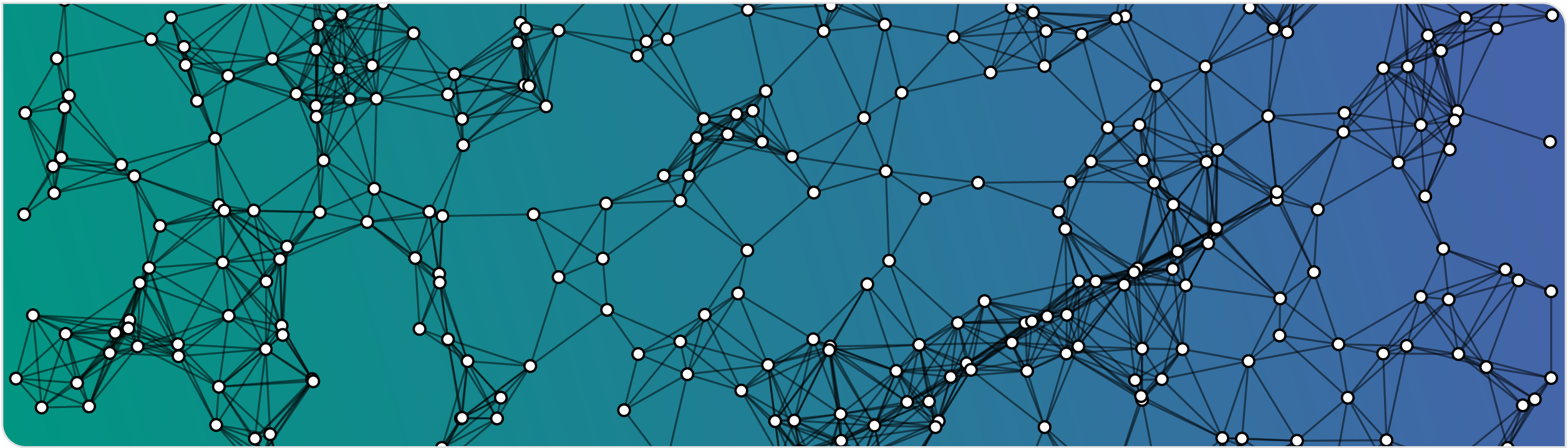
Karlsruher Institut für Technologie

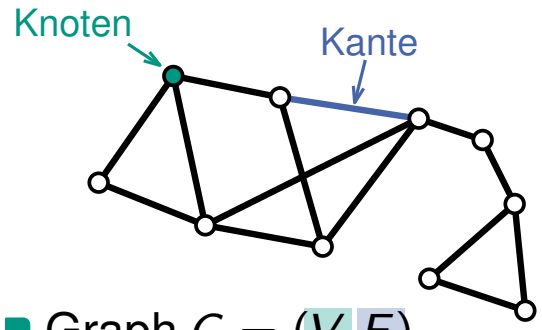
Algorithmen 1

Graphen und Breitensuche



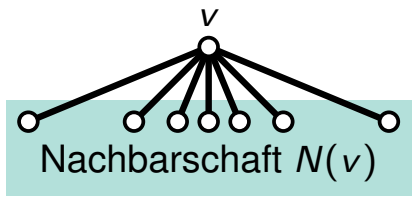
Graphen: Grundbegriffe

Knoten & Kanten

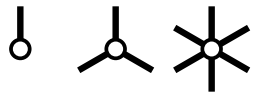


- Graph $G = (V, E)$
- $|V| = n$, $|E| = m$

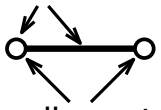
Nachbarschaft



Knotengrad

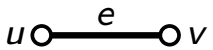


inzident



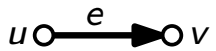
Gerichtete Graphen

ungerichtet

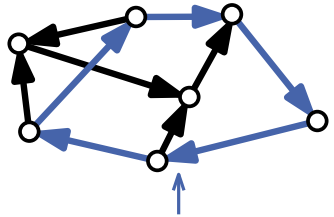


$e = \{u, v\}$

gerichtet

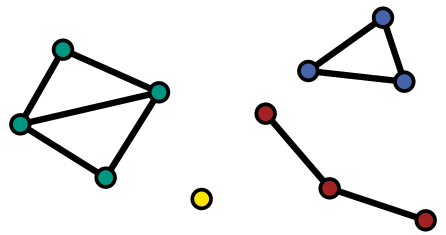


$e = (u, v)$



gerichteter Kreis (Zyklus)

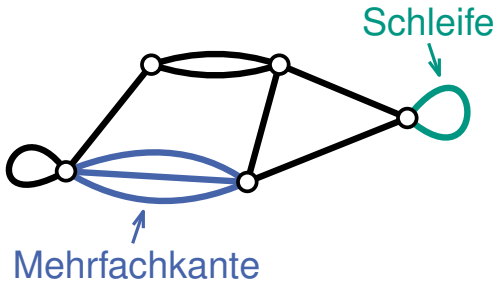
Komponenten



- unzusammenhängend
- 4 Zusammenhangskomp.

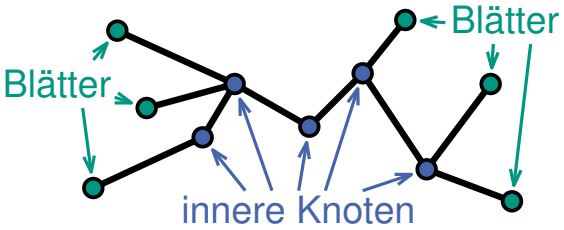
Einfache Graphen

- keine Schleifen
- keine Mehrfachkanten



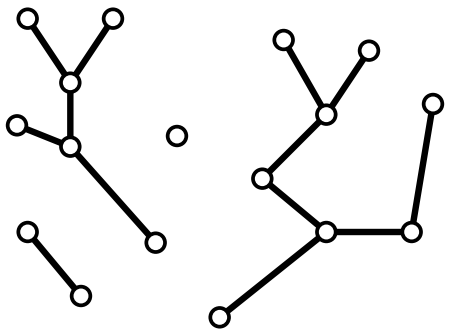
Baum

- kreisfrei
- zusammenhängend

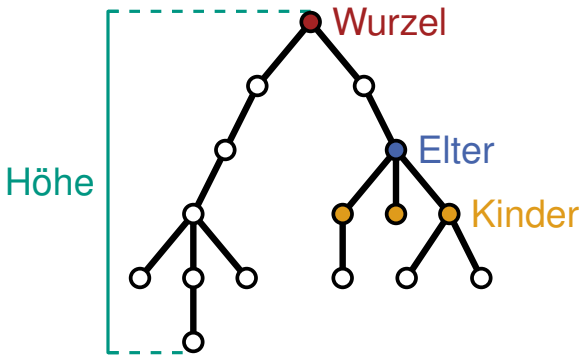


Wald

- kreisfrei



Gewurzelter Baum



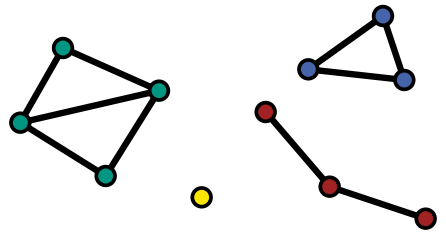
Ein erstes Graphenproblem

Graphen sind allgegenwärtig

- modelliert Beziehungen (Kanten) zwischen Paaren von Objekten (Knoten)
  - Kontakte zwischen Lebewesen
  - Interaktionen zwischen Proteinen
  - Kommunikation zwischen Sensoren
  - ...

Grundlegendes Problem: Zusammenhangskomponenten finden

- gegeben: Graph (z.B. als Liste von Kanten)
- Ziel: färbe die Knoten entsprechend der Komponenten



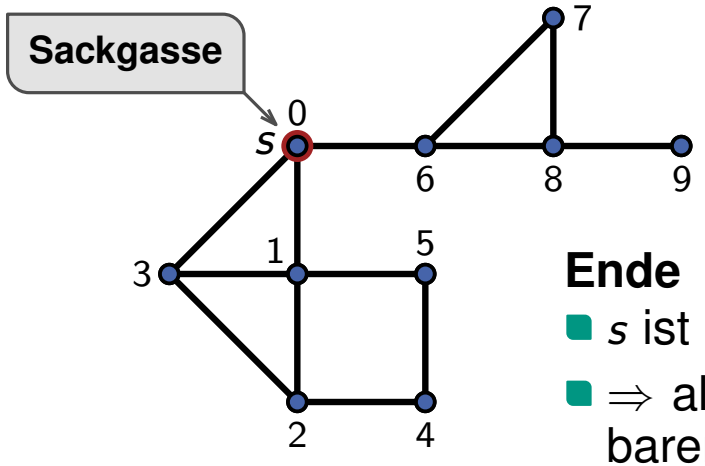
Vorgehen: Graphtraversierung

- laufe bei einem Knoten s los
- finde und färbe alle Knoten, die von s aus erreichbar sind
- wähle neue Farbe und wiederhole mit noch ungefärbtem Knoten (falls vorhanden)

Graphtraversierung

Tiefensuche (DFS)

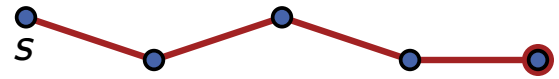
- starte bei einem Knoten s
- laufe in jedem Schritt zu neuem Nachbarn
- Sackgasse (kein neuer Nachbar)
  $\rightarrow$ Backtracking: zurück zum Vorgänger



Ende

- s ist Sackgasse
- $\Rightarrow$ alle von s erreichbaren Knoten gefärbt

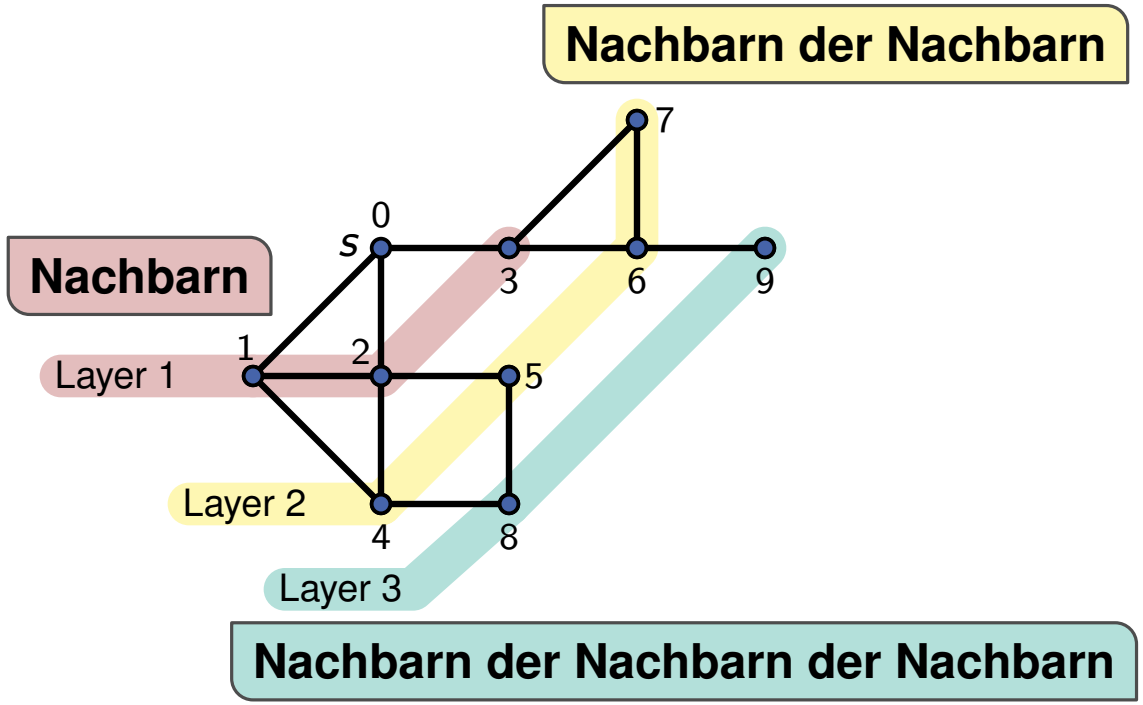
- besuchter Knoten
- unbesuchter Knoten
- aktueller Knoten



Pfad zum aktuellen Knoten

Breitensuche (BFS)

- starte bei einem Knoten s
- besuche alle Nachbarn von s
- dann alle Nachbarn der Nachbarn usw.



Breitensuche

Abstrakte Algorithmenidee

- im Prinzip wissen wir, was die BFS tut
- sind aber noch weit von einer Implementierung entfernt

Effiziente Umsetzung

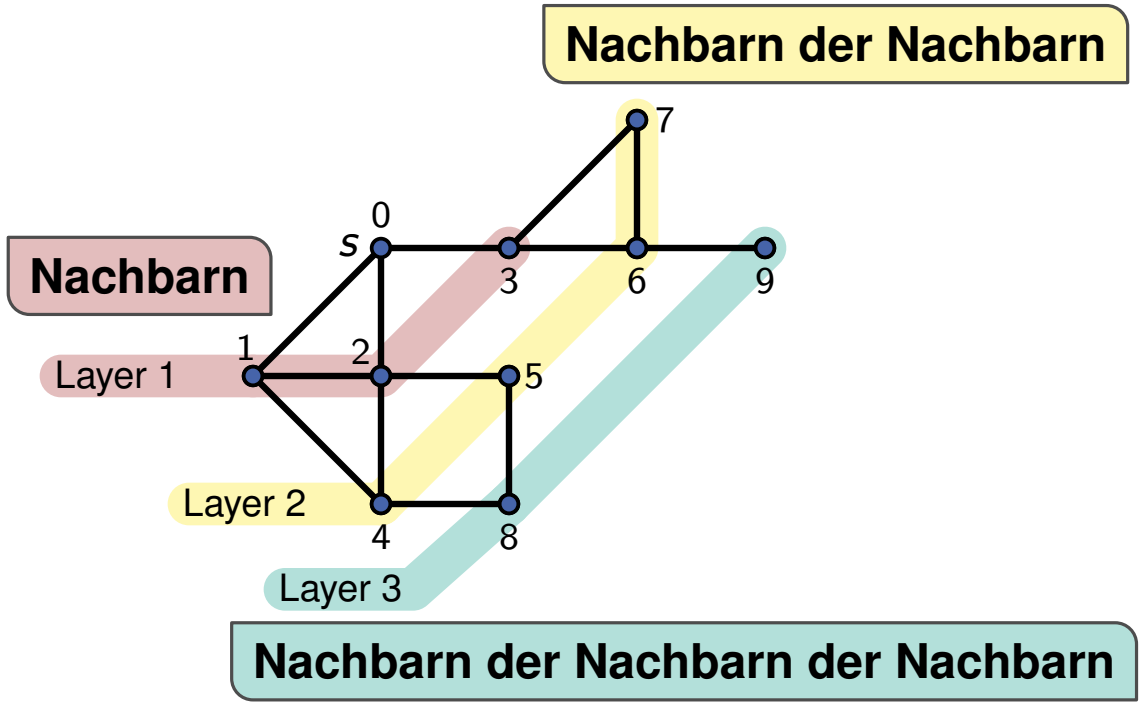
- nicht leicht
- mit etwas Übung aber auch nicht schwer
- für BFS: gleich

Wiederholung: Ziele der Vorlesung

- eigene Algorithmenideen entwickeln
- effiziente Umsetzung der Ideen
- gute Intuition, welche Ideen sich effizient umsetzen lassen

Breitensuche (BFS)

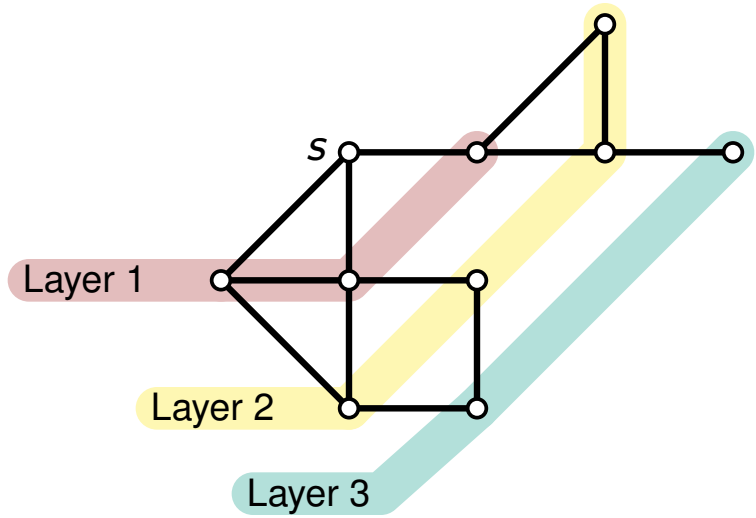
- starte bei einem Knoten s
- besuche alle Nachbarn von s
- dann alle Nachbarn der Nachbarn usw.



Algorithmus → Pseudocode (erster Versuch)

BFS(*Graph* G, *Node* s)

```
ℓ := 0                                  // current layer
color node s
while there is a node in layer ℓ + 1 do
    ℓ := ℓ + 1
    for Node v in layer ℓ do
        color node v
```



Zu hohe Abstraktion für Pseudocode

- **while** there is a node in layer $\ell + 1$ **do**
  - Woher wissen wir das?
- **for** *Node* v in layer ℓ **do**
  - Welche Knoten liegen in Layer ℓ?

Ziele für die Laufzeit

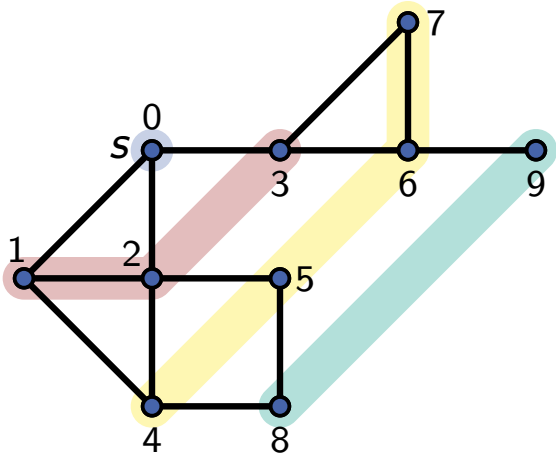
- Layer $\ell + 1$ aus Layer ℓ: betrachte nur Kanten inzident zu Knoten aus Layer ℓ $\rightarrow$ insgesamt $\Theta(m)$
- über Knoten in Layer ℓ iterieren: linear in Anzahl Knoten in Layer ℓ $\rightarrow$ insgesamt $\Theta(n)$

Algorithmus → Pseudocode (zweiter Versuch)

```
BFS(Graph G, Node s)
    currLayer := {s}
    color node s
    nextLayer := N(s)  and color N(s)
    while nextLayer ≠ ∅ do
        currLayer := nextLayer
        // determine next layer
        nextLayer := ∅
        for Node u in currLayer do
            for Node v in N(u) do
                if Node v is uncolored then
                    insert v into nextLayer
                    color node v
```

Beobachtung

- neue Knoten v werden hinten eingefügt
- Knoten u läuft von vorne nach hinten
- Verhalten einer Queue (First In, First Out)

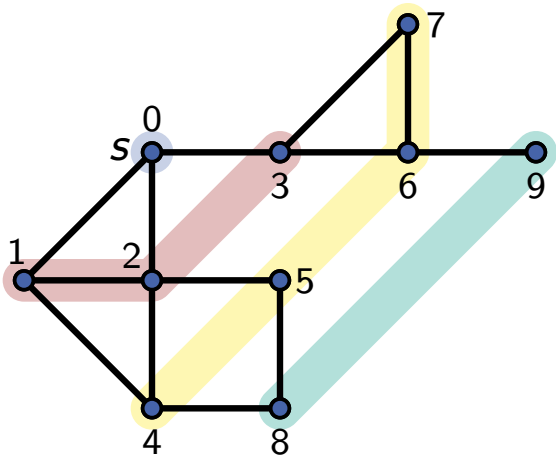


Färbung beim Einfügen in nextLayer

- stellt sicher, dass jeder Knoten v nur einmal eingefügt wird
- auch dann, wenn v mehrere Kanten vom vorherigen Layer hat

Algorithmus → Pseudocode (Endergebnis)

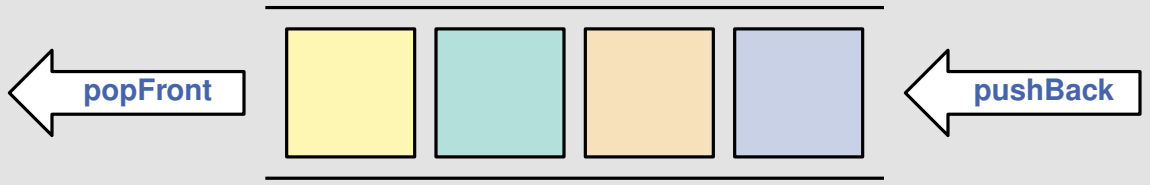
```
BFS(Graph G, Node s)
    Queue Q := empty queue
    Q.push(s)
    color node s
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.pop()
        for Node v in N(u) do
            if v is uncolored then
                Q.push(v)
                color node v
```



Q: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Erinnerung: Queue

- Operationen: **pushBack**, **popFront**
- FIFO: First In – First Out



Breitensuche: Laufzeit

```
BFS(Graph G, Node s)
    Queue Q := empty queue
    Q.push(s)
    color node s
    while Q ≠ ∅ do
        u := Q.pop()
        for Node v in N(u) do
            if v is uncolored then
                Q.push(v)
                color node v
```

Intuition von vorhin: pro Layer . . .

- betrachte Knoten in dem Layer $\rightarrow$ insgesamt $\Theta(n)$
- betrachte nur Kanten inzident zu Knoten aus dem Layer $\rightarrow$ insgesamt $\Theta(m)$

Etwas formaler für unsere finale Umsetzung

- jeder Knoten wird nur einmal in die Queue eingefügt
- **while**-Schleife: ein Durchlauf für jeden Knoten $u \in V$
- **for**-Schleife: $\deg(u) = |N(u)|$ Durchläufe
- Gesamtkosten: $\sum_{u \in V} \deg(u) = 2m$

(jede Kante $\{u, v\}$ wird doppelt gezählt:
einmal für u in $\deg(u)$ und einmal für v in $\deg(v)$)

Notation

- V: Knotenmenge
- E: Kantenmenge
- $n = |V|$, $m = |E|$
- $\deg(u)$: Grad von u

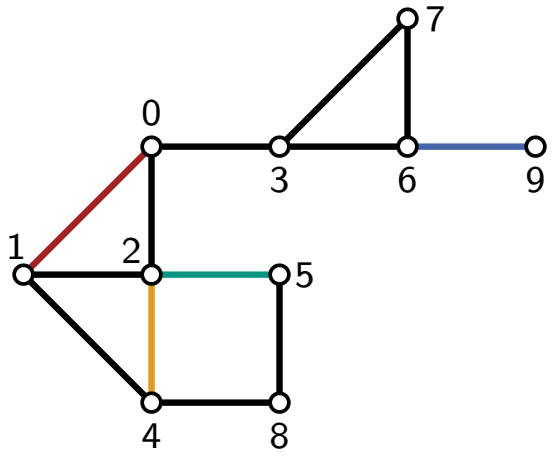
$\Rightarrow$ BFS hat lineare Laufzeit $\Theta(m)$

(vorausgesetzt, unsere Graphdatenstruktur erlaubt es uns in $O(\deg(u))$ über $N(u)$ zu iterieren)

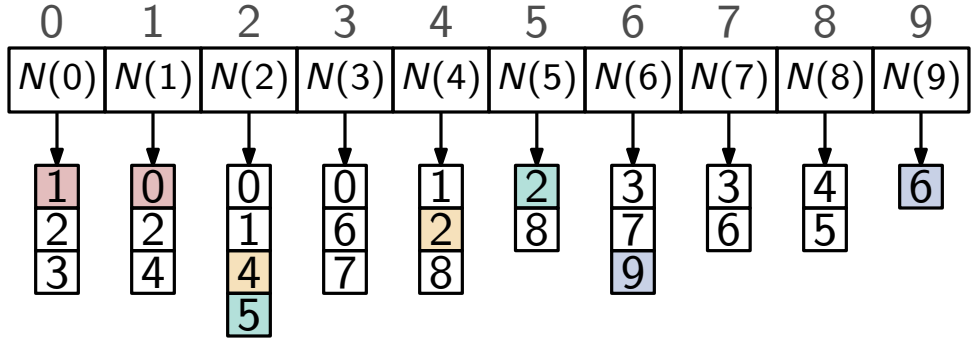
Einschub: Graphrepräsentation

Grundsätzliches

- repräsentiere jeden Knoten durch eine Zahl in $\{0, \ldots, n-1\}$
- Zusatzinfos für Knoten (z.B. Farbe): Array der Länge n
  - Array erstellen: einmalig $\Theta(n)$
  - Eigenschaft eines Knotens ändern/abfragen: $\Theta(1)$

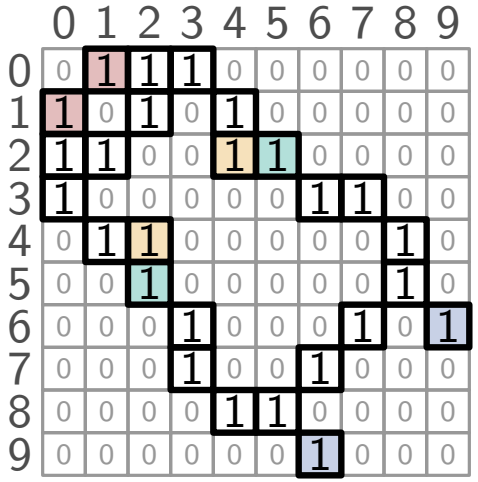


Adjazenzliste



- über $N(v)$ iterieren: $\Theta(\deg(v))$
- Detailumsetzung hängt von Anwendung ab
  (mit Engineering-Potential, z.B. für bessere Cache-Effizienz)

Adjazenzmatrix

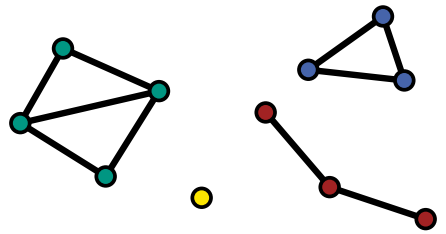


- testen ob $\{u, v\} \in E$ geht in $\Theta(1)$
- $\Theta(n^2)$ Speicher
- $N(v)$ iterieren: $\Theta(n)$

Zusammenhangskomponenten

Grundlegendes Problem: Zusammenhangskomponenten finden

- gegeben: Graph
- Ziel: färbe die Knoten entsprechend der Komponenten



Gerade gesehen

- **BFS**(G, s) färbt von s aus erreichbaren Knoten (Komponente $C(s)$)
- Laufzeit: $\Theta(m_{C(s)})$

Notation

- $G = (V, E)$: Graph
- $n = |V|$, $m = |E|$
- $C(s)$: Komponente von s
- $m_{C(s)}$: #Kanten in $C(s)$

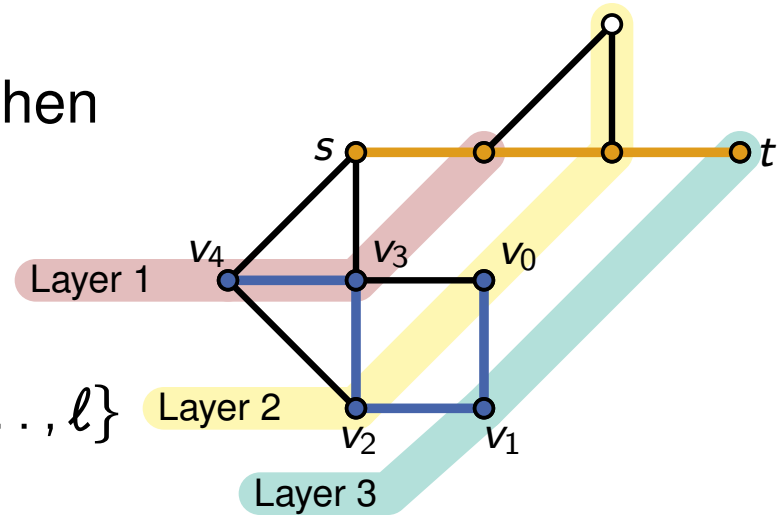
Färbung aller Komponenten

- iteriere über alle Knoten $s \in V \rightarrow$ **BFS**(G, s) wenn s noch ungefärbt
- wähle für jeden Aufruf der BFS eine neue Farbe
- für jede Komponente wird die BFS einmal ausgeführt $\rightarrow$ eine Farbe pro Komponenten
- Laufzeit: $\Theta(n + m)$
  - über alle Knoten Iterieren: $\Theta(n)$
  - BFS in Summe (jede Kante gehört zu nur einer Komponente): $\Theta(m)$

BFS: Layer, Distanzen, Kürzeste Pfade

Beobachtung

- Knoten in Layer ℓ kann man mit ℓ Schritten von s aus erreichen
- BFS berechnet also die Distanz von s zu anderen Knoten



Etwas formaler: ein paar Grundbegriffe

- **Pfad**: Knotenfolge $\langle v_0, \ldots, v_\ell \rangle$, mit $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$ für $i \in \{1, \ldots, \ell\}$
- **Länge** des Pfades $\langle v_0, \ldots, v_\ell \rangle$: ℓ
- v_0 und v_ℓ sind **Start-** bzw. **Endknoten** von $\langle v_0, \ldots, v_\ell \rangle$
- **kürzester Pfad** von $s \in V$ nach $t \in V$: Pfad minimaler Länge mit Start s und Ende t
- **Distanz** $\mathrm{dist}(s, t)$: Länge des kürzesten st-Pfades

Theorem
Liegt ein Knoten v bei der Breitensuche von s aus in Layer ℓ dann gilt $\mathrm{dist}(s, v) = \ell$.

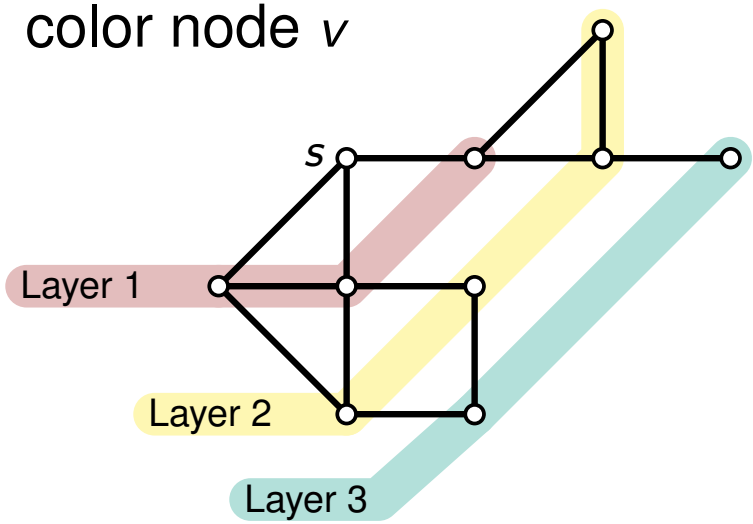
BFS kann Distanzen berechnen

Theorem
Liegt ein Knoten v bei der Breitensuche von s aus in Layer ℓ dann gilt $\text{dist}(s, v) = \ell$.

Beweis

- es gibt einen Pfad der Länge ℓ von s nach v
  - Induktion über ℓ: klar für $\ell = 0$
  - v in Layer $\ell \Rightarrow v$ hat Nachbarn u in Layer $\ell - 1$
  - I.-Voraussetzung $\Rightarrow su$-Pfad der Länge $\ell - 1$
  - daher: sv-Pfad der Länge ℓ
- es gibt keinen kürzeren Pfad von s nach v
  - Kanten überspringen keine Layer
  - jeder Pfad von v (Layer ℓ) nach s (Layer 0) hat Länge mindestens ℓ

```
...
for Node v in N(u) do
    if v is uncolored then
        Q.push(v)
        color node v
```



Distanzen und kürzeste Wege: tatsächliche Berechnung

Folgerungen aus dem Beweis

- gerade bewiesen: die Layer geben die Distanzen von s
- im Beweis sieht man, wie man den kürzesten Weg erhält:
  - Knoten v wird durch Knoten u gefunden
  - definiere u als Elternknoten von v
  - Zurückverfolgung der Eltern bis s liefert kürzesten Pfad

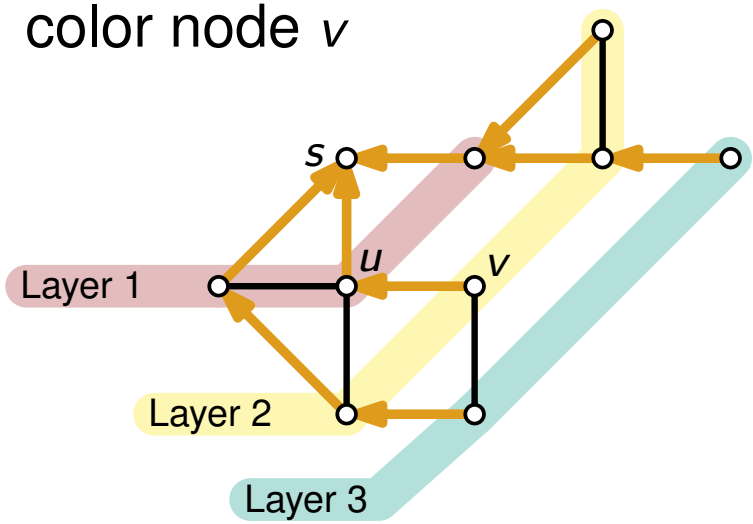
Beobachtung

- Eltern-Beziehung liefert Baum mit Wurzel s
- diesen Baum nennt man auch **BFS-Baum**

Anmerkung

- auch hier: wie das geht ist im Prinzip klar
- für die tatsächliche Umsetzung muss man aber nochmal tätig werden

```
...
for Node v in N(u) do
    if v is uncolored then
        Q.push(v)
        color node v
```



Zusammenfassung

Graph Traversierung

- zwei Vorgehensweisen: BFS und DFS (DFS kommt später nochmal im Detail)
- damit kann man zum Beispiel die Zusammenhangskomponenten finden

Algorithmenidee → Pseudocode am Beispiel BFS

- auch bei einem so einfachen Algorithmus kann man viel falsch machen
- meine Hoffnung:
  - wenn du die Idee der Breitensuche kennst
  - du aber **nicht** den Pseudocode dazu auswendig kannst
  - dann kannst du eine Breitensuche im Schlaf implementieren

Kürzeste Wege

- BFS besucht Knoten in aufsteigender Distanz vom Start
- daher: Berechnung von Distanzen und kürzesten Wegen