Karlsruher Institut für Technologie

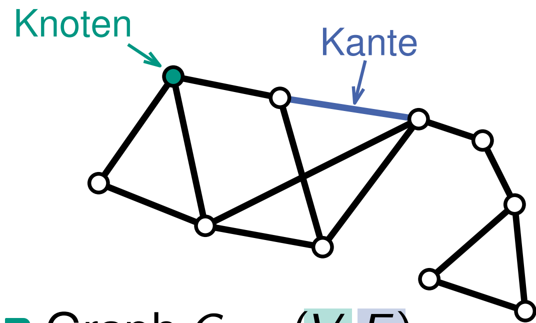
Algorithmen 1

Graphen und Breitensuche

Graphen: Grundbegriffe

Karlsruher Institut für Technologie

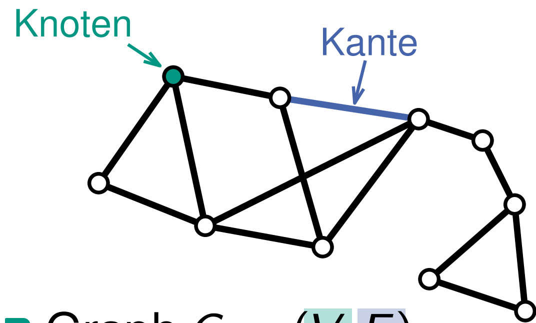
Knoten & Kanten



- Graph $G = (V, E)$
- $|V| = n$, $|E| = m$

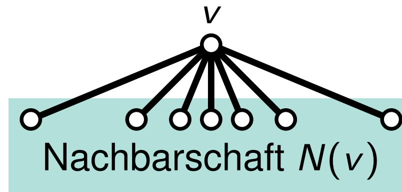
Graphen: Grundbegriffe

Knoten & Kanten

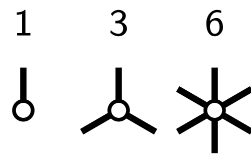


- Graph $G = (V, E)$
- $|V| = n$, $|E| = m$

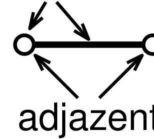
Nachbarschaft



Knotengrad

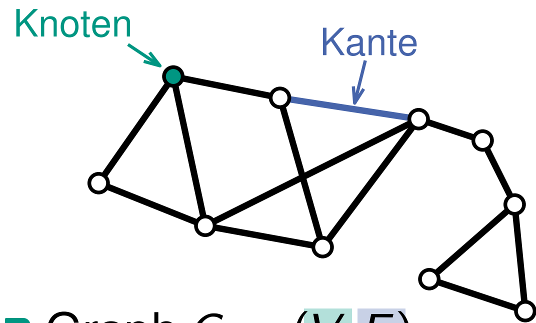


inzident



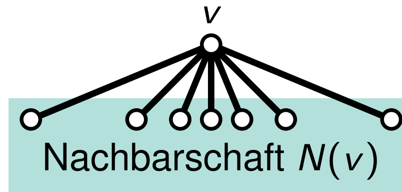
Graphen: Grundbegriffe

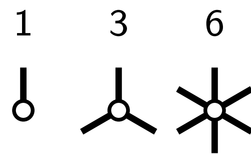
Knoten & Kanten

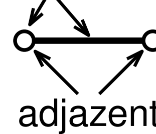


- Graph $G = (V, E)$
- $|V| = n$, $|E| = m$

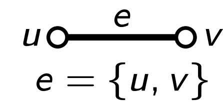
Nachbarschaft

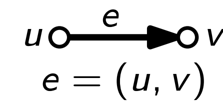


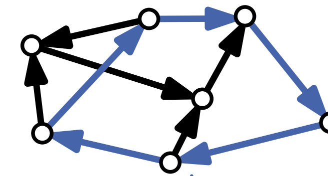




Gerichtete Graphen

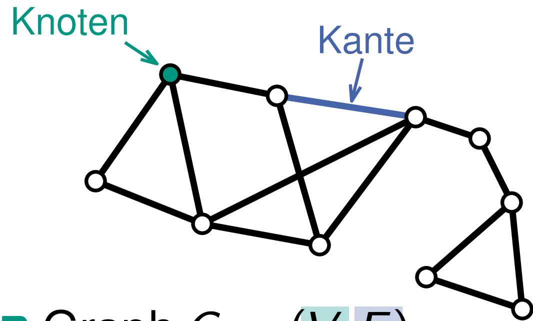






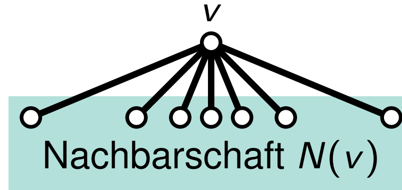
Graphen: Grundbegriffe

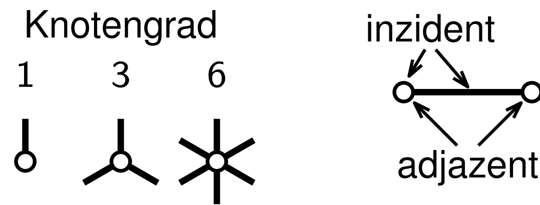
Knoten & Kanten



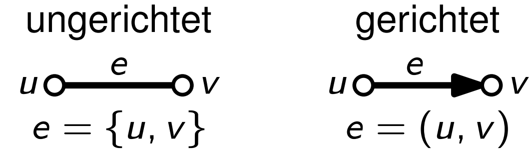
- Graph $G = (V, E)$
- $|V| = n$, $|E| = m$

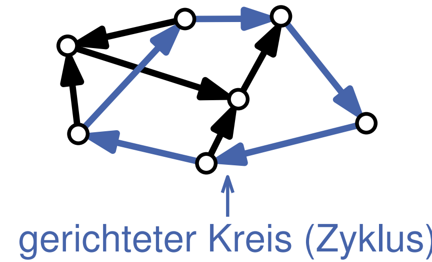
Nachbarschaft



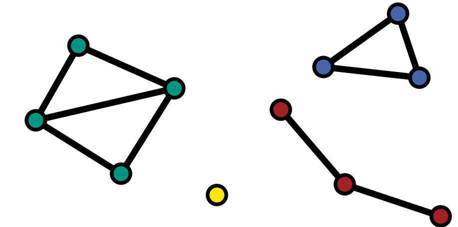


Gerichtete Graphen





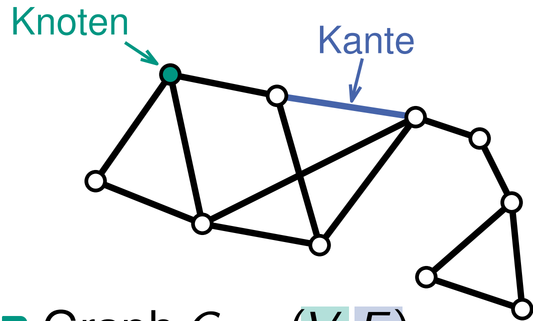
Komponenten



- unzusammenhängend
- 4 Zusammenhangskomp.

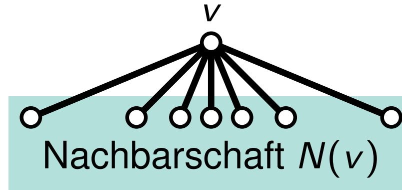
Graphen: Grundbegriffe

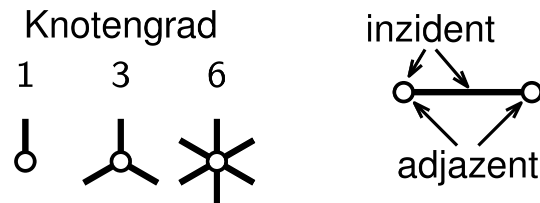
Knoten & Kanten



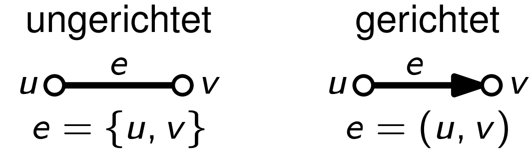
- Graph $G = (V, E)$
- $|V| = n$, $|E| = m$

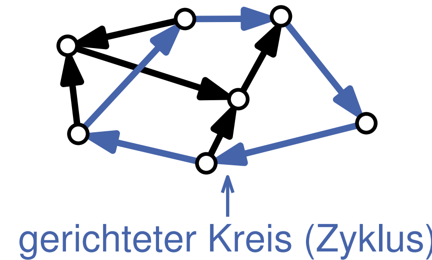
Nachbarschaft



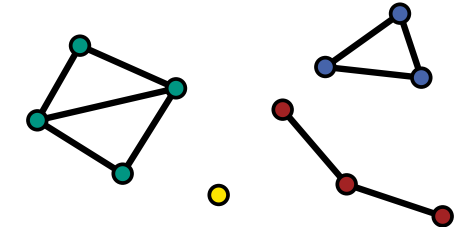


Gerichtete Graphen





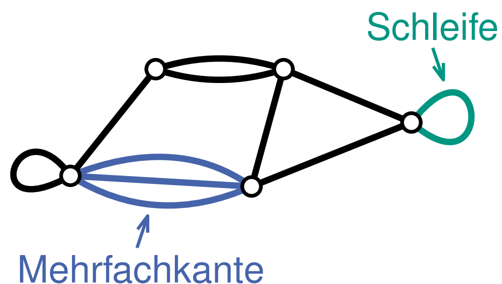
Komponenten



- unzusammenhängend
- 4 Zusammenhangskomp.

Einfache Graphen

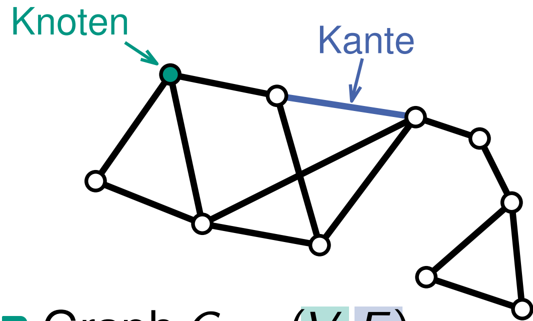
- keine Schleifen
- keine Mehrfachkanten



Graphen: Grundbegriffe

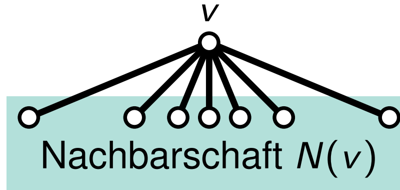
Karlsruher Institut für Technologie

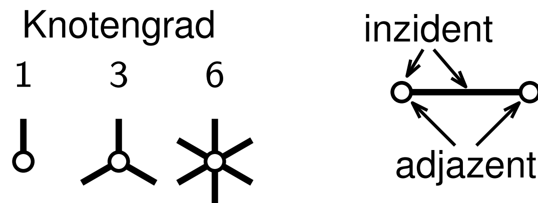
Knoten & Kanten



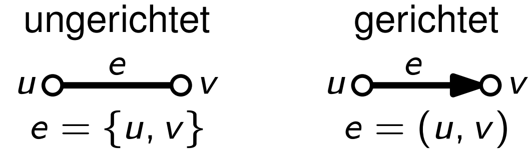
- Graph $G = (V, E)$
- $|V| = n$, $|E| = m$

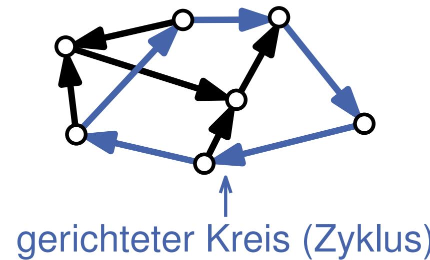
Nachbarschaft



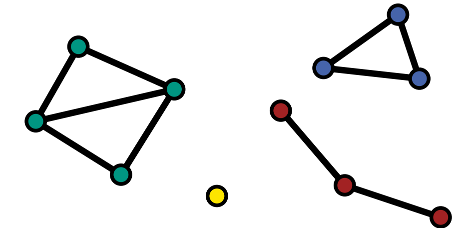


Gerichtete Graphen





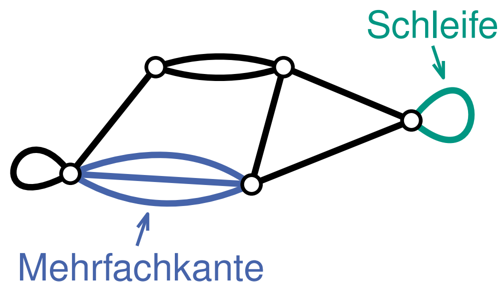
Komponenten



- unzusammenhängend
- 4 Zusammenhangskomp.

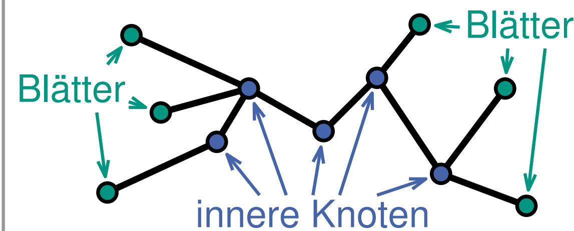
Einfache Graphen

- keine Schleifen
- keine Mehrfachkanten



Baum

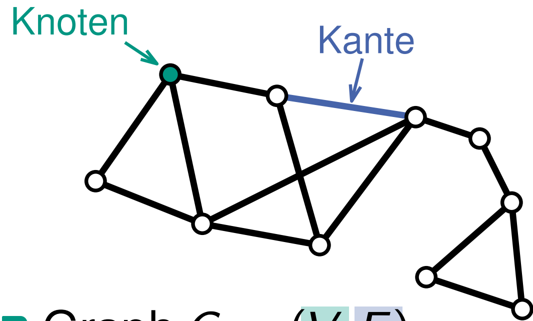
- kreisfrei
- zusammenhängend



Graphen: Grundbegriffe

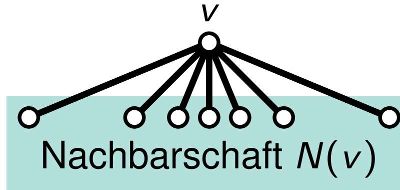
Karlsruher Institut für Technologie

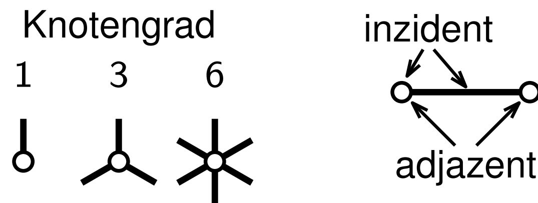
Knoten & Kanten



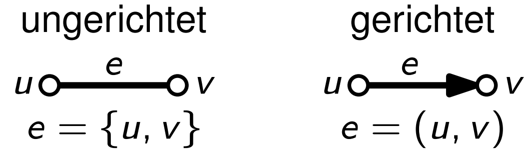
- Graph $G = (V, E)$
- $|V| = n$, $|E| = m$

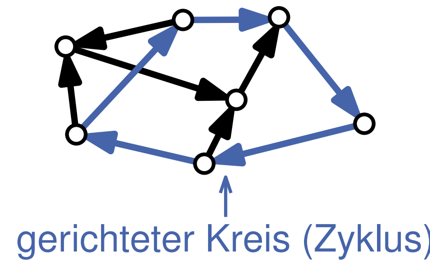
Nachbarschaft



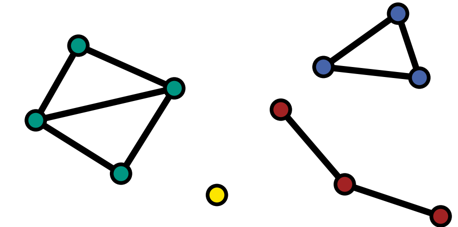


Gerichtete Graphen





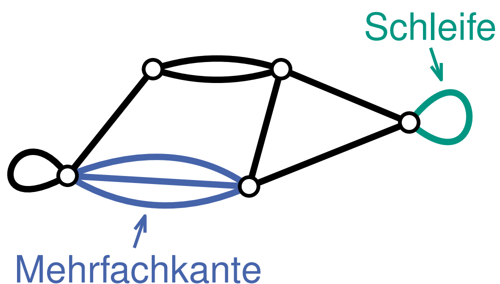
Komponenten



- unzusammenhängend
- 4 Zusammenhangskomp.

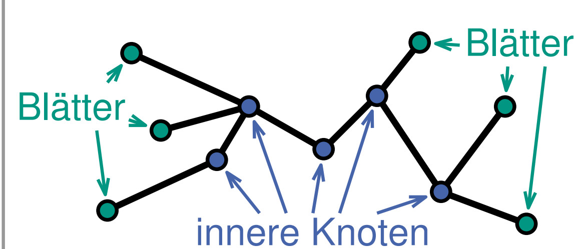
Einfache Graphen

- keine Schleifen
- keine Mehrfachkanten



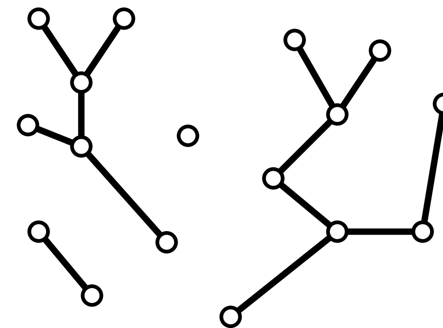
Baum

- kreisfrei
- zusammenhängend



Wald

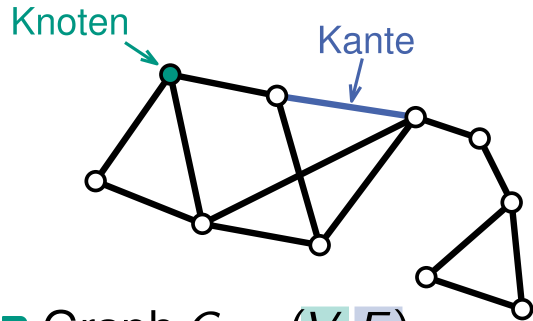
- kreisfrei



Graphen: Grundbegriffe

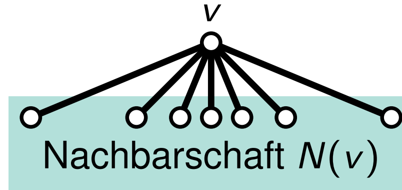
Karlsruher Institut für Technologie

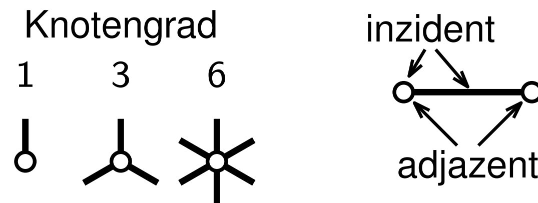
Knoten & Kanten



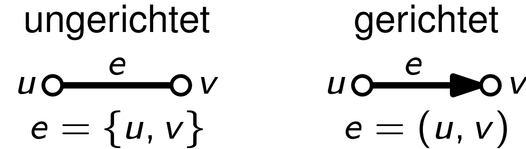
- Graph $G = (V, E)$
- $|V| = n$, $|E| = m$

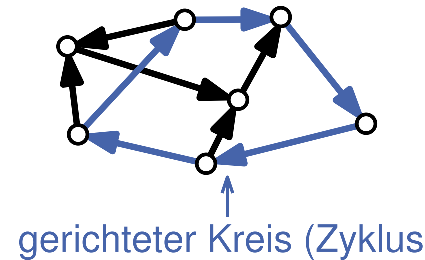
Nachbarschaft





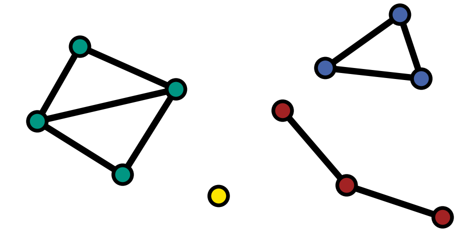
Gerichtete Graphen





gerichteter Kreis (Zyklus)

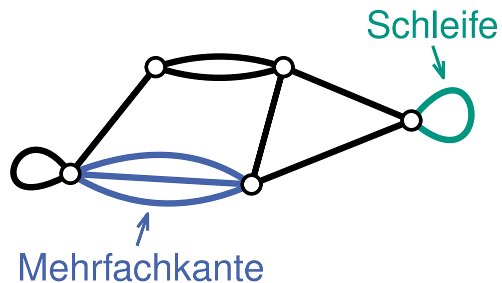
Komponenten



- unzusammenhängend
- 4 Zusammenhangskomp.

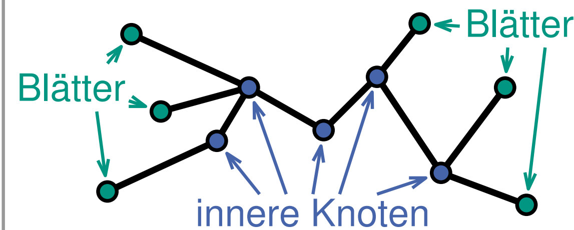
Einfache Graphen

- keine Schleifen
- keine Mehrfachkanten



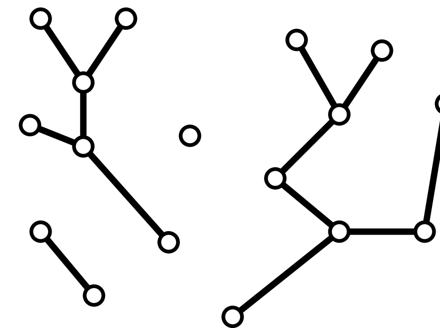
Baum

- kreisfrei
- zusammenhängend

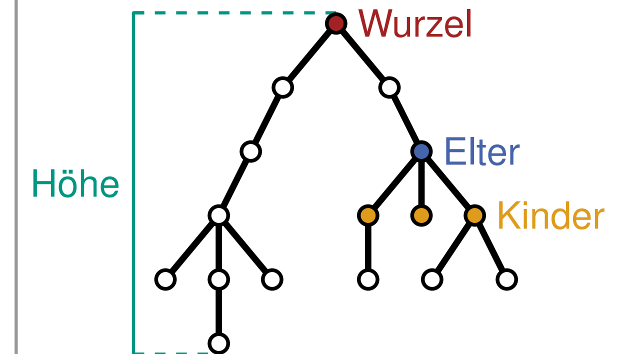


Wald

- kreisfrei



Gewurzelter Baum



Ein erstes Graphenproblem

Karlsruher Institut für Technologie

Graphen sind allgegenwärtig

- modelliert Beziehungen (Kanten) zwischen Paaren von Objekten (Knoten)
  - Kontakte zwischen Lebewesen
  - Interaktionen zwischen Proteinen
  - Kommunikation zwischen Sensoren
  - . . .

Ein erstes Graphenproblem

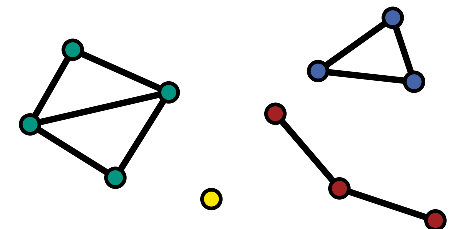
Karlsruher Institut für Technologie

Graphen sind allgegenwärtig

- modelliert Beziehungen (Kanten) zwischen Paaren von Objekten (Knoten)
  - Kontakte zwischen Lebewesen
  - Interaktionen zwischen Proteinen
  - Kommunikation zwischen Sensoren
  - . . .

Grundlegendes Problem: Zusammenhangskomponenten finden

- gegeben: Graph (z.B. als Liste von Kanten)
- Ziel: färbe die Knoten entsprechend der Komponenten



Ein erstes Graphenproblem

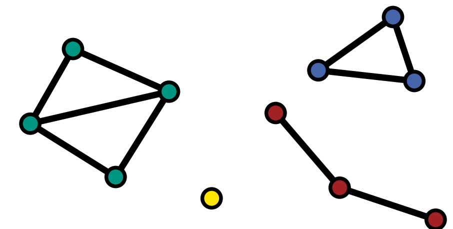
Karlsruher Institut für Technologie

Graphen sind allgegenwärtig

- modelliert Beziehungen (Kanten) zwischen Paaren von Objekten (Knoten)
  - Kontakte zwischen Lebewesen
  - Interaktionen zwischen Proteinen
  - Kommunikation zwischen Sensoren
  - ...

Grundlegendes Problem: Zusammenhangskomponenten finden

- gegeben: Graph (z.B. als Liste von Kanten)
- Ziel: färbe die Knoten entsprechend der Komponenten



Vorgehen: Graphtraversierung

- laufe bei einem Knoten s los
- finde und färbe alle Knoten, die von s aus erreichbar sind
- wähle neue Farbe und wiederhole mit noch ungefärbtem Knoten (falls vorhanden)

Graphtraversierung

Karlsruher Institut für Technologie

Tiefensuche (DFS)

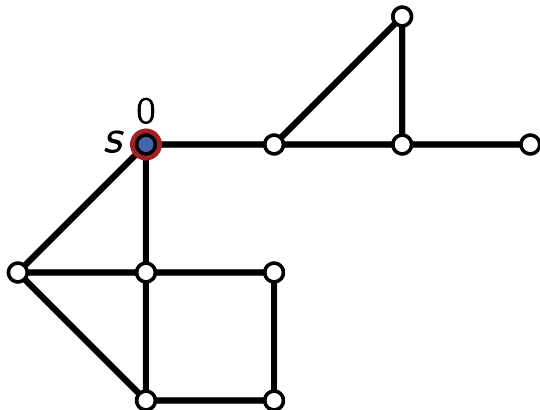
- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger

Graphtraversierung

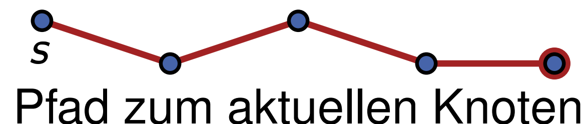
Karlsruher Institut für Technologie

Tiefensuche (DFS)

- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten



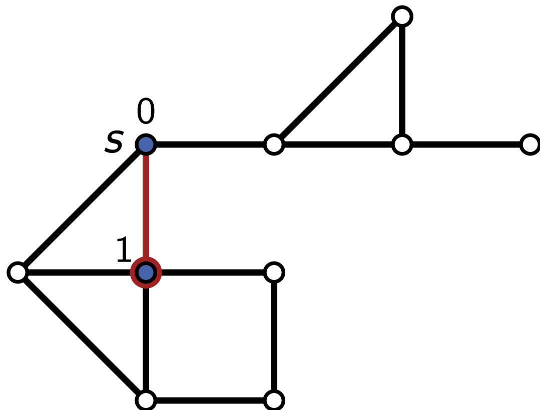
Pfad zum aktuellen Knoten

Graphtraversierung

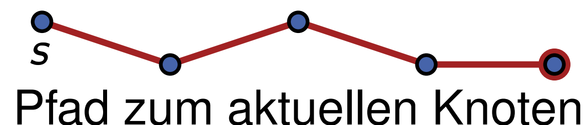
Karlsruher Institut für Technologie

Tiefensuche (DFS)

- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten



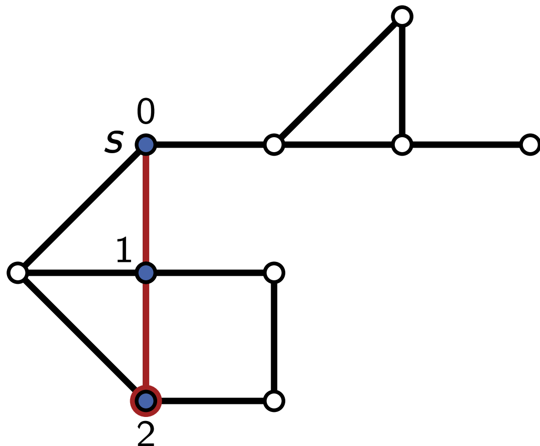
Pfad zum aktuellen Knoten

Graphtraversierung

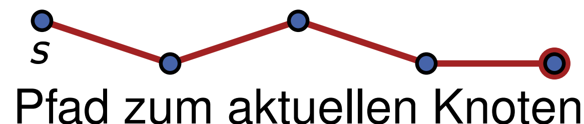
Karlsruher Institut für Technologie

Tiefensuche (DFS)

- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten



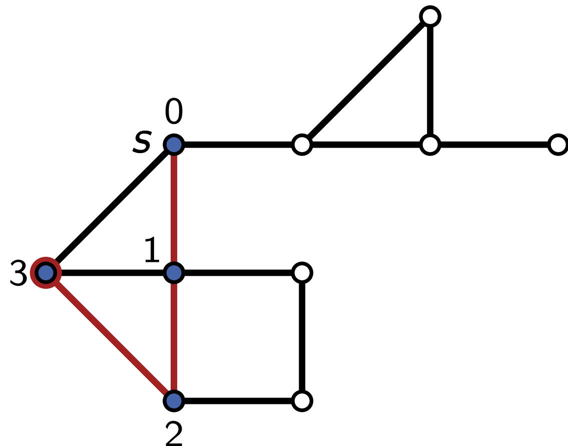
Pfad zum aktuellen Knoten

Graphtraversierung

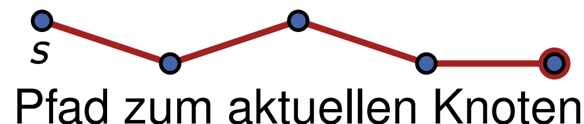
Karlsruher Institut für Technologie

Tiefensuche (DFS)

- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten



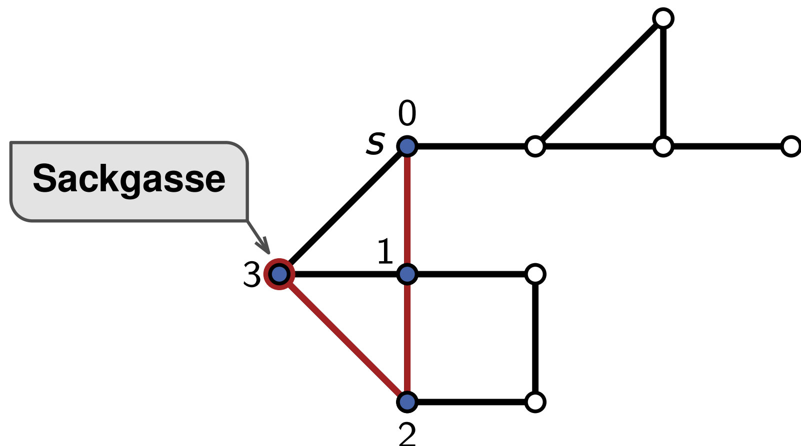
Pfad zum aktuellen Knoten

Graphtraversierung

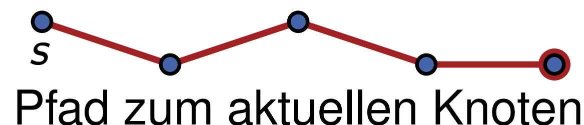
Karlsruher Institut für Technologie

Tiefensuche (DFS)

- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten

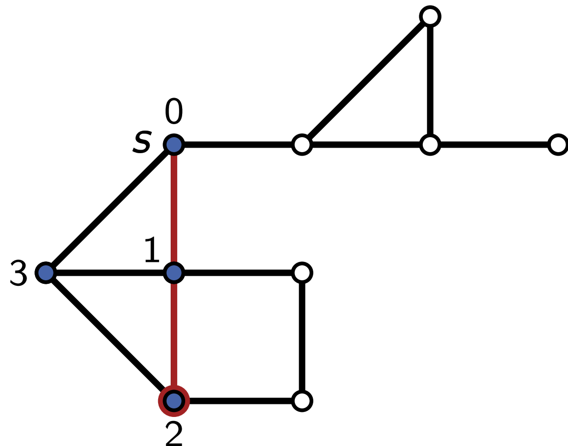


Pfad zum aktuellen Knoten

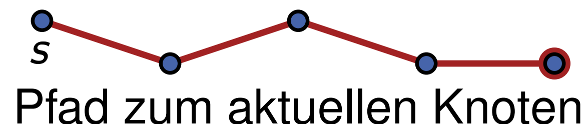
Graphtraversierung

Tiefensuche (DFS)

- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten



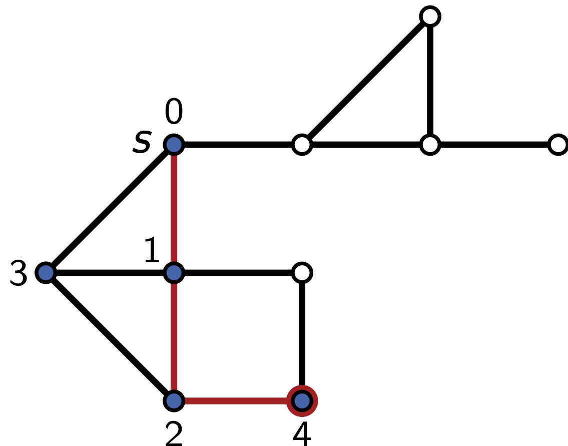
Pfad zum aktuellen Knoten

Graphtraversierung

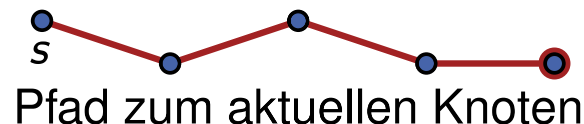
KIT
Karlsruher Institut für Technologie

Tiefensuche (DFS)

- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten



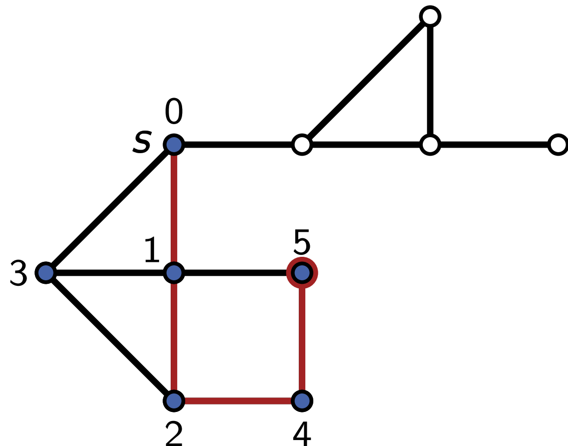
Pfad zum aktuellen Knoten

Graphtraversierung

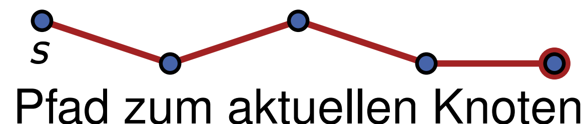
Karlsruher Institut für Technologie

Tiefensuche (DFS)

- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten

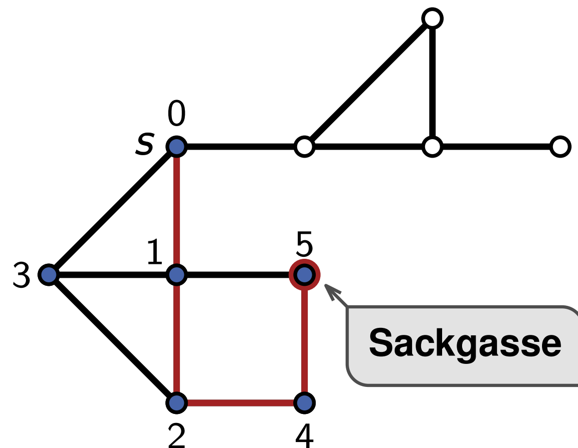


Pfad zum aktuellen Knoten

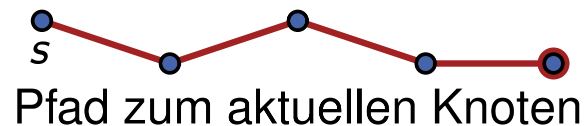
Graphtraversierung

Tiefensuche (DFS)

- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten



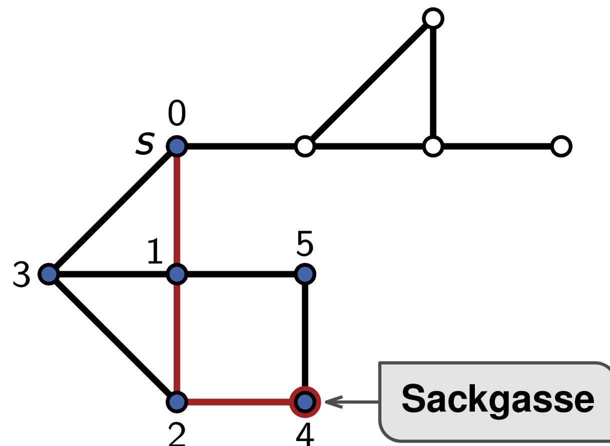
Pfad zum aktuellen Knoten

Graphtraversierung

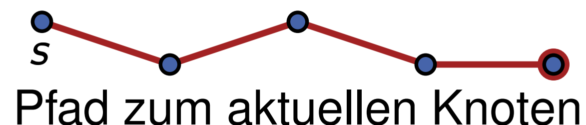
Karlsruher Institut für Technologie

Tiefensuche (DFS)

- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten

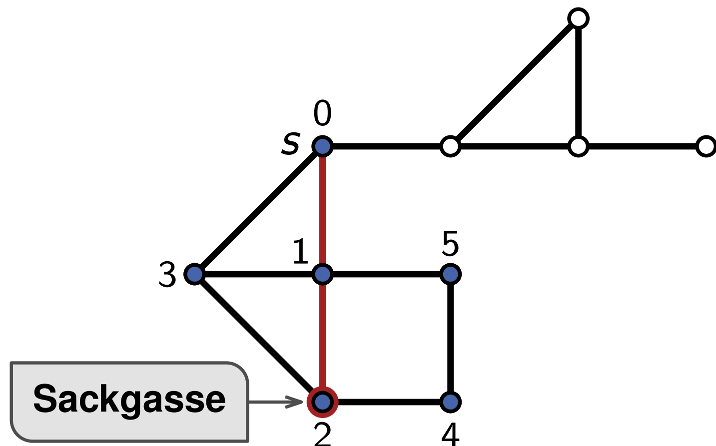


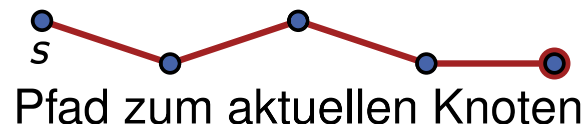
Pfad zum aktuellen Knoten

Graphtraversierung

Tiefensuche (DFS)

- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger

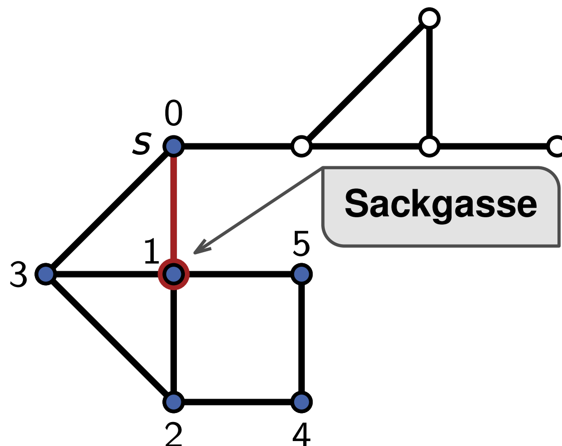




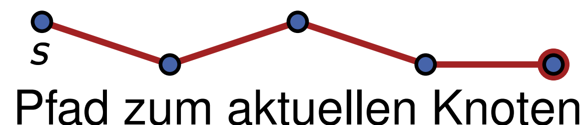
Graphtraversierung

Tiefensuche (DFS)

- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten



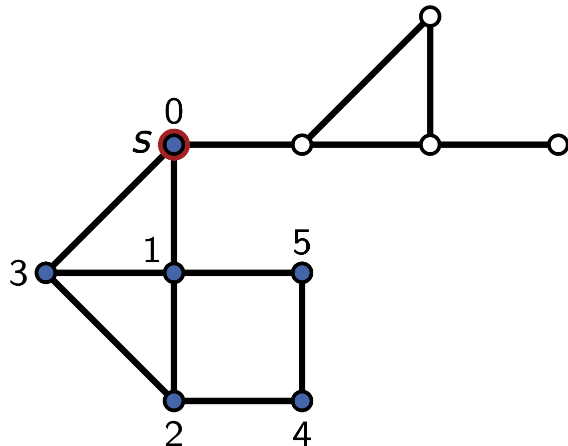
Pfad zum aktuellen Knoten

Graphtraversierung

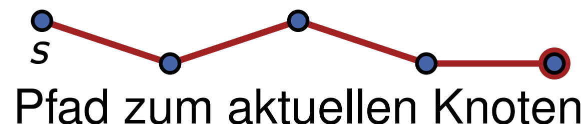
Karlsruher Institut für Technologie

Tiefensuche (DFS)

- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten



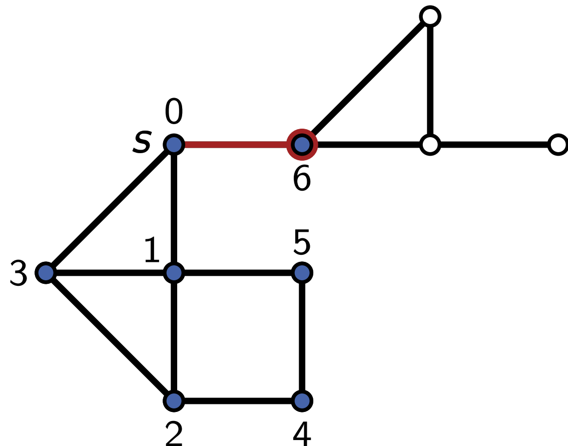
Pfad zum aktuellen Knoten

Graphtraversierung

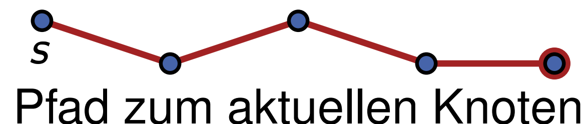
KIT
Karlsruher Institut für Technologie

Tiefensuche (DFS)

- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten



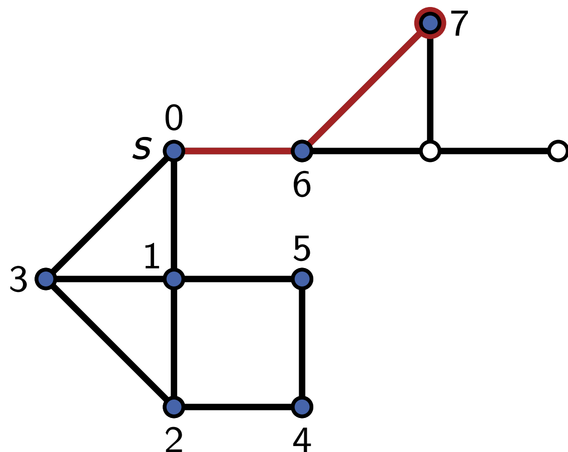
Pfad zum aktuellen Knoten

Graphtraversierung

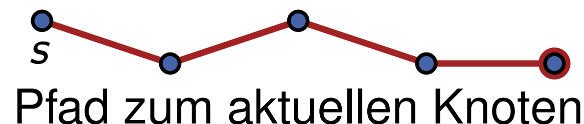
Karlsruher Institut für Technologie

Tiefensuche (DFS)

- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten



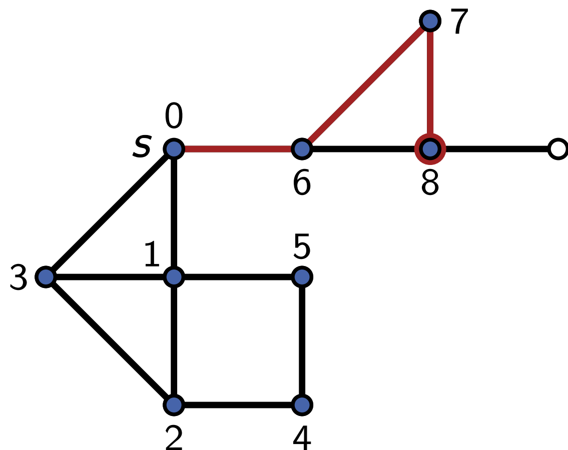
Pfad zum aktuellen Knoten

Graphtraversierung

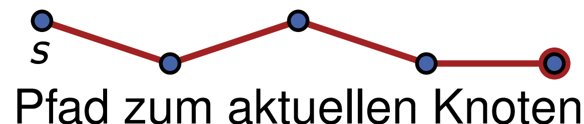
Karlsruher Institut für Technologie

Tiefensuche (DFS)

- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten

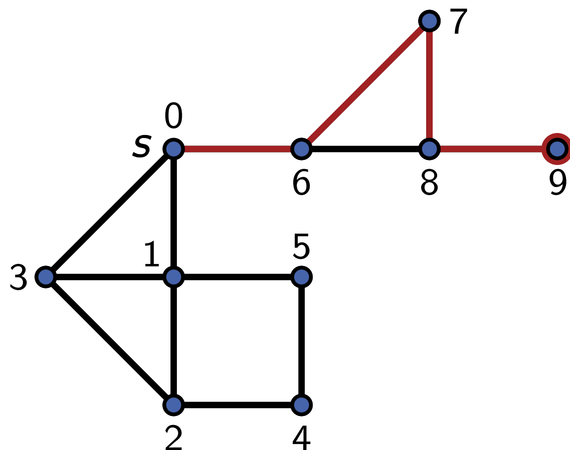


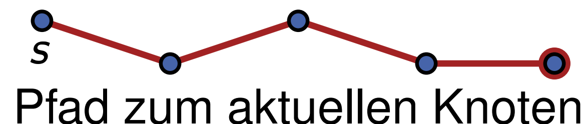
Pfad zum aktuellen Knoten

Graphtraversierung

Tiefensuche (DFS)

- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger





- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten

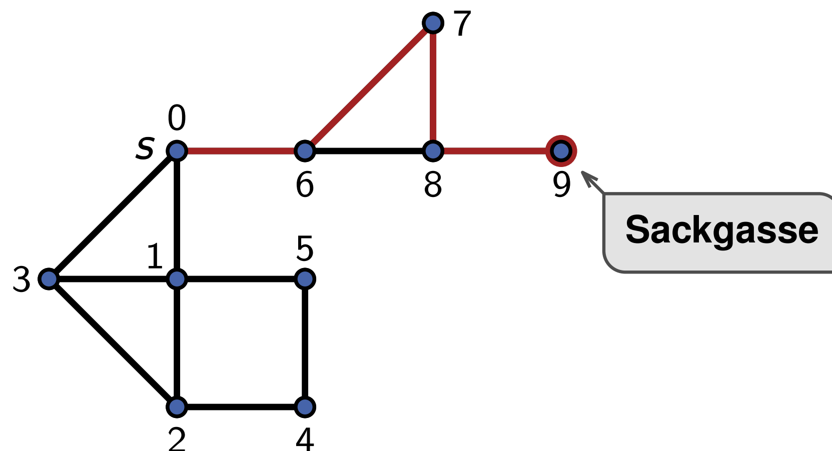
Pfad zum aktuellen Knoten

Graphtraversierung

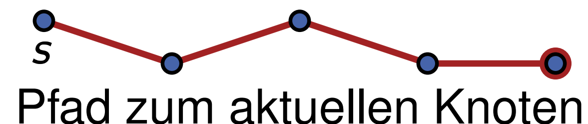
Karlsruher Institut für Technologie

Tiefensuche (DFS)

- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten



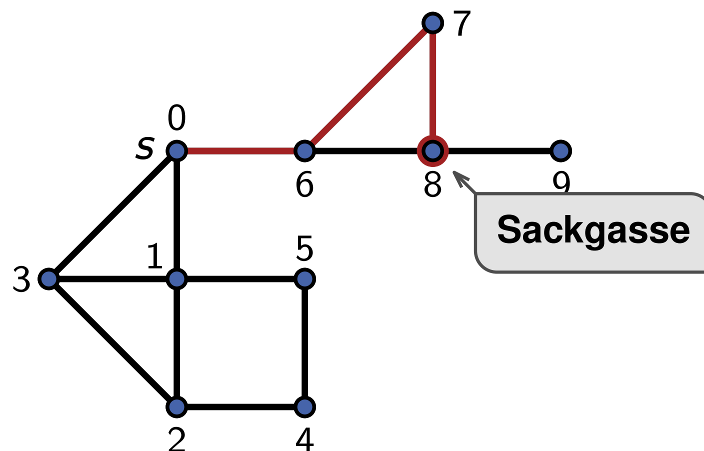
Pfad zum aktuellen Knoten

Graphtraversierung

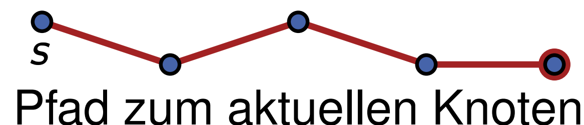
KIT Karlsruher Institut für Technologie

Tiefensuche (DFS)

- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten



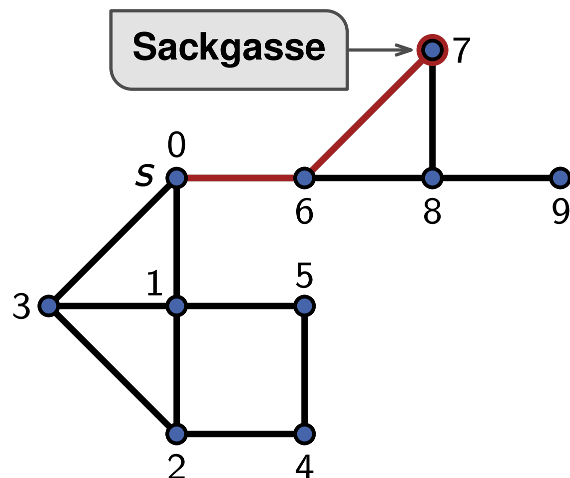
Pfad zum aktuellen Knoten

Graphtraversierung

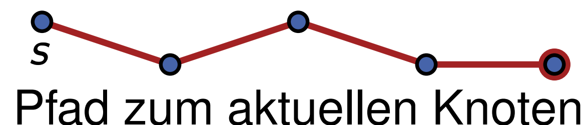
Karlsruher Institut für Technologie

Tiefensuche (DFS)

- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten



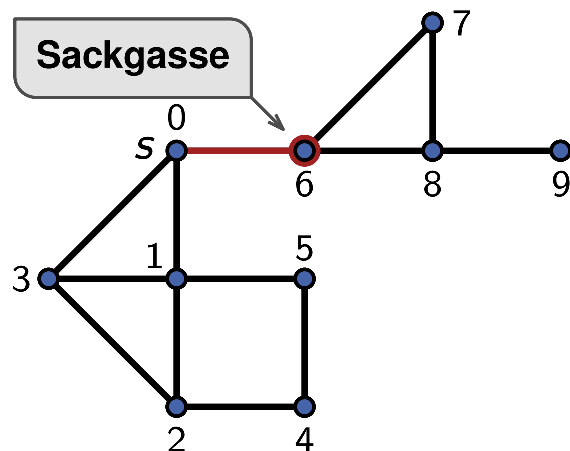
Pfad zum aktuellen Knoten

Graphtraversierung

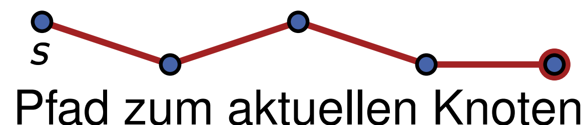
Karlsruher Institut für Technologie

Tiefensuche (DFS)

- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten



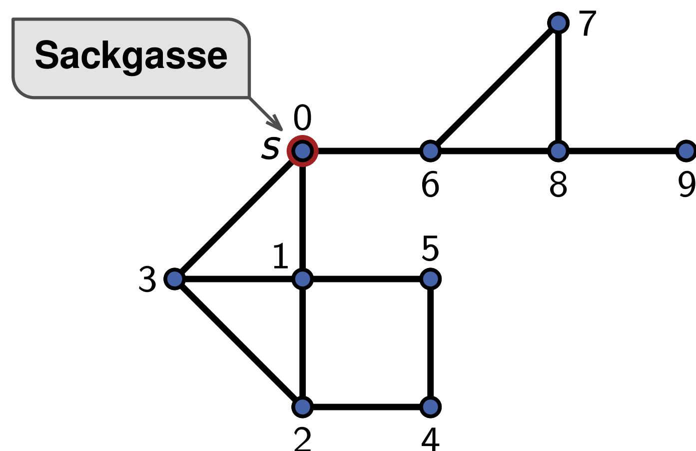
Pfad zum aktuellen Knoten

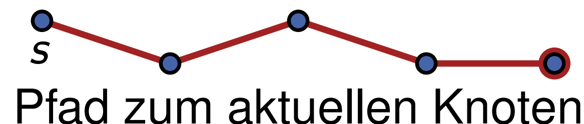
Graphtraversierung

Karlsruher Institut für Technologie

Tiefensuche (DFS)

- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger

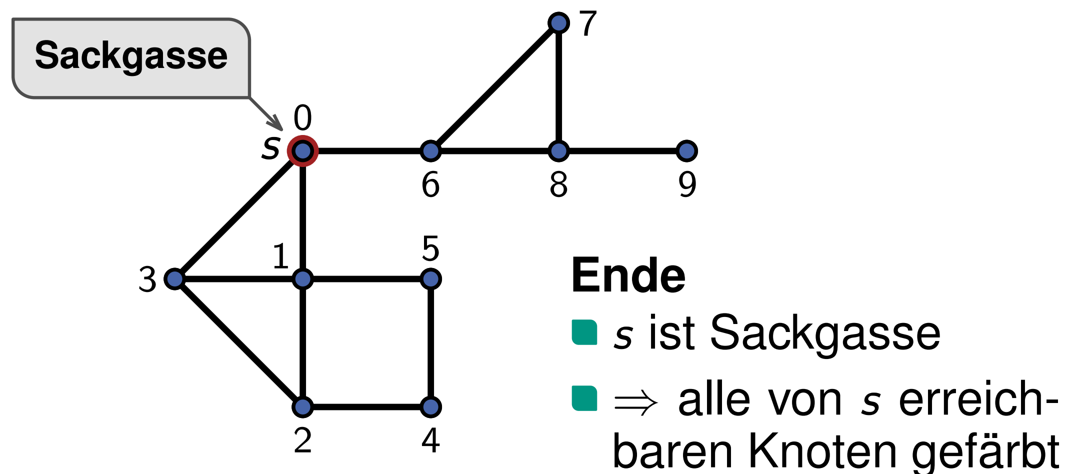




Graphtraversierung

Tiefensuche (DFS)

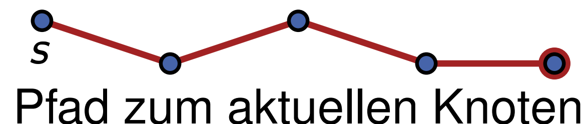
- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



Ende

- s ist Sackgasse
- $\Rightarrow$ alle von s erreichbaren Knoten gefärbt

- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten



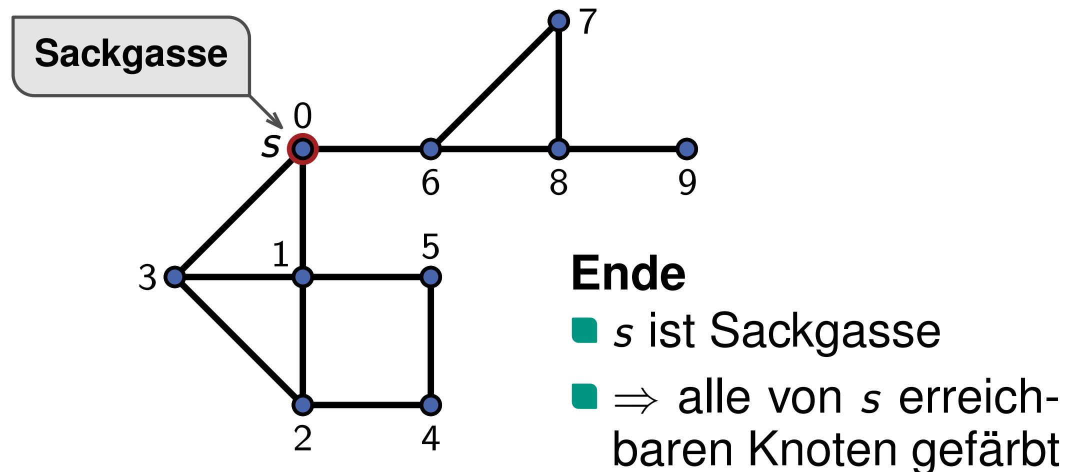
Pfad zum aktuellen Knoten

Graphtraversierung

Karlsruher Institut für Technologie

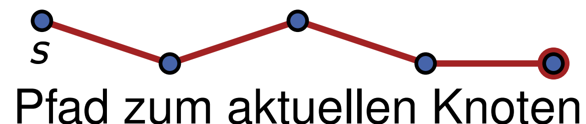
Tiefensuche (DFS)

- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar) $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



Ende

- s ist Sackgasse
- $\Rightarrow$ alle von s erreichbaren Knoten gefärbt



Pfad zum aktuellen Knoten

Breitensuche (BFS)

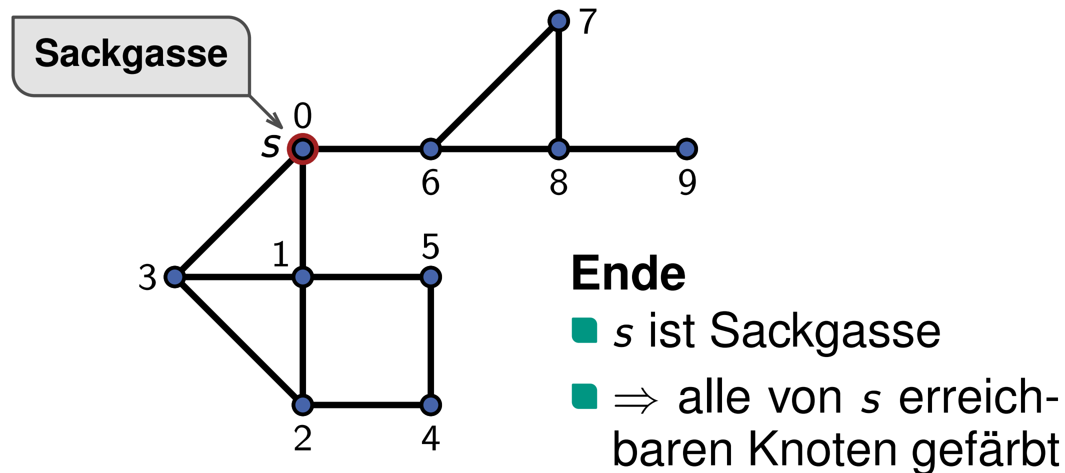
- starte bei einem Knoten s
- besuche alle Nachbarn von s
- dann alle Nachbarn der Nachbarn usw.

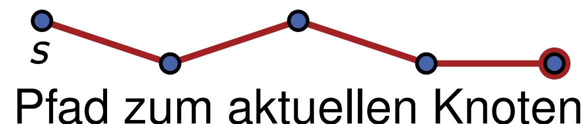
Graphtraversierung

Karlsruher Institut für Technologie

Tiefensuche (DFS)

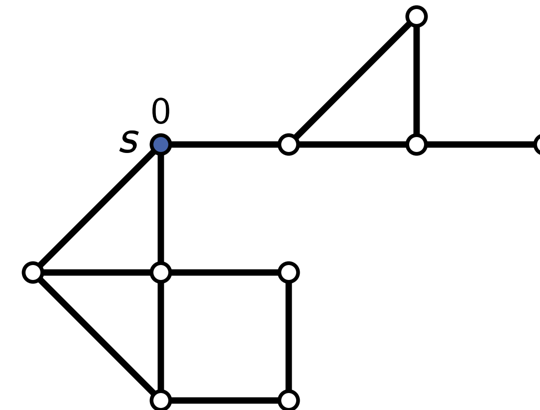
- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger





Breitensuche (BFS)

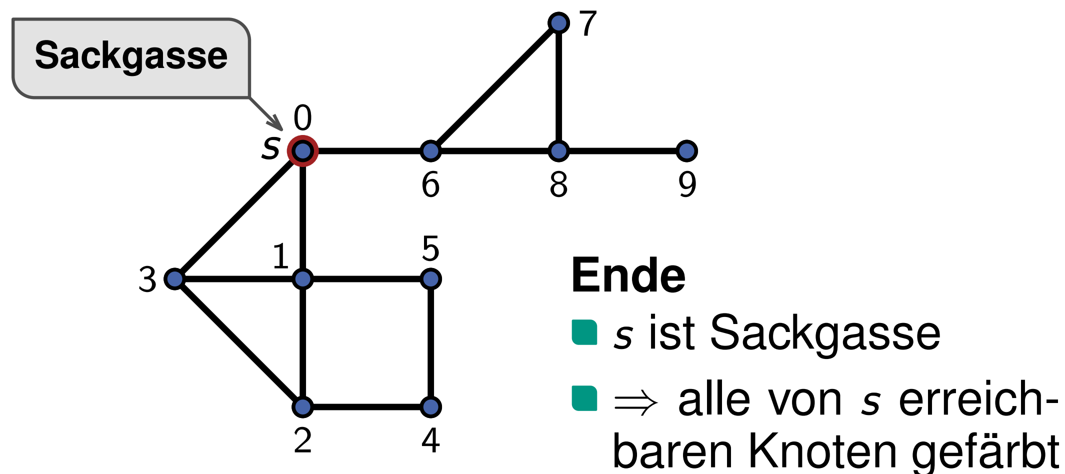
- starte bei einem Knoten s
- besuche alle Nachbarn von s
- dann alle Nachbarn der Nachbarn usw.



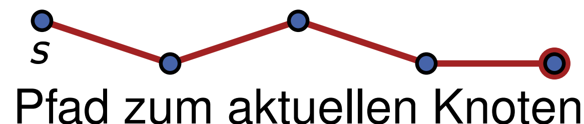
Graphtraversierung

Tiefensuche (DFS)

- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger

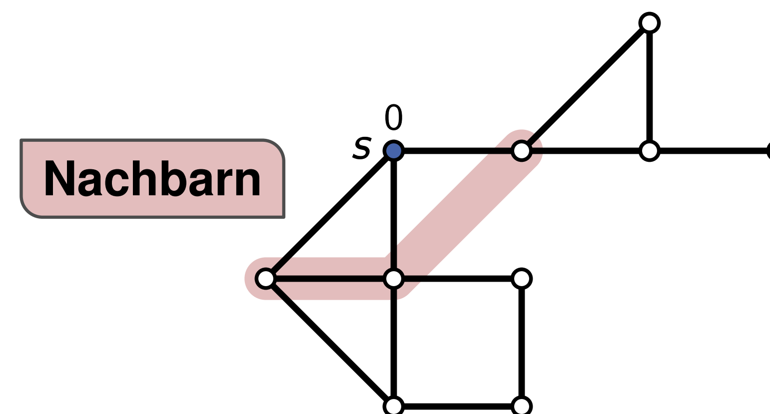


- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten



Breitensuche (BFS)

- starte bei einem Knoten s
- besuche alle Nachbarn von s
- dann alle Nachbarn der Nachbarn usw.

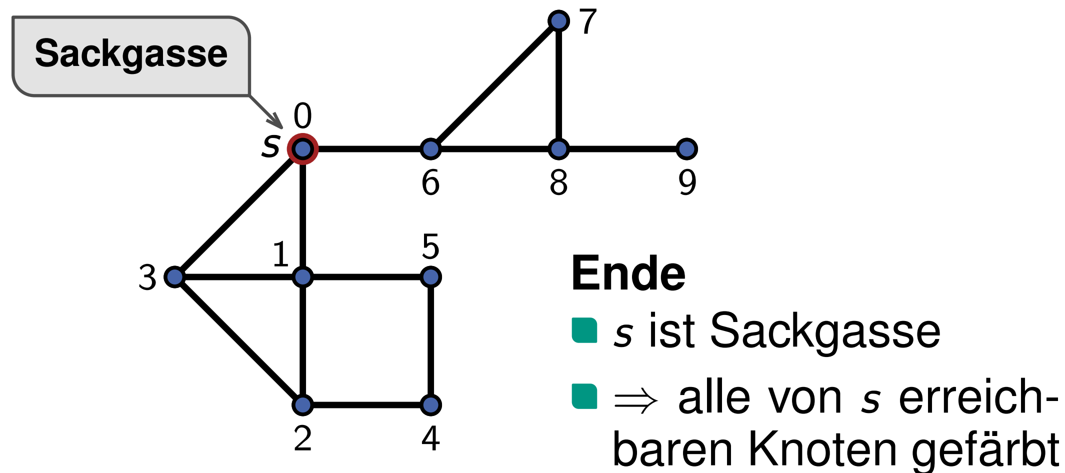


Graphtraversierung

Karlsruher Institut für Technologie

Tiefensuche (DFS)

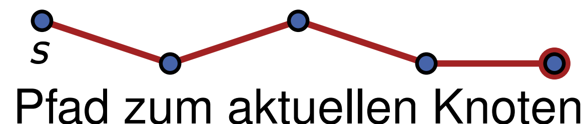
- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



Ende

- s ist Sackgasse
- $\Rightarrow$ alle von s erreichbaren Knoten gefärbt

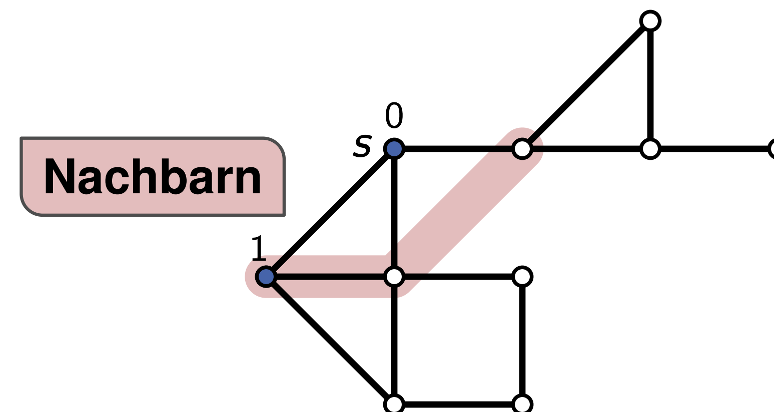
- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten



Pfad zum aktuellen Knoten

Breitensuche (BFS)

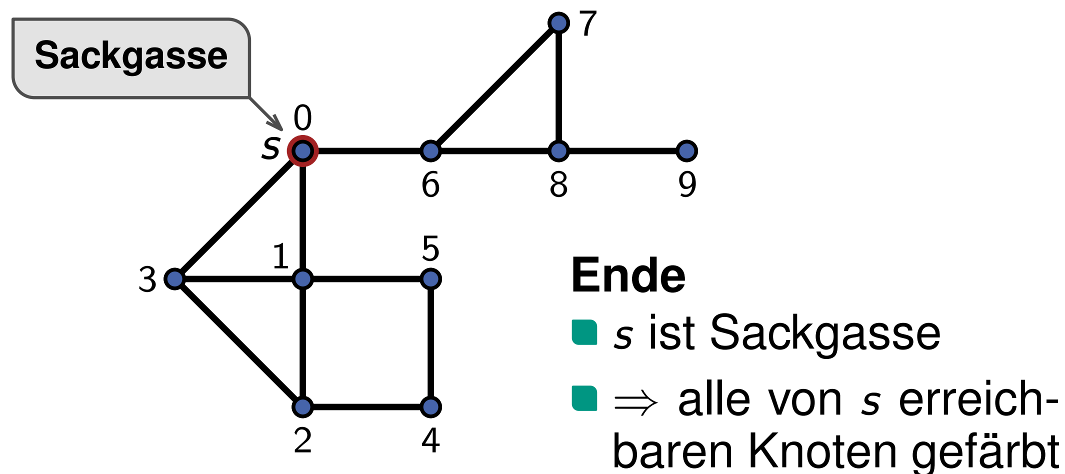
- starte bei einem Knoten s
- besuche alle Nachbarn von s
- dann alle Nachbarn der Nachbarn usw.



Graphtraversierung

Tiefensuche (DFS)

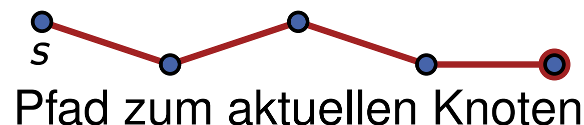
- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



Ende

- s ist Sackgasse
- $\Rightarrow$ alle von s erreichbaren Knoten gefärbt

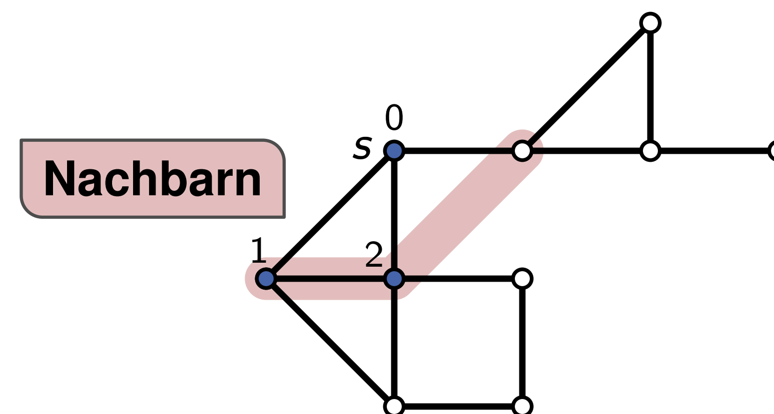
- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten



Pfad zum aktuellen Knoten

Breitensuche (BFS)

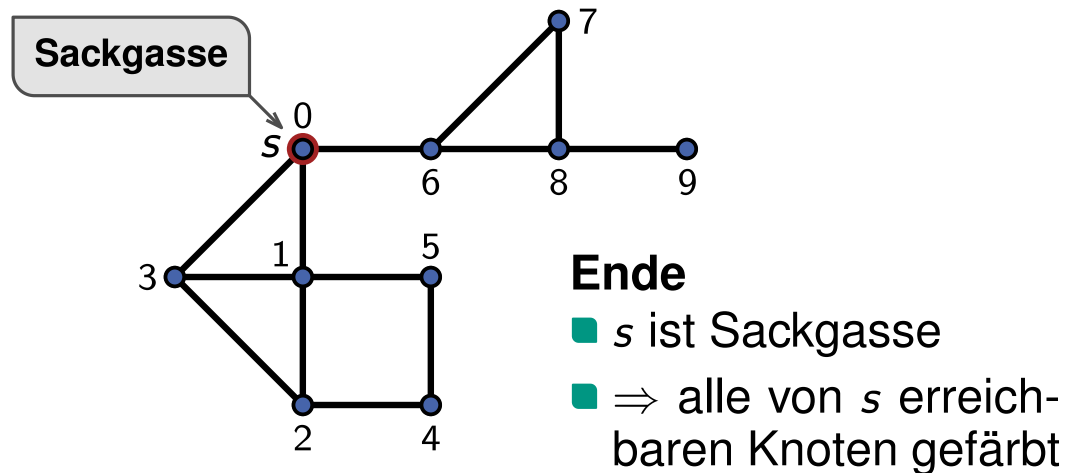
- starte bei einem Knoten s
- besuche alle Nachbarn von s
- dann alle Nachbarn der Nachbarn usw.



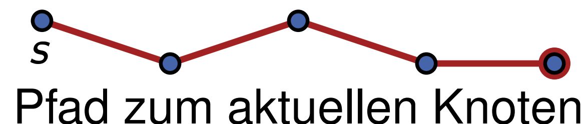
Graphtraversierung

Tiefensuche (DFS)

- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



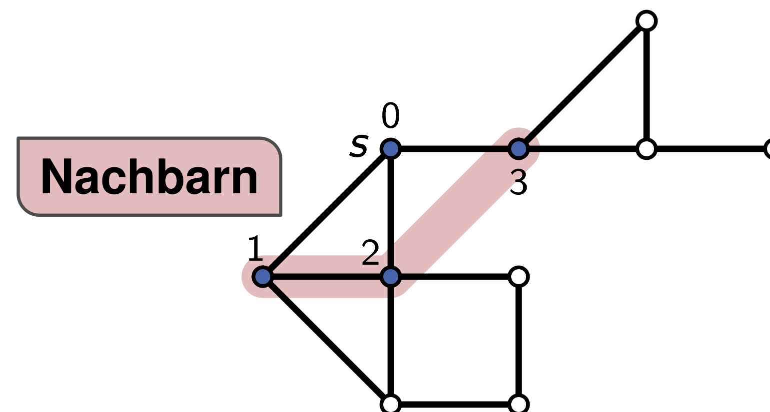
- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten



Pfad zum aktuellen Knoten

Breitensuche (BFS)

- starte bei einem Knoten s
- besuche alle Nachbarn von s
- dann alle Nachbarn der Nachbarn usw.

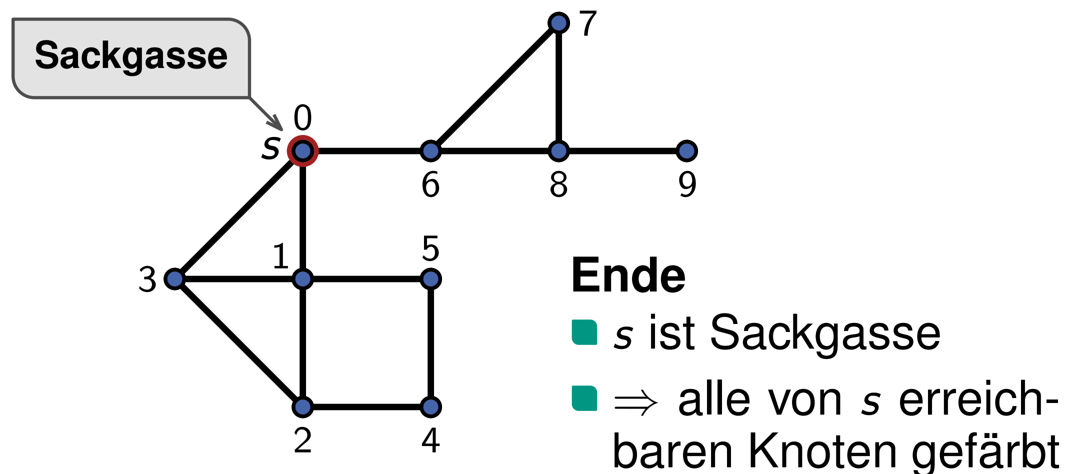


Graphtraversierung

Karlsruher Institut für Technologie

Tiefensuche (DFS)

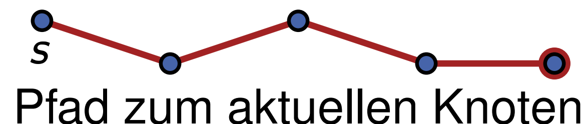
- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar) $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



Ende

- s ist Sackgasse
- $\Rightarrow$ alle von s erreichbaren Knoten gefärbt

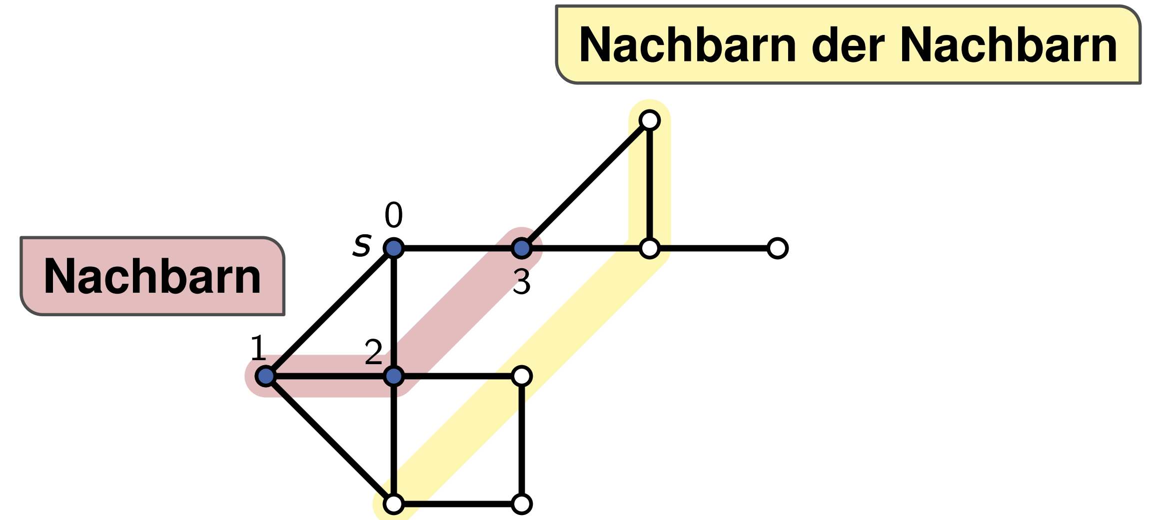
- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten



Pfad zum aktuellen Knoten

Breitensuche (BFS)

- starte bei einem Knoten s
- besuche alle Nachbarn von s
- dann alle Nachbarn der Nachbarn usw.

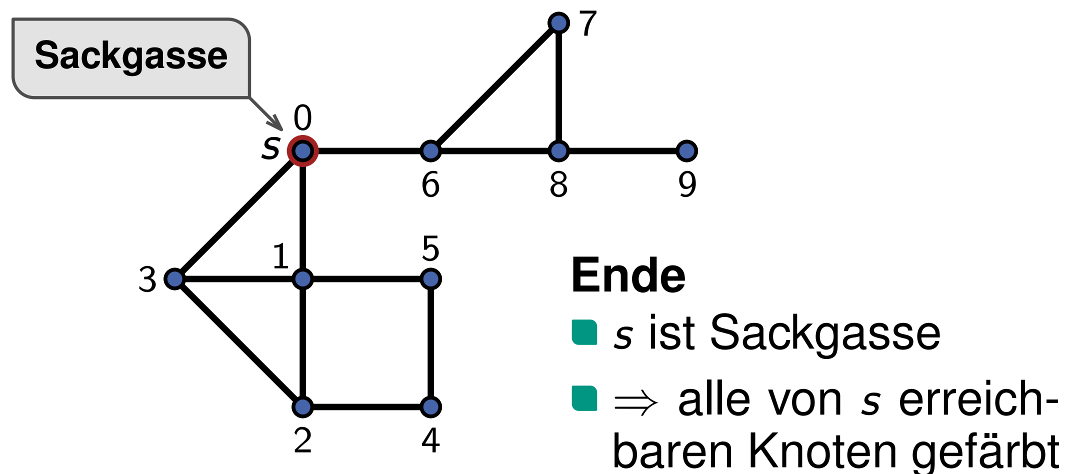


Graphtraversierung

Karlsruher Institut für Technologie

Tiefensuche (DFS)

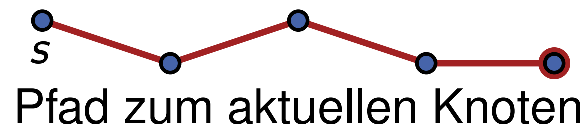
- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



Ende

- s ist Sackgasse
- $\Rightarrow$ alle von s erreichbaren Knoten gefärbt

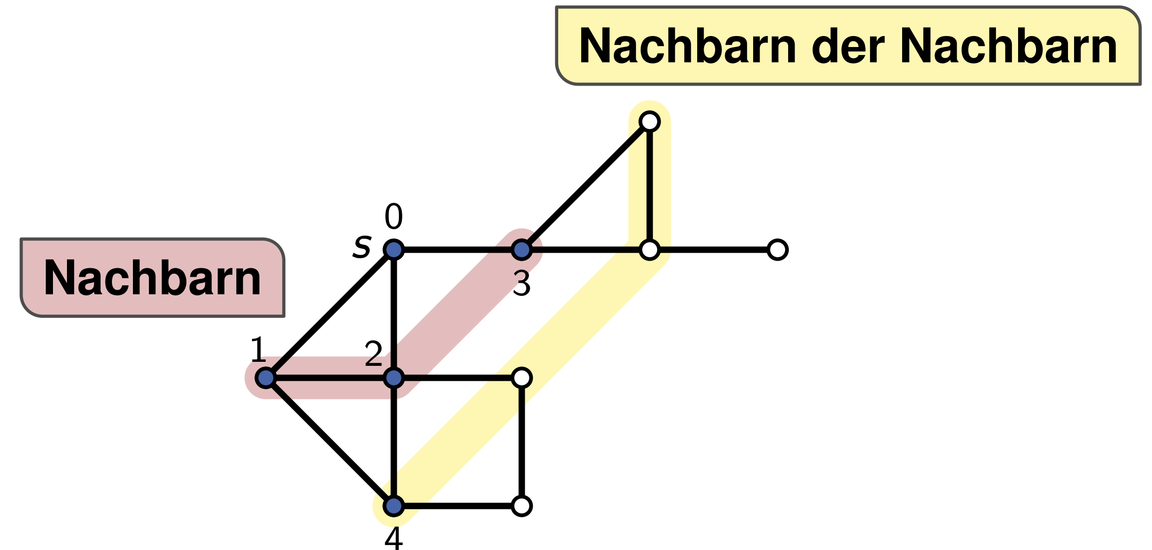
- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten



Pfad zum aktuellen Knoten

Breitensuche (BFS)

- starte bei einem Knoten s
- besuche alle Nachbarn von s
- dann alle Nachbarn der Nachbarn usw.

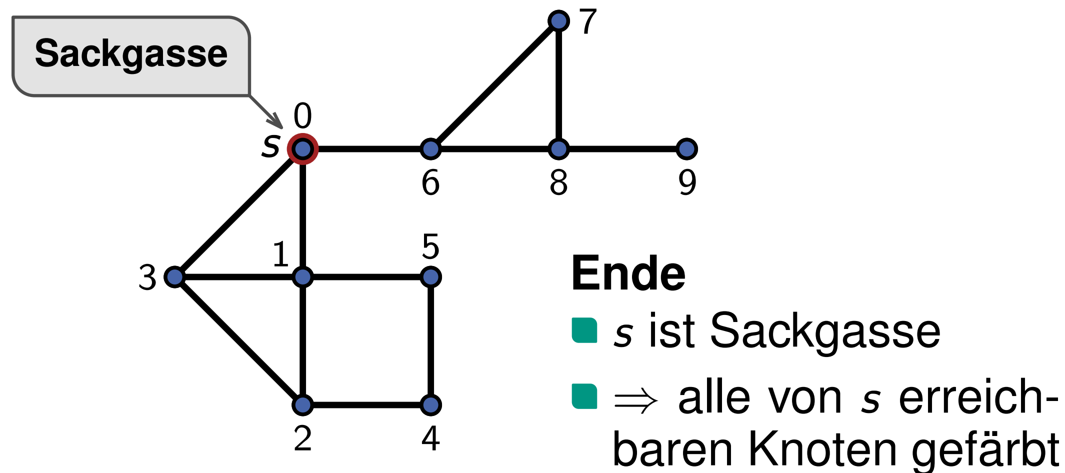


Graphtraversierung

Karlsruher Institut für Technologie

Tiefensuche (DFS)

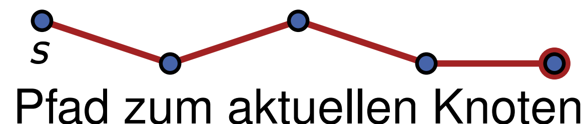
- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar) $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



Ende

- s ist Sackgasse
- $\Rightarrow$ alle von s erreichbaren Knoten gefärbt

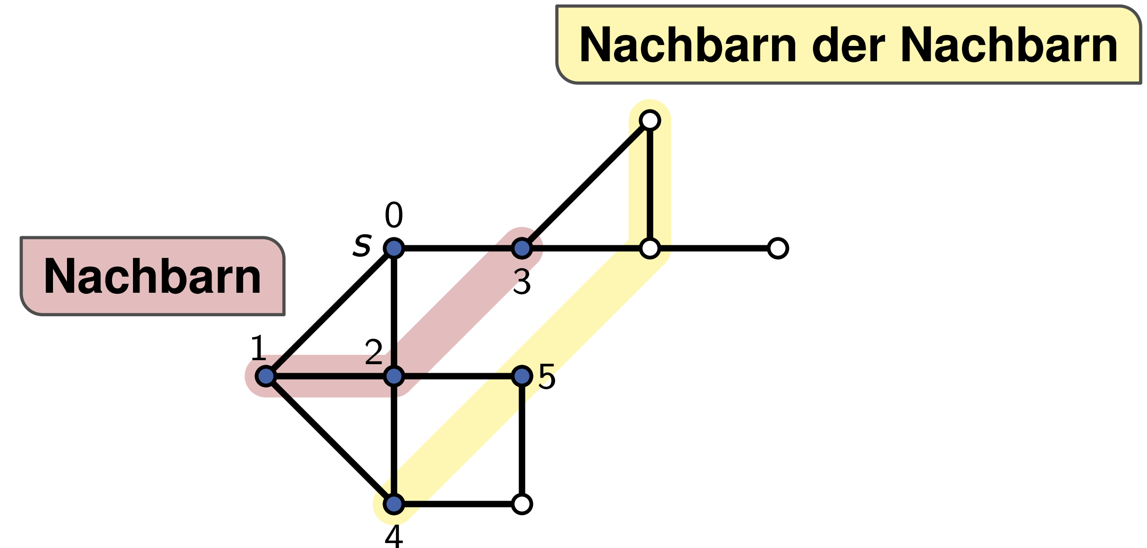
- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten



Pfad zum aktuellen Knoten

Breitensuche (BFS)

- starte bei einem Knoten s
- besuche alle Nachbarn von s
- dann alle Nachbarn der Nachbarn usw.

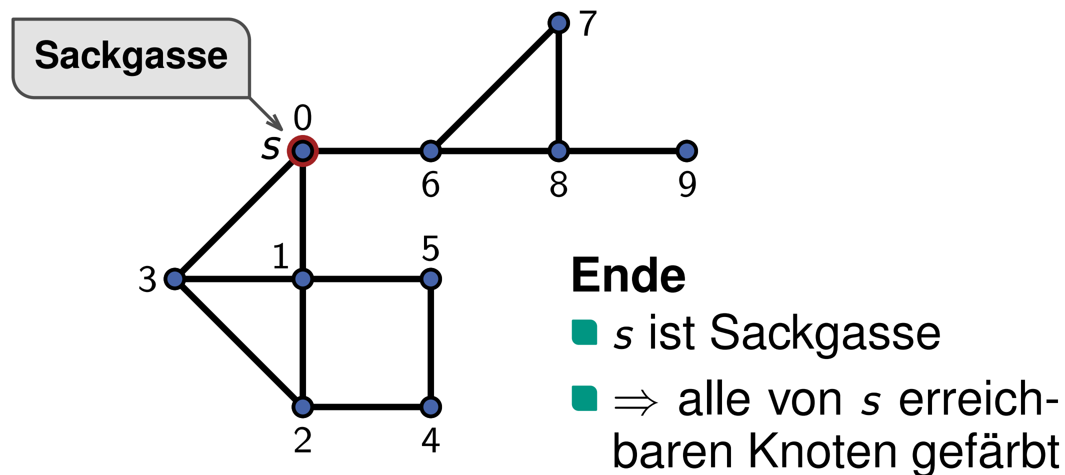


Graphtraversierung

Karlsruher Institut für Technologie

Tiefensuche (DFS)

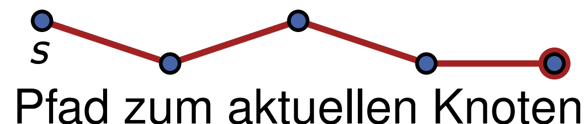
- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



Ende

- s ist Sackgasse
- $\Rightarrow$ alle von s erreichbaren Knoten gefärbt

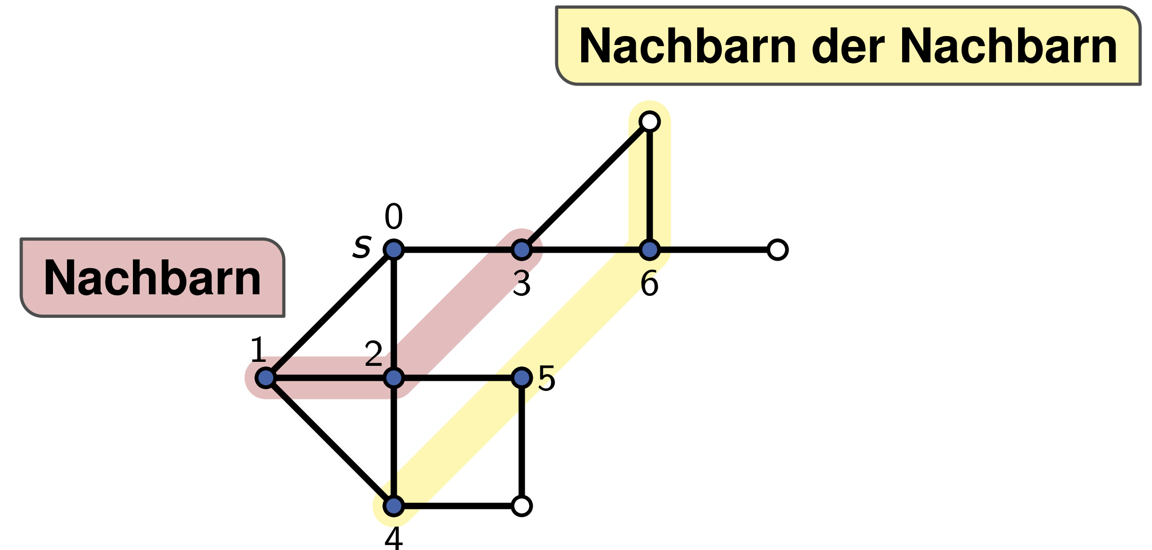
- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten



Pfad zum aktuellen Knoten

Breitensuche (BFS)

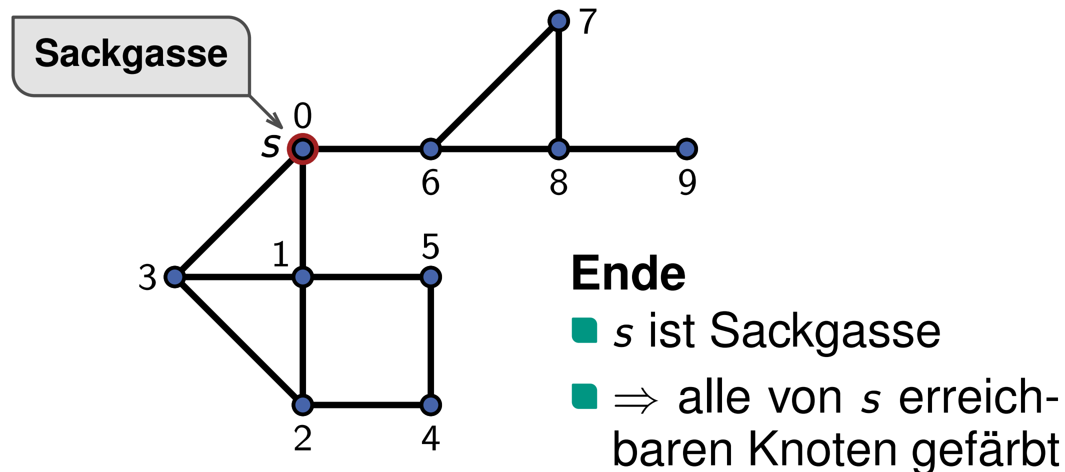
- starte bei einem Knoten s
- besuche alle Nachbarn von s
- dann alle Nachbarn der Nachbarn usw.



Graphtraversierung

Tiefensuche (DFS)

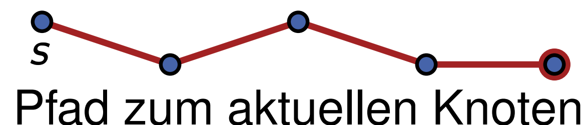
- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



Ende

- s ist Sackgasse
- $\Rightarrow$ alle von s erreichbaren Knoten gefärbt

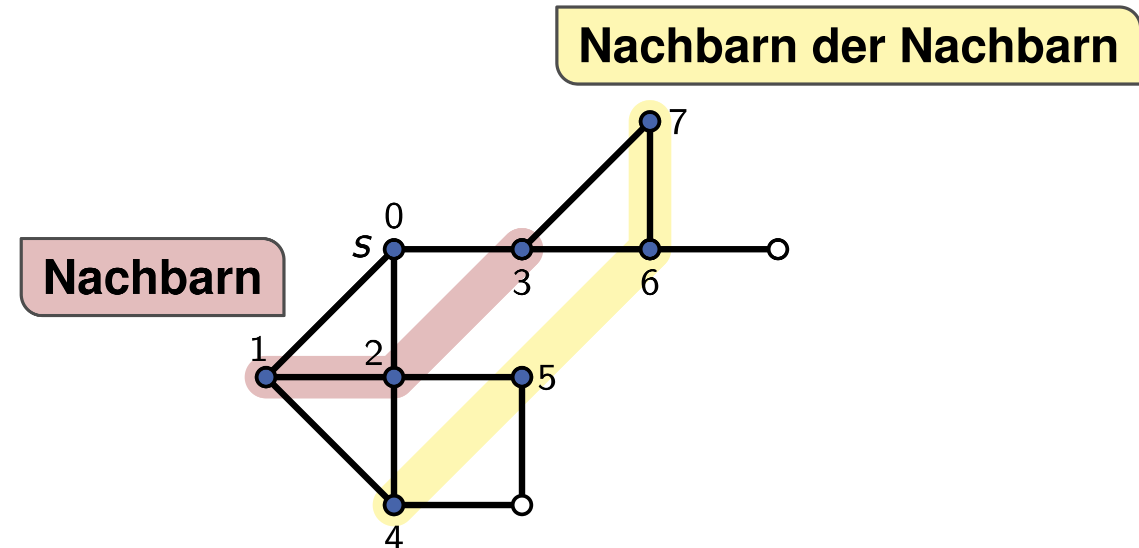
- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten



Pfad zum aktuellen Knoten

Breitensuche (BFS)

- starte bei einem Knoten s
- besuche alle Nachbarn von s
- dann alle Nachbarn der Nachbarn usw.

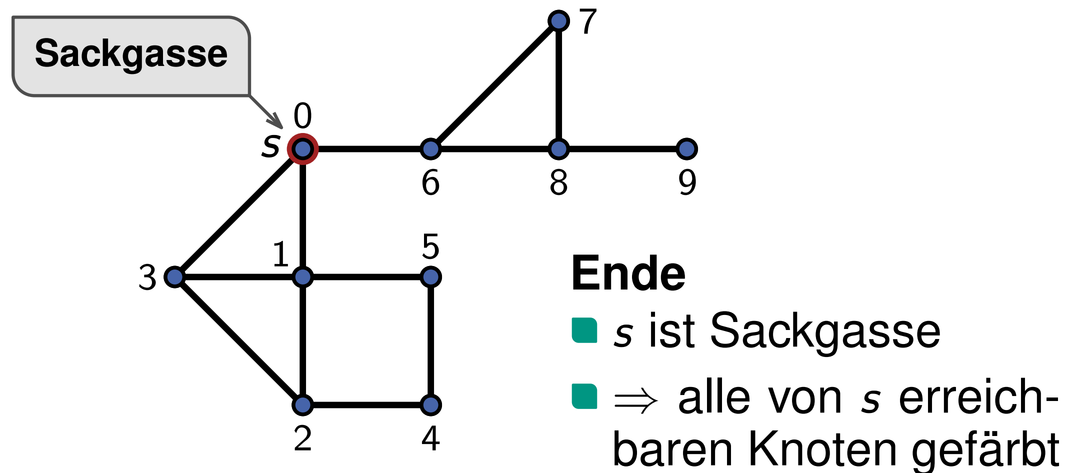


Graphtraversierung

Karlsruher Institut für Technologie

Tiefensuche (DFS)

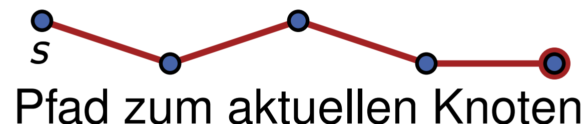
- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



Ende

- s ist Sackgasse
- $\Rightarrow$ alle von s erreichbaren Knoten gefärbt

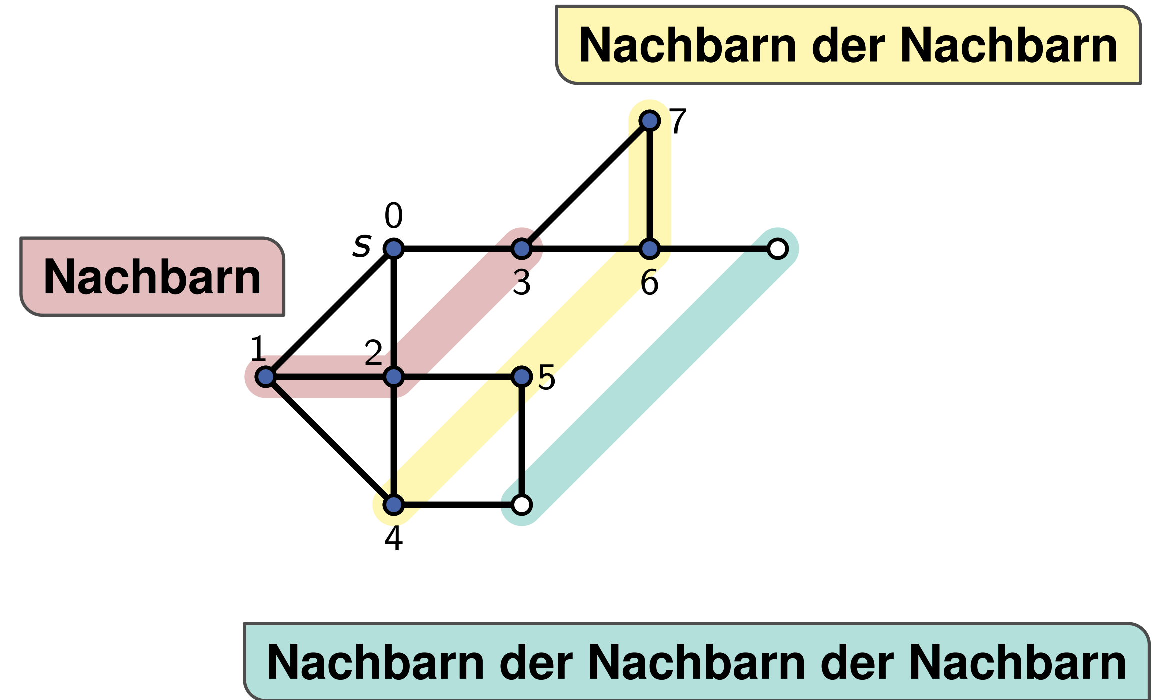
besuchter Knoten
unbesuchter Knoten
aktueller Knoten



Pfad zum aktuellen Knoten

Breitensuche (BFS)

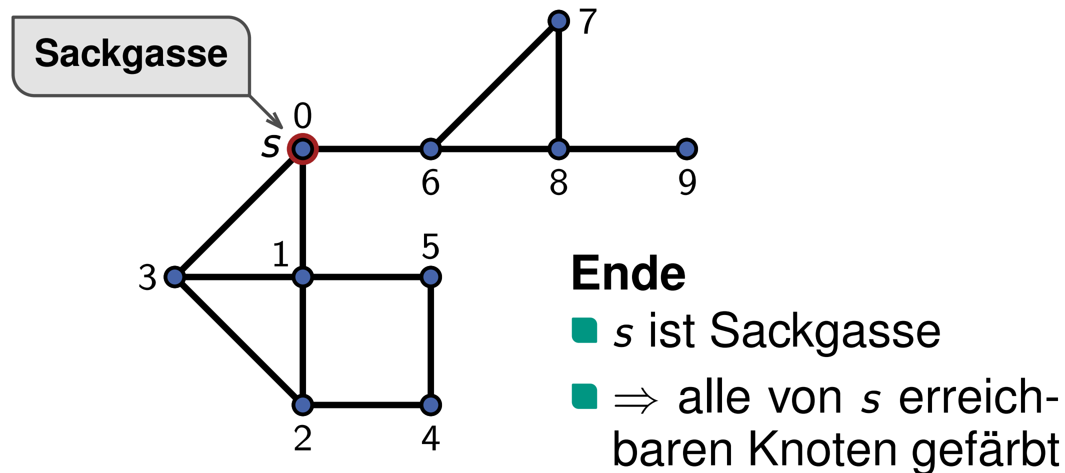
- starte bei einem Knoten s
- besuche alle Nachbarn von s
- dann alle Nachbarn der Nachbarn usw.



Graphtraversierung

Tiefensuche (DFS)

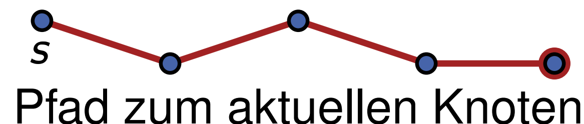
- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



Ende

- s ist Sackgasse
- $\Rightarrow$ alle von s erreichbaren Knoten gefärbt

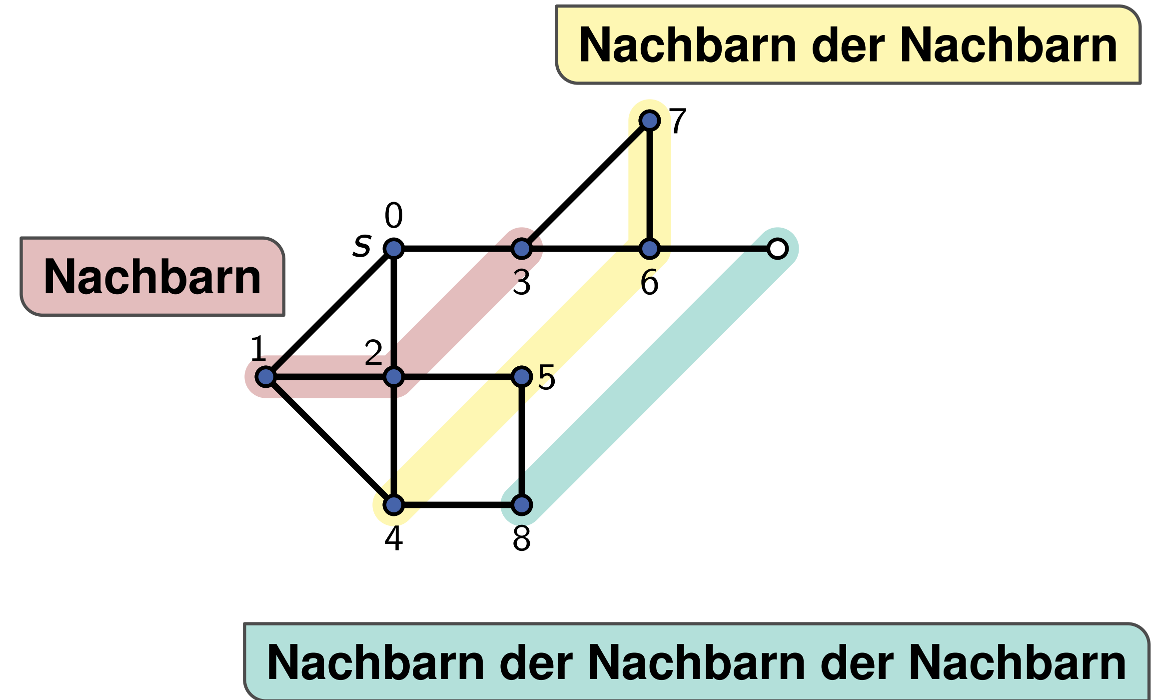
- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten



Pfad zum aktuellen Knoten

Breitensuche (BFS)

- starte bei einem Knoten s
- besuche alle Nachbarn von s
- dann alle Nachbarn der Nachbarn usw.

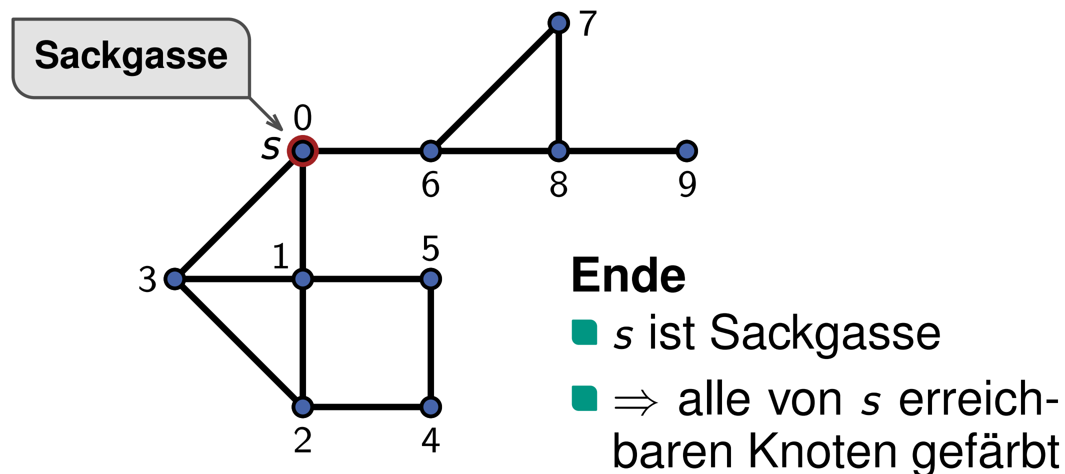


Graphtraversierung

Karlsruher Institut für Technologie

Tiefensuche (DFS)

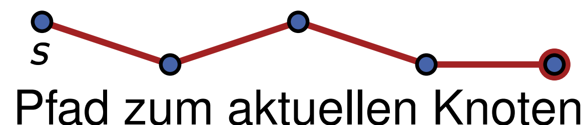
- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



Ende

- s ist Sackgasse
- $\Rightarrow$ alle von s erreichbaren Knoten gefärbt

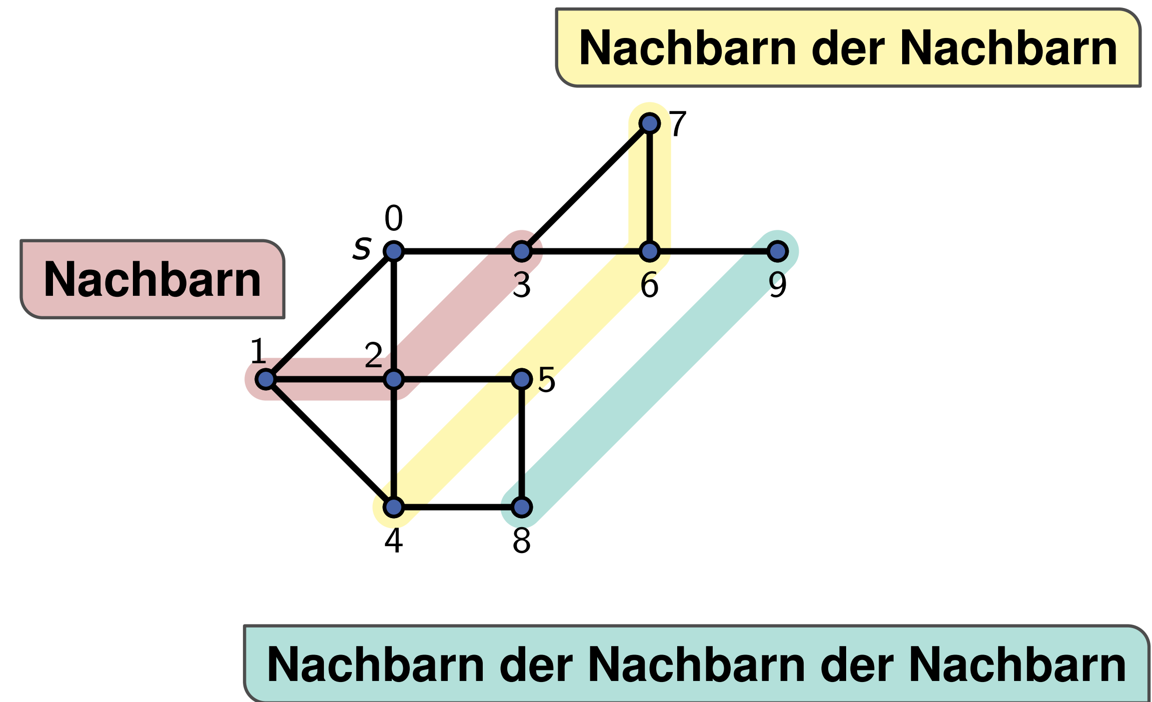
- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten



Pfad zum aktuellen Knoten

Breitensuche (BFS)

- starte bei einem Knoten s
- besuche alle Nachbarn von s
- dann alle Nachbarn der Nachbarn usw.

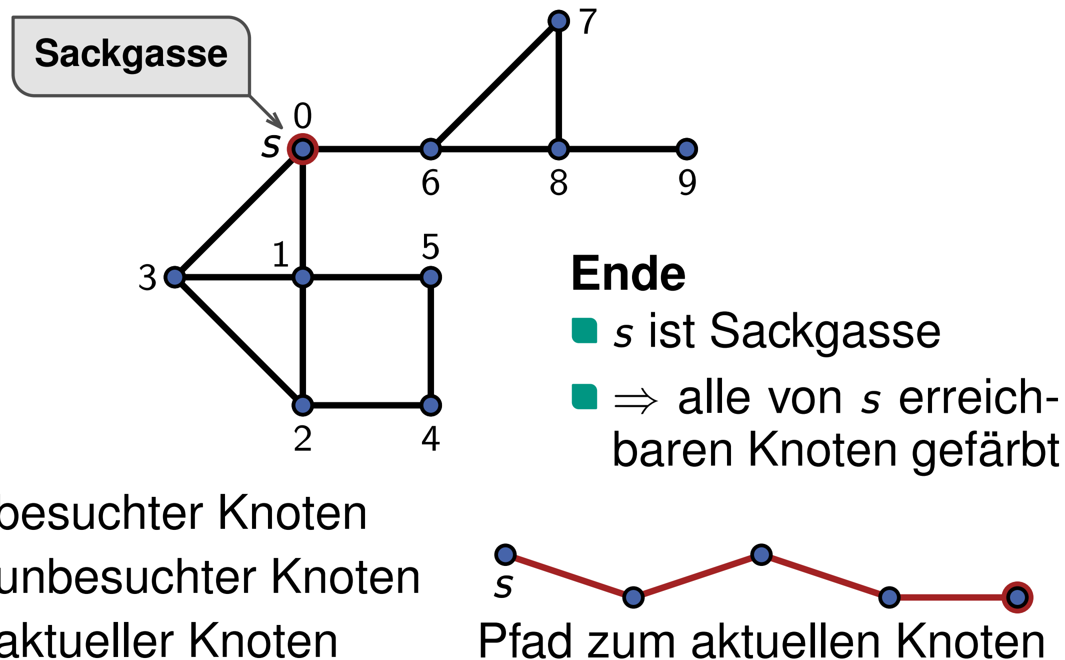


Graphtraversierung

Karlsruher Institut für Technologie

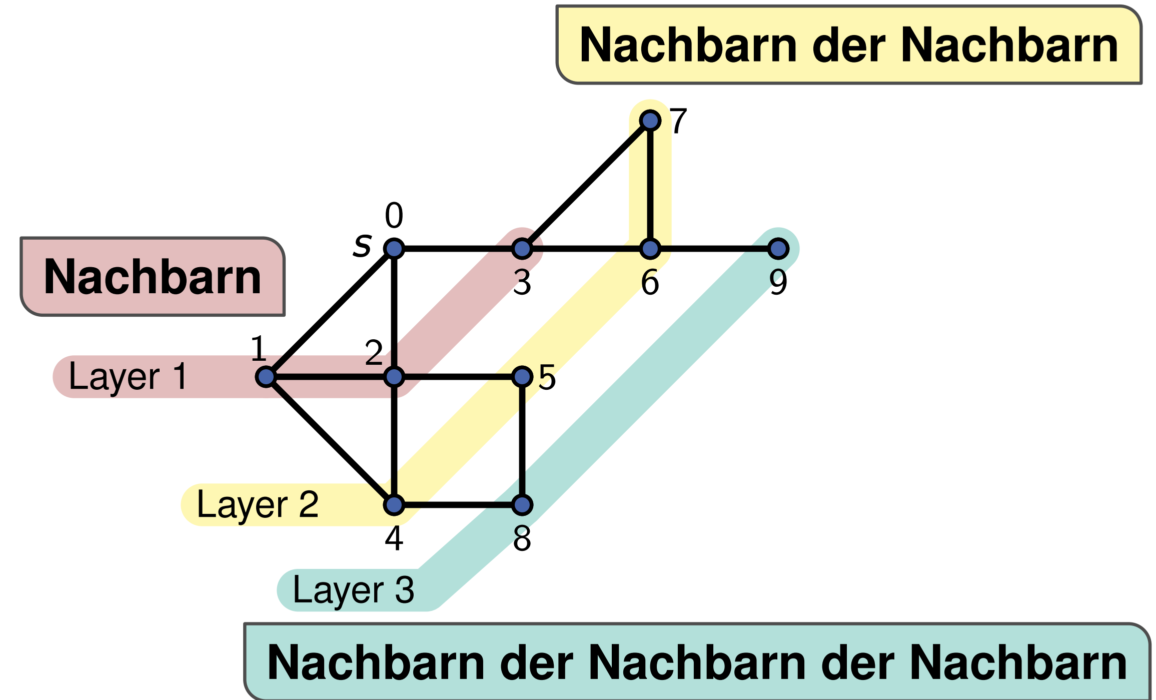
Tiefensuche (DFS)

- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



Breitensuche (BFS)

- starte bei einem Knoten s
- besuche alle Nachbarn von s
- dann alle Nachbarn der Nachbarn usw.



Breitensuche

Karlsruher Institut für Technologie

Abstrakte Algorithmenidee

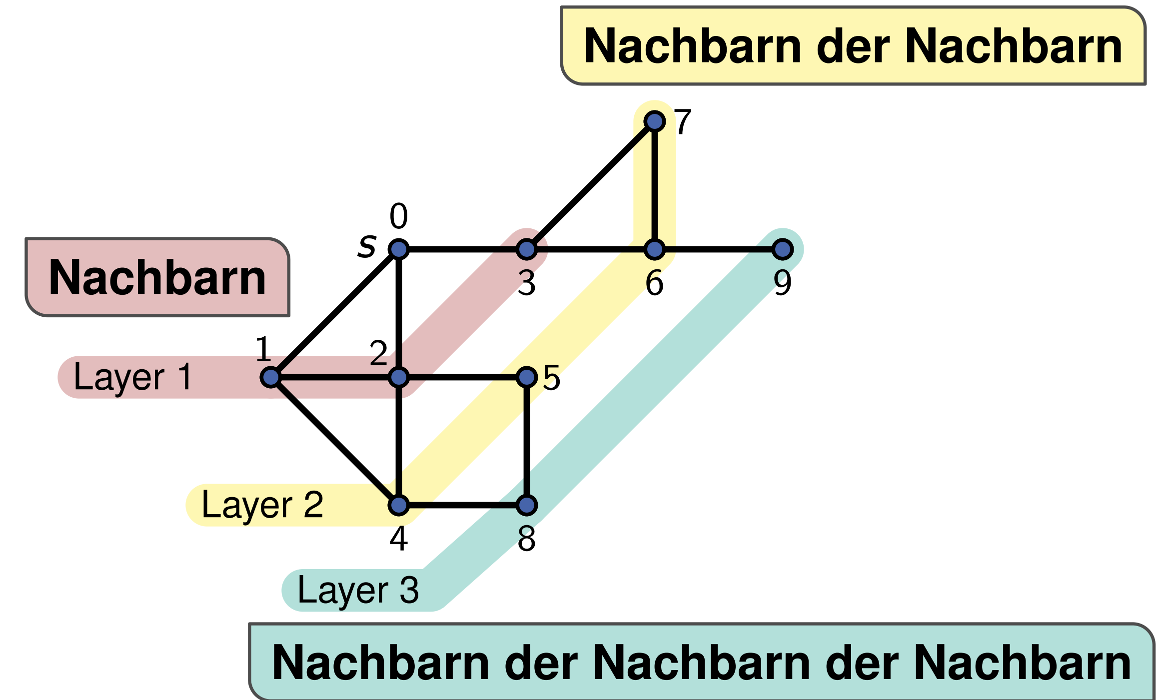
- im Prinzip wissen wir, was die BFS tut
- sind aber noch weit von einer Implementierung entfernt

Effiziente Umsetzung

- nicht leicht
- mit etwas Übung aber auch nicht schwer
- für BFS: gleich

Breitensuche (BFS)

- starte bei einem Knoten s
- besuche alle Nachbarn von s
- dann alle Nachbarn der Nachbarn usw.



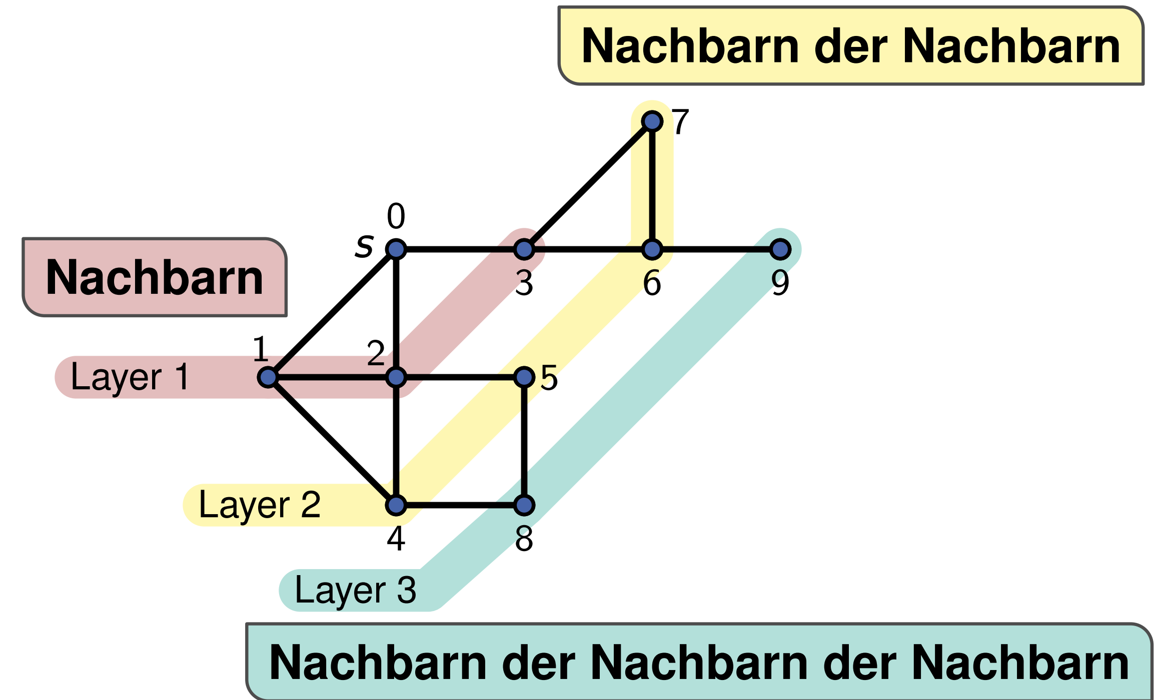
Breitensuche

Abstrakte Algorithmenidee
- im Prinzip wissen wir, was die BFS tut
- sind aber noch weit von einer Implementierung entfernt

Effiziente Umsetzung
- nicht leicht
- mit etwas Übung aber auch nicht schwer
- für BFS: gleich

Wiederholung: Ziele der Vorlesung
- eigene Algorithmenideen entwickeln
- effiziente Umsetzung der Ideen
- gute Intuition, welche Ideen sich effizient umsetzen lassen

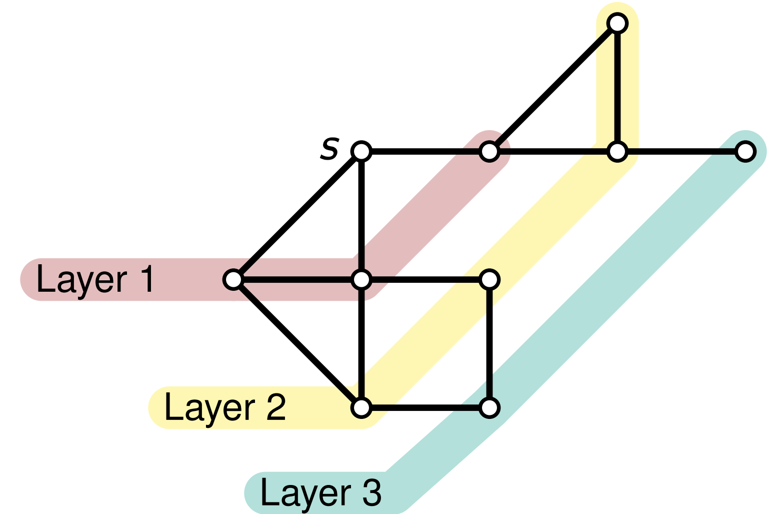
Breitensuche (BFS)
- starte bei einem Knoten s
- besuche alle Nachbarn von s
- dann alle Nachbarn der Nachbarn usw.



Algorithmus → Pseudocode (erster Versuch)

Karlsruher Institut für Technologie

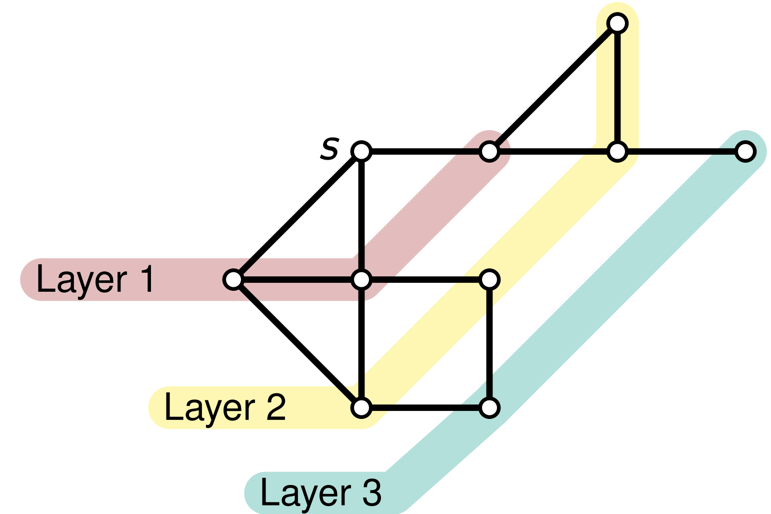
```
BFS(Graph G, Node s)
  ℓ := 0                                // current layer
  color node s
  while there is a node in layer ℓ + 1 do
    ℓ := ℓ + 1
    for Node v in layer ℓ do
      color node v
```



Algorithmus → Pseudocode (erster Versuch)

BFS(*Graph* G, *Node* s)

$\ell := 0$ // current layer
color node s
while there is a node in layer $\ell + 1$ **do**
  $\ell := \ell + 1$
  for *Node* v in layer ℓ **do**
    color node v

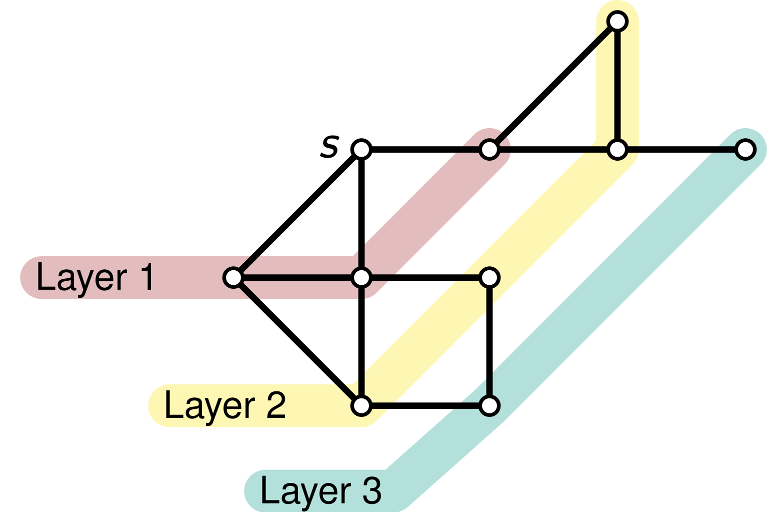


Zu hohe Abstraktion für Pseudocode

- **while** there is a node in layer $\ell + 1$ **do**
  - Woher wissen wir das?

Algorithmus → Pseudocode (erster Versuch)

```
BFS(Graph G, Node s)
  ℓ := 0                                   // current layer
  color node s
  while there is a node in layer ℓ + 1 do
    ℓ := ℓ + 1
    for Node v in layer ℓ do
      color node v
```

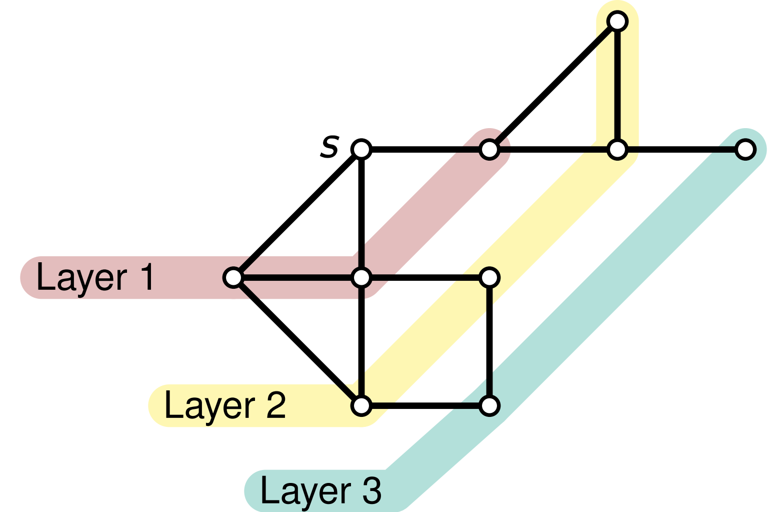


Zu hohe Abstraktion für Pseudocode

- **while** there is a node in layer $\ell + 1$ **do**
  - Woher wissen wir das?
- **for** *Node* v in layer ℓ **do**
  - Welche Knoten liegen in Layer ℓ?

Algorithmus → Pseudocode (erster Versuch)

```
BFS(Graph G, Node s)
  ℓ := 0                                   // current layer
  color node s
  while there is a node in layer ℓ + 1 do
    ℓ := ℓ + 1
    for Node v in layer ℓ do
      color node v
```



Zu hohe Abstraktion für Pseudocode

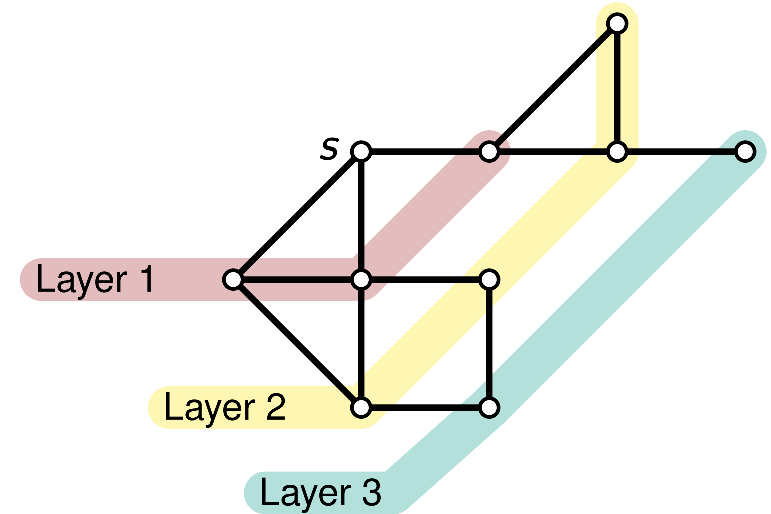
- **while** there is a node in layer $\ell + 1$ **do**
  - Woher wissen wir das?
- **for** *Node* v in layer ℓ **do**
  - Welche Knoten liegen in Layer ℓ?

Ziele für die Laufzeit

- Layer $\ell + 1$ aus Layer ℓ: betrachte nur Kanten inzident zu Knoten aus Layer ℓ → insgesamt $\Theta(m)$

Algorithmus → Pseudocode (erster Versuch)

```
BFS(Graph G, Node s)
  ℓ := 0                                  // current layer
  color node s
  while there is a node in layer ℓ + 1 do
    ℓ := ℓ + 1
    for Node v in layer ℓ do
      color node v
```



Zu hohe Abstraktion für Pseudocode

- **while** there is a node in layer $\ell + 1$ **do**
  - Woher wissen wir das?
- **for** *Node* v in layer ℓ **do**
  - Welche Knoten liegen in Layer ℓ?

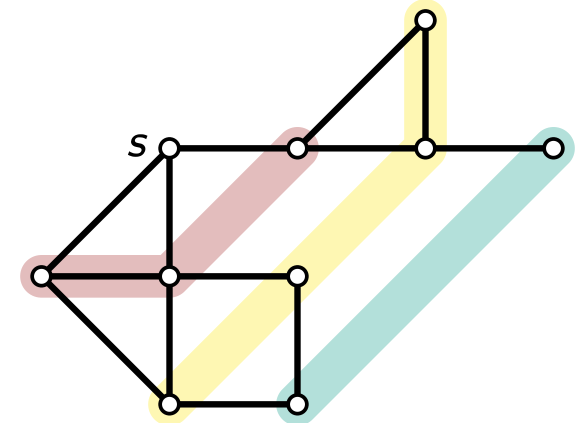
Ziele für die Laufzeit

- Layer $\ell + 1$ aus Layer ℓ: betrachte nur Kanten inzident zu Knoten aus Layer ℓ $\rightarrow$ insgesamt $\Theta(m)$
- über Knoten in Layer ℓ iterieren: linear in Anzahl Knoten in Layer ℓ $\rightarrow$ insgesamt $\Theta(n)$

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

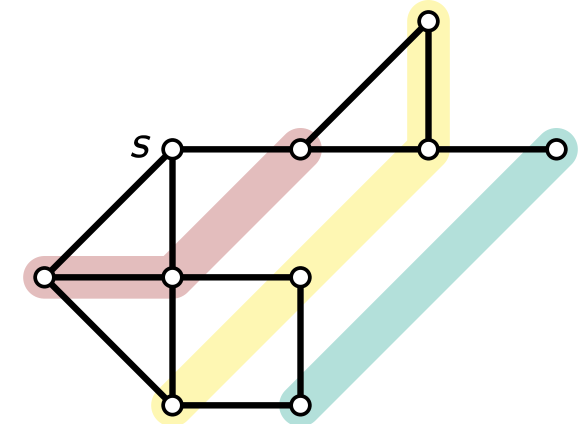
BFS(*Graph* G, *Node* s)

```
currLayer := {s}
color node s
nextLayer := N(s)
while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
        for Node v in N(u) do
            insert v into nextLayer
```



Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

```
BFS(Graph G, Node s)
    currLayer := {s}
    color node s
    nextLayer := N(s)
    while nextLayer ≠ ∅ do
        currLayer := nextLayer
        // determine next layer
        nextLayer := ∅
        for Node u in currLayer do
            for Node v in N(u) do
                insert v into nextLayer
```



Problem 1

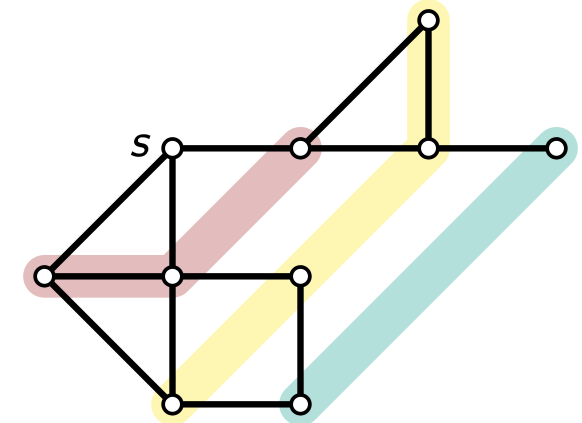
- manche Nachbarn von u sind aus dem vorherigen Layer, nicht aus dem nächsten

Lösung

- füge nur ungefärbte Knoten hinzu

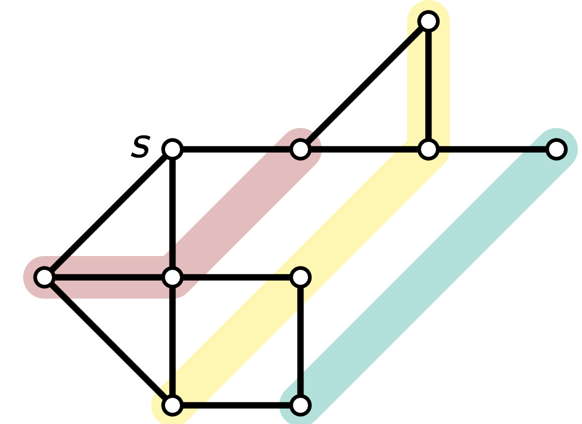
Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

```
BFS(Graph G, Node s)
  currLayer := {s}
  color node s
  nextLayer := N(s)
  while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
      for Node v in N(u) do
        if Node v is uncolored then
          insert v into nextLayer
```



Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

```
BFS(Graph G, Node s)
  currLayer := {s}
  color node s
  nextLayer := N(s)
  while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
      for Node v in N(u) do
        if Node v is uncolored then
          insert v into nextLayer
```



Problem 2
- wir haben vergessen besuchte Knoten zu färben

app.klicker.uzh.ch/join/algo1

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

BFS(*Graph* G, *Node* s)

```
currLayer := {s}
color node s
nextLayer := N(s)
while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
        for Node v in N(u) do
            if Node v is uncolored then
                insert v into nextLayer
```

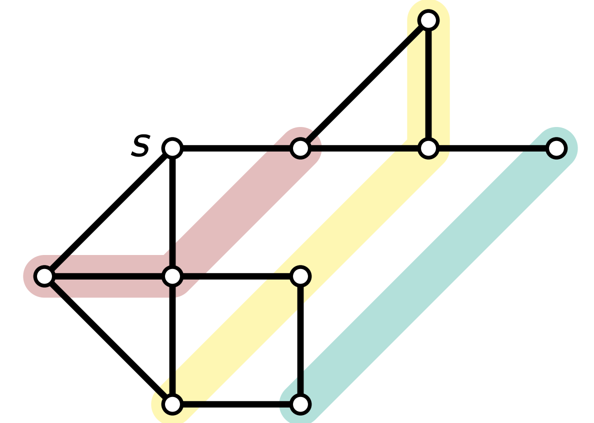
A: färbe Knoten in nextLayer

B: färbe Knoten in currLayer

C: färbe Knoten u

D: färbe Knoten v

E: färbe Knoten v

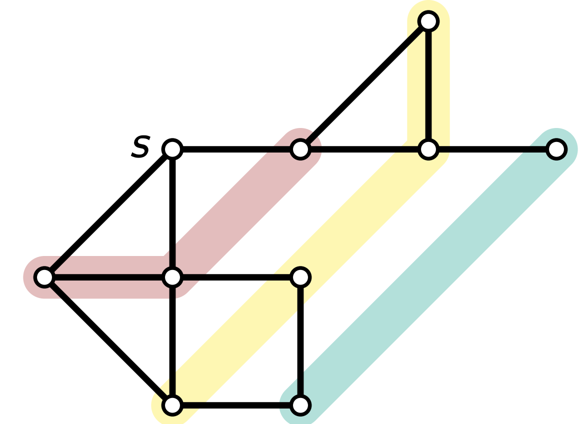


Problem 2
- wir haben vergessen besuchte Knoten zu färben

Wo sollten wir Knoten färben?

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

```
BFS(Graph G, Node s)
  currLayer := {s}
  color node s
  nextLayer := N(s) and color N(s)
  while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
      for Node v in N(u) do
        if Node v is uncolored then
          insert v into nextLayer
          color node v
```

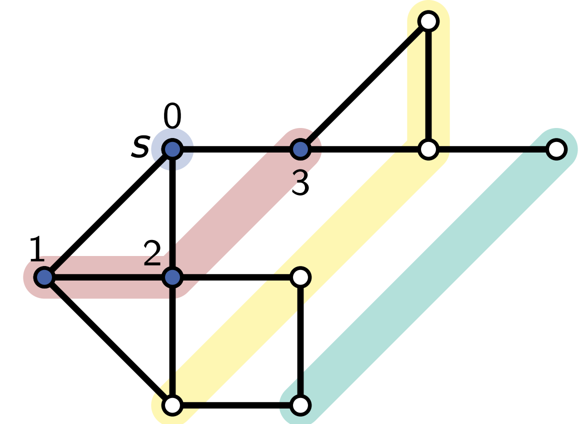


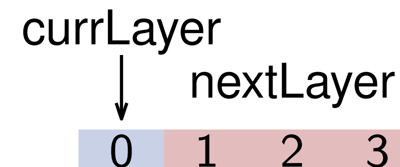
Färbung beim Einfügen in nextLayer

- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

```
BFS(Graph G, Node s)
  currLayer := {s}
  color node s
  nextLayer := N(s)  and color N(s)
  while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
      for Node v in N(u) do
        if Node v is uncolored then
          insert v into nextLayer
          color node v
```



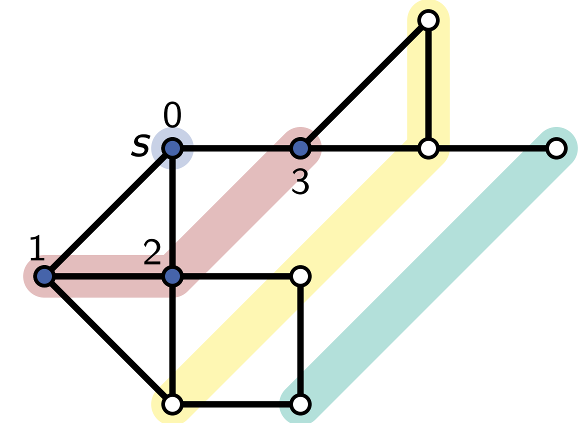


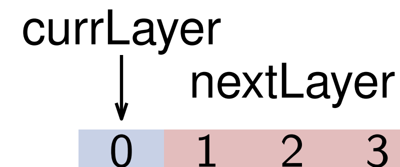
Färbung beim Einfügen in nextLayer

- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

```
BFS(Graph G, Node s)
  currLayer := {s}
  color node s
  nextLayer := N(s)  and color N(s)
  while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
      for Node v in N(u) do
        if Node v is uncolored then
          insert v into nextLayer
          color node v
```





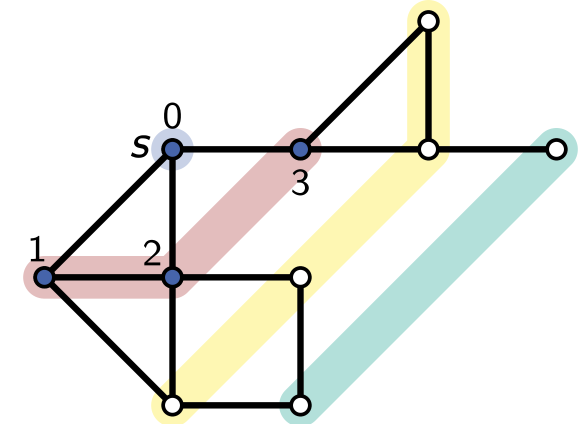
Färbung beim Einfügen in nextLayer

- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

BFS(*Graph* G, *Node* s)

```
currLayer := {s}
color node s
nextLayer := N(s)  and color N(s)
while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
        for Node v in N(u) do
            if Node v is uncolored then
                insert v into nextLayer
                color node v
```

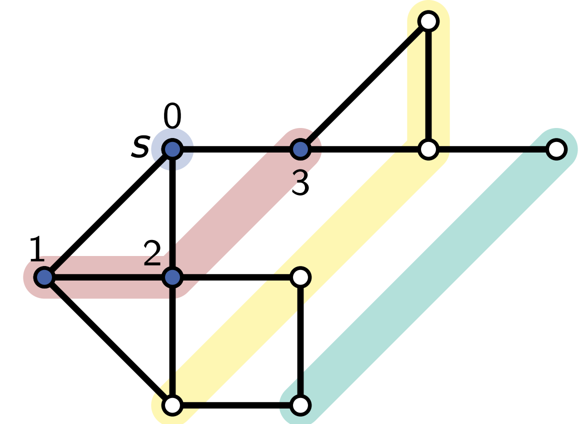


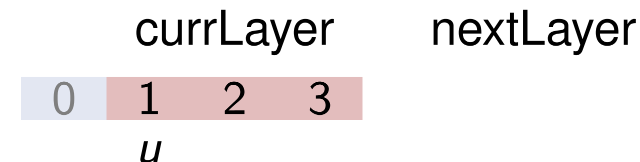
Färbung beim Einfügen in nextLayer

- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

```
BFS(Graph G, Node s)
  currLayer := {s}
  color node s
  nextLayer := N(s)  and color N(s)
  while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
      for Node v in N(u) do
        if Node v is uncolored then
          insert v into nextLayer
          color node v
```



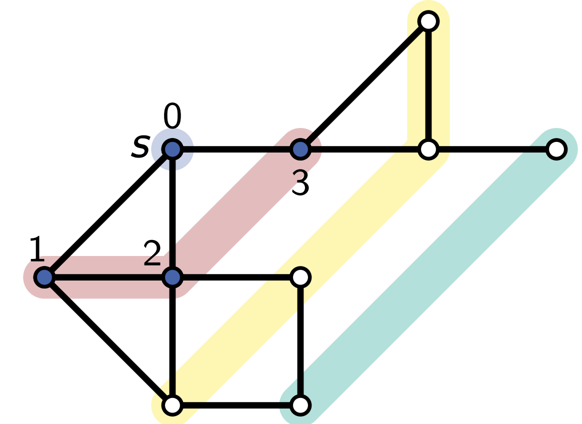


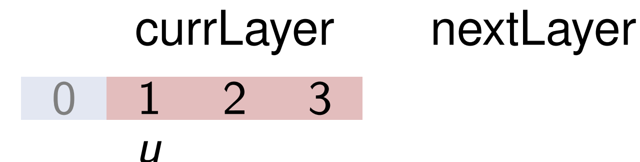
Färbung beim Einfügen in nextLayer

- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

```
BFS(Graph G, Node s)
  currLayer := {s}
  color node s
  nextLayer := N(s)  and color N(s)
  while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
      for Node v in N(u) do
        if Node v is uncolored then
          insert v into nextLayer
          color node v
```



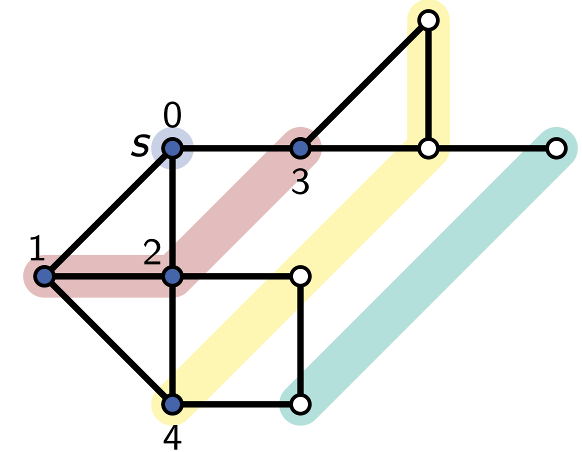


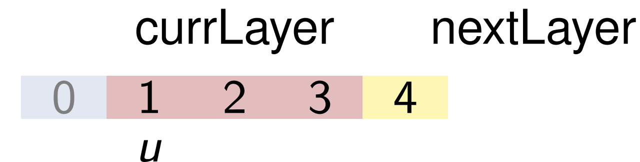
Färbung beim Einfügen in nextLayer

- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)


```
BFS(Graph G, Node s)
  currLayer := {s}
  color node s
  nextLayer := N(s)  and color N(s)
  while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
      for Node v in N(u) do
        if Node v is uncolored then
          insert v into nextLayer
          color node v
```



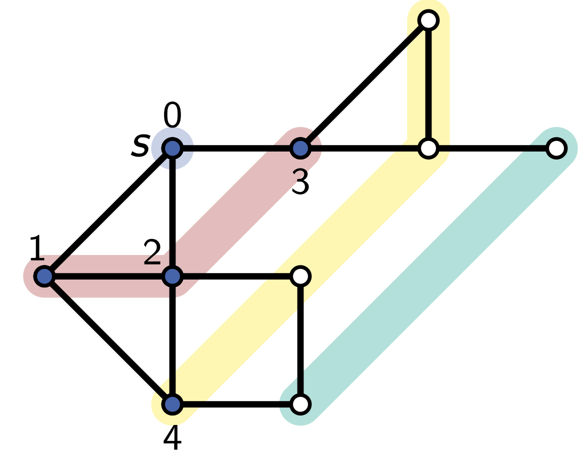


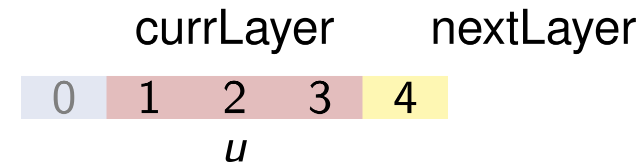
Färbung beim Einfügen in nextLayer

- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

```
BFS(Graph G, Node s)
  currLayer := {s}
  color node s
  nextLayer := N(s)  and color N(s)
  while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
      for Node v in N(u) do
        if Node v is uncolored then
          insert v into nextLayer
          color node v
```



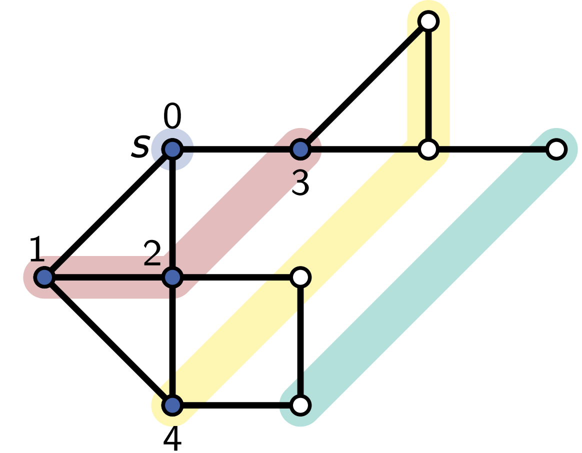


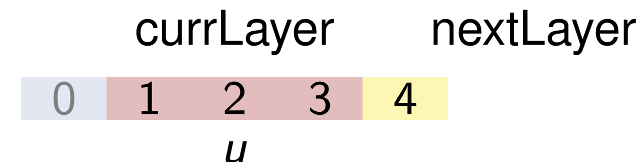
Färbung beim Einfügen in nextLayer

- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

```
BFS(Graph G, Node s)
  currLayer := {s}
  color node s
  nextLayer := N(s)  and color N(s)
  while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
      for Node v in N(u) do
        if Node v is uncolored then
          insert v into nextLayer
          color node v
```



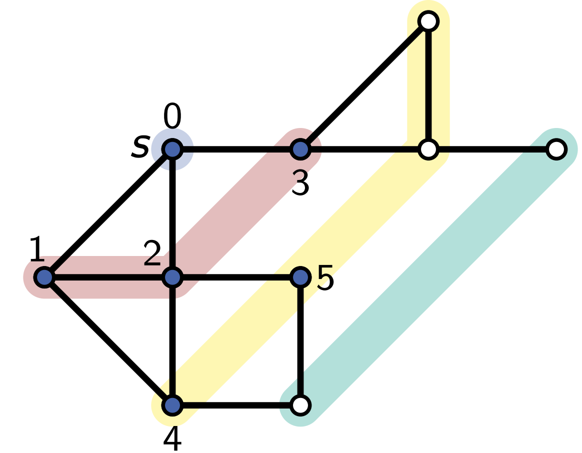


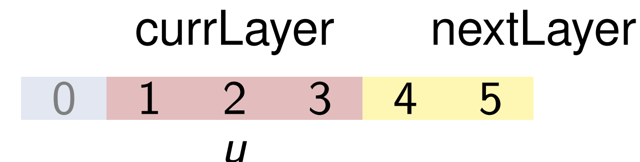
Färbung beim Einfügen in nextLayer

- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

```
BFS(Graph G, Node s)
  currLayer := {s}
  color node s
  nextLayer := N(s)  and color N(s)
  while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
      for Node v in N(u) do
        if Node v is uncolored then
          insert v into nextLayer
          color node v
```





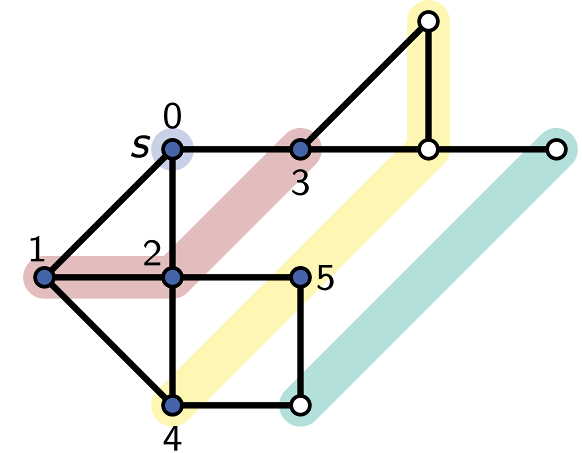
Färbung beim Einfügen in nextLayer

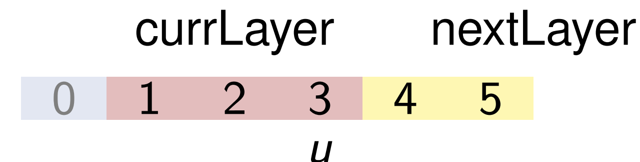
- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

BFS(*Graph* G, *Node* s)

```
currLayer := {s}
color node s
nextLayer := N(s)  and color N(s)
while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
        for Node v in N(u) do
            if Node v is uncolored then
                insert v into nextLayer
                color node v
```



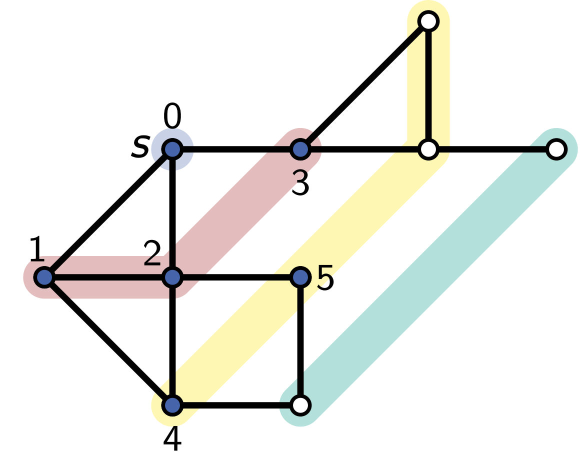


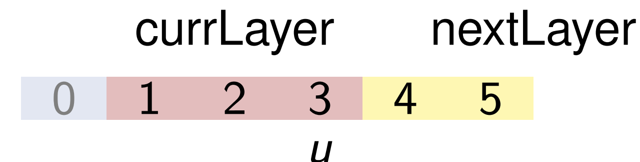
Färbung beim Einfügen in nextLayer

- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

BFS(*Graph* G, *Node* s)
- currLayer $:= \{s\}$
- color node s
- nextLayer $:= N(s)$ and color $N(s)$
- **while** nextLayer $\neq \emptyset$ **do**
  - currLayer := nextLayer
  - // determine next layer
  - nextLayer $:= \emptyset$
  - **for** *Node* u in currLayer **do**
    - **for** *Node* v in $N(u)$ **do**
      - **if** *Node* v is uncolored **then**
        - insert v into nextLayer
        - color node v

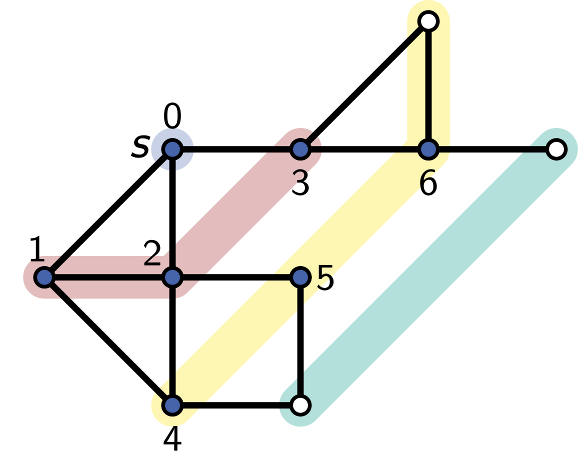


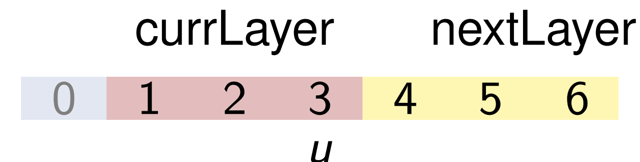


Färbung beim Einfügen in nextLayer
- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)


```
BFS(Graph G, Node s)
  currLayer := {s}
  color node s
  nextLayer := N(s)  and color N(s)
  while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
      for Node v in N(u) do
        if Node v is uncolored then
          insert v into nextLayer
          color node v
```



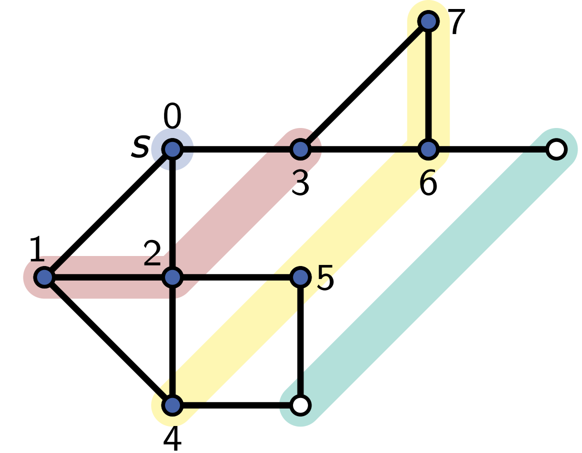


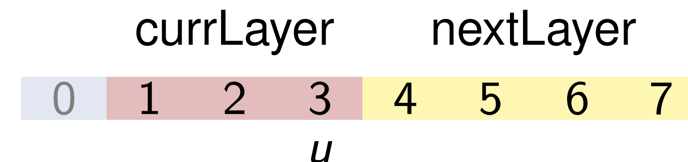
Färbung beim Einfügen in nextLayer

- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

```
BFS(Graph G, Node s)
  currLayer := {s}
  color node s
  nextLayer := N(s)  and color N(s)
  while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
      for Node v in N(u) do
        if Node v is uncolored then
          insert v into nextLayer
          color node v
```





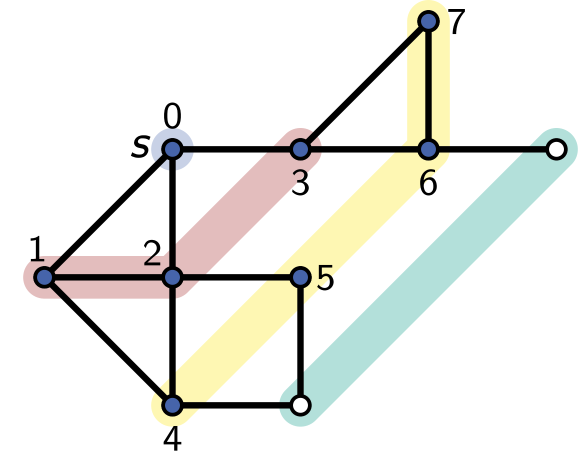
Färbung beim Einfügen in nextLayer

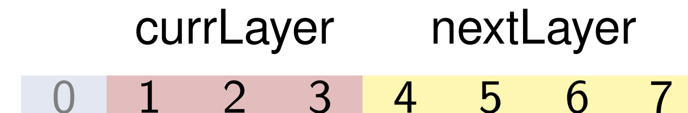
- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

BFS(*Graph* G, *Node* s)

```
currLayer := {s}
color node s
nextLayer := N(s)  and color N(s)
while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
        for Node v in N(u) do
            if Node v is uncolored then
                insert v into nextLayer
                color node v
```



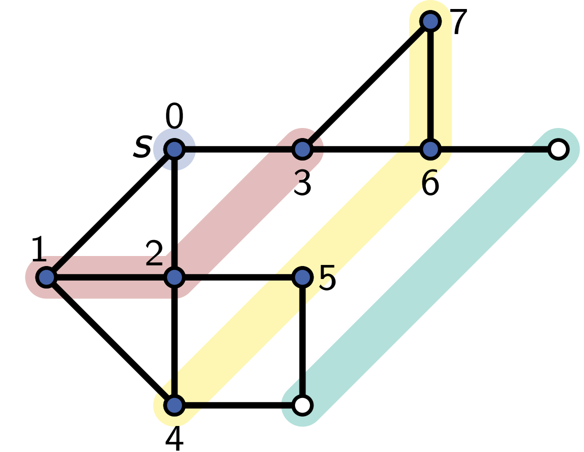


Färbung beim Einfügen in nextLayer

- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

```
BFS(Graph G, Node s)
  currLayer := {s}
  color node s
  nextLayer := N(s)  and color N(s)
  while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
      for Node v in N(u) do
        if Node v is uncolored then
          insert v into nextLayer
          color node v
```



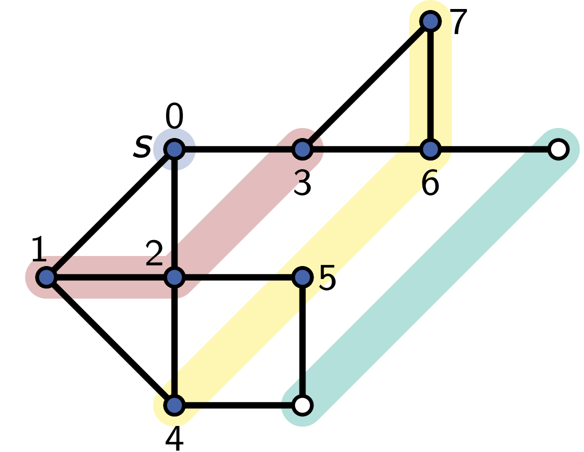
0	1	2	3	4	5	6	7

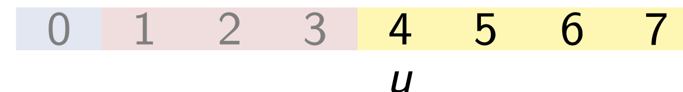
Färbung beim Einfügen in nextLayer

- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

```
BFS(Graph G, Node s)
  currLayer := {s}
  color node s
  nextLayer := N(s)  and color N(s)
  while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
      for Node v in N(u) do
        if Node v is uncolored then
          insert v into nextLayer
          color node v
```



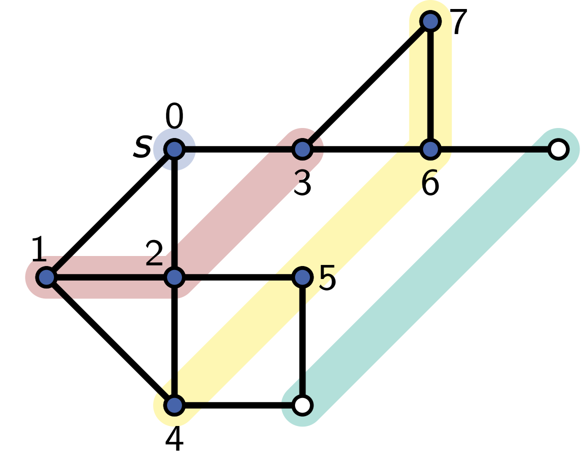


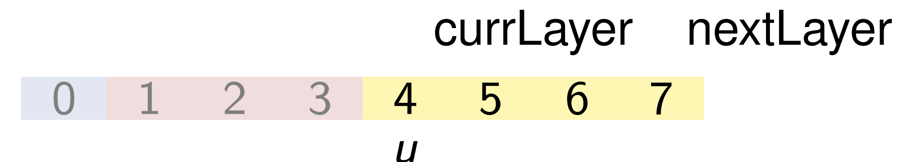
Färbung beim Einfügen in nextLayer

- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

```
BFS(Graph G, Node s)
  currLayer := {s}
  color node s
  nextLayer := N(s)  and color N(s)
  while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
      for Node v in N(u) do
        if Node v is uncolored then
          insert v into nextLayer
          color node v
```



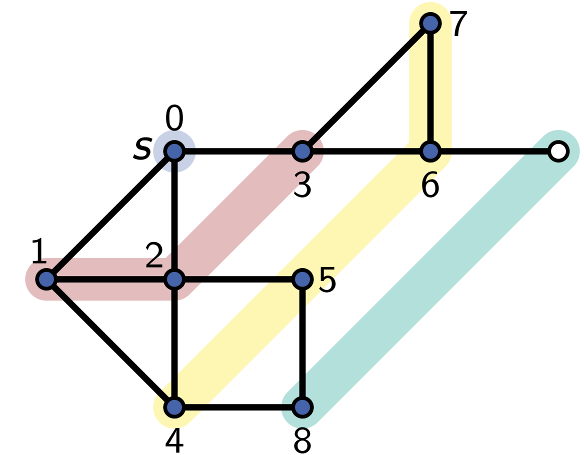


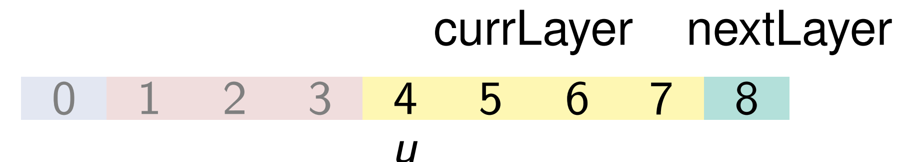
Färbung beim Einfügen in nextLayer

- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

BFS(*Graph* G, *Node* s)
- currLayer := $\{s\}$
- color node s
- nextLayer := $N(s)$ and color $N(s)$
- **while** nextLayer $\neq \emptyset$ **do**
  - currLayer := nextLayer
  - // determine next layer
  - nextLayer := $\emptyset$
  - **for** *Node* u in currLayer **do**
    - **for** *Node* v in $N(u)$ **do**
      - **if** *Node* v is uncolored **then**
        - insert v into nextLayer
        - color node v



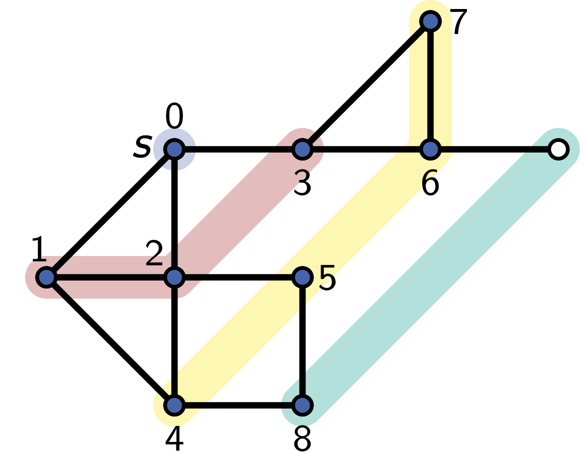


Färbung beim Einfügen in nextLayer
- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

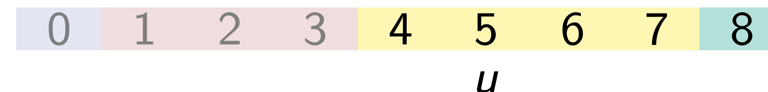
Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

Karlsruher Institut für Technologie

BFS(*Graph* G, *Node* s)
- currLayer $:= \{s\}$
- color node s
- nextLayer $:= N(s)$ and color $N(s)$
- **while** nextLayer $\neq \emptyset$ **do**
  - currLayer $:=$ nextLayer
  - // determine next layer
  - nextLayer $:= \emptyset$
  - **for** *Node* u in currLayer **do**
    - **for** *Node* v in $N(u)$ **do**
      - **if** *Node* v is uncolored **then**
        - insert v into nextLayer
        - color node v



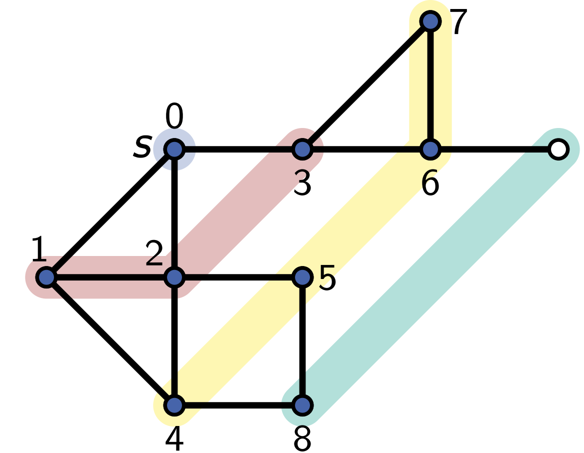
currLayer nextLayer

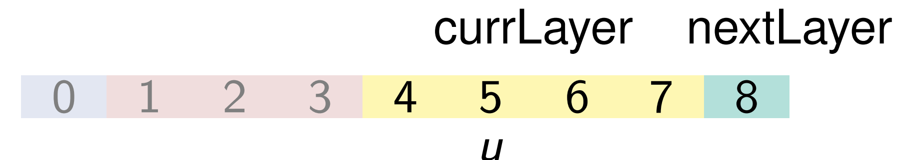


Färbung beim Einfügen in nextLayer
- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

```
BFS(Graph G, Node s)
  currLayer := {s}
  color node s
  nextLayer := N(s)  and color N(s)
  while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
      for Node v in N(u) do
        if Node v is uncolored then
          insert v into nextLayer
          color node v
```





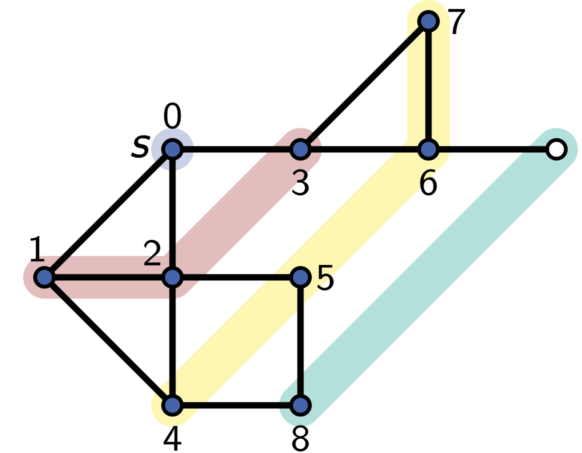
Färbung beim Einfügen in nextLayer

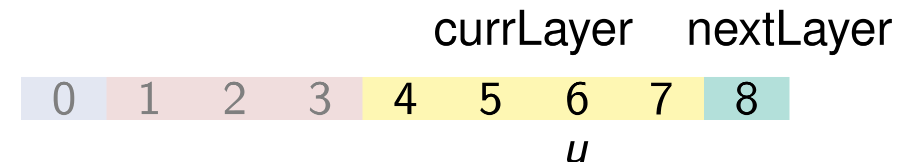
- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

BFS(*Graph* G, *Node* s)

```
currLayer := {s}
color node s
nextLayer := N(s)  and color N(s)
while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
        for Node v in N(u) do
            if Node v is uncolored then
                insert v into nextLayer
                color node v
```



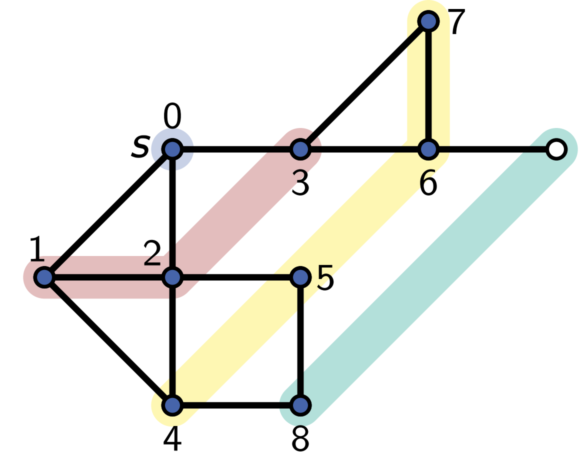


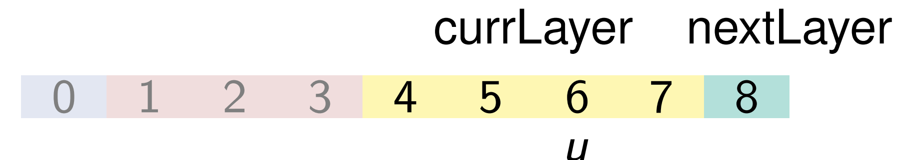
Färbung beim Einfügen in nextLayer

- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

```
BFS(Graph G, Node s)
  currLayer := {s}
  color node s
  nextLayer := N(s)  and color N(s)
  while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
      for Node v in N(u) do
        if Node v is uncolored then
          insert v into nextLayer
          color node v
```





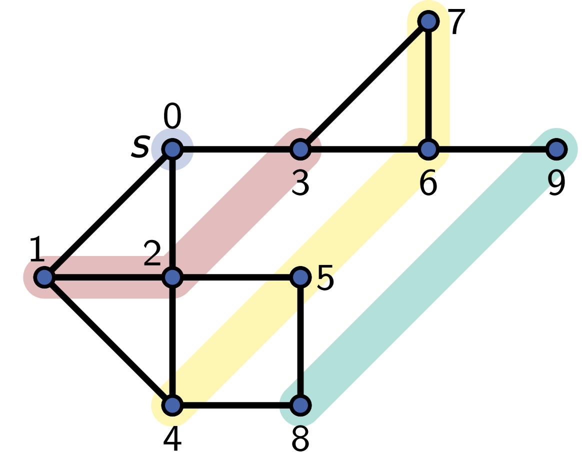
Färbung beim Einfügen in nextLayer

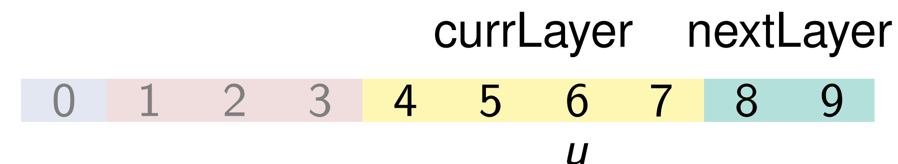
- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

Karlsruher Institut für Technologie

```
BFS(Graph G, Node s)
  currLayer := {s}
  color node s
  nextLayer := N(s)  and color N(s)
  while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
      for Node v in N(u) do
        if Node v is uncolored then
          insert v into nextLayer
          color node v
```



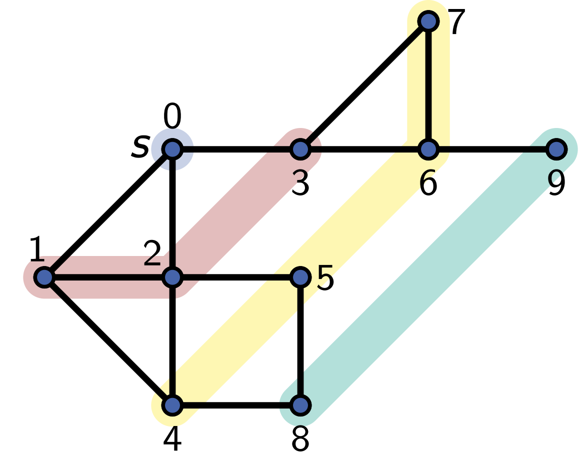


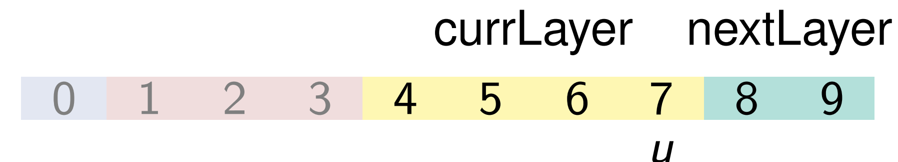
Färbung beim Einfügen in nextLayer

- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

```
BFS(Graph G, Node s)
  currLayer := {s}
  color node s
  nextLayer := N(s)  and color N(s)
  while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
      for Node v in N(u) do
        if Node v is uncolored then
          insert v into nextLayer
          color node v
```



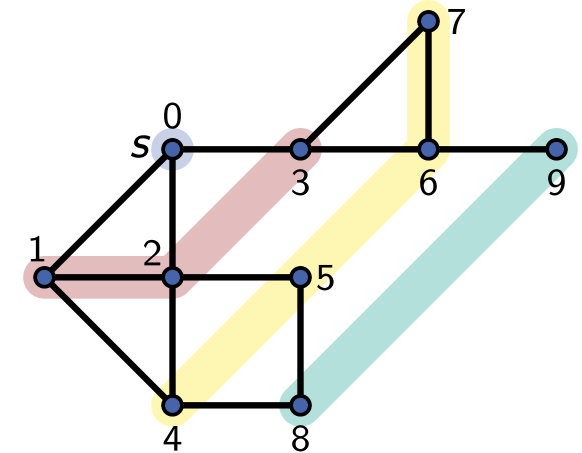


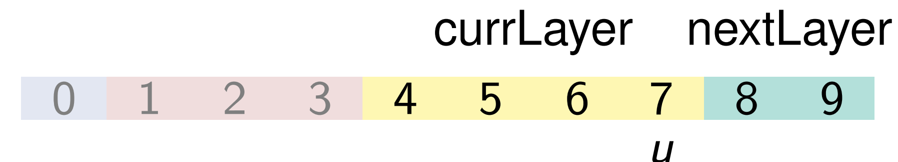
Färbung beim Einfügen in nextLayer

- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus $\rightarrow$ Pseudocode (zweiter Versuch)

```
BFS(Graph G, Node s)
  currLayer := {s}
  color node s
  nextLayer := N(s)  and color N(s)
  while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
      for Node v in N(u) do
        if Node v is uncolored then
          insert v into nextLayer
          color node v
```





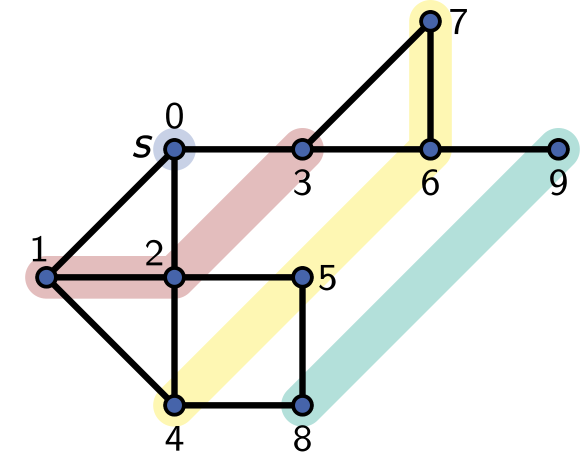
Färbung beim Einfügen in nextLayer

- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

Karlsruher Institut für Technologie

```
BFS(Graph G, Node s)
  currLayer := {s}
  color node s
  nextLayer := N(s)  and color N(s)
  while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
      for Node v in N(u) do
        if Node v is uncolored then
          insert v into nextLayer
          color node v
```



currLayer nextLayer

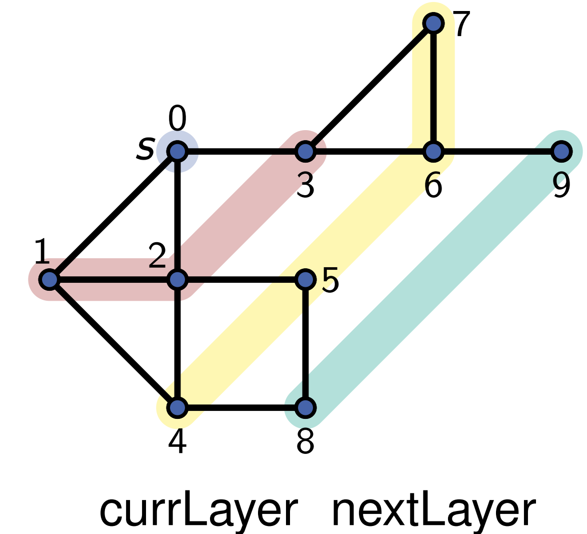
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Färbung beim Einfügen in nextLayer

- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

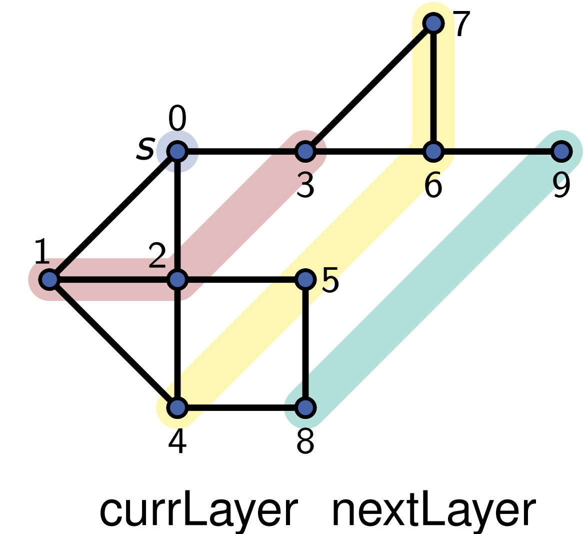
BFS(*Graph* G, *Node* s)
- currLayer $:= \{s\}$
- color node s
- nextLayer $:= N(s)$ and color $N(s)$
- **while** nextLayer $\neq \emptyset$ **do**
  - currLayer $:=$ nextLayer
  - // determine next layer
  - nextLayer $:= \emptyset$
  - **for** *Node* u in currLayer **do**
    - **for** *Node* v in $N(u)$ **do**
      - **if** *Node* v is uncolored **then**
        - insert v into nextLayer
        - color node v

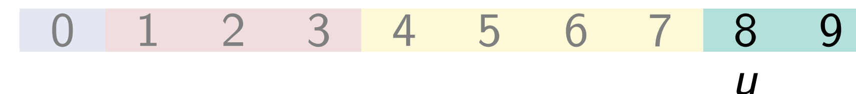


Färbung beim Einfügen in nextLayer
- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

```
BFS(Graph G, Node s)
  currLayer := {s}
  color node s
  nextLayer := N(s)  and color N(s)
  while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
      for Node v in N(u) do
        if Node v is uncolored then
          insert v into nextLayer
          color node v
```



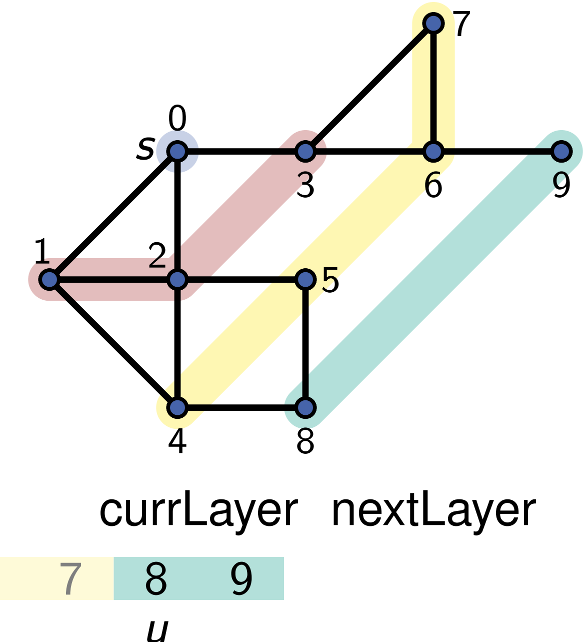


Färbung beim Einfügen in nextLayer

- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

```
BFS(Graph G, Node s)
  currLayer := {s}
  color node s
  nextLayer := N(s)  and color N(s)
  while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
      for Node v in N(u) do
        if Node v is uncolored then
          insert v into nextLayer
          color node v
```



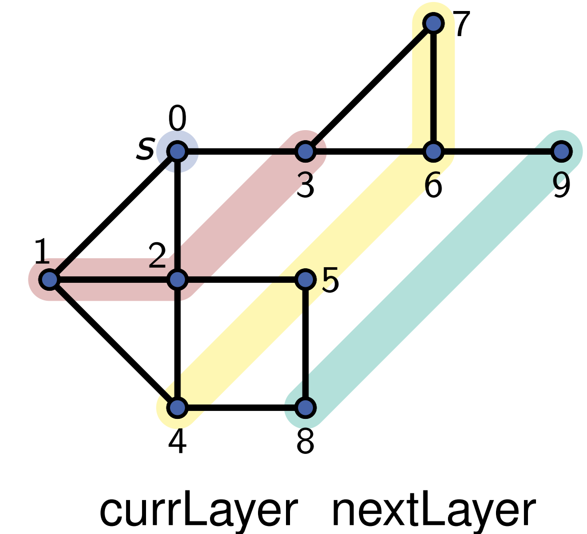
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
								u	

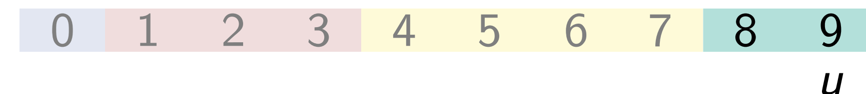
Färbung beim Einfügen in nextLayer

- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

```
BFS(Graph G, Node s)
  currLayer := {s}
  color node s
  nextLayer := N(s)  and color N(s)
  while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
      for Node v in N(u) do
        if Node v is uncolored then
          insert v into nextLayer
          color node v
```





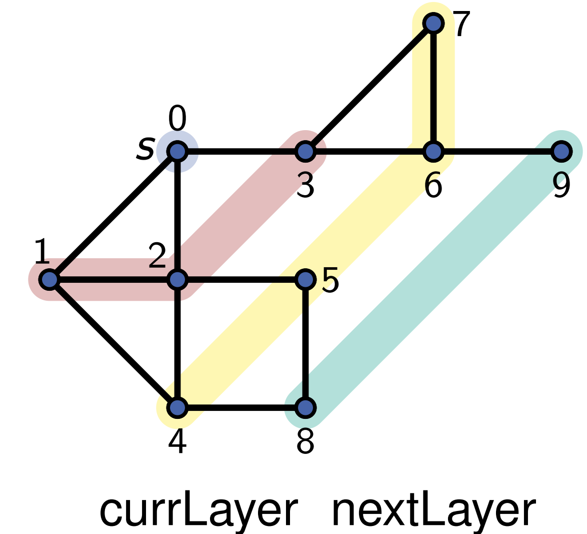
Färbung beim Einfügen in nextLayer

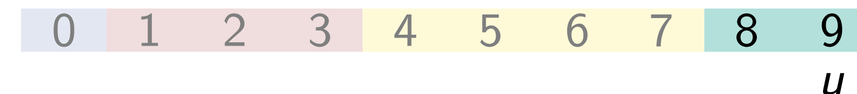
- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

Karlsruher Institut für Technologie

```
BFS(Graph G, Node s)
  currLayer := {s}
  color node s
  nextLayer := N(s)  and color N(s)
  while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
      for Node v in N(u) do
        if Node v is uncolored then
          insert v into nextLayer
          color node v
```



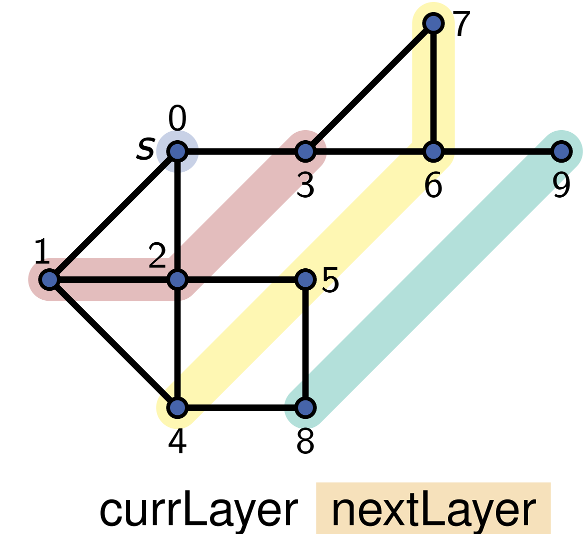


Färbung beim Einfügen in nextLayer

- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

```
BFS(Graph G, Node s)
  currLayer := {s}
  color node s
  nextLayer := N(s)  and color N(s)
  while nextLayer ≠ ∅ do
    currLayer := nextLayer
    // determine next layer
    nextLayer := ∅
    for Node u in currLayer do
      for Node v in N(u) do
        if Node v is uncolored then
          insert v into nextLayer
          color node v
```



Färbung beim Einfügen in nextLayer

- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

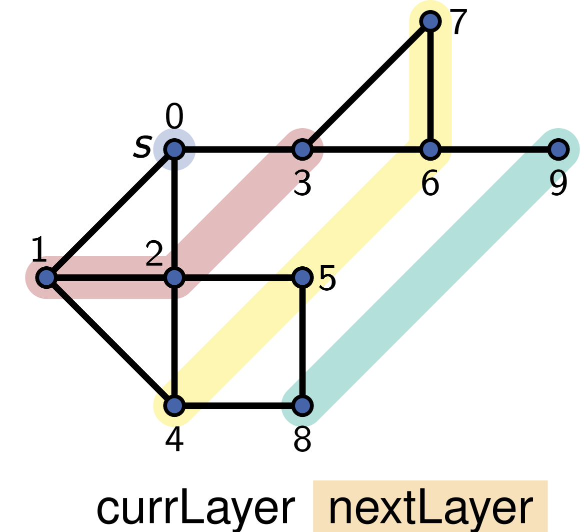
Algorithmus $\rightarrow$ Pseudocode (zweiter Versuch)

BFS(*Graph* G, *Node* s)

- currLayer $:= \{s\}$
- color node s
- nextLayer $:= N(s)$ and color $N(s)$
- **while** nextLayer $\neq \emptyset$ **do**
  - currLayer $:=$ nextLayer
  - // determine next layer
  - nextLayer $:= \emptyset$
  - **for** *Node* u in currLayer **do**
    - **for** *Node* v in $N(u)$ **do**
      - **if** *Node* v is uncolored **then**
        - insert v into nextLayer
        - color node v

Beobachtung

- neue Knoten v werden hinten eingefügt
- Knoten u läuft von vorne nach hinten
- Verhalten einer Queue (First In, First Out)



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

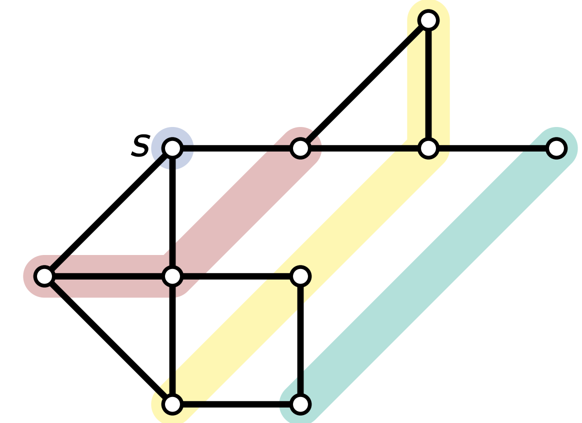
Färbung beim Einfügen in nextLayer

- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus $\rightarrow$ Pseudocode (Endergebnis)

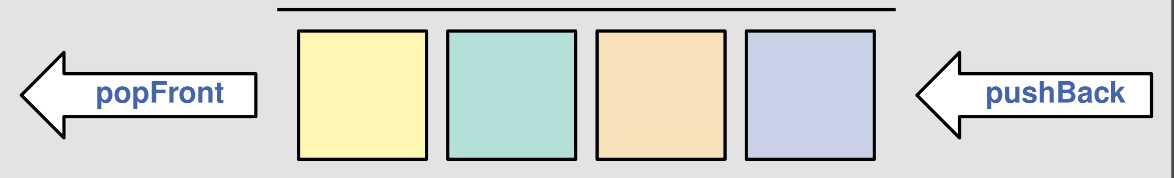
Karlsruher Institut für Technologie

```
BFS(Graph G, Node s)
    Queue Q := empty queue
    Q.push(s)
    color node s
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.pop()
        for Node v in N(u) do
            if v is uncolored then
                Q.push(v)
                color node v
```



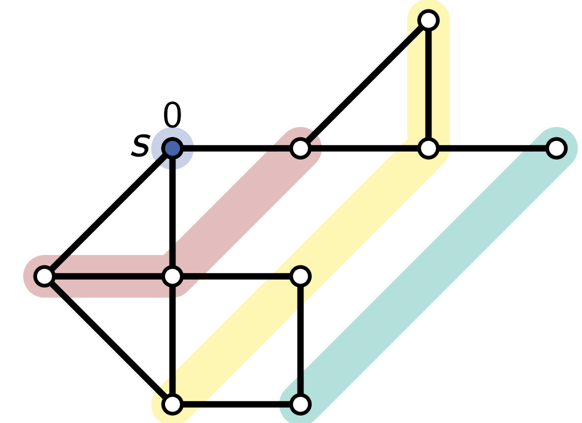
Erinnerung: Queue

- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out



Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

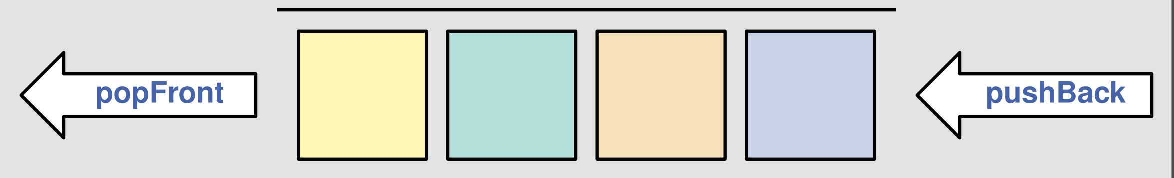
```
BFS(Graph G, Node s)
  Queue Q := empty queue
  Q.push(s)
  color node s
  while Q ≠ ∅ do
    u := Q.pop()
    for Node v in N(u) do
      if v is uncolored then
        Q.push(v)
        color node v
```



Q: 0

Erinnerung: Queue

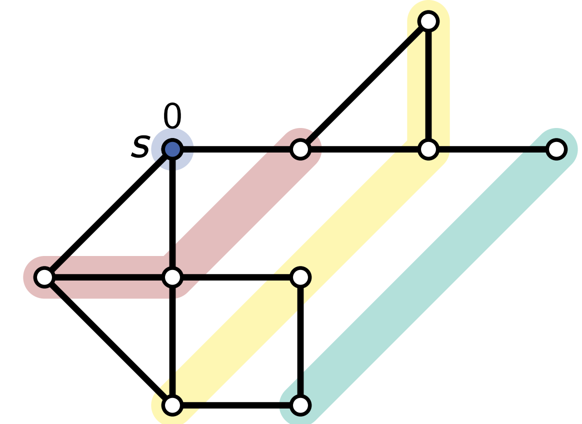
- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out



Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

Karlsruher Institut für Technologie

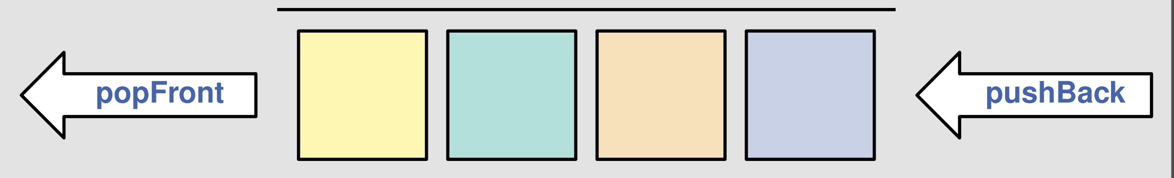
```
BFS(Graph G, Node s)
  Queue Q := empty queue
  Q.push(s)
  color node s
  while Q ≠ ∅ do
    u := Q.pop()
    for Node v in N(u) do
      if v is uncolored then
        Q.push(v)
        color node v
```



Q: 0
u

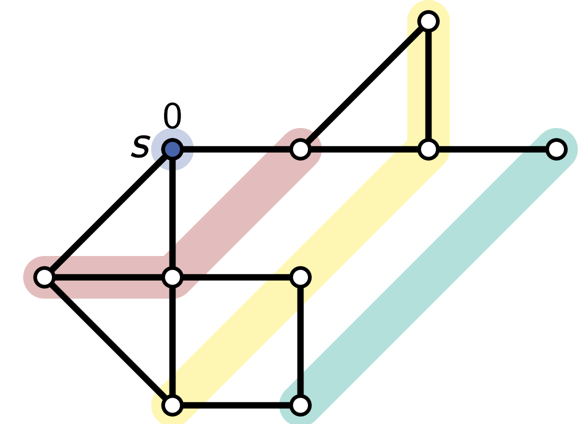
Erinnerung: Queue

- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out



Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

```
BFS(Graph G, Node s)
    Queue Q := empty queue
    Q.push(s)
    color node s
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.pop()
        for Node v in N(u) do
            if v is uncolored then
                Q.push(v)
                color node v
```

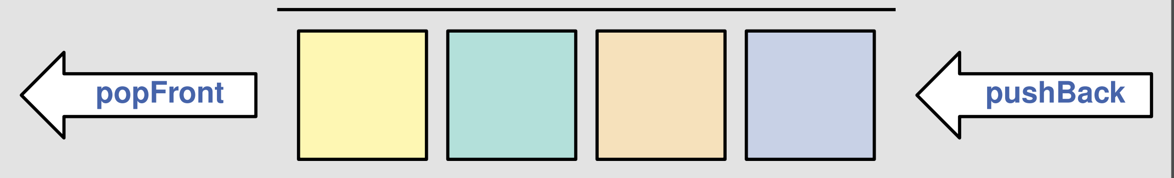


Q: 0

u

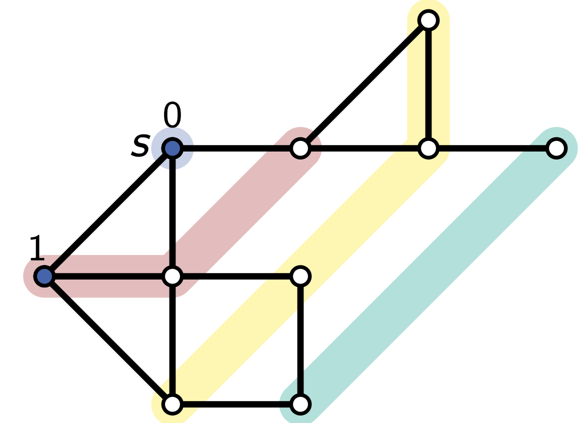
Erinnerung: Queue

- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out



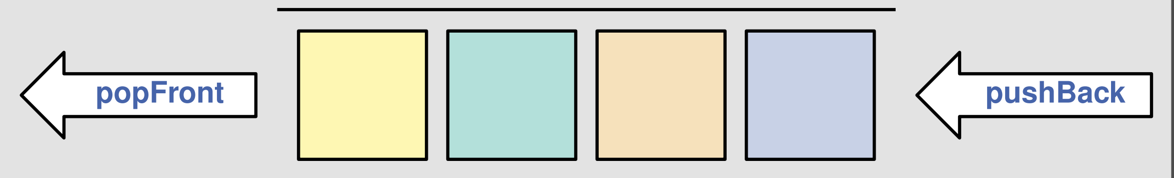
Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

BFS(*Graph* G, *Node* s)
- *Queue* Q := empty queue
- Q.**push**(s)
- color node s
- **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
  - $u := Q$.**pop**()
  - **for** *Node* v in $N(u)$ **do**
    - **if** v is uncolored **then**
      - Q.**push**(v)
      - color node v



Q: 0 1
u

Erinnerung: Queue
- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out

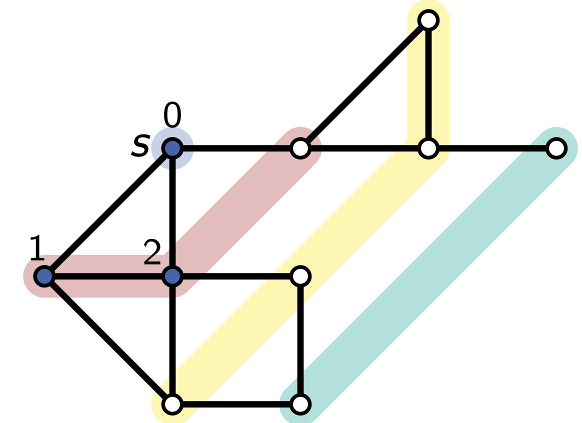


Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

Karlsruher Institut für Technologie

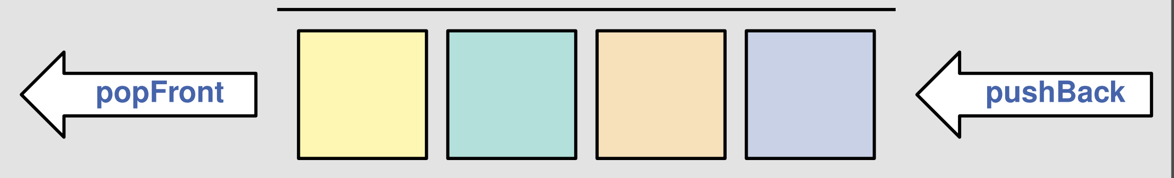
```
BFS(Graph G, Node s)
    Queue Q := empty queue
    Q.push(s)
    color node s
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.pop()
        for Node v in N(u) do
            if v is uncolored then
                Q.push(v)
                color node v
```

Q: 0 1 2
u



Erinnerung: Queue

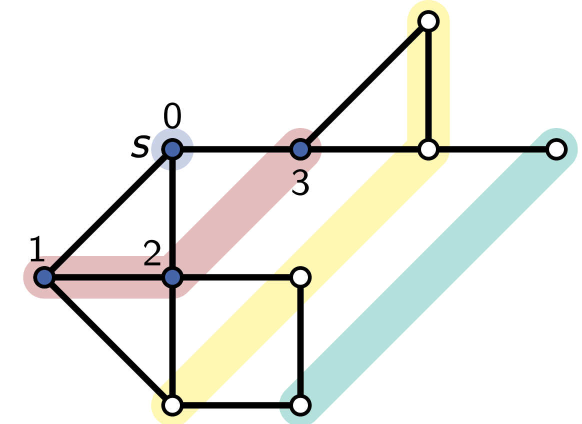
- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out



Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

BFS(*Graph* G, *Node* s)

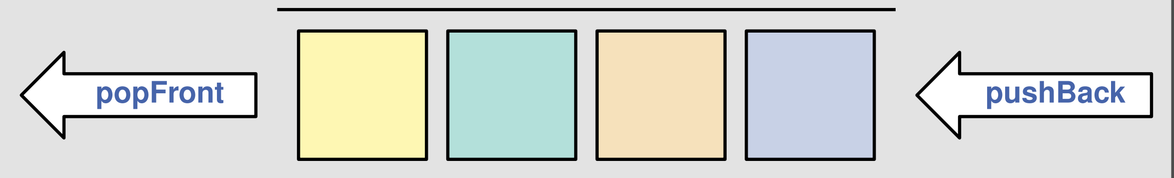
  Queue $Q :=$ empty queue
  Q.**push**(s)
  color node s
  while $Q \neq \emptyset$ **do**
    $u := Q$.**pop**()
    for *Node* v in $N(u)$ **do**
      if v is uncolored **then**
        Q.**push**(v)
        color node v



Q: 0 1 2 3
u

Erinnerung: Queue

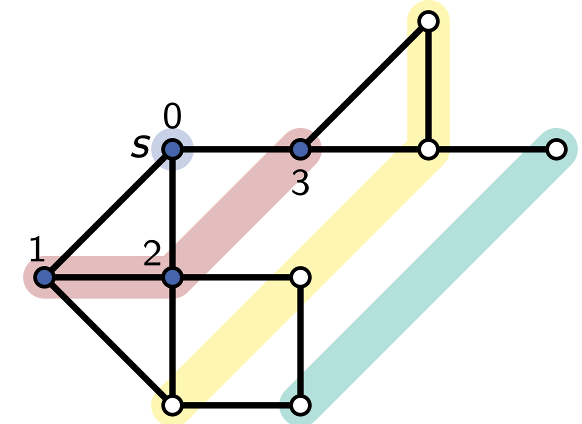
- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out



Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

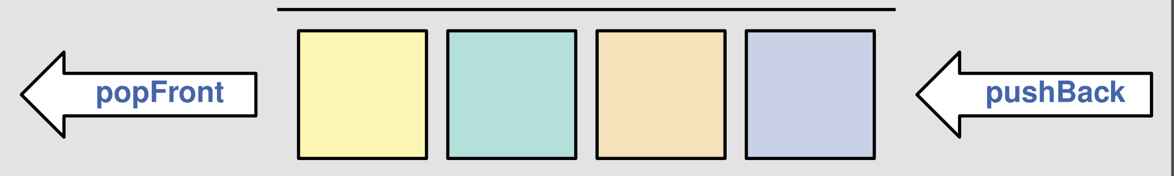
```
BFS(Graph G, Node s)
    Queue Q := empty queue
    Q.push(s)
    color node s
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.pop()
        for Node v in N(u) do
            if v is uncolored then
                Q.push(v)
                color node v
```

Q: 0 1 2 3
u



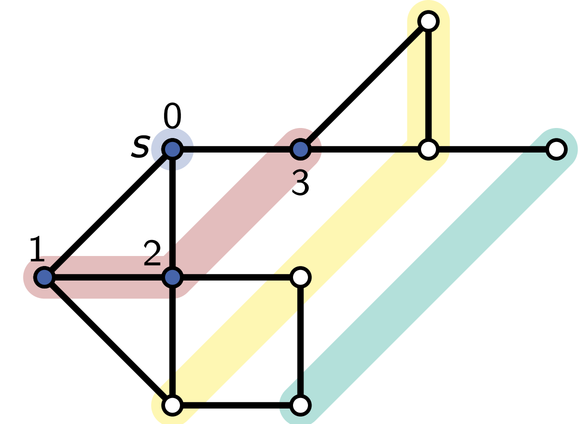
Erinnerung: Queue

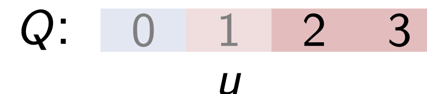
- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out



Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

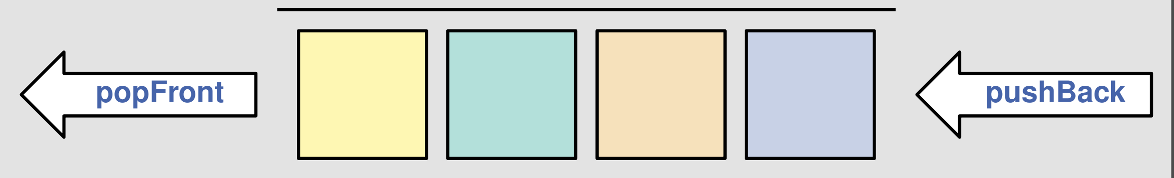
```
BFS(Graph G, Node s)
    Queue Q := empty queue
    Q.push(s)
    color node s
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.pop()
        for Node v in N(u) do
            if v is uncolored then
                Q.push(v)
                color node v
```





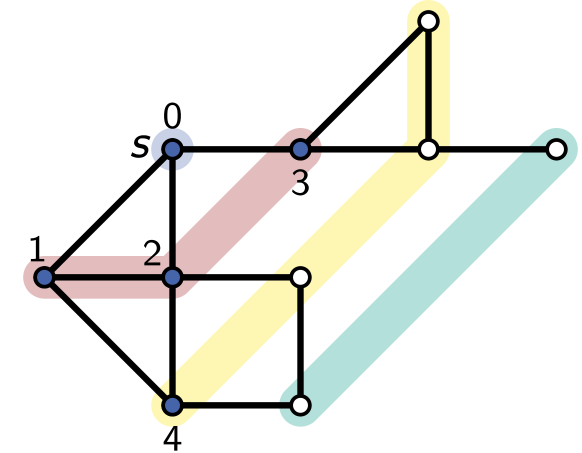
Erinnerung: Queue

- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out



Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

```
BFS(Graph G, Node s)
    Queue Q := empty queue
    Q.push(s)
    color node s
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.pop()
        for Node v in N(u) do
            if v is uncolored then
                Q.push(v)
                color node v
```

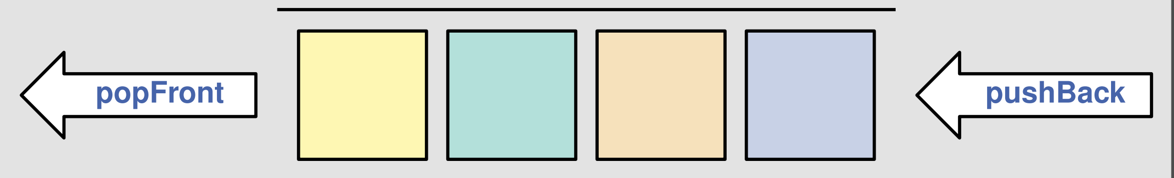


Q: 0 1 2 3 4

u

Erinnerung: Queue

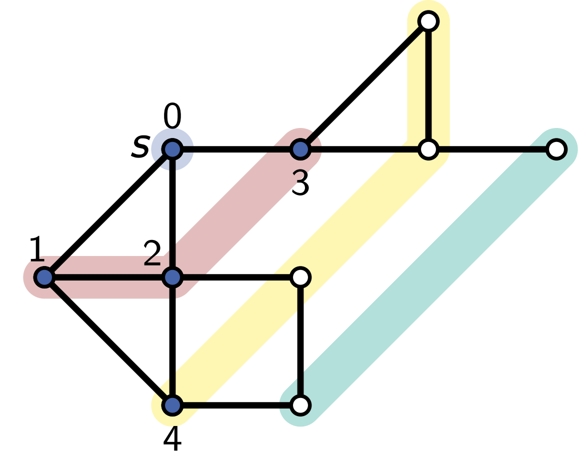
- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out



Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

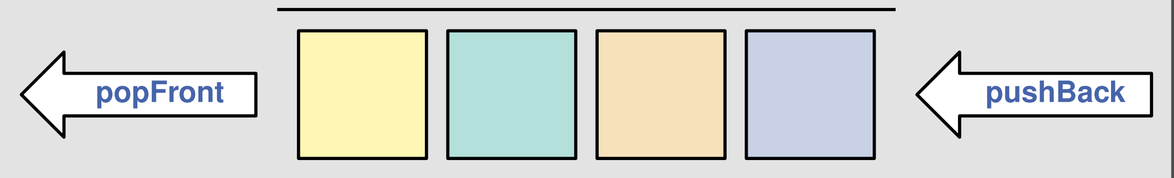
Karlsruher Institut für Technologie

```
BFS(Graph G, Node s)
    Queue Q := empty queue
    Q.push(s)
    color node s
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.pop()
        for Node v in N(u) do
            if v is uncolored then
                Q.push(v)
                color node v
```



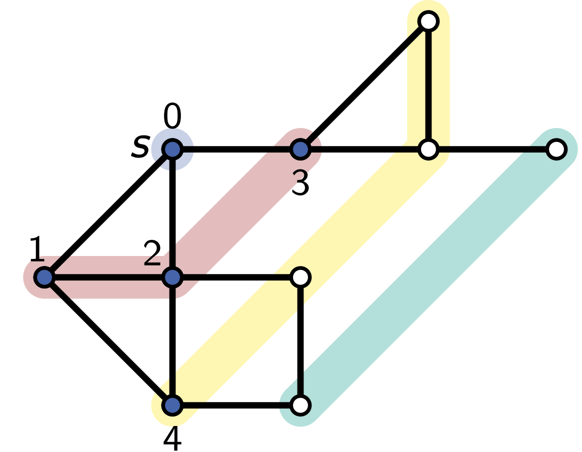
Erinnerung: Queue

- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out

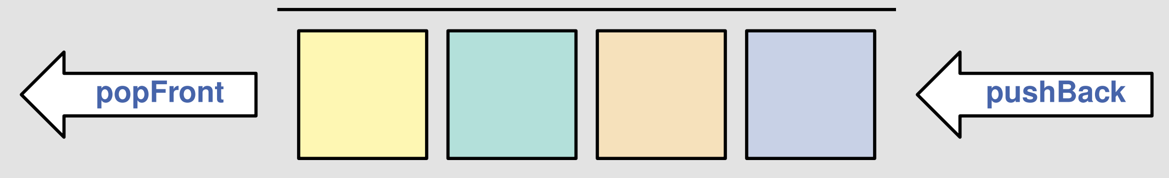


Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

BFS(*Graph* G, *Node* s)
- *Queue* Q := empty queue
- Q.**push**(s)
- color node s
- **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
  - $u := Q$.**pop**()
  - **for** *Node* v in $N(u)$ **do**
    - **if** v is uncolored **then**
      - Q.**push**(v)
      - color node v

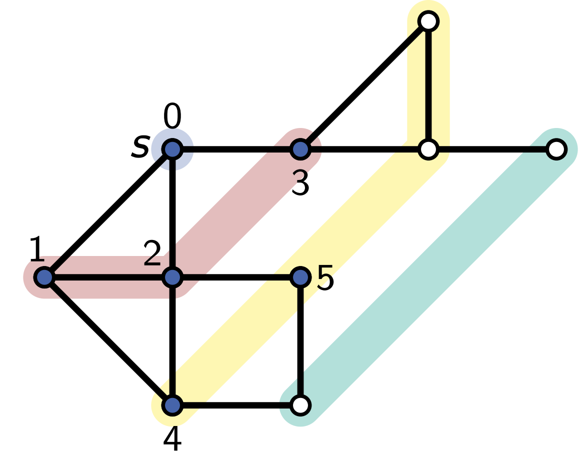


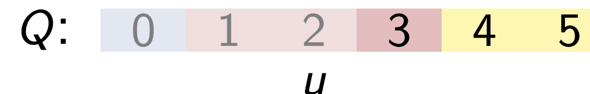
Erinnerung: Queue
- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out



Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

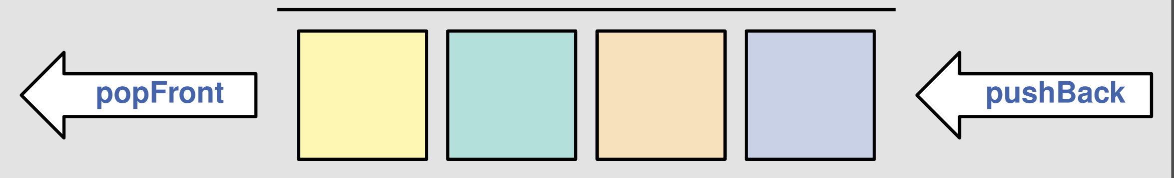
```
BFS(Graph G, Node s)
  Queue Q := empty queue
  Q.push(s)
  color node s
  while Q ≠ ∅ do
    u := Q.pop()
    for Node v in N(u) do
      if v is uncolored then
        Q.push(v)
        color node v
```





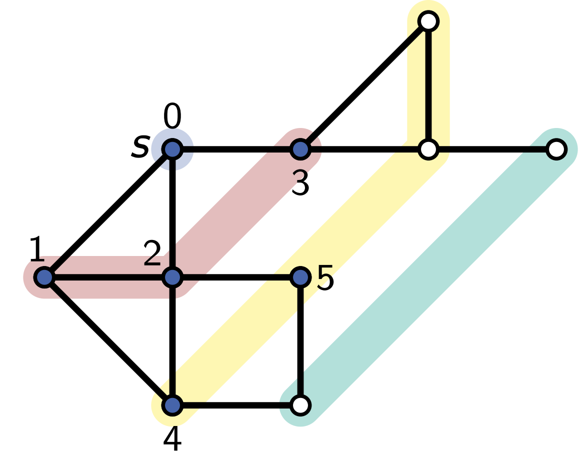
Erinnerung: Queue

- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out



Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

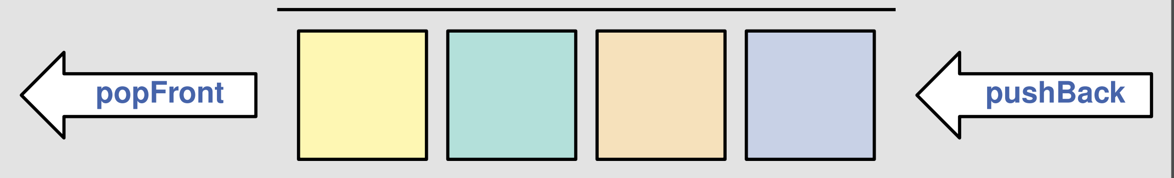
BFS(*Graph* G, *Node* s)
- *Queue* $Q :=$ empty queue
- Q.**push**(s)
- color node s
- **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
  - $u := Q$.**pop**()
  - **for** *Node* v in $N(u)$ **do**
    - **if** v is uncolored **then**
      - Q.**push**(v)
      - color node v



Q: 0 1 2 3 4 5

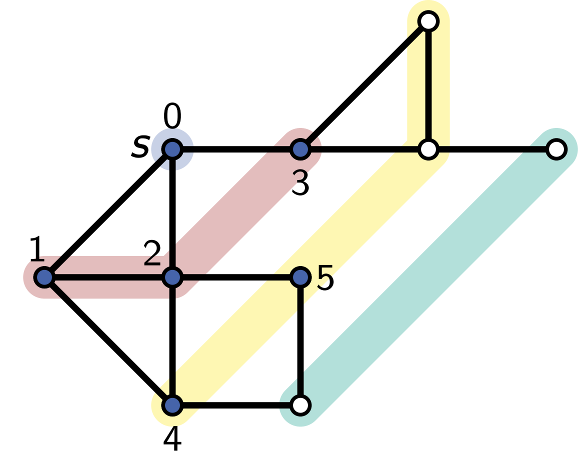
u

Erinnerung: Queue
- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out



Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

```
BFS(Graph G, Node s)
  Queue Q := empty queue
  Q.push(s)
  color node s
  while Q ≠ ∅ do
    u := Q.pop()
    for Node v in N(u) do
      if v is uncolored then
        Q.push(v)
        color node v
```

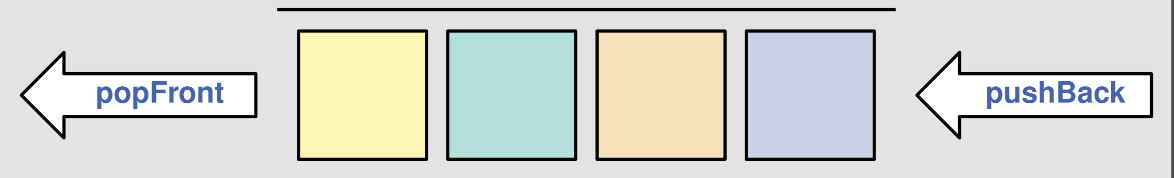


Q: 0 1 2 3 4 5

u

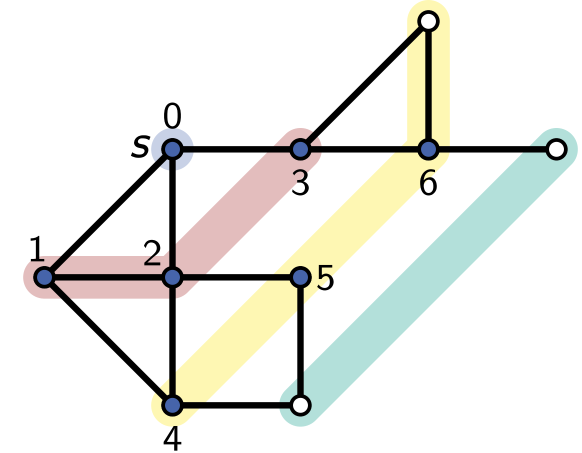
Erinnerung: Queue

- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out

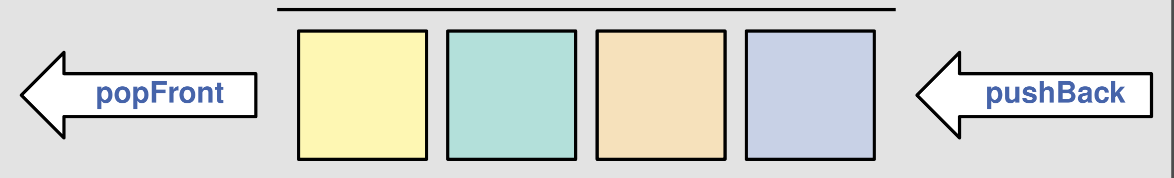


Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

BFS(*Graph* G, *Node* s)
- *Queue* $Q :=$ empty queue
- Q.**push**(s)
- color node s
- **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
  - $u := Q$.**pop**()
  - **for** *Node* v in $N(u)$ **do**
    - **if** v is uncolored **then**
      - Q.**push**(v)
      - color node v

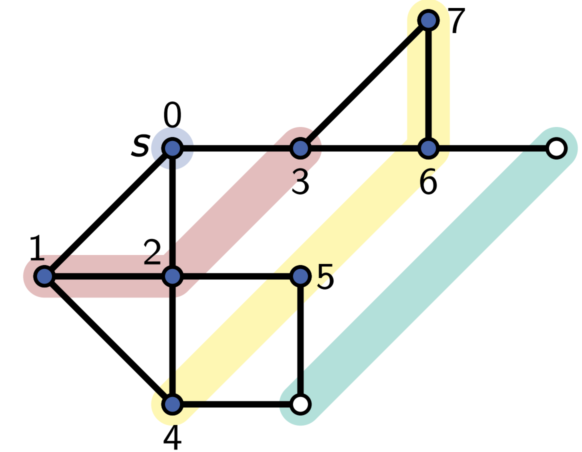


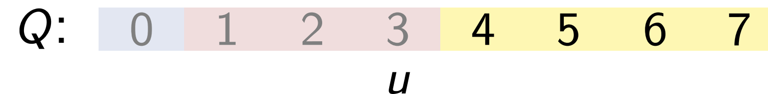
Erinnerung: Queue
- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out



Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

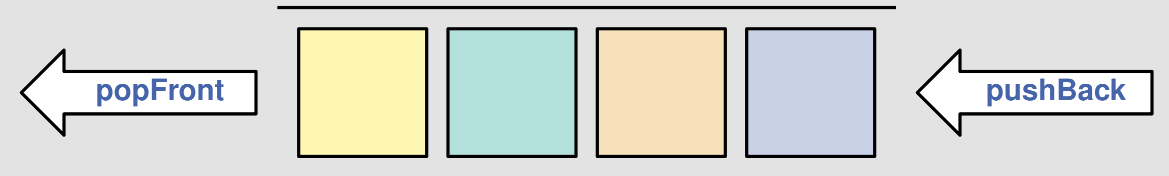
```
BFS(Graph G, Node s)
    Queue Q := empty queue
    Q.push(s)
    color node s
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.pop()
        for Node v in N(u) do
            if v is uncolored then
                Q.push(v)
                color node v
```





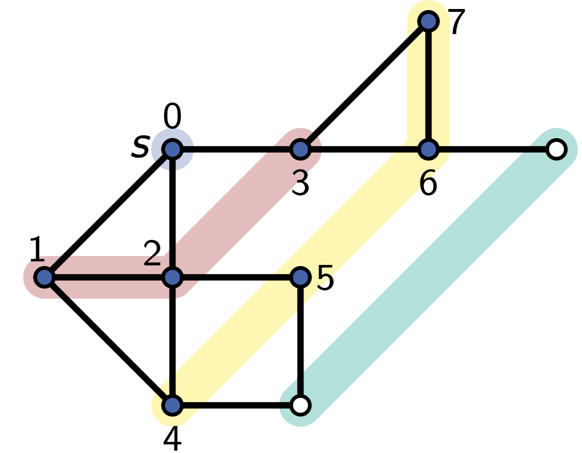
Erinnerung: Queue

- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out



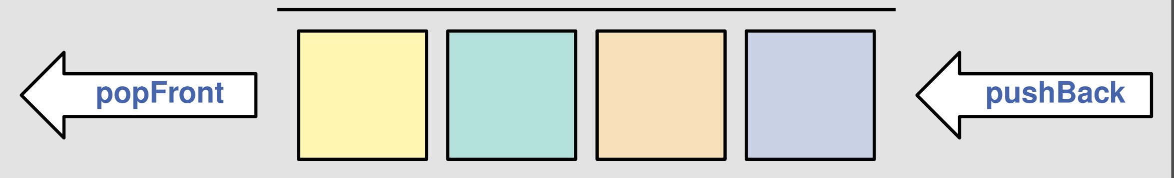
Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

```
BFS(Graph G, Node s)
    Queue Q := empty queue
    Q.push(s)
    color node s
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.pop()
        for Node v in N(u) do
            if v is uncolored then
                Q.push(v)
                color node v
```



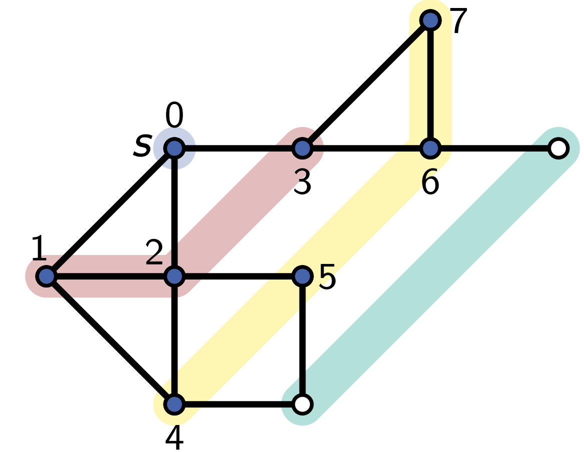
Erinnerung: Queue

- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out



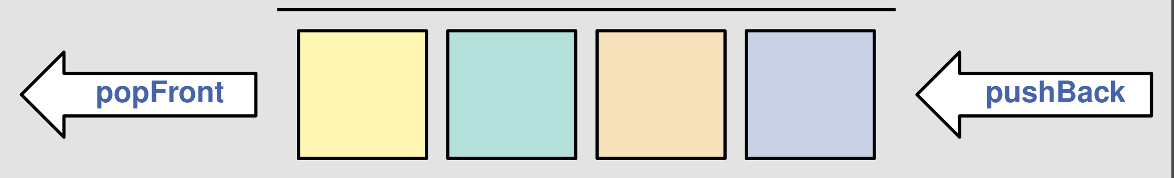
Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

```
BFS(Graph G, Node s)
    Queue Q := empty queue
    Q.push(s)
    color node s
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.pop()
        for Node v in N(u) do
            if v is uncolored then
                Q.push(v)
                color node v
```



Erinnerung: Queue

- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out

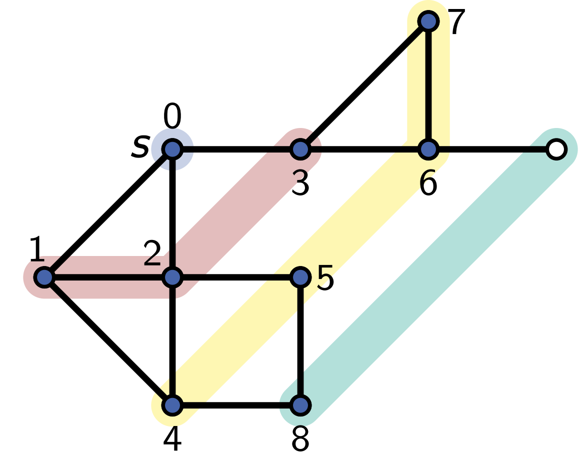


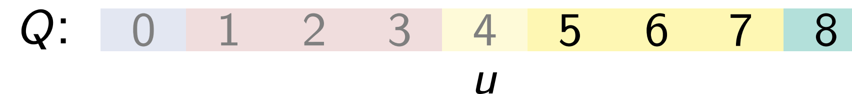
Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

Karlsruher Institut für Technologie

BFS(*Graph* G, *Node* s)

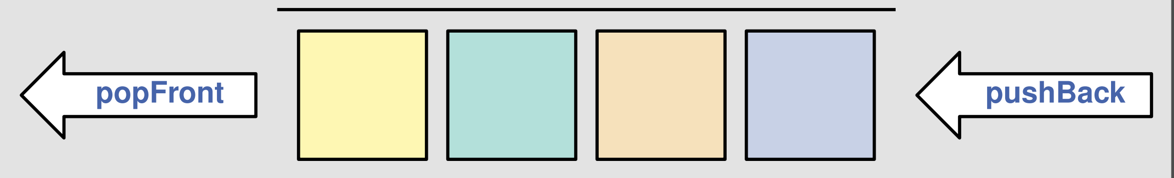
```
Queue Q := empty queue
Q.push(s)
color node s
while Q ≠ ∅ do
    u := Q.pop()
    for Node v in N(u) do
        if v is uncolored then
            Q.push(v)
            color node v
```





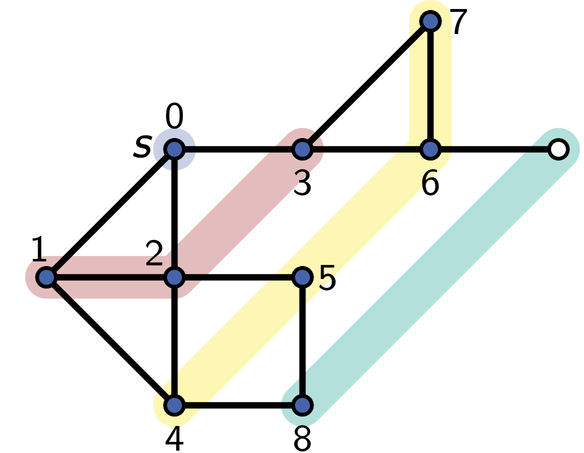
Erinnerung: Queue

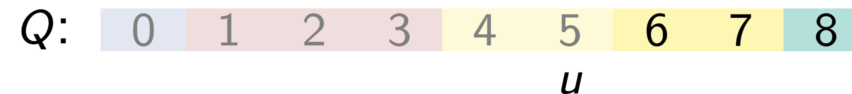
- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out



Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

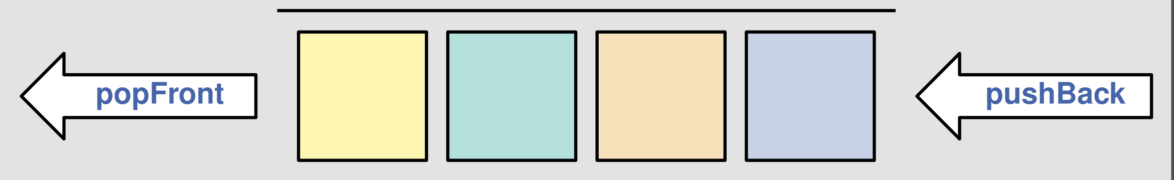

```
BFS(Graph G, Node s)
    Queue Q := empty queue
    Q.push(s)
    color node s
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.pop()
        for Node v in N(u) do
            if v is uncolored then
                Q.push(v)
                color node v
```





Erinnerung: Queue

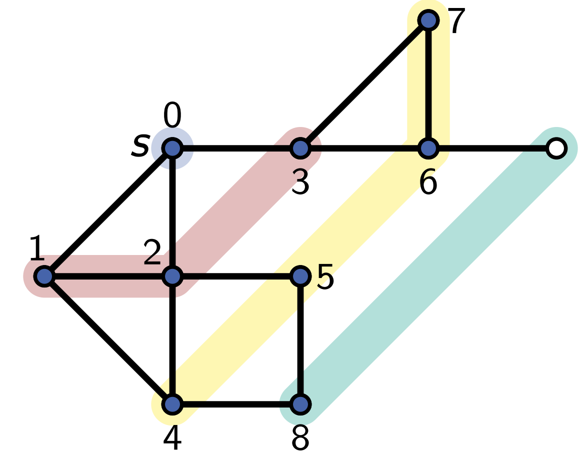
- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out

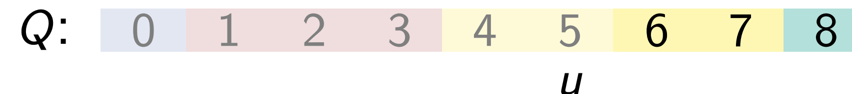


Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

Karlsruher Institut für Technologie

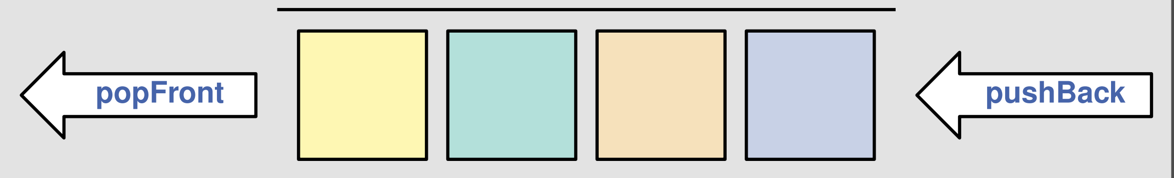
BFS(*Graph* G, *Node* s)
  Queue Q := empty queue
  Q.**push**(s)
  color node s
  while $Q \neq \emptyset$ **do**
    $u := Q$.**pop**()
    for *Node* v in $N(u)$ **do**
      if v is uncolored **then**
        Q.**push**(v)
        color node v





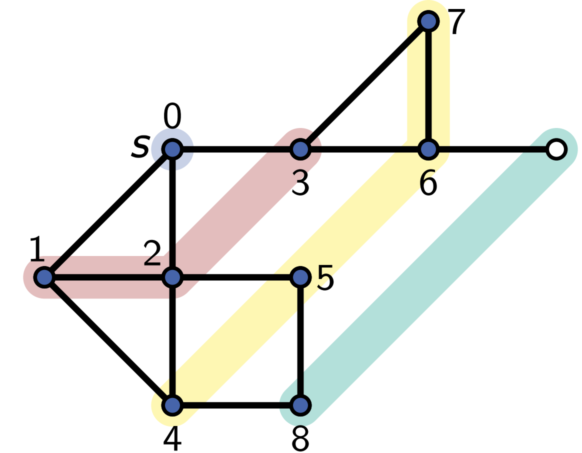
Erinnerung: Queue

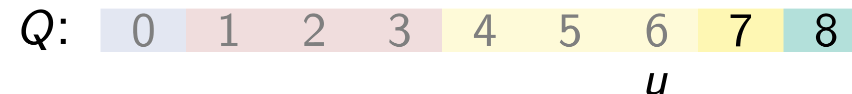
- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out



Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

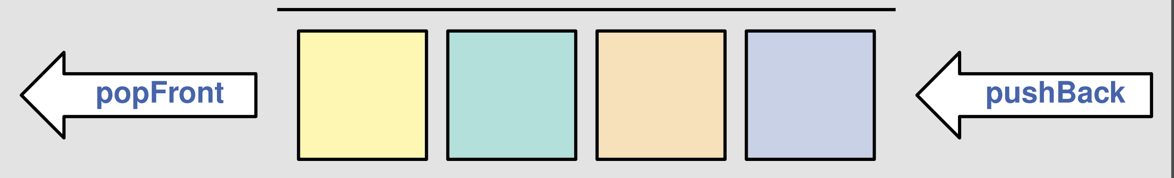
```
BFS(Graph G, Node s)
    Queue Q := empty queue
    Q.push(s)
    color node s
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.pop()
        for Node v in N(u) do
            if v is uncolored then
                Q.push(v)
                color node v
```





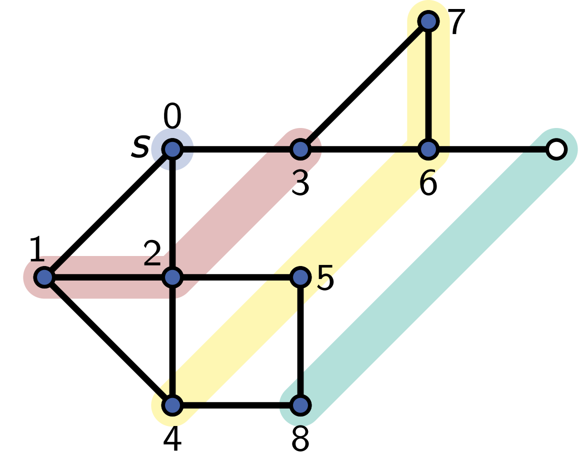
Erinnerung: Queue

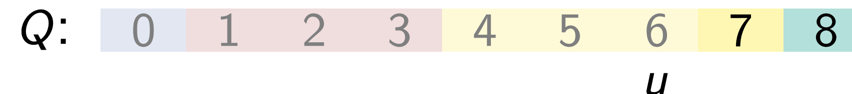
- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out



Algorithmus $\rightarrow$ Pseudocode (Endergebnis)

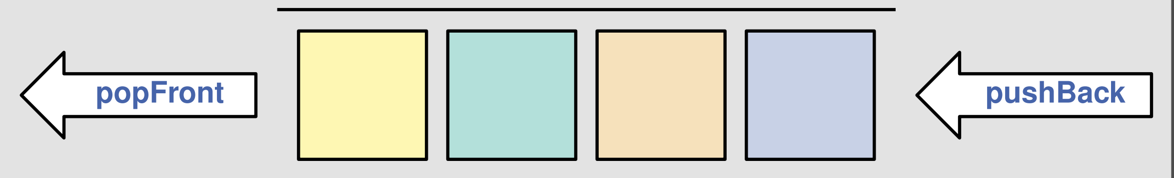
BFS(*Graph* G, *Node* s)
- *Queue* $Q :=$ empty queue
- Q.**push**(s)
- color node s
- **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
  - $u := Q$.**pop**()
  - **for** *Node* v in $N(u)$ **do**
    - **if** v is uncolored **then**
      - Q.**push**(v)
      - color node v





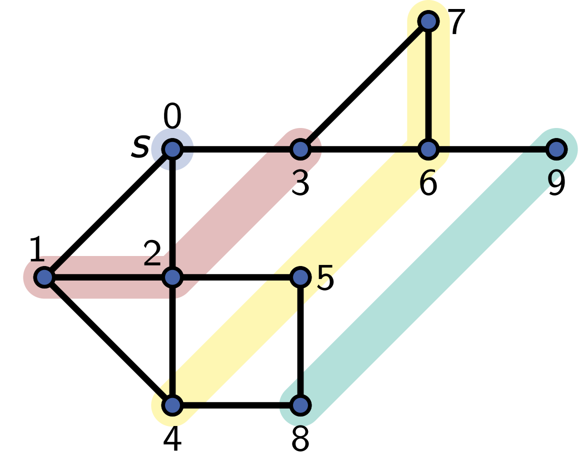
Erinnerung: Queue

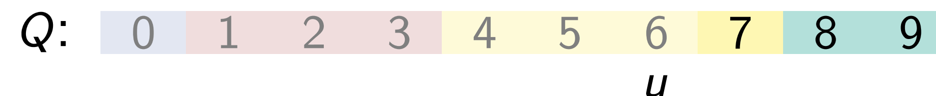
- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out



Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

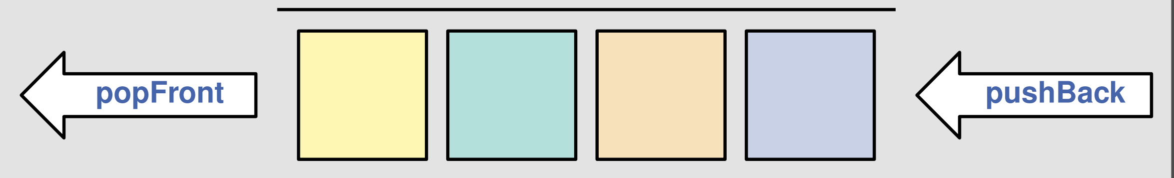

```
BFS(Graph G, Node s)
  Queue Q := empty queue
  Q.push(s)
  color node s
  while Q ≠ ∅ do
    u := Q.pop()
    for Node v in N(u) do
      if v is uncolored then
        Q.push(v)
        color node v
```





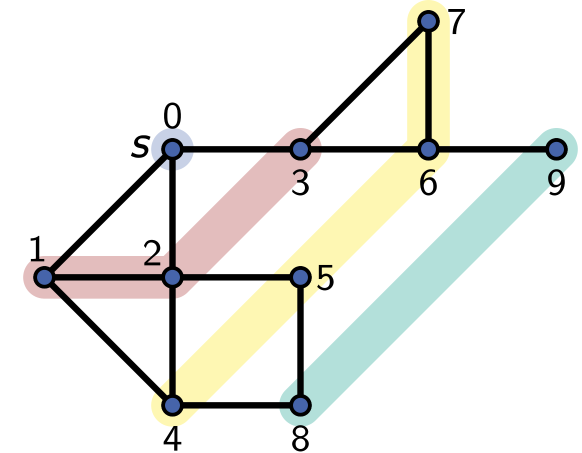
Erinnerung: Queue

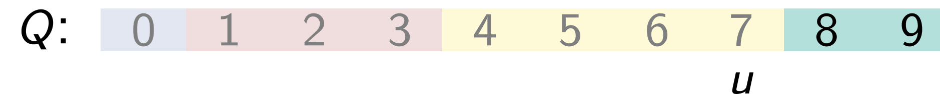
- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out



Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

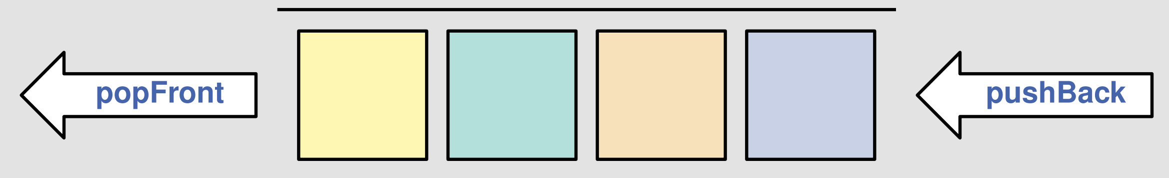
```
BFS(Graph G, Node s)
    Queue Q := empty queue
    Q.push(s)
    color node s
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.pop()
        for Node v in N(u) do
            if v is uncolored then
                Q.push(v)
                color node v
```





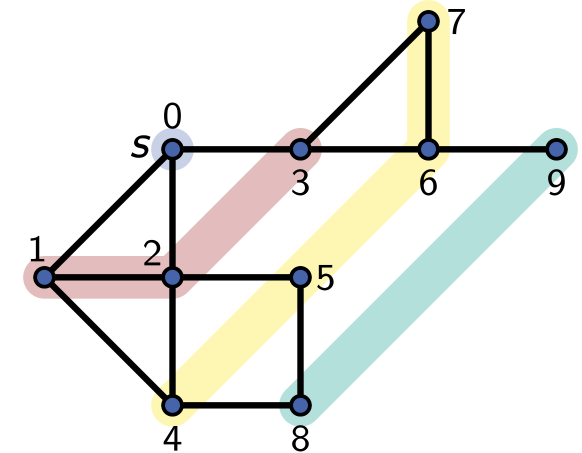
Erinnerung: Queue

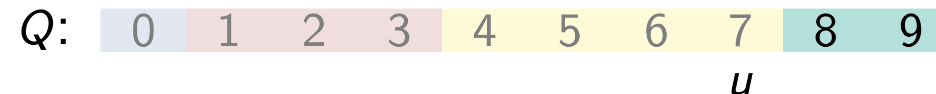
- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out



Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

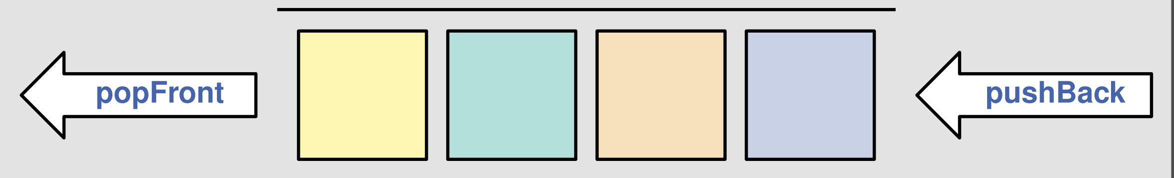
```
BFS(Graph G, Node s)
  Queue Q := empty queue
  Q.push(s)
  color node s
  while Q ≠ ∅ do
    u := Q.pop()
    for Node v in N(u) do
      if v is uncolored then
        Q.push(v)
        color node v
```





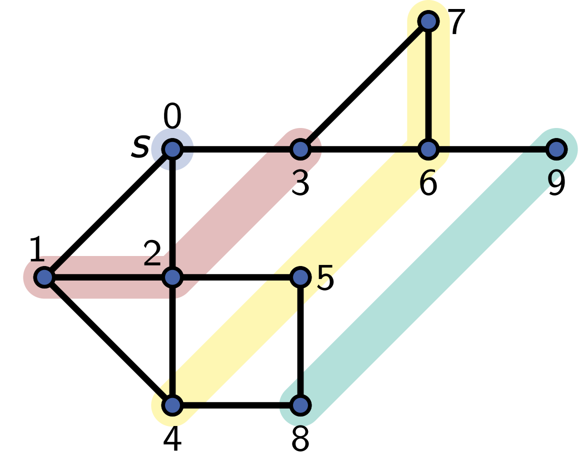
Erinnerung: Queue

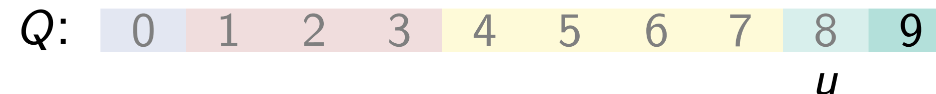
- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out



Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

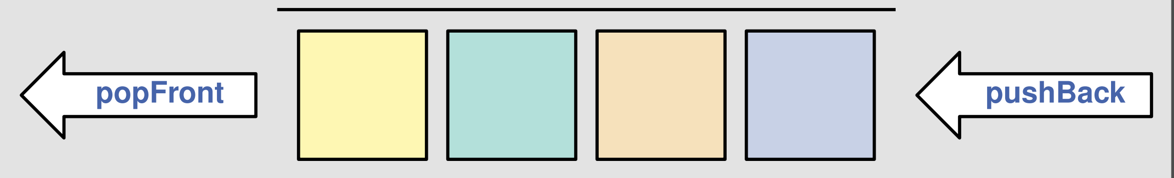
```
BFS(Graph G, Node s)
    Queue Q := empty queue
    Q.push(s)
    color node s
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.pop()
        for Node v in N(u) do
            if v is uncolored then
                Q.push(v)
                color node v
```





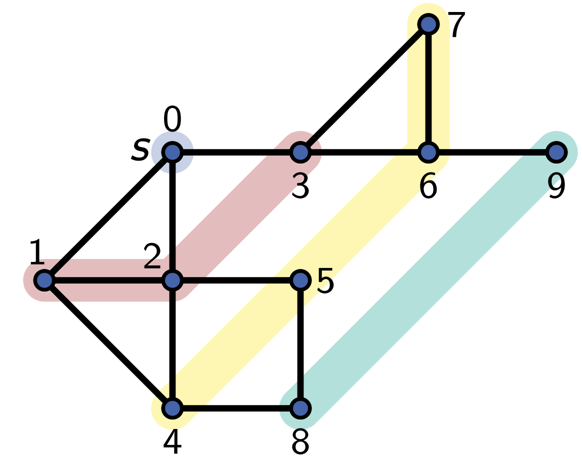
Erinnerung: Queue

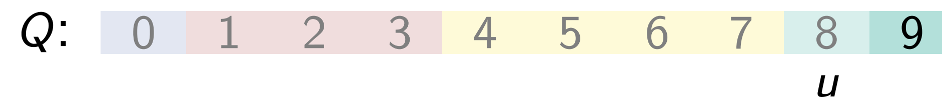
- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out



Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

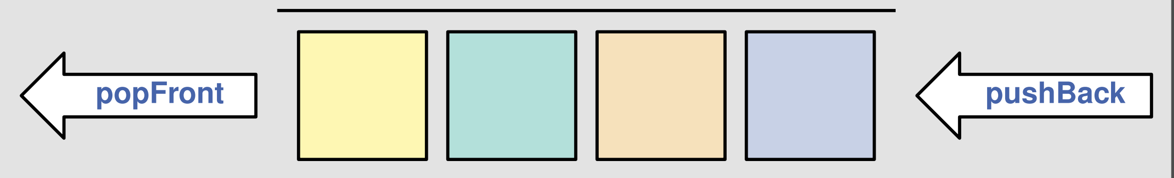
```
BFS(Graph G, Node s)
    Queue Q := empty queue
    Q.push(s)
    color node s
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.pop()
        for Node v in N(u) do
            if v is uncolored then
                Q.push(v)
                color node v
```





Erinnerung: Queue

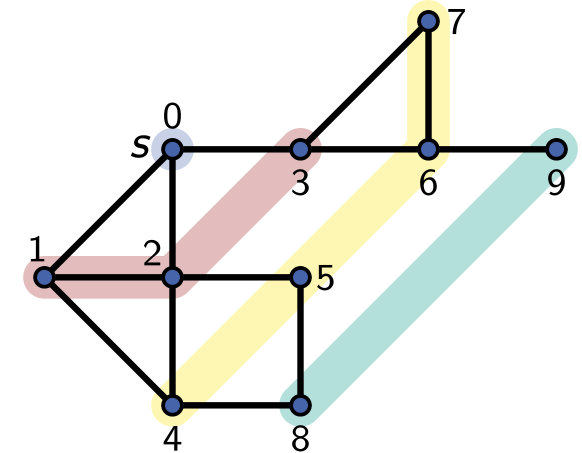
- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out

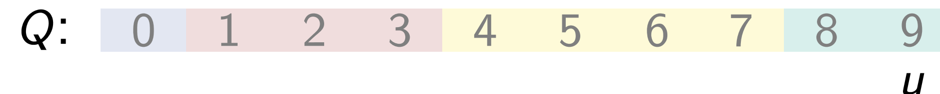


Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

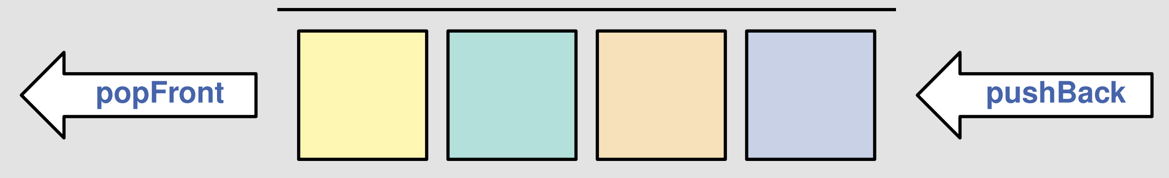
Karlsruher Institut für Technologie

BFS(*Graph* G, *Node* s)
- *Queue* Q := empty queue
- Q.**push**(s)
- color node s
- **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
  - $u := Q$.**pop**()
  - **for** *Node* v in $N(u)$ **do**
    - **if** v is uncolored **then**
      - Q.**push**(v)
      - color node v





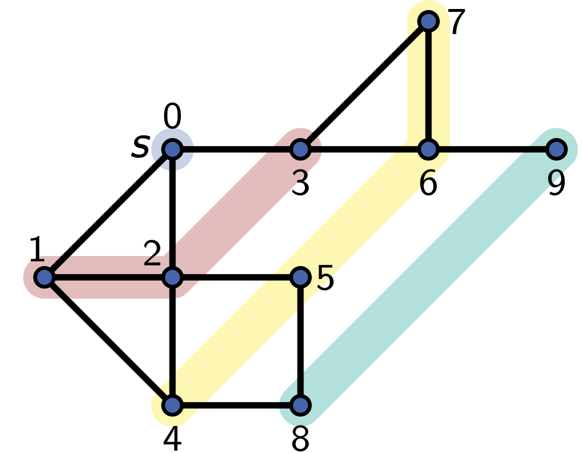
Erinnerung: Queue
- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out

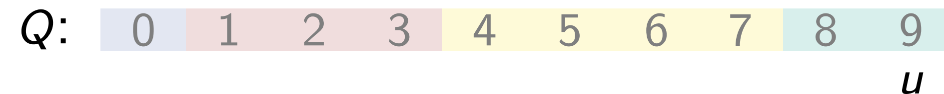


Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

Karlsruher Institut für Technologie

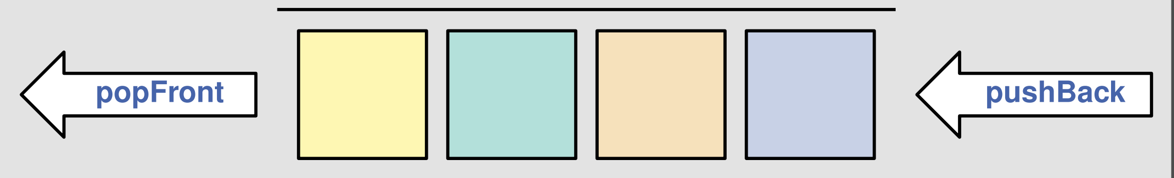
```
BFS(Graph G, Node s)
    Queue Q := empty queue
    Q.push(s)
    color node s
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.pop()
        for Node v in N(u) do
            if v is uncolored then
                Q.push(v)
                color node v
```





Erinnerung: Queue

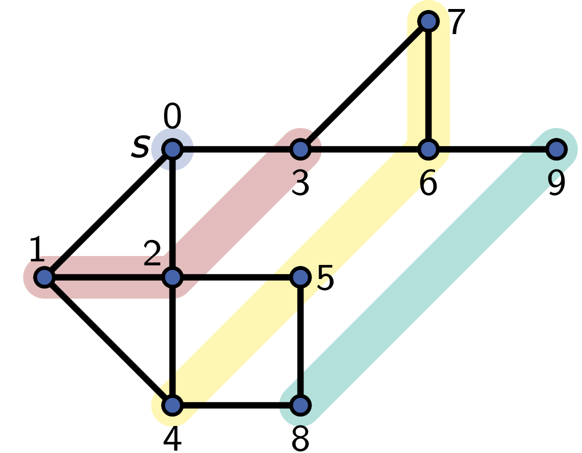
- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out



Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

BFS(*Graph* G, *Node* s)

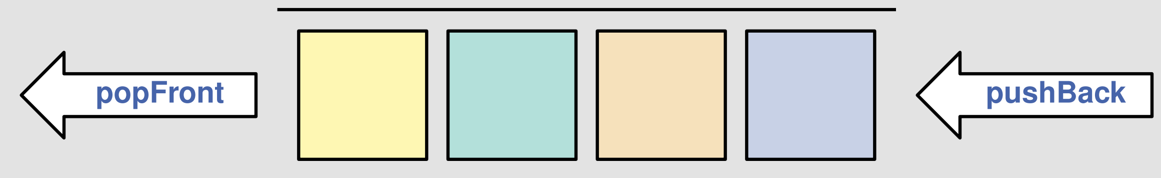
- *Queue* Q := empty queue
- Q.**push**(s)
- color node s
- **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
  - $u := Q$.**pop**()
  - **for** *Node* v in $N(u)$ **do**
    - **if** v is uncolored **then**
      - Q.**push**(v)
      - color node v



Q: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Erinnerung: Queue

- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out



Breitensuche: Laufzeit

Karlsruher Institut für Technologie

```
BFS(Graph G, Node s)
    Queue Q := empty queue
    Q.push(s)
    color node s
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.pop()
        for Node v in N(u) do
            if v is uncolored then
                Q.push(v)
                color node v
```

Intuition von vorhin: pro Layer ...

- betrachte Knoten in dem Layer $\to$ insgesamt $\Theta(n)$
- betrachte nur Kanten inzident zu Knoten aus dem Layer $\to$ insgesamt $\Theta(m)$

Notation

- V: Knotenmenge
- E: Kantenmenge
- $n = |V|$, $m = |E|$
- $\deg(u)$: Grad von u

Breitensuche: Laufzeit

KIT – Karlsruher Institut für Technologie

```
BFS(Graph G, Node s)
  Queue Q := empty queue
  Q.push(s)
  color node s
  while Q ≠ ∅ do
    u := Q.pop()
    for Node v in N(u) do
      if v is uncolored then
        Q.push(v)
        color node v
```

Intuition von vorhin: pro Layer ...

- betrachte Knoten in dem Layer → insgesamt $\Theta(n)$
- betrachte nur Kanten inzident zu Knoten aus dem Layer → insgesamt $\Theta(m)$

Etwas formaler für unsere finale Umsetzung

- jeder Knoten wird nur einmal in die Queue eingefügt

Notation

- V: Knotenmenge
- E: Kantenmenge
- $n = |V|$, $m = |E|$
- $\deg(u)$: Grad von u

Breitensuche: Laufzeit

Karlsruher Institut für Technologie

```
BFS(Graph G, Node s)
  Queue Q := empty queue
  Q.push(s)
  color node s
  while Q ≠ ∅ do
    u := Q.pop()
    for Node v in N(u) do
      if v is uncolored then
        Q.push(v)
        color node v
```

Intuition von vorhin: pro Layer ...

- betrachte Knoten in dem Layer $\rightarrow$ insgesamt $\Theta(n)$
- betrachte nur Kanten inzident zu Knoten aus dem Layer $\rightarrow$ insgesamt $\Theta(m)$

Etwas formaler für unsere finale Umsetzung

- jeder Knoten wird nur einmal in die Queue eingefügt
- **while**-Schleife: ein Durchlauf für jeden Knoten $u \in V$

Notation

- V: Knotenmenge
- E: Kantenmenge
- $n = |V|$, $m = |E|$
- $\deg(u)$: Grad von u

Breitensuche: Laufzeit

Karlsruher Institut für Technologie

```
BFS(Graph G, Node s)
  Queue Q := empty queue
  Q.push(s)
  color node s
  while Q ≠ ∅ do
    u := Q.pop()
    for Node v in N(u) do
      if v is uncolored then
        Q.push(v)
        color node v
```

Intuition von vorhin: pro Layer . . .

- betrachte Knoten in dem Layer $\rightarrow$ insgesamt $\Theta(n)$
- betrachte nur Kanten inzident zu Knoten aus dem Layer $\rightarrow$ insgesamt $\Theta(m)$

Etwas formaler für unsere finale Umsetzung

- jeder Knoten wird nur einmal in die Queue eingefügt
- while-Schleife: ein Durchlauf für jeden Knoten $u \in V$
- for-Schleife: $\deg(u) = |N(u)|$ Durchläufe

Notation

- V: Knotenmenge
- E: Kantenmenge
- $n = |V|$, $m = |E|$
- $\deg(u)$: Grad von u

Breitensuche: Laufzeit

Karlsruher Institut für Technologie

```
BFS(Graph G, Node s)
    Queue Q := empty queue
    Q.push(s)
    color node s
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.pop()
        for Node v in N(u) do
            if v is uncolored then
                Q.push(v)
                color node v
```

Intuition von vorhin: pro Layer ...

- betrachte Knoten in dem Layer $\to$ insgesamt $\Theta(n)$
- betrachte nur Kanten inzident zu Knoten aus dem Layer $\to$ insgesamt $\Theta(m)$

Etwas formaler für unsere finale Umsetzung

- jeder Knoten wird nur einmal in die Queue eingefügt
- while-Schleife: ein Durchlauf für jeden Knoten $u \in V$
- for-Schleife: $\deg(u) = |N(u)|$ Durchläufe
- Gesamtkosten: $\sum_{u \in V} \deg(u)$

Notation

- V: Knotenmenge
- E: Kantenmenge
- $n = |V|$, $m = |E|$
- $\deg(u)$: Grad von u

app.klicker.uzh.ch/join/algo1

Breitensuche: Laufzeit

```
BFS(Graph G, Node s)
    Queue Q := empty queue
    Q.push(s)
    color node s
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.pop()
        for Node v in N(u) do
            if v is uncolored then
                Q.push(v)
                color node v
```

Intuition von vorhin: pro Layer …

- betrachte Knoten in dem Layer $\rightarrow$ insgesamt $\Theta(n)$
- betrachte nur Kanten inzident zu Knoten aus dem Layer $\rightarrow$ insgesamt $\Theta(m)$

Etwas formaler für unsere finale Umsetzung

- jeder Knoten wird nur einmal in die Queue eingefügt
- while-Schleife: ein Durchlauf für jeden Knoten $u \in V$
- for-Schleife: $\deg(u) = |N(u)|$ Durchläufe
- Gesamtkosten: $\sum_{u \in V} \deg(u)$

Notation
- V: Knotenmenge
- E: Kantenmenge
- $n = |V|$, $m = |E|$
- $\deg(u)$: Grad von u

Zu was summiert sich $\sum_{u \in V} \deg(u)$?

Breitensuche: Laufzeit

Karlsruher Institut für Technologie

```
BFS(Graph G, Node s)
    Queue Q := empty queue
    Q.push(s)
    color node s
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.pop()
        for Node v in N(u) do
            if v is uncolored then
                Q.push(v)
                color node v
```

Intuition von vorhin: pro Layer ...

- betrachte Knoten in dem Layer $\to$ insgesamt $\Theta(n)$
- betrachte nur Kanten inzident zu Knoten aus dem Layer $\to$ insgesamt $\Theta(m)$

Etwas formaler für unsere finale Umsetzung

- jeder Knoten wird nur einmal in die Queue eingefügt
- while-Schleife: ein Durchlauf für jeden Knoten $u \in V$
- for-Schleife: $\deg(u) = |N(u)|$ Durchläufe
- Gesamtkosten: $\sum_{u \in V} \deg(u) = 2m$

(jede Kante $\{u, v\}$ wird doppelt gezählt: einmal für u in $\deg(u)$ und einmal für v in $\deg(v)$)

Notation
- V: Knotenmenge
- E: Kantenmenge
- $n = |V|$, $m = |E|$
- $\deg(u)$: Grad von u

Breitensuche: Laufzeit

Karlsruher Institut für Technologie

```
BFS(Graph G, Node s)
    Queue Q := empty queue
    Q.push(s)
    color node s
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.pop()
        for Node v in N(u) do
            if v is uncolored then
                Q.push(v)
                color node v
```

Intuition von vorhin: pro Layer . . .

- betrachte Knoten in dem Layer $\rightarrow$ insgesamt $\Theta(n)$
- betrachte nur Kanten inzident zu Knoten aus dem Layer $\rightarrow$ insgesamt $\Theta(m)$

Etwas formaler für unsere finale Umsetzung

- jeder Knoten wird nur einmal in die Queue eingefügt
- while-Schleife: ein Durchlauf für jeden Knoten $u \in V$
- for-Schleife: $\deg(u) = |N(u)|$ Durchläufe
- Gesamtkosten: $\sum_{u \in V} \deg(u) = 2m$

(jede Kante $\{u, v\}$ wird doppelt gezählt:
einmal für u in $\deg(u)$ und einmal für v in $\deg(v)$)

Notation
- V: Knotenmenge
- E: Kantenmenge
- $n = |V|$, $m = |E|$
- $\deg(u)$: Grad von u

$\Rightarrow$ BFS hat lineare Laufzeit $\Theta(m)$

Breitensuche: Laufzeit

Karlsruher Institut für Technologie

```
BFS(Graph G, Node s)
    Queue Q := empty queue
    Q.push(s)
    color node s
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.pop()
        for Node v in N(u) do
            if v is uncolored then
                Q.push(v)
                color node v
```

Intuition von vorhin: pro Layer . . .

- betrachte Knoten in dem Layer $\to$ insgesamt $\Theta(n)$
- betrachte nur Kanten inzident zu Knoten aus dem Layer $\to$ insgesamt $\Theta(m)$

Etwas formaler für unsere finale Umsetzung

- jeder Knoten wird nur einmal in die Queue eingefügt
- while-Schleife: ein Durchlauf für jeden Knoten $u \in V$
- for-Schleife: $\deg(u) = |N(u)|$ Durchläufe
- Gesamtkosten: $\sum_{u \in V} \deg(u) = 2m$

(jede Kante $\{u, v\}$ wird doppelt gezählt: einmal für u in $\deg(u)$ und einmal für v in $\deg(v)$)

Notation

- V: Knotenmenge
- E: Kantenmenge
- $n = |V|$, $m = |E|$
- $\deg(u)$: Grad von u

$\Rightarrow$ BFS hat lineare Laufzeit $\Theta(m)$

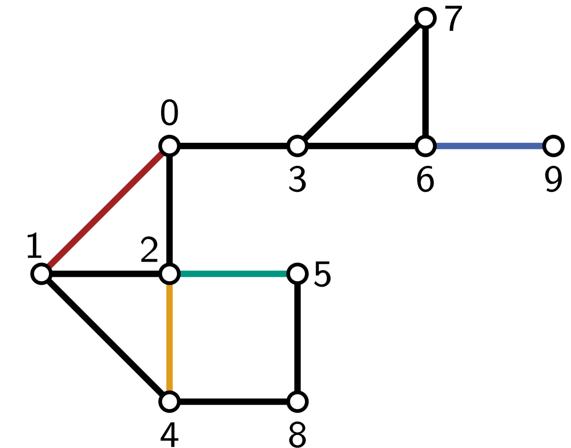
(vorausgesetzt, unsere Graphdatenstruktur erlaubt es uns in $O(\deg(u))$ über $N(u)$ zu iterieren)

Einschub: Graphrepräsentation

Karlsruher Institut für Technologie

Grundsätzliches

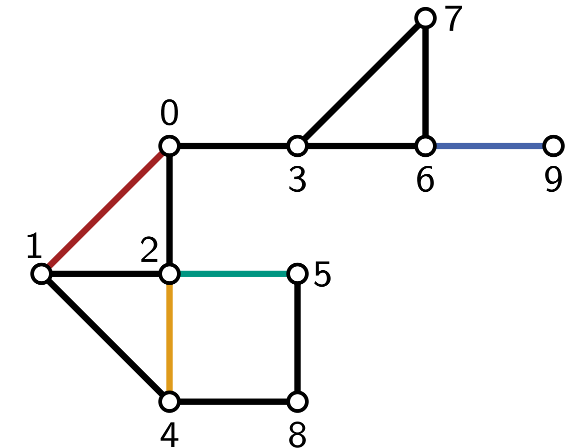
- repräsentiere jeden Knoten durch eine Zahl in $\{0, \ldots, n-1\}$
- Zusatzinfos für Knoten (z.B. Farbe): Array der Länge n
  - Array erstellen: einmalig $\Theta(n)$
  - Eigenschaft eines Knotens ändern/abfragen: $\Theta(1)$



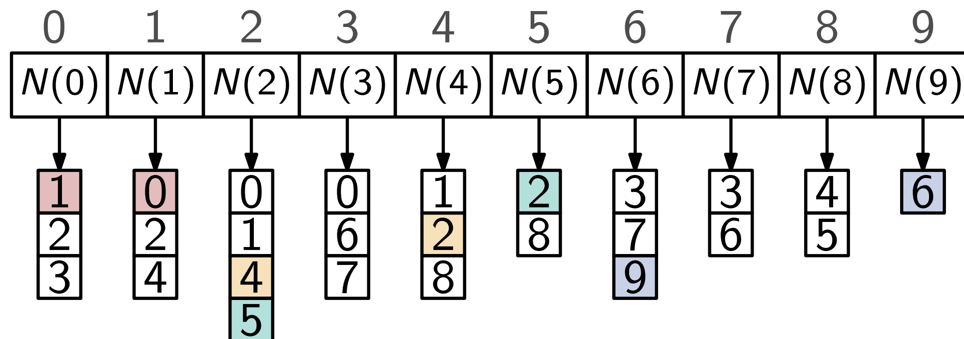
Einschub: Graphrepräsentation

Grundsätzliches

- repräsentiere jeden Knoten durch eine Zahl in $\{0, \ldots, n-1\}$
- Zusatzinfos für Knoten (z.B. Farbe): Array der Länge n
  - Array erstellen: einmalig $\Theta(n)$
  - Eigenschaft eines Knotens ändern/abfragen: $\Theta(1)$



Adjazenzliste



- über $N(v)$ iterieren: $\Theta(\deg(v))$
- Detailumsetzung hängt von Anwendung ab

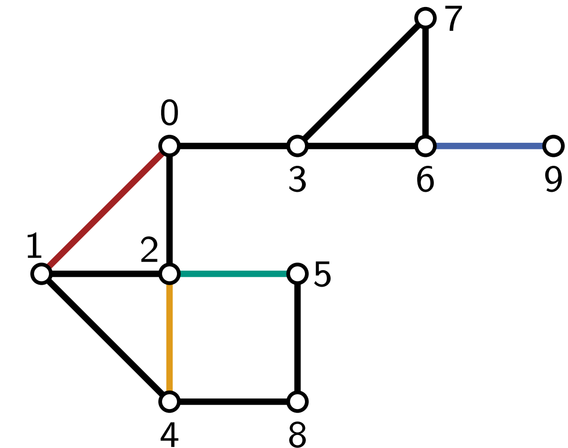
  (mit Engineering-Potential, z.B. für bessere Cache-Effizienz)

Einschub: Graphrepräsentation

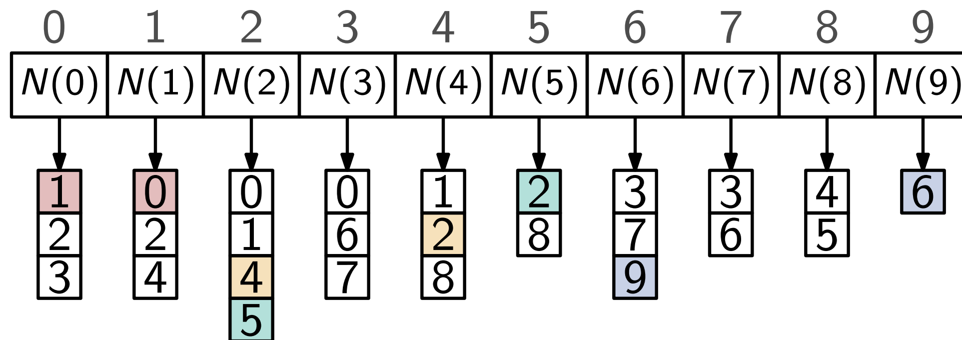
Karlsruher Institut für Technologie

Grundsätzliches

- repräsentiere jeden Knoten durch eine Zahl in $\{0, \dots, n-1\}$
- Zusatzinfos für Knoten (z.B. Farbe): Array der Länge n
  - Array erstellen: einmalig $\Theta(n)$
  - Eigenschaft eines Knotens ändern/abfragen: $\Theta(1)$



Adjazenzliste



- über $N(v)$ iterieren: $\Theta(\deg(v))$
- Detailumsetzung hängt von Anwendung ab
  (mit Engineering-Potential, z.B. für bessere Cache-Effizienz)

Adjazenzmatrix

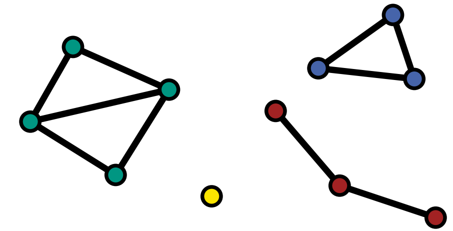
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
4	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0
5	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
7	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
8	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0

- testen ob $\{u, v\} \in E$ geht in $\Theta(1)$
- $\Theta(n^2)$ Speicher
- $N(v)$ iterieren: $\Theta(n)$

Zusammenhangskomponenten

Grundlegendes Problem: Zusammenhangskomponenten finden

- gegeben: Graph
- Ziel: färbe die Knoten entsprechend der Komponenten

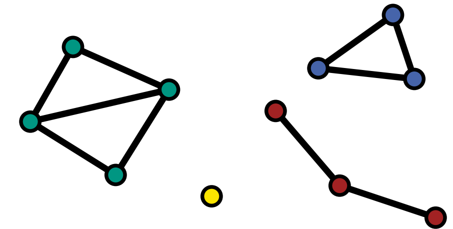


Zusammenhangskomponenten

Karlsruher Institut für Technologie

Grundlegendes Problem: Zusammenhangskomponenten finden

- gegeben: Graph
- Ziel: färbe die Knoten entsprechend der Komponenten



Gerade gesehen

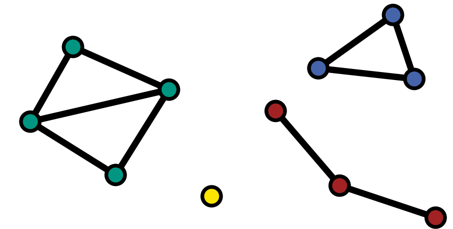
- **BFS**(G, s) färbt von s aus erreichbaren Knoten (Komponente $C(s)$)
- Laufzeit: $\Theta(m_{C(s)})$

Notation

- $G = (V, E)$: Graph
- $n = |V|$, $m = |E|$
- $C(s)$: Komponente von s
- $m_{C(s)}$: #Kanten in $C(s)$

Zusammenhangskomponenten

Karlsruher Institut für Technologie



Grundlegendes Problem: Zusammenhangskomponenten finden

- gegeben: Graph
- Ziel: färbe die Knoten entsprechend der Komponenten

Gerade gesehen

- **BFS**(G, s) färbt von s aus erreichbaren Knoten (Komponente $C(s)$)
- Laufzeit: $\Theta(m_{C(s)})$

Färbung aller Komponenten

- iteriere über alle Knoten $s \in V \rightarrow$ **BFS**(G, s) wenn s noch ungefärbt
- wähle für jeden Aufruf der BFS eine neue Farbe

Notation

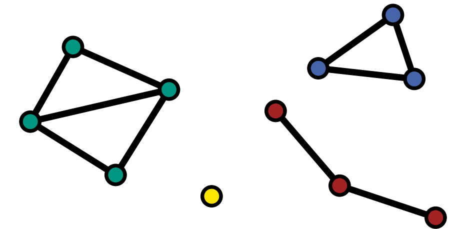
- $G = (V, E)$: Graph
- $n = |V|$, $m = |E|$
- $C(s)$: Komponente von s
- $m_{C(s)}$: #Kanten in $C(s)$

Zusammenhangskomponenten

Karlsruher Institut für Technologie

Grundlegendes Problem: Zusammenhangskomponenten finden

- gegeben: Graph
- Ziel: färbe die Knoten entsprechend der Komponenten



Gerade gesehen

- **BFS**(G, s) färbt von s aus erreichbaren Knoten (Komponente $C(s)$)
- Laufzeit: $\Theta(m_{C(s)})$

Notation
- $G = (V, E)$: Graph
- $n = |V|$, $m = |E|$
- $C(s)$: Komponente von s
- $m_{C(s)}$: #Kanten in $C(s)$

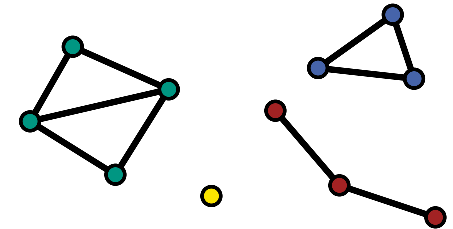
Färbung aller Komponenten

- iteriere über alle Knoten $s \in V \rightarrow$ **BFS**(G, s) wenn s noch ungefärbt
- wähle für jeden Aufruf der BFS eine neue Farbe
- für jede Komponente wird die BFS einmal ausgeführt $\rightarrow$ eine Farbe pro Komponenten

Zusammenhangskomponenten

Grundlegendes Problem: Zusammenhangskomponenten finden

- gegeben: Graph
- Ziel: färbe die Knoten entsprechend der Komponenten



Gerade gesehen

- **BFS**(G, s) färbt von s aus erreichbaren Knoten (Komponente $C(s)$)
- Laufzeit: $\Theta(m_{C(s)})$

Notation

- $G = (V, E)$: Graph
- $n = |V|$, $m = |E|$
- $C(s)$: Komponente von s
- $m_{C(s)}$: #Kanten in $C(s)$

Färbung aller Komponenten

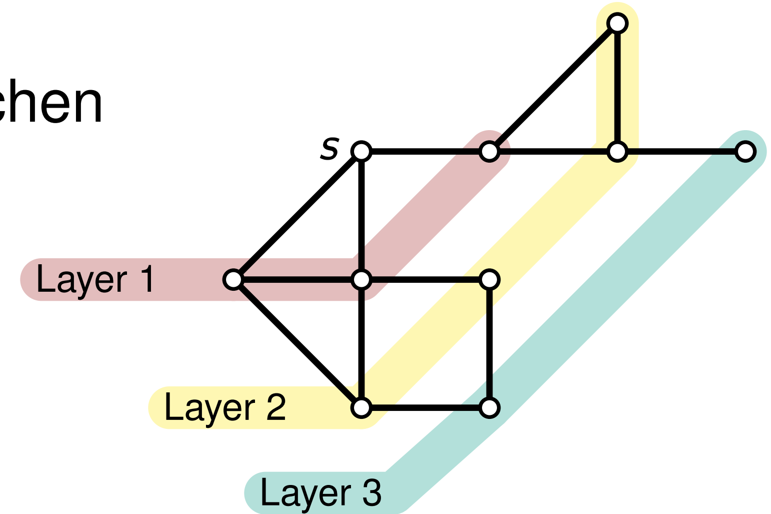
- iteriere über alle Knoten $s \in V \rightarrow$ **BFS**(G, s) wenn s noch ungefärbt
- wähle für jeden Aufruf der BFS eine neue Farbe
- für jede Komponente wird die BFS einmal ausgeführt $\rightarrow$ eine Farbe pro Komponenten
- Laufzeit: $\Theta(n + m)$
  - über alle Knoten Iterieren: $\Theta(n)$
  - BFS in Summe (jede Kante gehört zu nur einer Komponente): $\Theta(m)$

BFS: Layer, Distanzen, Kürzeste Pfade

Karlsruher Institut für Technologie

Beobachtung

- Knoten in Layer ℓ kann man mit ℓ Schritten von s aus erreichen
- BFS berechnet also die Distanz von s zu anderen Knoten

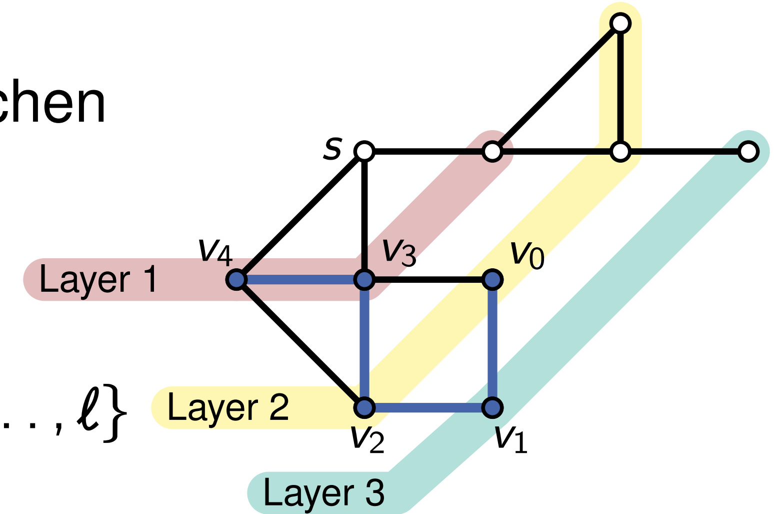


BFS: Layer, Distanzen, Kürzeste Pfade

Karlsruher Institut für Technologie

Beobachtung

- Knoten in Layer ℓ kann man mit ℓ Schritten von s aus erreichen
- BFS berechnet also die Distanz von s zu anderen Knoten



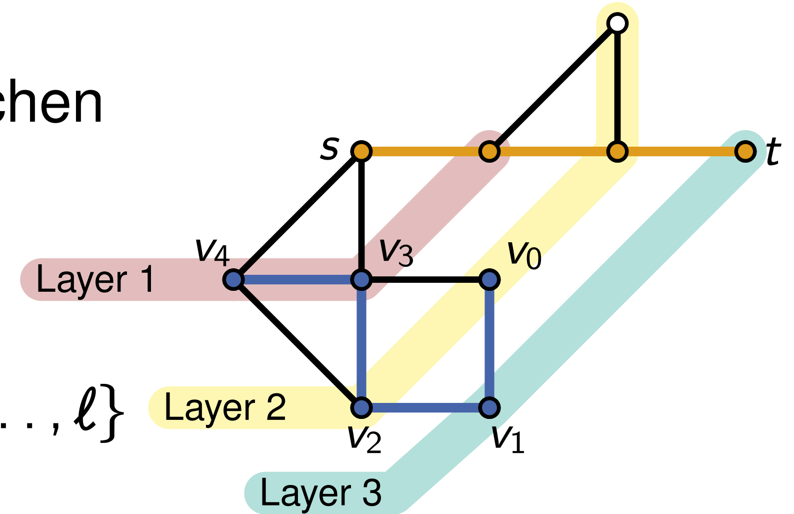
Etwas formaler: ein paar Grundbegriffe

- **Pfad**: Knotenfolge $\langle v_0, \ldots, v_\ell \rangle$, mit $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$ für $i \in \{1, \ldots, \ell\}$
- **Länge** des Pfades $\langle v_0, \ldots, v_\ell \rangle$: ℓ
- v_0 und v_ℓ sind **Start-** bzw. **Endknoten** von $\langle v_0, \ldots, v_\ell \rangle$

BFS: Layer, Distanzen, Kürzeste Pfade

Beobachtung

- Knoten in Layer ℓ kann man mit ℓ Schritten von s aus erreichen
- BFS berechnet also die Distanz von s zu anderen Knoten



Etwas formaler: ein paar Grundbegriffe

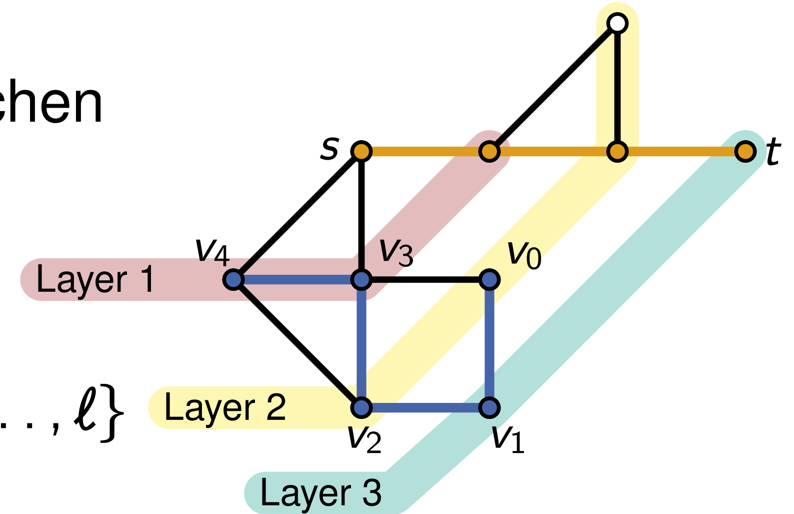
- **Pfad**: Knotenfolge $\langle v_0, \dots, v_\ell \rangle$, mit $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$ für $i \in \{1, \dots, \ell\}$
- **Länge** des Pfades $\langle v_0, \dots, v_\ell \rangle$: ℓ
- v_0 und v_ℓ sind **Start-** bzw. **Endknoten** von $\langle v_0, \dots, v_\ell \rangle$
- **kürzester Pfad** von $s \in V$ nach $t \in V$: Pfad minimaler Länge mit Start s und Ende t
- **Distanz** $\text{dist}(s, t)$: Länge des kürzesten st-Pfades

BFS: Layer, Distanzen, Kürzeste Pfade

Karlsruher Institut für Technologie

Beobachtung

- Knoten in Layer ℓ kann man mit ℓ Schritten von s aus erreichen
- BFS berechnet also die Distanz von s zu anderen Knoten



Etwas formaler: ein paar Grundbegriffe

- **Pfad**: Knotenfolge $\langle v_0, \dots, v_\ell \rangle$, mit $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$ für $i \in \{1, \dots, \ell\}$
- **Länge** des Pfades $\langle v_0, \dots, v_\ell \rangle$: ℓ
- v_0 und v_ℓ sind **Start-** bzw. **Endknoten** von $\langle v_0, \dots, v_\ell \rangle$
- **kürzester Pfad** von $s \in V$ nach $t \in V$: Pfad minimaler Länge mit Start s und Ende t
- **Distanz** $\text{dist}(s, t)$: Länge des kürzesten st-Pfades

Theorem
Liegt ein Knoten v bei der Breitensuche von s aus in Layer ℓ dann gilt $\text{dist}(s, v) = \ell$.

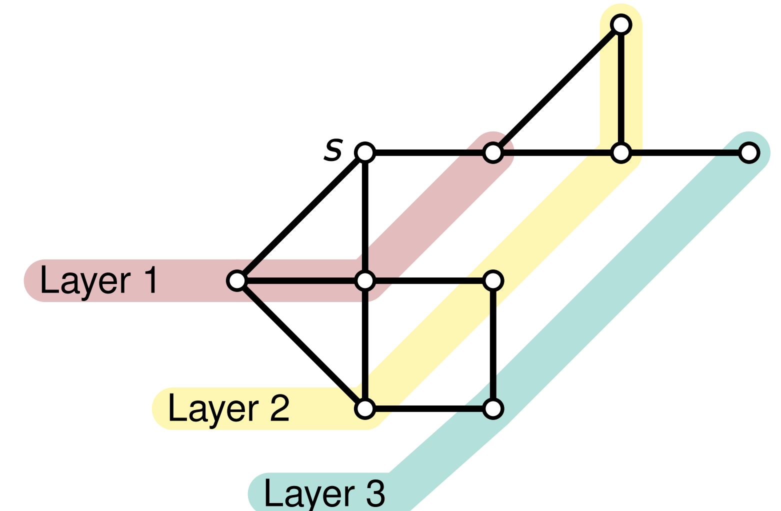
BFS kann Distanzen berechnen

Karlsruher Institut für Technologie

Theorem
Liegt ein Knoten v bei der Breitensuche von s aus in Layer ℓ dann gilt $\operatorname{dist}(s, v) = \ell$.

Beweis

- es gibt einen Pfad der Länge ℓ von s nach v
- es gibt keinen kürzeren Pfad von s nach v

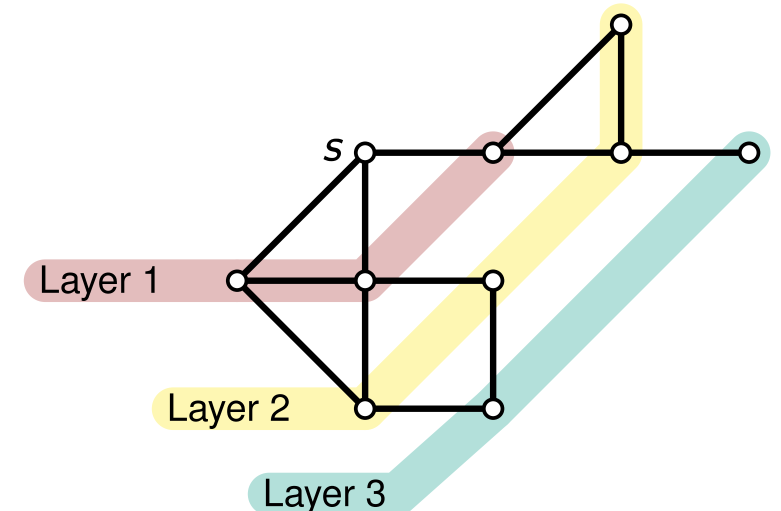


BFS kann Distanzen berechnen

Theorem
Liegt ein Knoten v bei der Breitensuche von s aus in Layer ℓ dann gilt $\mathrm{dist}(s, v) = \ell$.

Beweis

- es gibt einen Pfad der Länge ℓ von s nach v
  - Induktion über ℓ: klar für $\ell = 0$
- es gibt keinen kürzeren Pfad von s nach v



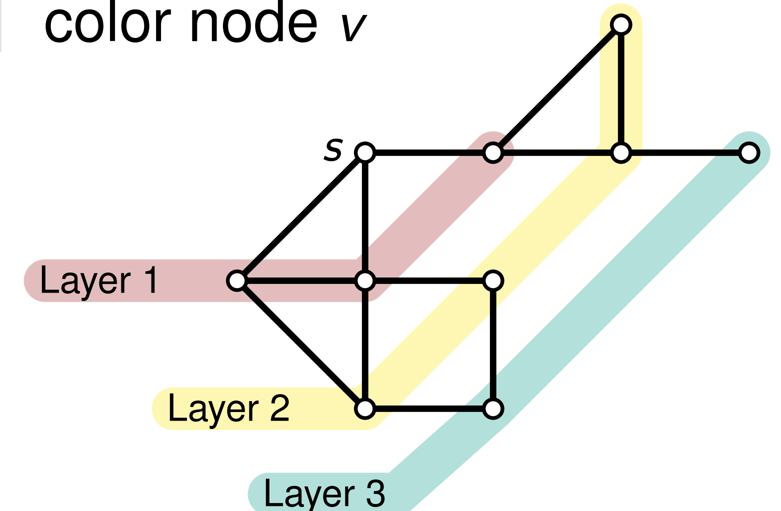
BFS kann Distanzen berechnen

Theorem
Liegt ein Knoten v bei der Breitensuche von s aus in Layer ℓ dann gilt $\operatorname{dist}(s, v) = \ell$.

Beweis

- es gibt einen Pfad der Länge ℓ von s nach v
  - Induktion über ℓ: klar für $\ell = 0$
  - v in Layer $\ell \Rightarrow v$ hat Nachbarn u in Layer $\ell - 1$
- es gibt keinen kürzeren Pfad von s nach v

```
…
for Node v in N(u) do
    if v is uncolored then
        Q.push(v)
        color node v
```



BFS kann Distanzen berechnen

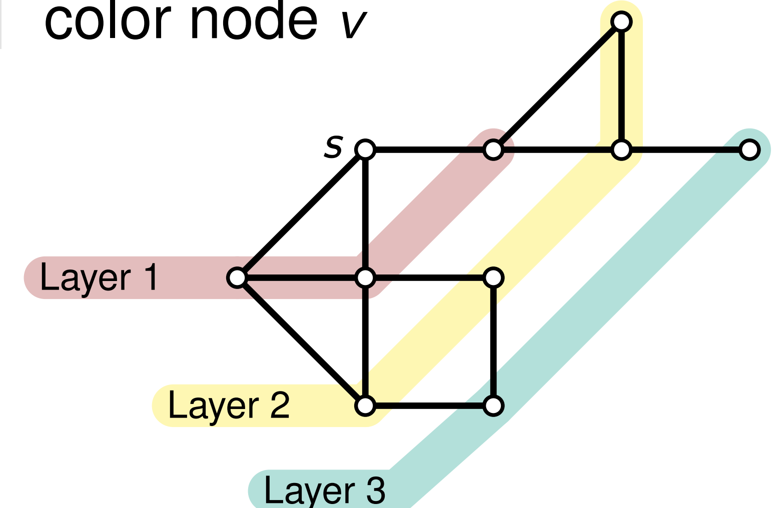
Karlsruher Institut für Technologie

Theorem
Liegt ein Knoten v bei der Breitensuche von s aus in Layer ℓ dann gilt $\text{dist}(s, v) = \ell$.

Beweis

- es gibt einen Pfad der Länge ℓ von s nach v
  - Induktion über ℓ: klar für $\ell = 0$
  - v in Layer $\ell \Rightarrow v$ hat Nachbarn u in Layer $\ell - 1$
  - I.-Voraussetzung $\Rightarrow su$-Pfad der Länge $\ell - 1$
  - daher: sv-Pfad der Länge ℓ
- es gibt keinen kürzeren Pfad von s nach v

```
...
for Node v in N(u) do
    if v is uncolored then
        Q.push(v)
        color node v
```



BFS kann Distanzen berechnen

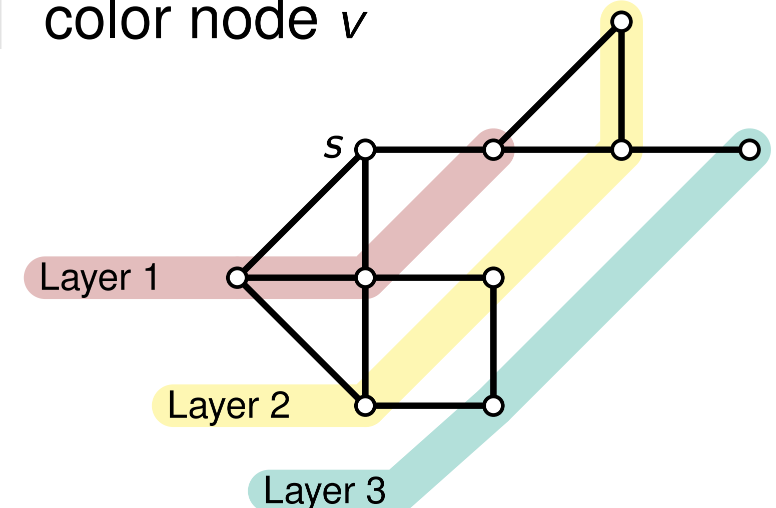
Karlsruher Institut für Technologie

Theorem
Liegt ein Knoten v bei der Breitensuche von s aus in Layer ℓ dann gilt $\mathrm{dist}(s, v) = \ell$.

Beweis

- es gibt einen Pfad der Länge ℓ von s nach v
  - Induktion über ℓ: klar für $\ell = 0$
  - v in Layer $\ell \Rightarrow v$ hat Nachbarn u in Layer $\ell - 1$
  - I.-Voraussetzung $\Rightarrow su$-Pfad der Länge $\ell - 1$
  - daher: sv-Pfad der Länge ℓ
- es gibt keinen kürzeren Pfad von s nach v
  - Kanten überspringen keine Layer
  - jeder Pfad von v (Layer ℓ) nach s (Layer 0) hat Länge mindestens ℓ

```
...
for Node v in N(u) do
    if v is uncolored then
        Q.push(v)
        color node v
```



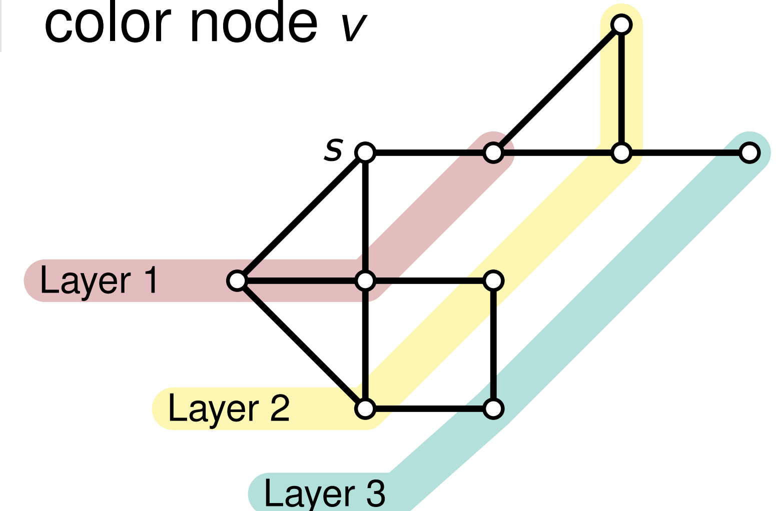
Distanzen und kürzeste Wege: tatsächliche Berechnung

Karlsruher Institut für Technologie

Folgerungen aus dem Beweis

- gerade bewiesen: die Layer geben die Distanzen von s

```
...
for Node v in N(u) do
    if v is uncolored then
        Q.push(v)
        color node v
```



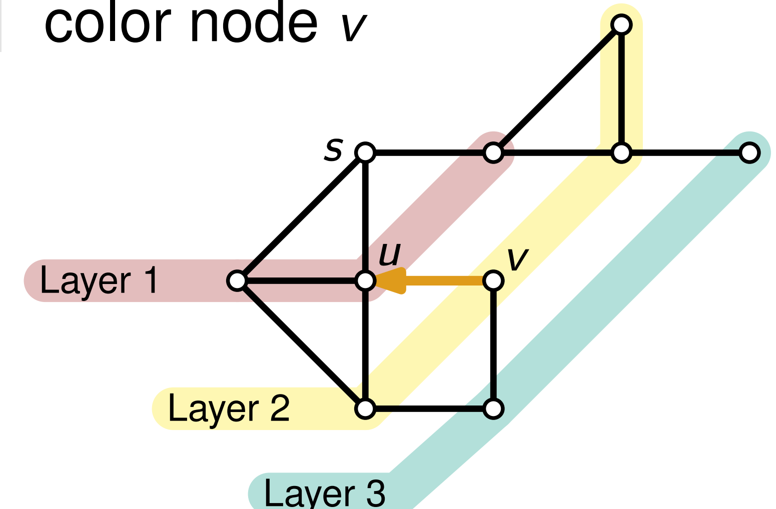
Distanzen und kürzeste Wege: tatsächliche Berechnung

Karlsruher Institut für Technologie

Folgerungen aus dem Beweis

- gerade bewiesen: die Layer geben die Distanzen von s
- im Beweis sieht man, wie man den kürzesten Weg erhält:
  - Knoten v wird durch Knoten u gefunden
  - definiere u als Elternknoten von v
  - Zurückverfolgung der Eltern bis s liefert kürzesten Pfad

```
...
for Node v in N(u) do
    if v is uncolored then
        Q.push(v)
        color node v
```



Distanzen und kürzeste Wege: tatsächliche Berechnung

Karlsruher Institut für Technologie

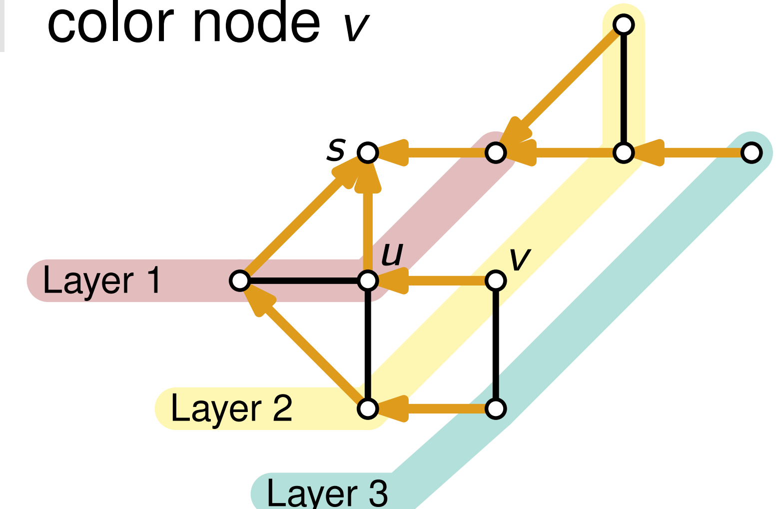
Folgerungen aus dem Beweis

- gerade bewiesen: die Layer geben die Distanzen von s
- im Beweis sieht man, wie man den kürzesten Weg erhält:
  - Knoten v wird durch Knoten u gefunden
  - definiere u als Elternknoten von v
  - Zurückverfolgung der Eltern bis s liefert kürzesten Pfad

...
for *Node* v in $N(u)$ **do**
  if v is uncolored **then**
    Q.**push**(v)
    color node v

Beobachtung

- Eltern-Beziehung liefert Baum mit Wurzel s
- diesen Baum nennt man auch **BFS-Baum**



Distanzen und kürzeste Wege: tatsächliche Berechnung

Karlsruher Institut für Technologie

Folgerungen aus dem Beweis

- gerade bewiesen: die Layer geben die Distanzen von s
- im Beweis sieht man, wie man den kürzesten Weg erhält:
  - Knoten v wird durch Knoten u gefunden
  - definiere u als Elternknoten von v
  - Zurückverfolgung der Eltern bis s liefert kürzesten Pfad

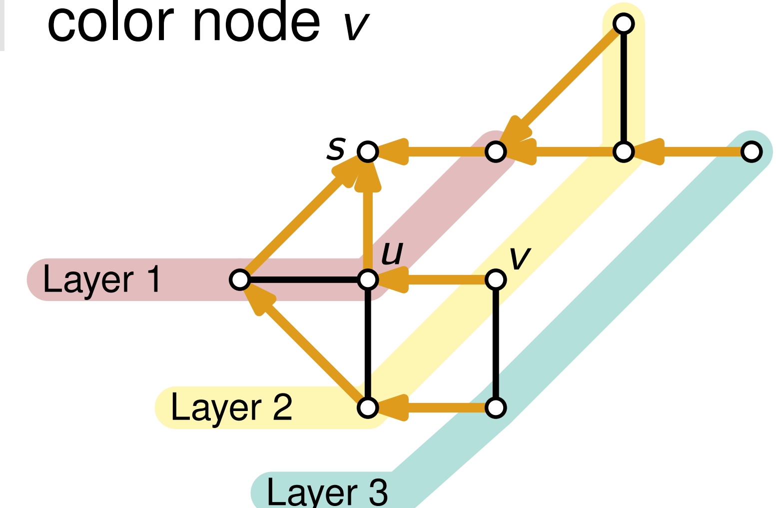
```
...
for Node v in N(u) do
  if v is uncolored then
    Q.push(v)
    color node v
```

Beobachtung

- Eltern-Beziehung liefert Baum mit Wurzel s
- diesen Baum nennt man auch **BFS-Baum**

Anmerkung

- auch hier: wie das geht ist im Prinzip klar
- für die tatsächliche Umsetzung muss man aber nochmal tätig werden



Zusammenfassung

Karlsruher Institut für Technologie

Graph Traversierung

- zwei Vorgehensweisen: BFS und DFS (DFS kommt später nochmal im Detail)
- damit kann man zum Beispiel die Zusammenhangskomponenten finden

Zusammenfassung

Karlsruher Institut für Technologie

Graph Traversierung

- zwei Vorgehensweisen: BFS und DFS (DFS kommt später nochmal im Detail)
- damit kann man zum Beispiel die Zusammenhangskomponenten finden

Algorithmenidee $\rightarrow$ Pseudocode am Beispiel BFS

- auch bei einem so einfachen Algorithmus kann man viel falsch machen

Zusammenfassung

Karlsruher Institut für Technologie

Graph Traversierung

- zwei Vorgehensweisen: BFS und DFS (DFS kommt später nochmal im Detail)
- damit kann man zum Beispiel die Zusammenhangskomponenten finden

Algorithmenidee $\rightarrow$ Pseudocode am Beispiel BFS

- auch bei einem so einfachen Algorithmus kann man viel falsch machen
- meine Hoffnung:
  - wenn du die Idee der Breitensuche kennst
  - du aber **nicht** den Pseudocode dazu auswendig kannst
  - dann kannst du eine Breitensuche im Schlaf implementieren

Zusammenfassung

Karlsruher Institut für Technologie

Graph Traversierung

- zwei Vorgehensweisen: BFS und DFS (DFS kommt später nochmal im Detail)
- damit kann man zum Beispiel die Zusammenhangskomponenten finden

Algorithmenidee $\rightarrow$ Pseudocode am Beispiel BFS

- auch bei einem so einfachen Algorithmus kann man viel falsch machen
- meine Hoffnung:
  - wenn du die Idee der Breitensuche kennst
  - du aber **nicht** den Pseudocode dazu auswendig kannst
  - dann kannst du eine Breitensuche im Schlaf implementieren

Kürzeste Wege

- BFS besucht Knoten in aufsteigender Distanz vom Start
- daher: Berechnung von Distanzen und kürzesten Wegen