

Algorithmen 1

Kürzeste Wege: negative Kanten und APSP



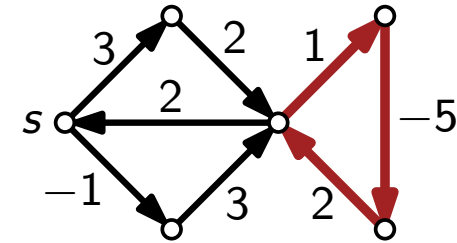
Kürzeste Pfade mit negativen Kantenlängen

Problem: Single-Source Shortest Path (SSSP)

Gegen einen gerichteten Graphen $G = (V, E)$, Kantenlängen $len: E \rightarrow \mathbb{Z}$ und $s \in V$, berechne $dist(s, t)$ für alle $t \in V$.

Negative Kreise

- Pfad kann mehrfach im Kreis läuft
- beliebig kleine Länge möglich (Distanzen $-\infty$?)



Möglichkeit 1

- erlaube nur **einfache Pfade**, die keine Knoten mehrfach besuchen
- Problem Hamilton-Pfad als Spezialfall
(vermutlich kein polynomieller Algorithmus möglich, siehe TGI nächstes Semester)

Möglichkeit 2

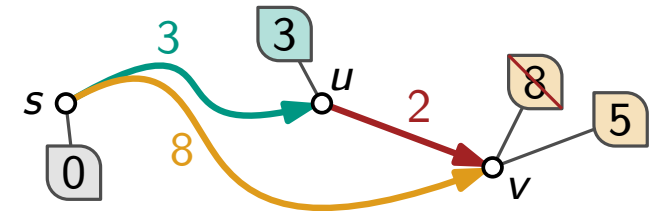
- erkenne negative Kreise
- Abbruch, wenn negativer Kreis gefunden

} diese Variante betrachten wir im Folgenden
(daher auch gerichtete Graphen)

Erinnerung: Dijkstras Algorithmus

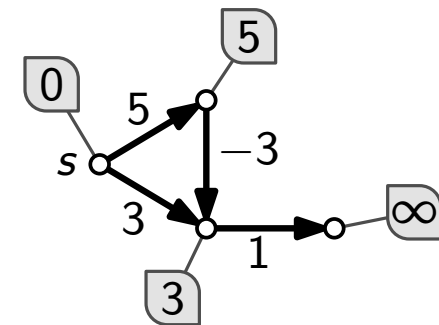
Grundsätzliches Vorgehen

- speichere $d[v]$ für jeden Knoten v : Länge des kürzesten bekannten s_v -Pfades
- **Relaxierung** der Kante (u, v) : wenn $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$, setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$



Reihenfolge der Relaxierungen bei Dijkstra

- Exploriere Knoten u : relaxiere alle ausgehenden Kanten von u
- exploriere Knoten aufsteigend nach $d[u]$
- Korrektheit: beim Explorieren gilt $d[u] = \text{dist}(s, u)$



Mit negativen Kantenlängen

- Problem: $d[u]$ könnte später wegen negativem Pfad noch kleiner werden
- Hoffnung: einfach weiter relaxieren bis sich nichts mehr ändert führt zum Ziel

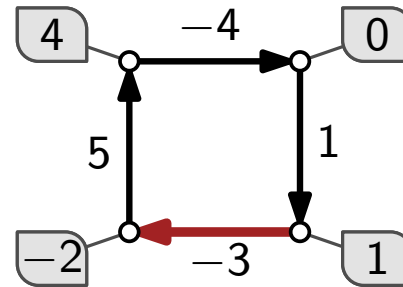
Algorithmus von Bellman und Ford

Grober Plan

- relaxiere jede Kante einmal
- iteriere, bis sich keines der $d[v]$ mehr ändert

Problemfall negative Kreise

- Pfade werden immer kürzer, je länger man im Kreis läuft
- terminiert nicht



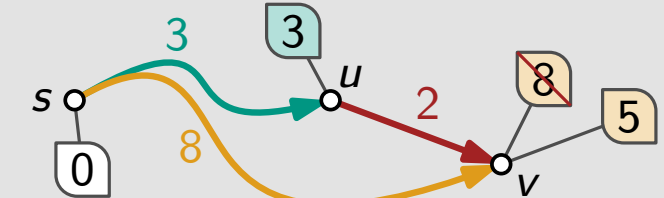
Ohne negative Kreise

- in jeder Iteration wird die Gesamtsumme der $d[v]$ um mindestens 1 kleiner
- die Gesamtsumme der finalen Lösung ist von unten beschränkt ($\neq -\infty$)
- also: Terminierung nach endlich vielen Iterationen

Ziel im Folgenden

- beweise obere Schranke für die Anzahl Iterationen
- Erkennung negativer Kreise

Relaxierung der Kante (u, v)

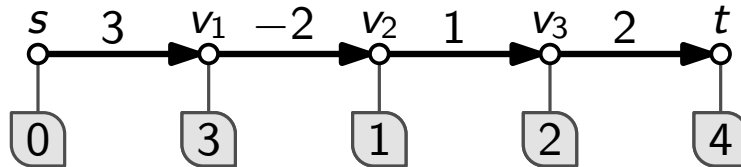


wenn $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$
 setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$

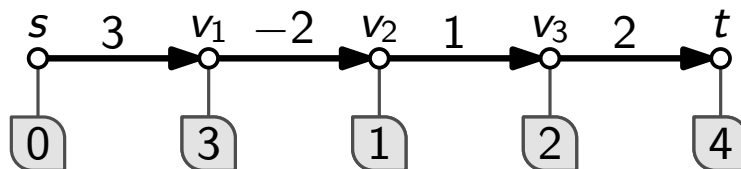
Wie viele Iterationen sind nötig?

Betrachte einen kürzesten st -Pfad

- **Best-Case:** wir relaxieren von vorne nach hinten
- sind nach einer Iteration schon fertig



- Problem: wir wissen vorher nicht, welche Reihenfolge gut ist
- **Worst-Case:** wir relaxieren von hinten nach vorne



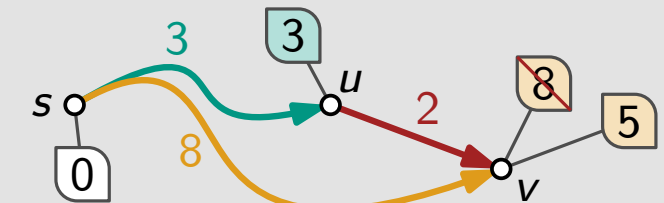
- nach i Iterationen: korrekte Distanz bis v_i
- kürzester st -Pfad besteht aus k Kanten \Rightarrow höchstens k Iterationen

$\Rightarrow n - 1$ Iterationen sollten ausreichen
 (werden wir im Folgenden noch formal beweisen)

Algorithmus

- relaxiere jede Kante einmal
- iteriere, bis sich kein $d[v]$ ändert

Relaxierung der Kante (u, v)



wenn $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$
 setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$

Beweis: $n - 1$ Iterationen genügen

Beobachtung

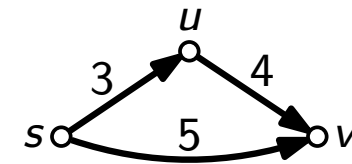
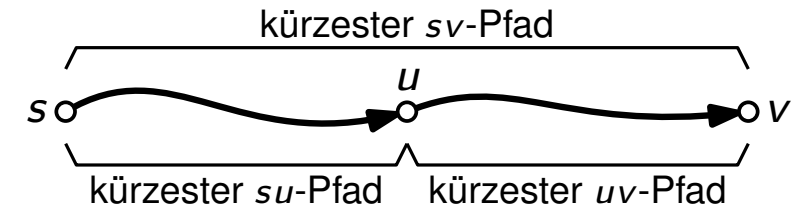
Teilpfade kürzester Pfade sind kürzeste Pfade.

Begründung

- wenn es einen kürzeren su -Pfad gäbe
- dann wäre dieser zusammen mit dem uv -Pfad auch ein kürzerer sv -Pfad

Achtung: Umkehrung gilt nicht

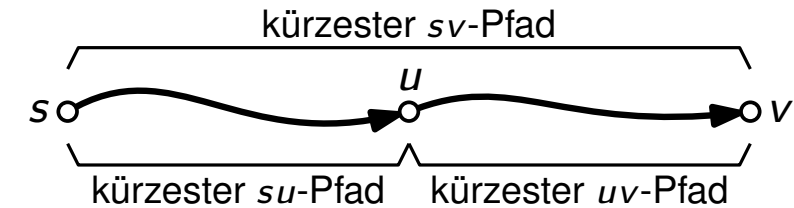
- kürzeste su - und uv -Pfade bilden zusammen **nicht** zwangswise einen kürzesten sv -Pfad
- das gilt nur, wenn u auch auf dem kürzesten sv -Pfad liegt



Beweis: $n - 1$ Iterationen genügen

Beobachtung

Teilpfade kürzester Pfade sind kürzeste Pfade.



Lemma

Wenn es einen kürzesten sv -Pfad gibt, der aus k Kanten besteht, dann gilt $d[v] = \text{dist}(s, v)$ nach k Iterationen.

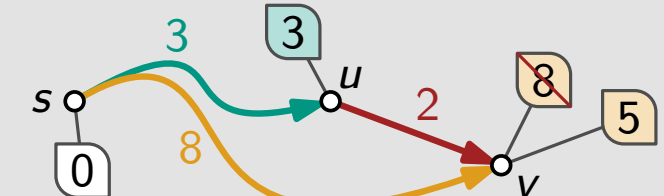
Algorithmus

- relaxiere jede Kante einmal
- iteriere, bis sich kein $d[v]$ ändert

Beweis: Induktion über k

- $k = 1$: Kante (s, v) ist kürzester Pfad \Rightarrow eine Iteration genügt
- $k > 1$: betrachte Vorgänger u von v auf kürzestem sv -Pfad
- es gibt kürzesten su -Pfad mit $k - 1$ Kanten
- I.V. $\Rightarrow d[u] = \text{dist}(s, u)$ nach $k - 1$ Iterationen
- Relaxierung von (u, v) in k ter Iteration setzt $d[v] = \text{dist}(s, v)$

Relaxierung der Kante (u, v)

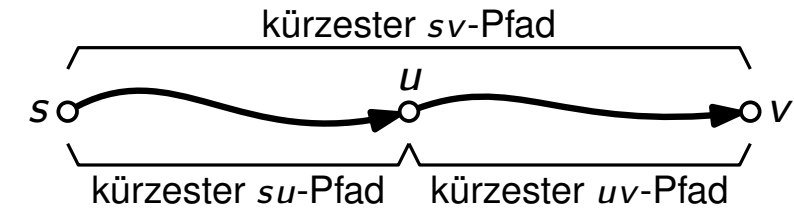


wenn $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$
 setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$

Beweis: $n - 1$ Iterationen genügen

Beobachtung

Teilpfade kürzester Pfade sind kürzeste Pfade.



Lemma

Wenn es einen kürzesten $s-v$ -Pfad gibt, der aus k Kanten besteht, dann gilt $d[v] = \text{dist}(s, v)$ nach k Iterationen.

Algorithmus

- relaxiere jede Kante einmal
- iteriere, bis sich kein $d[v]$ ändert

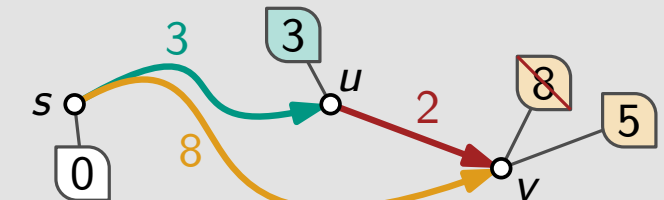
Beachte

- kürzester Pfad hat höchstens n Knoten und $n - 1$ Kanten
- (vorausgesetzt, wir haben keine negativen Kreise)

Theorem

Wenn der Graph keine negativen Kreise hat, so gilt nach $n - 1$ Iterationen für alle Knoten v , dass $d[v] = \text{dist}(s, v)$.

Relaxierung der Kante (u, v)



wenn $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$
 setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$

Erkennung von negativen Kreisen

Theorem

Wenn der Graph keine negativen Kreise hat, so gilt nach $n - 1$ Iterationen für alle Knoten v , dass $d[v] = \text{dist}(s, v)$.

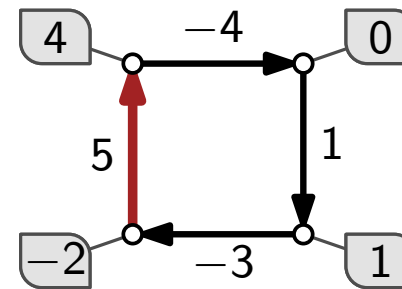
Situation: nach $n - 1$ Iterationen

Wenn es keinen negativen Kreis gibt

- weitere Relaxierungen ändern nichts mehr
- für jede Kante $(u, v) \in E$ gilt: $d[v] \leq d[u] + \text{len}(u, v)$

Wenn es negativen Kreis gibt

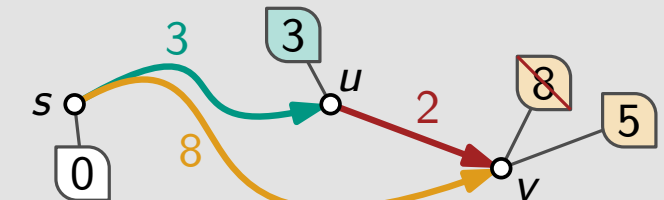
- man kann immer kürzere Pfade finden
- Relaxierungen haben weiterhin Effekt
- es gibt $(u, v) \in E$ mit: $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$



Algorithmus

- relaxiere jede Kante einmal
- iteriere, bis sich kein $d[v]$ ändert

Relaxierung der Kante (u, v)



wenn $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$
 setze $d[v] = d[u] + \text{len}(u, v)$

Test auf negativen Kreis: überprüfe ob $d[v] \leq d[u] + \text{len}(u, v)$ für alle $(u, v) \in E$

Pseudocode und Laufzeit

BellmanFord(*Graph G, Node s*)

$d :=$ Array of size n initialized with ∞
 $d[s] := 0$

for $n - 1$ iterations **do**

for *Edge* $(u, v) \in E$ **do**

if $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$ **then**

$d[v] := d[u] + \text{len}(u, v)$

// test for negative cycle

for *Edge* $(u, v) \in E$ **do**

if $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$ **then**

return negative cycle

return d

Laufzeit

- n mal über alle Kanten iterieren
- damit: $\Theta(n \cdot m)$

Abbrechen, wenn alle $d[v]$ gleich bleiben

- in der Praxis sinnvoll
- hilft im Worst-Case nicht asymptotisch

Geschickte Wahl der Kantenreihenfolge

- kann konstante Faktoren sparen
- hilft im Worst-Case nicht asymptotisch

Weitere Anmerkungen zu Laufzeit

- kein asymptotisch besserer Algo bekannt
- sehr langsam verglichen mit $\Theta(n \log n + m)$
 (Dijkstras Algo für nicht-negative Kantenlängen)

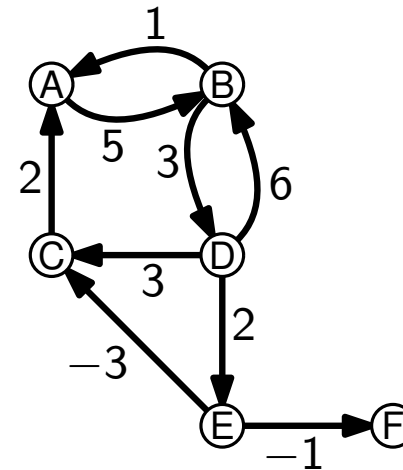
All Pair Shortest Path

Problem: All-Pair Shortest Path (APSP)

Gegen einen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kantenlängen $len: E \rightarrow \mathbb{Z}$. Berechne $dist(s, t)$ für alle Knotenpaare $s, t \in V$.

Anmerkungen

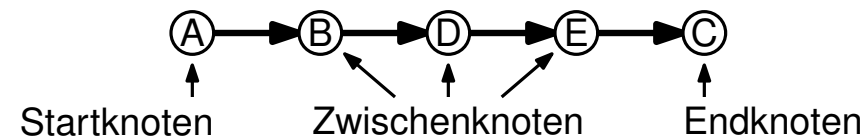
- Distanzmatrix als Ausgabe
- Ausgabe ist bereits quadratisch groß
- wir nehmen erstmal an, dass es keine negativen Kreise gibt



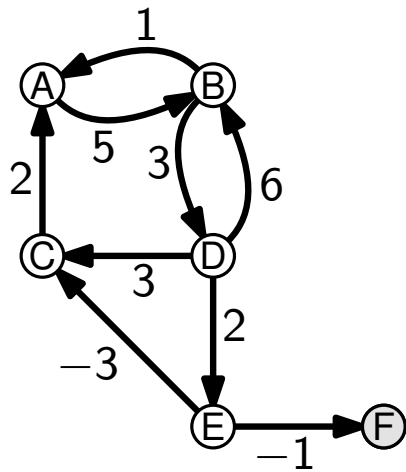
A	0	5	7	8	10	9
B	1	0	2	3	5	4
C	2	7	0	10	12	11
D	1	6	-1	0	2	1
E	-1	4	-3	7	0	-1
F	∞	∞	∞	∞	∞	0
	A	B	C	D	E	F

Zwischenknoten

- Pfad $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$
- v_1 ist **Startknoten**, v_k **Endknoten**
- alle anderen sind **Zwischenknoten**



Eingeschränkte Menge an Zwischenknoten



ohne Zwischenknoten

A	0	5	∞	∞	∞	∞
B	1	0	∞	3	∞	∞
C	2	∞	0	∞	∞	∞
D	∞	6	3	0	2	∞
E	∞	∞	-3	∞	0	-1
F	∞	∞	∞	∞	∞	0
	A	B	C	D	E	F

Zwischenknoten: {A}

A	0	5	∞	∞	∞	∞
B	1	0	∞	3	∞	∞
C	2	7	0	∞	∞	∞
D	∞	6	3	0	2	∞
E	∞	∞	-3	∞	0	-1
F	∞	∞	∞	∞	∞	0
	A	B	C	D	E	F

Zwischenknoten: {A, B}

A	0	5	∞	8	∞	∞
B	1	0	∞	3	∞	∞
C	2	7	0	10	∞	∞
D	7	6	3	0	2	∞
E	∞	∞	-3	∞	0	-1
F	∞	∞	∞	∞	∞	0
	A	B	C	D	E	F

Zwischenknoten: {A, B, C}

A	0	5	∞	8	∞	∞
B	1	0	∞	3	∞	∞
C	2	7	0	10	∞	∞
D	5	6	3	0	2	∞
E	-1	4	-3	7	0	-1
F	∞	∞	∞	∞	∞	0
	A	B	C	D	E	F

Zwischenknoten: {A, B, C, D}

A	0	5	11	8	10	∞
B	1	0	6	3	5	∞
C	2	7	0	10	12	∞
D	5	6	3	0	2	∞
E	-1	4	-3	7	0	-1
F	∞	∞	∞	∞	∞	0
	A	B	C	D	E	F

Zwischenknoten: {A, B, C, D, E}

A	0	5	7	8	10	9
B	1	0	2	3	5	4
C	2	7	0	10	12	11
D	1	6	-1	0	2	1
E	-1	4	-3	7	0	-1
F	∞	∞	∞	∞	∞	0
	A	B	C	D	E	F

alle Zwischenknoten

A	0	5	7	8	10	9
B	1	0	2	3	5	4
C	2	7	0	10	12	11
D	1	6	-1	0	2	1
E	-1	4	-3	7	0	-1
F	∞	∞	∞	∞	∞	0
	A	B	C	D	E	F

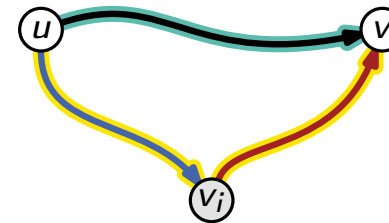
Umsetzung als Algorithmus

Teillösungen für die Distanzen

- ordne Knotenmenge $V = \{v_1, \dots, v_n\}$
- D_i : Distanzmatrix bezüglich Zwischenknoten aus $V_i = \{v_1, \dots, v_i\} \rightarrow$ Endergebnis D_n
- $D_i[u][v]$: Länge eines kürzesten uv -Pfads der nur Zwischenknoten aus V_i verwendet

Algorithmus von Floyd und Warshall

- D_0 ist leicht zu berechnen: quasi die Adjazenzmatrix
- berechne iterativ D_i aus D_{i-1}
 - v_i ist neuer erlaubter Zwischenknoten
 - Fall 1: kürzester uv -Pfad enthält v_i
 $\Rightarrow D_i[u][v] = D_{i-1}[u][v_i] + D_{i-1}[v_i][v]$
 - Fall 2: kürzester uv -Pfad enthält v_i nicht
 $\Rightarrow D_i[u][v] = D_{i-1}[u][v]$
 - Entscheidung für den richtigen Fall: teste ob $D_{i-1}[u][v_i] + D_{i-1}[v_i][v] < D_{i-1}[u][v]$



$$D_{i-1}$$

	u		
u			
v			
v_i			
	u	v	v_i

$$D_i$$

	u		
u			
v			
v_i			
	u	v	v_i

Anmerkungen und Pseudocode

Beachte

- Korrektheit folgt direkt induktiv
(mit der Fallunterscheidung der vorherigen Folie)
- Änderungen in Iteration i machen für diese Iteration nichts kaputt
→ eine Matrix für alle D_i genügt
- Betrachtung aller Paare: für $u = v$,
 $u = v_i$ oder $v_i = v$ passiert nichts
(Ausnahme: es gibt negativen Kreis → stellt man so fest)

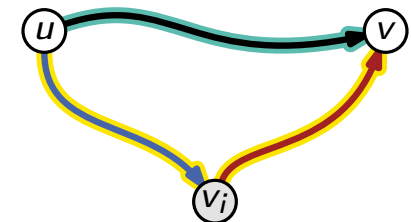
Laufzeit

- n Iterationen
- n^2 Knotenpaare pro Iteration
- $\Theta(n^3)$

FloydWarshall(*Graph* G)

```

 $D := n \times n$  Matrix initialized with  $\infty$ 
for  $(u, v) \in E$  do  $D[u][v] := \text{len}(u, v)$ 
for  $v \in V$  do  $D[v][v] := 0$ 
for  $i := 1, \dots, n$  do
  // compute  $D_i$  from  $D_{i-1}$ 
  for all pairs of nodes  $(u, v) \in V \times V$  do
     $D[u][v] := \min(D[u][v], D[u][v_i] + D[v_i][v])$ 
return  $D$ 
  
```



Dynamische Programmierung (DP)

Algorithmische Technik

- definiere Teillösungen
- Berechnung größerer aus kleinen Teillösungen
- Wiederverwendung berechneter Teillösungen

Anmerkung

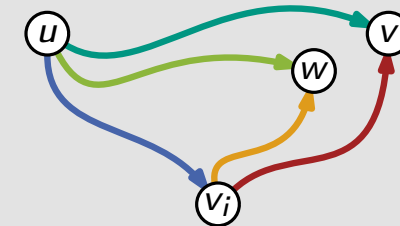
- Berechnung ist meist eine Rekurrenz
- Korrektheit folgt meist induktiv
- rekursive Umsetzung: sehr teuer (meist exponentiell), da keine Wiederverwendung von Teillösungen

Hauptschwierigkeit: Definition geeigneter Teillösungen

- Welche Infos sind essentiell für eine Teillösung?
- X_i aus X_{i-1} berechnen ist schwierig, aber es geht, wenn ich zusätzlich Y_{i-1} kenne
- jetzt muss ich aber auch Y_i berechnen (aus X_{i-1} und Y_{i-1})

Beispiel: Floyd-Warshall

- $D_i[u][v]$: Distanz bzgl. Zwischenknoten aus $V_i = \{v_1, \dots, v_i\}$
- $D_i[u][v] = \min(D_{i-1}[u][v], D_{i-1}[u][v_i] + D_{i-1}[v_i][v])$
- $D_i[u][w] = \min(D_{i-1}[u][w], D_{i-1}[u][v_i] + D_{i-1}[v_i][w])$



Dynamische Programmierung (DP) – Hinweise

Vergleich mit Teile und Herrsche

- ähnlich: auch hier werden Teillösungen kombiniert (typischerweise disjunkte Teilprobleme)
- Besonderheit beim DP: Wiederverwendung von Teilergebnissen (Teilprobleme nicht disjunkt)

Häufiger Fehler: Fokus auf Rekurrenz statt Definition von Teillösungen

- Knackpunkt: geeignete Definition der Teillösungen
- Aufschrieb eines DP: sollte immer mit Definition der Teillösungen beginnen
- Rekurrenz ist dann oft mehr oder weniger offensichtlich

Teillösungen iterativ aufbauen

- meist wird irgendetwas Schritt für Schritt vergrößert
- Floyd-Warshall: Menge der Zwischenknoten V_i
- Sprechweise: **DP über Menge der Zwischenknoten** (so, wie man von einer **Induktion über i** spricht)

Mentaler Shortcut: Wenn man mit DPs vertraut ist, dann kommt das einer vollständigen Beschreibung des Floyd-Warshall Algos gleich.

Zusammenfassung

SSSP mit negativen Kanten

- Bellman–Ford: $\Theta(nm)$
- Erkennung negativer Kreise
- ist im Prinzip ein DP über die Anzahl Kanten auf dem kürzesten Weg

APSP

- Floyd–Warshall: $\Theta(n^3)$
- DP über die Menge der Zwischenknoten $V_i = \{v_1, \dots, v_i\}$

Dynamische Programmierung (DP)

- wichtige algorithmische Technik
- wir werden später noch weitere DPs kennenlernen

Bonus: APSP – Geht es besser als $\Theta(n^3)$?

(Möglicherweise) bessere Algorithmen

- n mal Dijkstra $\rightarrow \Theta(n^2 \log n + nm)$
 - Pettie, Ramachandran: $\Theta(nm \log \alpha(m, n))$
($\alpha(m, n)$: sehr langsam wachsende inverse Ackermannfunktion)
 - Thorup: $\Theta(nm)$
 - Williams: $n^3 / 2^{\Omega(\sqrt{\log n})}$
- } nicht-negative Kantenlängen
- } natürliche Kantenlängen
- Johnson: Bellman–Ford + Längen Anpassung + n Mal Dijkstra $\rightarrow \Theta(n^2 \log n + nm)$
 - substantiell besser als n^3 bzw. nm geht vermutlich nicht (Stichwort: Fine-Grained Complexity)

Beachte

- $m \in O(n^2)$
- dünne Graphen: $m \ll n^2$



Warum lernen wir hier nur den langsamen Floyd-Warshall kennen?

- schön einfach
- Algorithmus der Wahl für dichte Graphen
- algorithmische Technik: dynamische Programmierung

Bild: Grumpy cat line art / XXspiritwolf2000XX / Creative Commons