} \\ \vdots & \end{array}\right\} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leq 2$$

Priority-Queues in der Wildnis

Java

https://docs.oracle.com/en/java/javase/17/docs/api/java.base/java/util/PriorityQueue.html

Class PriorityQueue<E>

The *head* of this queue is the *least* element with respect to the specified ordering. If multiple elements are tied for least value, the head is one of those elements -- ties are broken arbitrarily.

Implementation note: this implementation provides O(log(n)) time for the enqueuing and dequeuing methods (`offer`, `poll` and `add`); linear time for the `remove(Object)` and `contains(Object)` methods; and constant time for the retrieval methods (`peek` and `size`).

Method Summary

Modifier and Type	Method	Description
boolean	`add(E e)`	Inserts the specified element into this priority queue.
boolean	`offer(E e)`	Inserts the specified element into this priority queue.
E	`peek()`	Retrieves, but does not remove, the head of this queue.

Beachte

- unterstützt keine weiteren Operationen wie **decPrio** (für Dijkstra nötig)
- nutze dafür Lazy Evaluation Trick (gleich)

decPrio mittels Lazy Evaluation

Grundsätzliche Idee

- markiere zu ändernden Knoten als veraltet
- füge Änderung als neuen Konten ein
- überspringe veraltete Knoten bei **popMin**

Tatsächliche Laufzeit

- **decPrio** hat dann die selbe Laufzeit wie **push**
- **popMin** ist aber manchmal teuer: viele veraltete Knoten müssen übersprungen werden
- **decPrio** ist also faul und hinterlässt zusätzliche Arbeit für **popMin**

Amortisierte Laufzeit

- charge zusätzliche Kosten bei **popMin** auf verantwortlichen **decPrio**-Aufruf
- **popMin** wird so alle Kosten los außer für ein nicht-veraltetes Element $\rightarrow \Theta(\log n)$
- jedem **decPrio**-Aufruf wird nur einmal Kosten zugewiesen $\rightarrow \Theta(\log n)$

Lazy Evaluation für Dijkstra

```
Dijkstra(Graph G, Node s)
    d := Array of size n initialized with ∞
    d[s] := 0
    PriorityQueue Q := empty priority queue
    for Node v in V do
        Q.push(v, d[v])
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.popMin()
        for Node v in N(u) do
            if d[v] > d[u] + len(u, v) then
                d[v] := d[u] + len(u, v)
                Q.decPrio(v, d[v])
```

```
Dijkstra(Graph G, Node s)
    d := Array of size n initialized with ∞
    d[s] := 0
    PriorityQueue Q := PQ containing only s
    done := Array of size n init with FALSE
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.popMin()
        if done[u] then continue
        for Node v in N(u) do
            if d[v] > d[u] + len(u, v) then
                d[v] := d[u] + len(u, v)
                Q.push(v, d[v])
        done[u] = TRUE
```

Zusammenfassung

Priority-Queue

- **push**(x) Element mit Priorität x einfügen
- **popMin**() Element mit minimaler Priorität extrahieren
- Trick für weitere Operationen (z.B. **decPrio**): Lazy Evaluation
  - markiere zu ändernden Knoten als veraltet $\rightarrow$ merken wir bei **popMin**

Binärer Heap

- ausreichend viel Ordnung, um Minimum schnell zu finden
- ausreichend wenig Ordnung, um diese nach einer Änderung wieder herzustellen
- Operationen in $\Theta(\log n)$ und sehr schnell in der Praxis

Geht es besser?

- etwas mehr Unordnung $\rightarrow$ aufräumen wenn nötig
- Binomial-Heap: verbessert **push** auf amortisiert $\Theta(1)$
- Fibonacci-Heap: verbessert zusätzlich **decPrio** auf amortisiert $\Theta(1)$