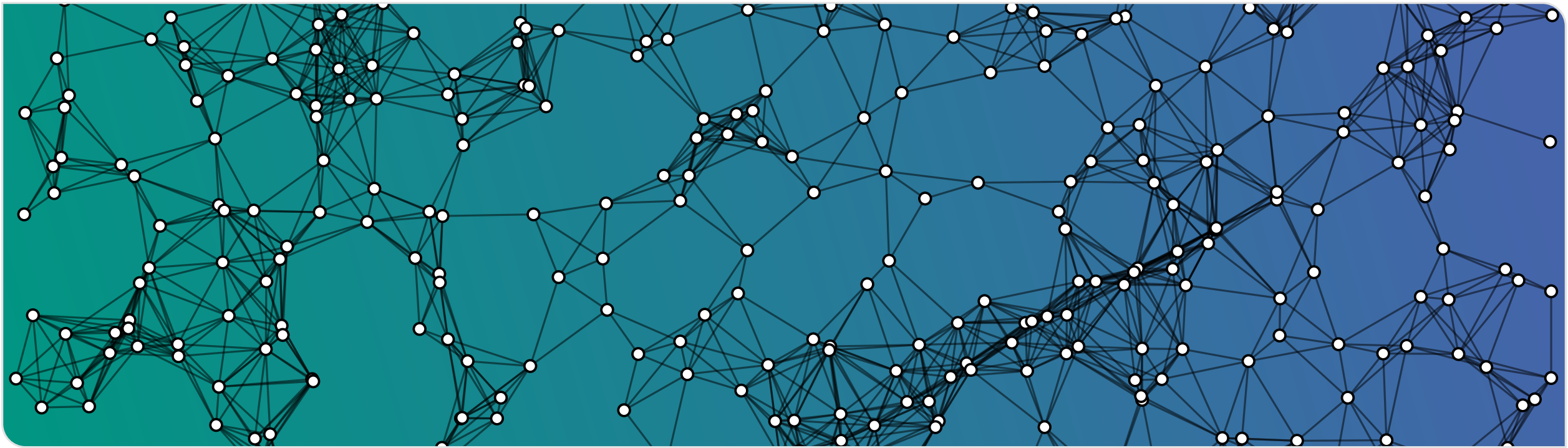
Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen 1

Sortieren: Mergesort, Quicksort, untere Schranke



Anmerkung: untere Laufzeitschranken

Der Algorithmus benötigt $\Omega(n^2)$ Schritte – Was bedeutet das?

- Interpretation 1: auf allen Eingaben ist die Laufzeit mindestens quadratisch
- Interpretation 2: es gibt Eingaben, sodass die Laufzeit mindestens quadratisch ist

Anmerkung: untere Laufzeitschranken

Der Algorithmus benötigt $\Omega(n^2)$ Schritte – Was bedeutet das?

- Interpretation 1: auf allen Eingaben ist die Laufzeit mindestens quadratisch
- Interpretation 2: es gibt Eingaben, sodass die Laufzeit mindestens quadratisch ist

Was gilt für die Vorlesung?

- außer explizit angegeben sprechen wir immer über den Worst Case
- also: Interpretation 2

Anmerkung: untere Laufzeitschranken

Der Algorithmus benötigt $\Omega(n^2)$ Schritte – Was bedeutet das?

- Interpretation 1: auf allen Eingaben ist die Laufzeit mindestens quadratisch
- Interpretation 2: es gibt Eingaben, sodass die Laufzeit mindestens quadratisch ist

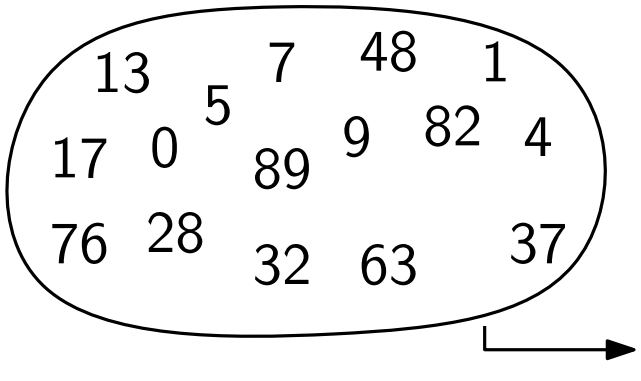
Was gilt für die Vorlesung?

- außer explizit angegeben sprechen wir immer über den Worst Case
- also: Interpretation 2

Warum machen wir das so?

- Interpretation 1 betrachtet den Best Case $\rightarrow$ der ist selten relevant
- Interpretation 2 nützlich in verschiedenen Situationen:
  - „jeder Algo hat Laufzeit $\Omega(n^2)$“ $\rightarrow$ es gibt keinen sub-quadratischen Algo
  - „ein konkreter Algo hat Laufzeit $\Omega(n^2)$ und $O(n^3)$“ $\rightarrow$ die Laufzeit ist im Worst Case zwischen quadratisch und kubisch

Sortieren



Gegeben

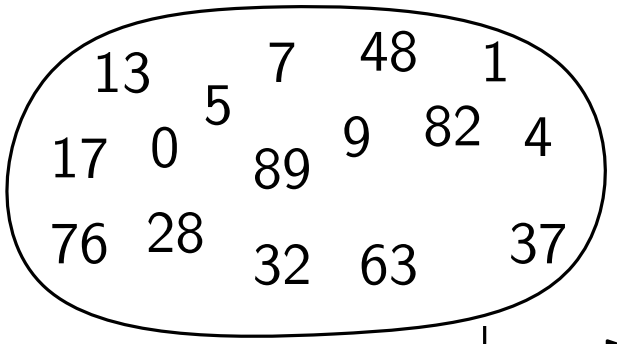
- n Elemente aus einer geordneten Menge (z.B. Zahlen)

Gesucht

- sortierte Folge dieser Elemente (z.B. als Array oder Liste)

$\langle 0, 1, 4, 5, 7, 9, 13, 17, 28, 32, 37, 48, 63, 76, 82, 89 \rangle$

Sortieren



Gegeben

- n Elemente aus einer geordneten Menge (z.B. Zahlen)

Gesucht

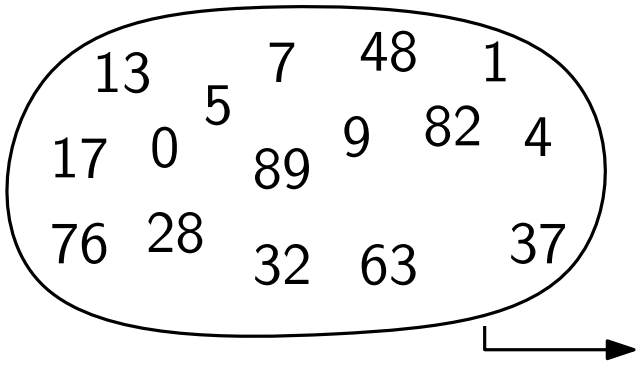
- sortierte Folge dieser Elemente (z.B. als Array oder Liste)

$\langle 0, 1, 4, 5, 7, 9, 13, 17, 28, 32, 37, 48, 63, 76, 82, 89 \rangle$

Insertion Sort

- füge Elemente nach und nach ein
- halte Folge dabei sortiert

Sortieren



Gegeben

- n Elemente aus einer geordneten Menge (z.B. Zahlen)

Gesucht

- sortierte Folge dieser Elemente (z.B. als Array oder Liste)

$\langle 0, 1, 4, 5, 7, 9, 13, 17, 28, 32, 37, 48, 63, 76, 82, 89 \rangle$

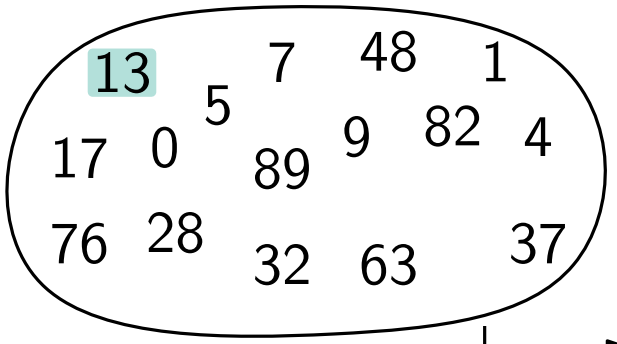
Insertion Sort

- füge Elemente nach und nach ein
- halte Folge dabei sortiert

bisher sortierte Teilfolge:

$\langle\rangle$

Sortieren



Gegeben

- n Elemente aus einer geordneten Menge (z.B. Zahlen)

Gesucht

- sortierte Folge dieser Elemente (z.B. als Array oder Liste)

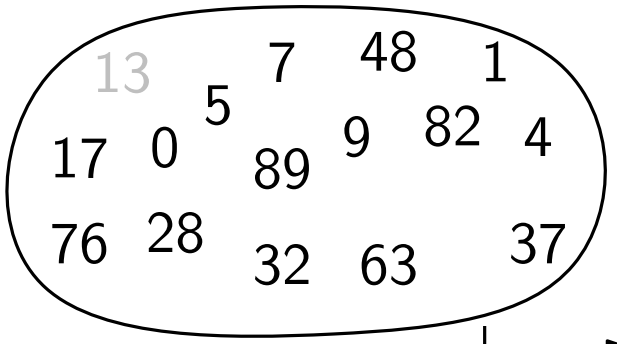
$\langle 0, 1, 4, 5, 7, 9, 13, 17, 28, 32, 37, 48, 63, 76, 82, 89 \rangle$

Insertion Sort

- füge Elemente nach und nach ein
- halte Folge dabei sortiert

bisher sortierte Teilfolge:

Sortieren



Gegeben

- n Elemente aus einer geordneten Menge (z.B. Zahlen)

Gesucht

- sortierte Folge dieser Elemente (z.B. als Array oder Liste)

$\langle 0, 1, 4, 5, 7, 9, 13, 17, 28, 32, 37, 48, 63, 76, 82, 89 \rangle$

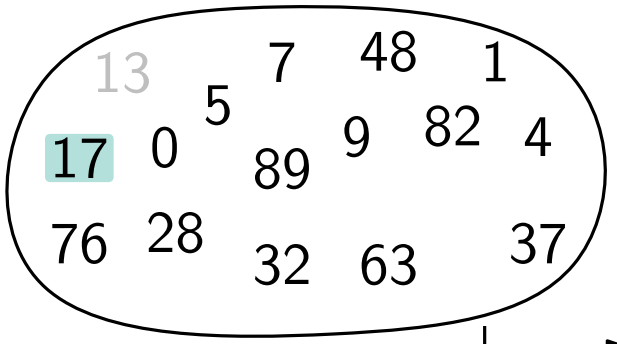
Insertion Sort

- füge Elemente nach und nach ein
- halte Folge dabei sortiert

bisher sortierte Teilfolge:

$\langle 13 \rangle$

Sortieren



Gegeben

- n Elemente aus einer geordneten Menge (z.B. Zahlen)

Gesucht

- sortierte Folge dieser Elemente (z.B. als Array oder Liste)

$\langle 0, 1, 4, 5, 7, 9, 13, 17, 28, 32, 37, 48, 63, 76, 82, 89 \rangle$

Insertion Sort

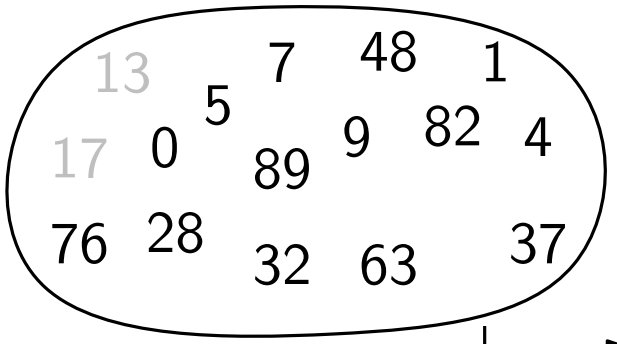
- füge Elemente nach und nach ein
- halte Folge dabei sortiert

bisher sortierte Teilfolge:

$\langle 13 \rangle$

17

Sortieren



Gegeben

- n Elemente aus einer geordneten Menge (z.B. Zahlen)

Gesucht

- sortierte Folge dieser Elemente (z.B. als Array oder Liste)

$\langle 0, 1, 4, 5, 7, 9, 13, 17, 28, 32, 37, 48, 63, 76, 82, 89 \rangle$

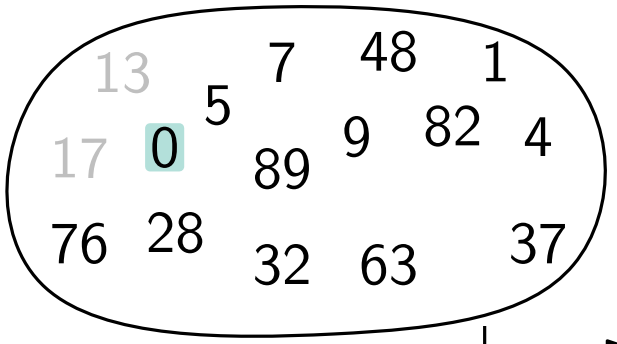
Insertion Sort

- füge Elemente nach und nach ein
- halte Folge dabei sortiert

bisher sortierte Teilfolge:

$\langle 13, 17 \rangle$

Sortieren



Gegeben

- n Elemente aus einer geordneten Menge (z.B. Zahlen)

Gesucht

- sortierte Folge dieser Elemente (z.B. als Array oder Liste)

$\langle 0, 1, 4, 5, 7, 9, 13, 17, 28, 32, 37, 48, 63, 76, 82, 89 \rangle$

Insertion Sort

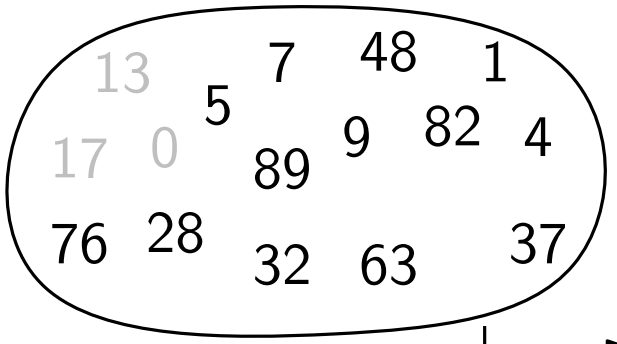
- füge Elemente nach und nach ein
- halte Folge dabei sortiert

bisher sortierte Teilfolge:

$\langle 13, 17 \rangle$

0

Sortieren



Gegeben

- n Elemente aus einer geordneten Menge (z.B. Zahlen)

Gesucht

- sortierte Folge dieser Elemente (z.B. als Array oder Liste)

$\langle 0, 1, 4, 5, 7, 9, 13, 17, 28, 32, 37, 48, 63, 76, 82, 89 \rangle$

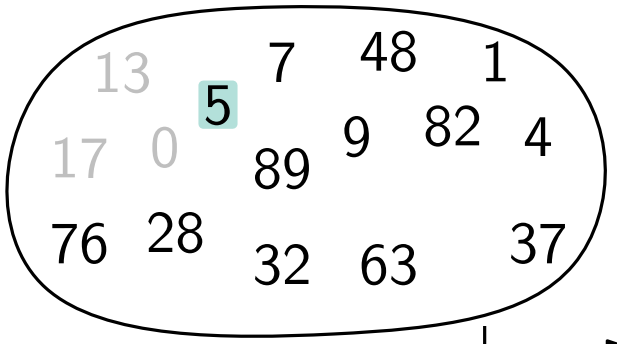
Insertion Sort

- füge Elemente nach und nach ein
- halte Folge dabei sortiert

bisher sortierte Teilfolge:

$\langle 0, 13, 17 \rangle$

Sortieren



Gegeben

- n Elemente aus einer geordneten Menge (z.B. Zahlen)

Gesucht

- sortierte Folge dieser Elemente (z.B. als Array oder Liste)

$\langle 0, 1, 4, 5, 7, 9, 13, 17, 28, 32, 37, 48, 63, 76, 82, 89 \rangle$

Insertion Sort

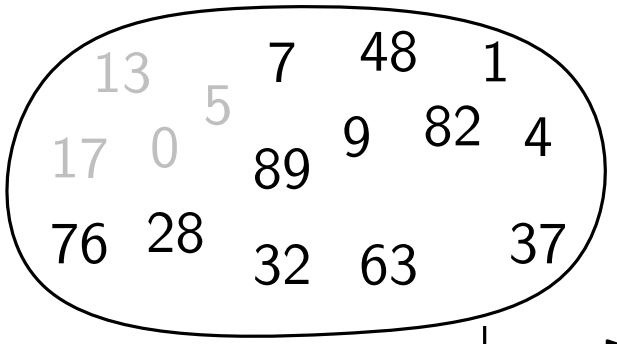
- füge Elemente nach und nach ein
- halte Folge dabei sortiert

bisher sortierte Teilfolge:

$\langle 0, 13, 17 \rangle$

5

Sortieren



Gegeben

- n Elemente aus einer geordneten Menge (z.B. Zahlen)

Gesucht

- sortierte Folge dieser Elemente (z.B. als Array oder Liste)

$\langle 0, 1, 4, 5, 7, 9, 13, 17, 28, 32, 37, 48, 63, 76, 82, 89 \rangle$

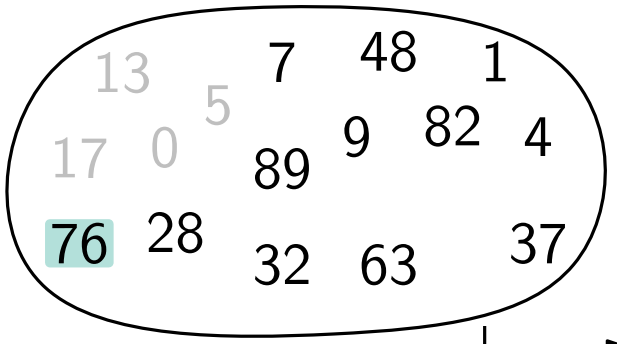
Insertion Sort

- füge Elemente nach und nach ein
- halte Folge dabei sortiert

bisher sortierte Teilfolge:

$\langle 0, 5, 13, 17 \rangle$

Sortieren



Gegeben

- n Elemente aus einer geordneten Menge (z.B. Zahlen)

Gesucht

- sortierte Folge dieser Elemente (z.B. als Array oder Liste)

$\langle 0, 1, 4, 5, 7, 9, 13, 17, 28, 32, 37, 48, 63, 76, 82, 89 \rangle$

Insertion Sort

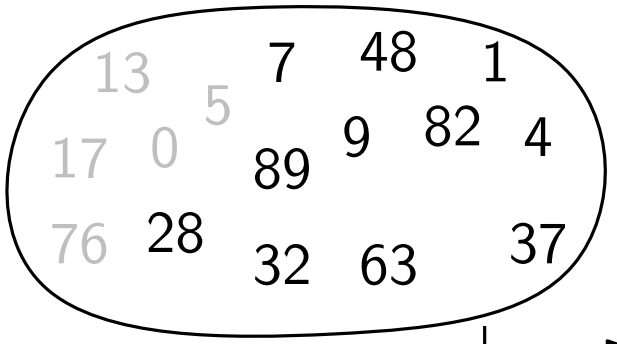
- füge Elemente nach und nach ein
- halte Folge dabei sortiert

bisher sortierte Teilfolge:

$\langle 0, 5, 13, 17 \rangle$

76

Sortieren



Gegeben

- n Elemente aus einer geordneten Menge (z.B. Zahlen)

Gesucht

- sortierte Folge dieser Elemente (z.B. als Array oder Liste)

$\langle 0, 1, 4, 5, 7, 9, 13, 17, 28, 32, 37, 48, 63, 76, 82, 89 \rangle$

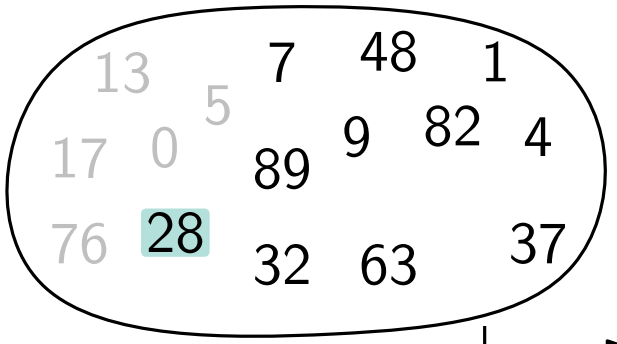
Insertion Sort

- füge Elemente nach und nach ein
- halte Folge dabei sortiert

bisher sortierte Teilfolge:

$\langle 0, 5, 13, 17, 76 \rangle$

Sortieren



Gegeben

- n Elemente aus einer geordneten Menge (z.B. Zahlen)

Gesucht

- sortierte Folge dieser Elemente (z.B. als Array oder Liste)

$\langle 0, 1, 4, 5, 7, 9, 13, 17, 28, 32, 37, 48, 63, 76, 82, 89 \rangle$

Insertion Sort

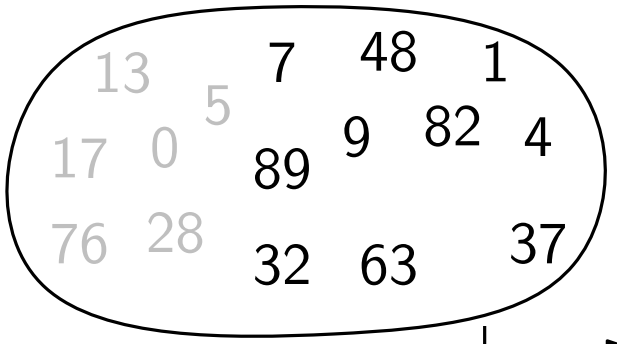
- füge Elemente nach und nach ein
- halte Folge dabei sortiert

bisher sortierte Teilfolge:

$\langle 0, 5, 13, 17, 76 \rangle$

28

Sortieren



Gegeben

- n Elemente aus einer geordneten Menge (z.B. Zahlen)

Gesucht

- sortierte Folge dieser Elemente (z.B. als Array oder Liste)

$\langle 0, 1, 4, 5, 7, 9, 13, 17, 28, 32, 37, 48, 63, 76, 82, 89 \rangle$

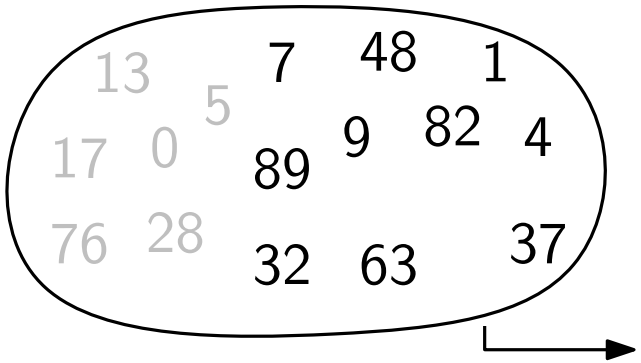
Insertion Sort

- füge Elemente nach und nach ein
- halte Folge dabei sortiert

bisher sortierte Teilfolge:

$\langle 0, 5, 13, 17, 28, 76 \rangle$

Sortieren



Gegeben

- n Elemente aus einer geordneten Menge (z.B. Zahlen)

Gesucht

- sortierte Folge dieser Elemente (z.B. als Array oder Liste)

$\langle 0, 1, 4, 5, 7, 9, 13, 17, 28, 32, 37, 48, 63, 76, 82, 89 \rangle$

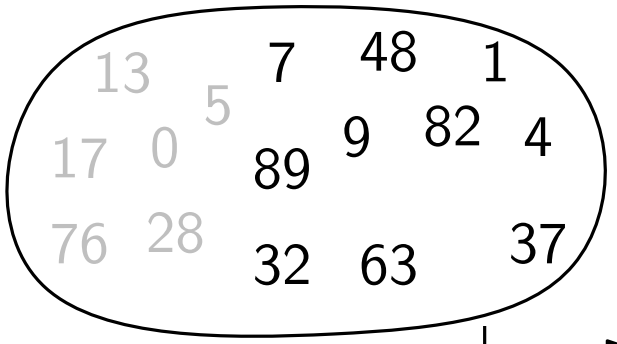
Insertion Sort

- füge Elemente nach und nach ein
- halte Folge dabei sortiert
- Bearbeitung des $i$ten Elements:
  - suchen in Folge der Länge $i - 1$
  - einfügen in Folge der Länge $i - 1$

bisher sortierte Teilfolge:

$\langle 0, 5, 13, 17, 28, 76 \rangle$

Sortieren



Gegeben

- n Elemente aus einer geordneten Menge (z.B. Zahlen)

Gesucht

- sortierte Folge dieser Elemente (z.B. als Array oder Liste)

$\langle 0, 1, 4, 5, 7, 9, 13, 17, 28, 32, 37, 48, 63, 76, 82, 89 \rangle$

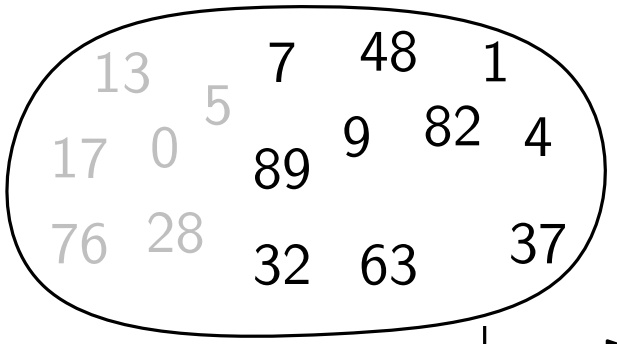
Insertion Sort

- füge Elemente nach und nach ein
- halte Folge dabei sortiert
- Bearbeitung des $i$ten Elements:
  - suchen in Folge der Länge $i-1$ — binäre Suche: $O(\log n)$
  - einfügen in Folge der Länge $i-1$ — einfügen: $O(1)$

bisher sortierte Teilfolge:

$\langle 0, 5, 13, 17, 28, 76 \rangle$

Sortieren



Gegeben

- n Elemente aus einer geordneten Menge (z.B. Zahlen)

Gesucht

- sortierte Folge dieser Elemente (z.B. als Array oder Liste)

$\langle 0, 1, 4, 5, 7, 9, 13, 17, 28, 32, 37, 48, 63, 76, 82, 89 \rangle$

Insertion Sort

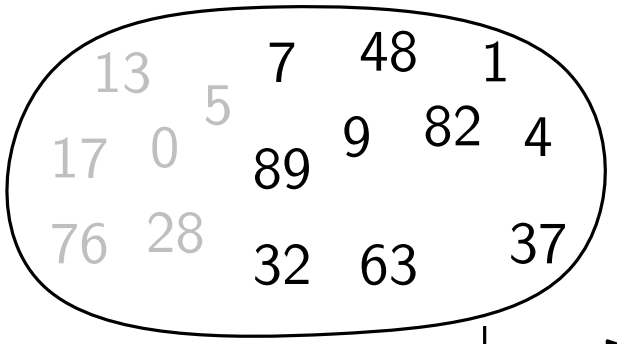
- füge Elemente nach und nach ein
- halte Folge dabei sortiert
- Bearbeitung des $i$ten Elements:
  - suchen in Folge der Länge $i-1$ — binäre Suche: $O(\log n)$
  - einfügen in Folge der Länge $i-1$ — einfügen: $O(1)$

} $O(\log n)$ pro Element
$\Rightarrow O(n \log n)$ gesamt

bisher sortierte Teilfolge:

$\langle 0, 5, 13, 17, 28, 76 \rangle$

Sortieren



Gegeben

- n Elemente aus einer geordneten Menge (z.B. Zahlen)

Gesucht

- sortierte Folge dieser Elemente (z.B. als Array oder Liste)

$\langle 0, 1, 4, 5, 7, 9, 13, 17, 28, 32, 37, 48, 63, 76, 82, 89 \rangle$

Insertion Sort

- füge Elemente nach und nach ein
- halte Folge dabei sortiert
- Bearbeitung des $i$ten Elements:
  - suchen in Folge der Länge $i-1$
  - einfügen in Folge der Länge $i-1$

bisher sortierte Teilfolge:

$\langle 0, 5, 13, 17, 28, 76 \rangle$

für Arrays (random access)

binäre Suche: $O(\log n)$

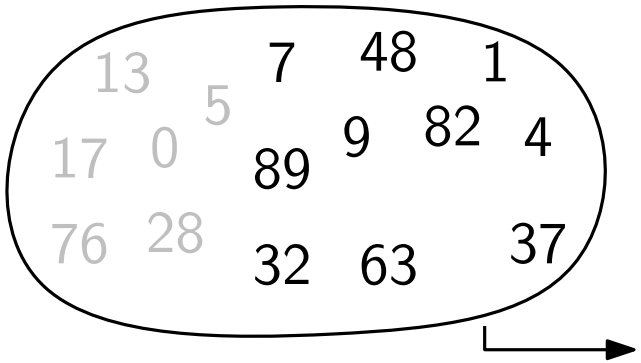
einfügen: $O(1)$

$O(\log n)$ pro Element

$\Rightarrow O(n \log n)$ gesamt

für Listen

Sortieren



Gegeben

- n Elemente aus einer geordneten Menge (z.B. Zahlen)

Gesucht

- sortierte Folge dieser Elemente (z.B. als Array oder Liste)

$\langle 0, 1, 4, 5, 7, 9, 13, 17, 28, 32, 37, 48, 63, 76, 82, 89 \rangle$

Insertion Sort

- füge Elemente nach und nach ein
- halte Folge dabei sortiert
- Bearbeitung des $i$ten Elements:
  - suchen in Folge der Länge $i-1$
  - einfügen in Folge der Länge $i-1$

bisher sortierte Teilfolge:

$\langle 0, 5, 13, 17, 28, 76 \rangle$

für Arrays (random access)

binäre Suche: $O(\log n)$

einfügen: $O(1)$

$O(\log n)$ pro Element

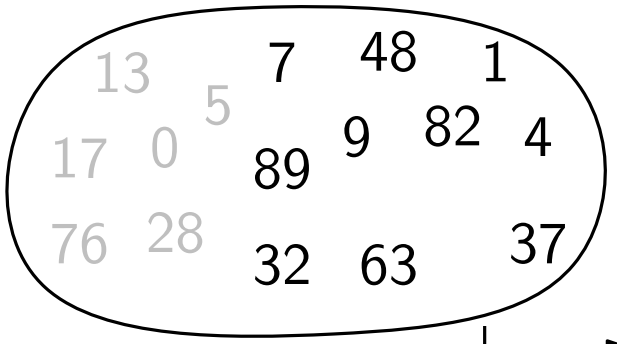
$\Rightarrow O(n \log n)$ gesamt

für Listen

Problem

- wir kennen noch keine Datenstruktur, mit der wir schnell suchen **und** einfügen können

Sortieren



Gegeben

- n Elemente aus einer geordneten Menge (z.B. Zahlen)

Gesucht

- sortierte Folge dieser Elemente (z.B. als Array oder Liste)

$\langle 0, 1, 4, 5, 7, 9, 13, 17, 28, 32, 37, 48, 63, 76, 82, 89 \rangle$

Insertion Sort

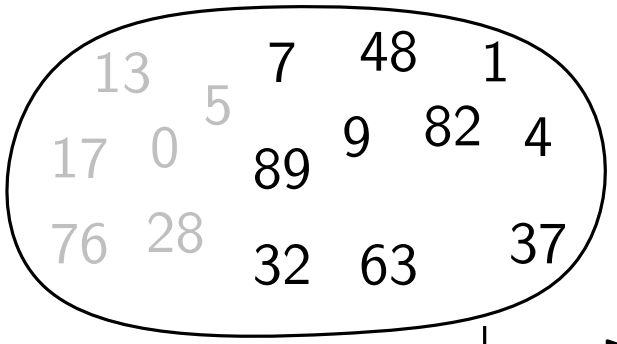
- füge Elemente nach und nach ein
- halte Folge dabei sortiert
- Bearbeitung des $i$ten Elements:

bisher sortierte Teilfolge:

$\langle 0, 5, 13, 17, 28, 76 \rangle$

	Liste	**Array**
suchen in Folge der Länge $i-1$	$\Theta(i)$	$\Theta(\log i)$
einfügen in Folge der Länge $i-1$	$\Theta(1)$	$\Theta(i)$

Sortieren



Gegeben

- n Elemente aus einer geordneten Menge (z.B. Zahlen)

Gesucht

- sortierte Folge dieser Elemente (z.B. als Array oder Liste)

$\langle 0, 1, 4, 5, 7, 9, 13, 17, 28, 32, 37, 48, 63, 76, 82, 89 \rangle$

Insertion Sort

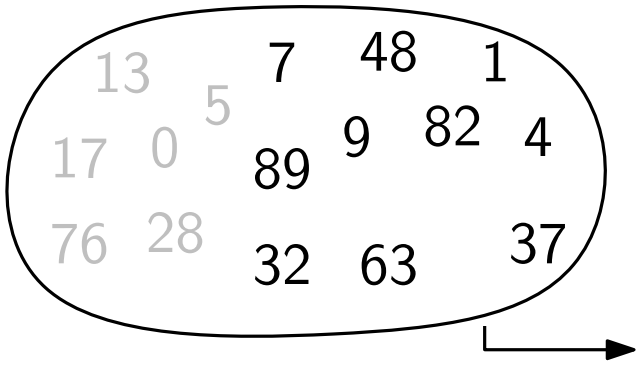
- füge Elemente nach und nach ein
- halte Folge dabei sortiert
- Bearbeitung des $i$ten Elements:
  - suchen in Folge der Länge $i-1$
  - einfügen in Folge der Länge $i-1$

bisher sortierte Teilfolge:

$\langle 0, 5, 13, 17, 28, 76 \rangle$

	Liste	**Array**
suchen in Folge der Länge $i-1$	$\Theta(i)$	$\Theta(\log i)$
einfügen in Folge der Länge $i-1$	$\Theta(1)$	$\Theta(i)$
Kosten in Schritt i:	$\Theta(i)$	$\Theta(i)$

Sortieren



Gegeben

- n Elemente aus einer geordneten Menge (z.B. Zahlen)

Gesucht

- sortierte Folge dieser Elemente (z.B. als Array oder Liste)

$\langle 0, 1, 4, 5, 7, 9, 13, 17, 28, 32, 37, 48, 63, 76, 82, 89 \rangle$

Insertion Sort

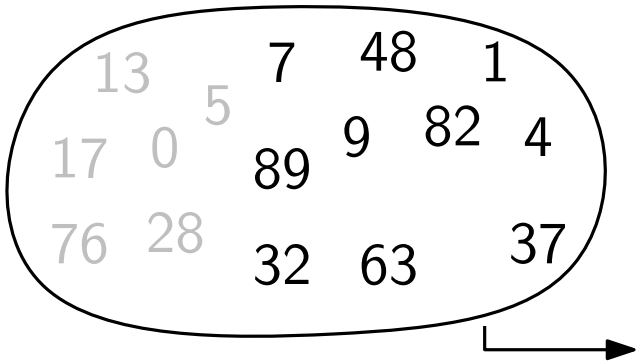
- füge Elemente nach und nach ein
- halte Folge dabei sortiert
- Bearbeitung des $i$ten Elements:
  - suchen in Folge der Länge $i-1$
  - einfügen in Folge der Länge $i-1$
- Laufzeit: $\sum_{i=1}^{n} \Theta(i) = \Theta(n^2)$

bisher sortierte Teilfolge:

$\langle 0, 5, 13, 17, 28, 76 \rangle$

	Liste	**Array**
suchen in Folge der Länge $i-1$	$\Theta(i)$	$\Theta(\log i)$
einfügen in Folge der Länge $i-1$	$\Theta(1)$	$\Theta(i)$
Kosten in Schritt i:	$\Theta(i)$	$\Theta(i)$

Sortieren



Gegeben

- n Elemente aus einer geordneten Menge (z.B. Zahlen)

Gesucht

- sortierte Folge dieser Elemente (z.B. als Array oder Liste)

$\langle 0, 1, 4, 5, 7, 9, 13, 17, 28, 32, 37, 48, 63, 76, 82, 89 \rangle$

Insertion Sort

- füge Elemente nach und nach ein
- halte Folge dabei sortiert
- Bearbeitung des $i$ten Elements:
  - suchen in Folge der Länge $i-1$
  - einfügen in Folge der Länge $i-1$
- Laufzeit: $\sum_{i=1}^{n} \Theta(i) = \Theta(n^2)$

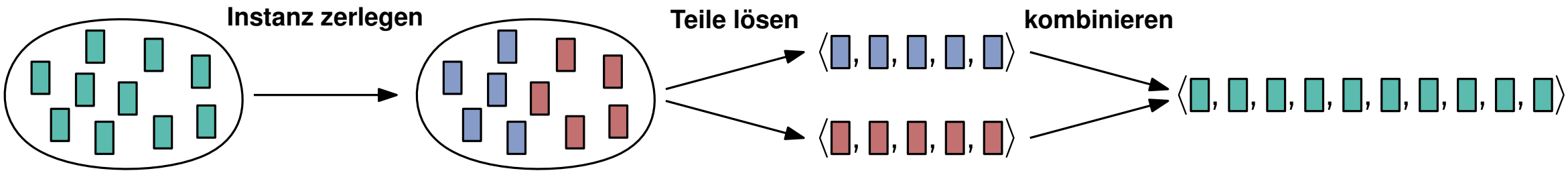
bisher sortierte Teilfolge:

$\langle 0, 5, 13, 17, 28, 76 \rangle$

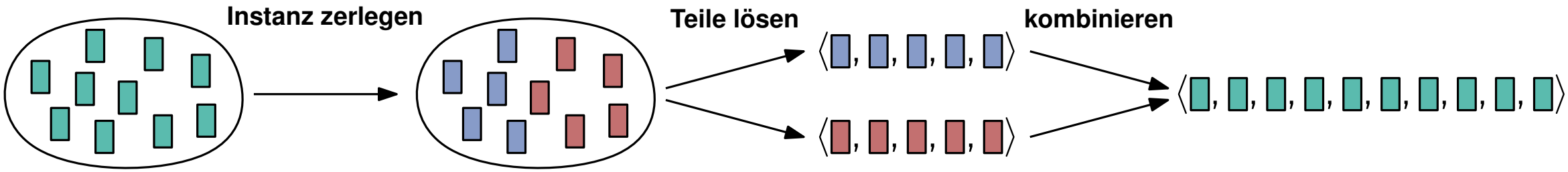
	Liste	**Array**
suchen in Folge der Länge $i-1$	$\Theta(i)$	$\Theta(\log i)$
einfügen in Folge der Länge $i-1$	$\Theta(1)$	$\Theta(i)$
Kosten in Schritt i:	$\Theta(i)$	$\Theta(i)$

heute: zwei andere Algorithmen mit $\Theta(n \log n)$ Laufzeit

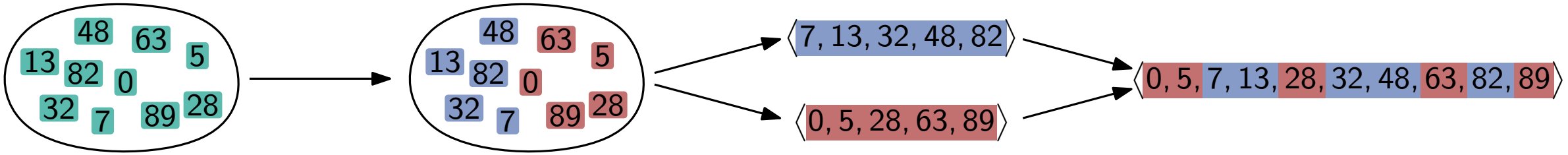
Sortieren mittels Teile und Herrsche



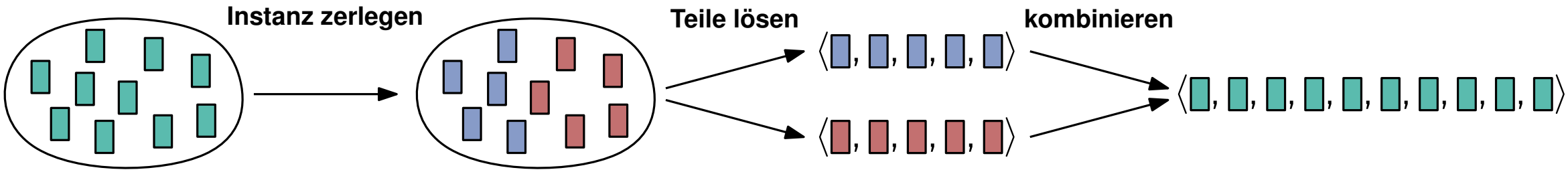
Sortieren mittels Teile und Herrsche



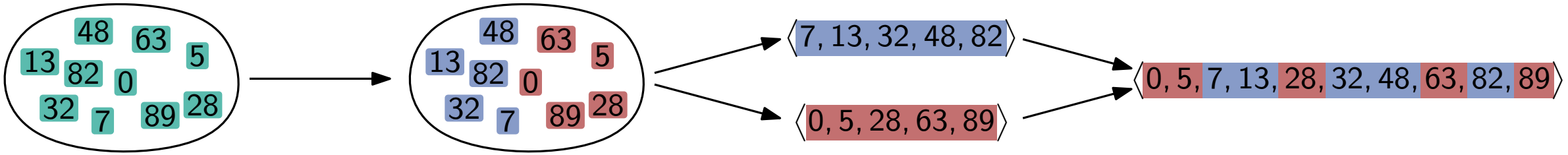
Mergesort: arbeite beim Zusammenfügen



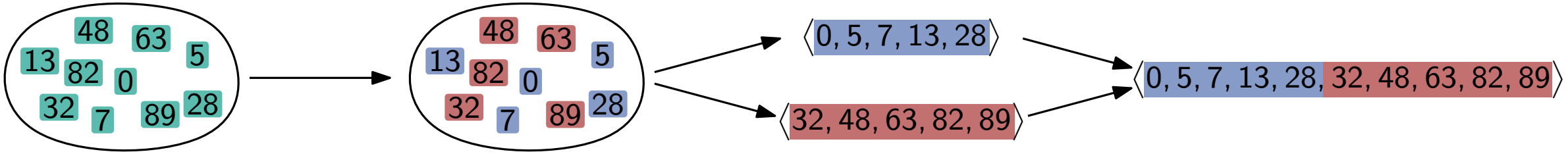
Sortieren mittels Teile und Herrsche



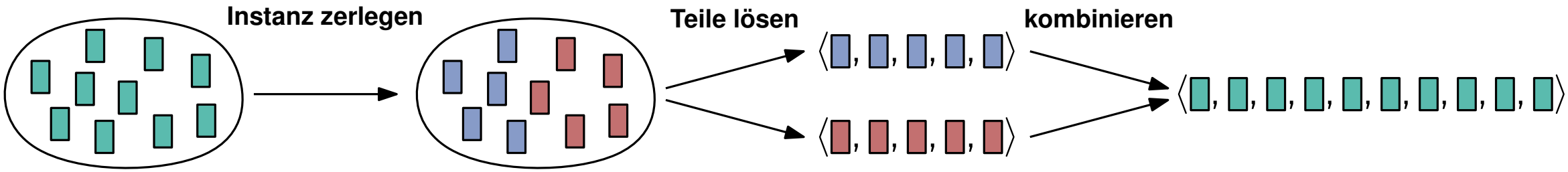
Mergesort: arbeite beim Zusammenfügen



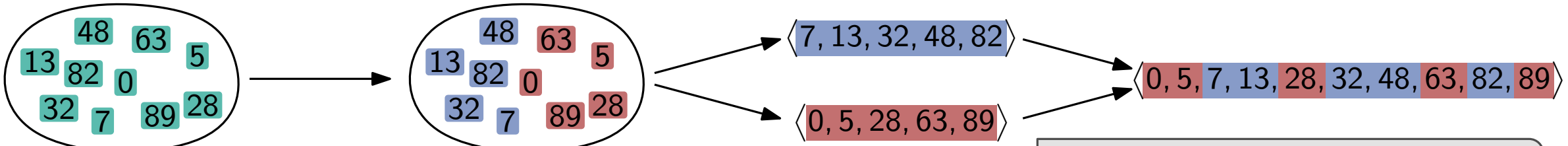
Quicksort: arbeite beim Zerlegen



Sortieren mittels Teile und Herrsche



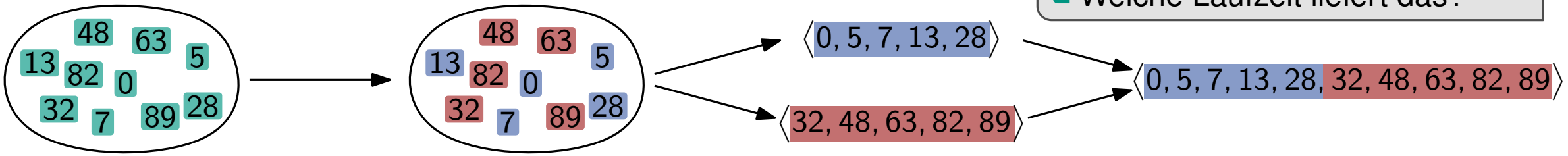
Mergesort: arbeite beim Zusammenfügen



Zwei offene Fragen

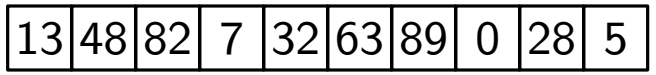
- Wie setzt man das im Detail um?
- Welche Laufzeit liefert das?

Quicksort: arbeite beim Zerlegen



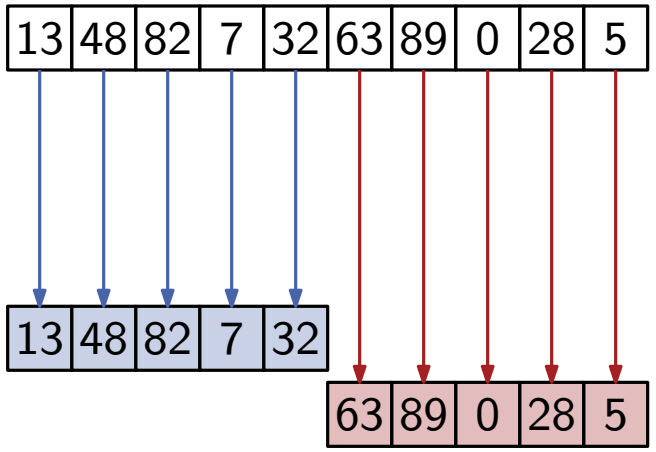
Mergesort im Detail

```
mergesort(Array A)
    // base case: small array
    if A.size() ≤ 1 then return A
```



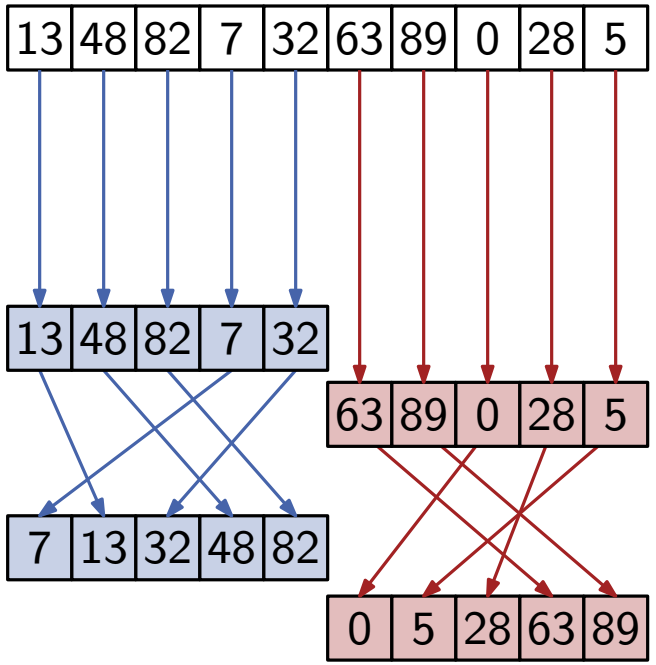
Mergesort im Detail

```
mergesort(Array A)
    // base case: small array
    if A.size() ≤ 1 then return A
    // partition instance
    B := first half of A
    C := second half of A
```



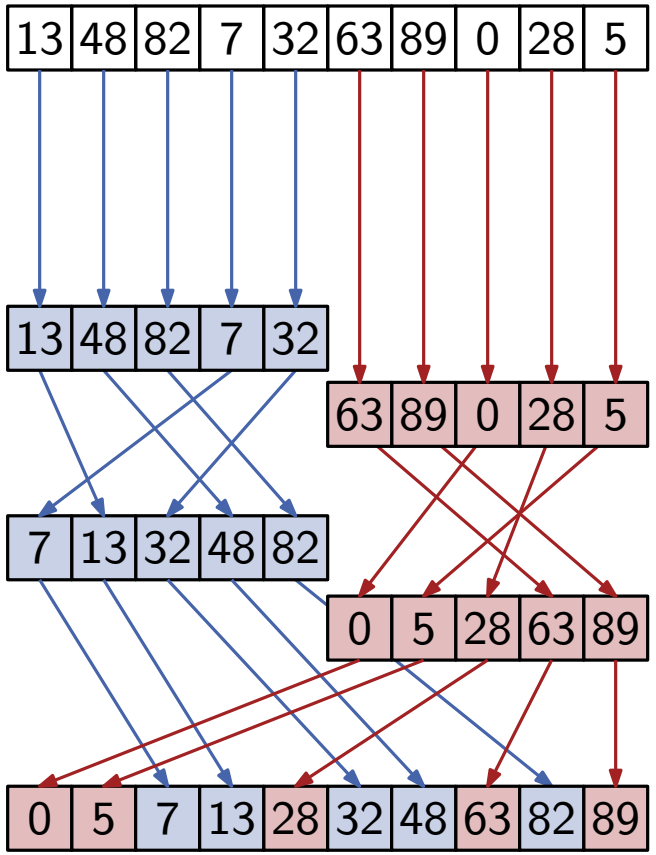
Mergesort im Detail

```
mergesort(Array A)
    // base case: small array
    if A.size() ≤ 1 then return A
    // partition instance
    B := first half of A
    C := second half of A
    // solve parts
    B := mergesort(B)
    C := mergesort(C)
```



Mergesort im Detail

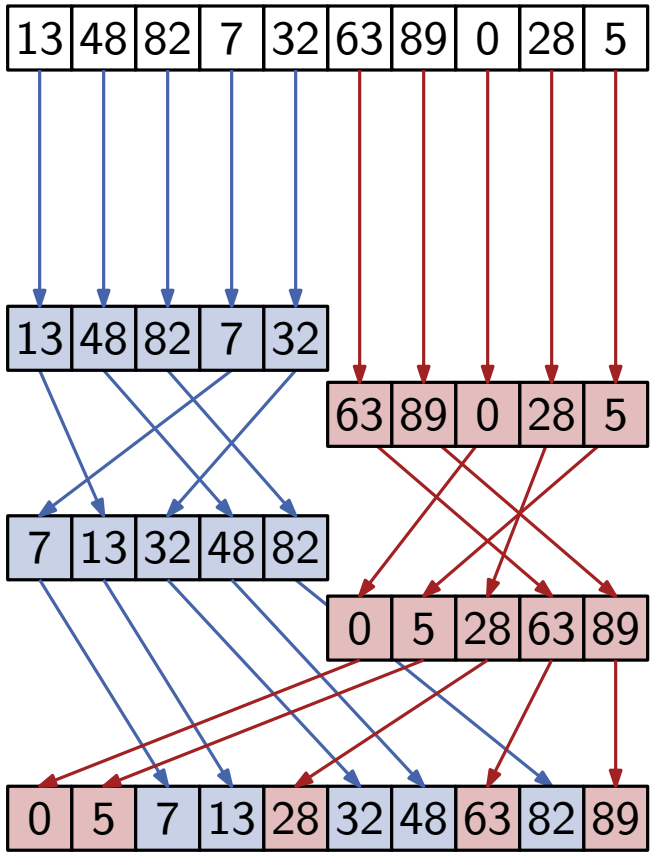
```
mergesort(Array A)
    // base case: small array
    if A.size() ≤ 1 then return A
    // partition instance
    B := first half of A
    C := second half of A
    // solve parts
    B := mergesort(B)
    C := mergesort(C)
    // combine solutions
    return merge(B, C)
```




```
merge(Array B, Array C)
    // input: sorted arrays B and C; output: B ⊔ C in sorted order
```

Mergesort im Detail

```
mergesort(Array A)
    // base case: small array
    if A.size() ≤ 1 then return A
    // partition instance
    B := first half of A
    C := second half of A
    // solve parts
    B := mergesort(B)
    C := mergesort(C)
    // combine solutions
    return merge(B, C)
```



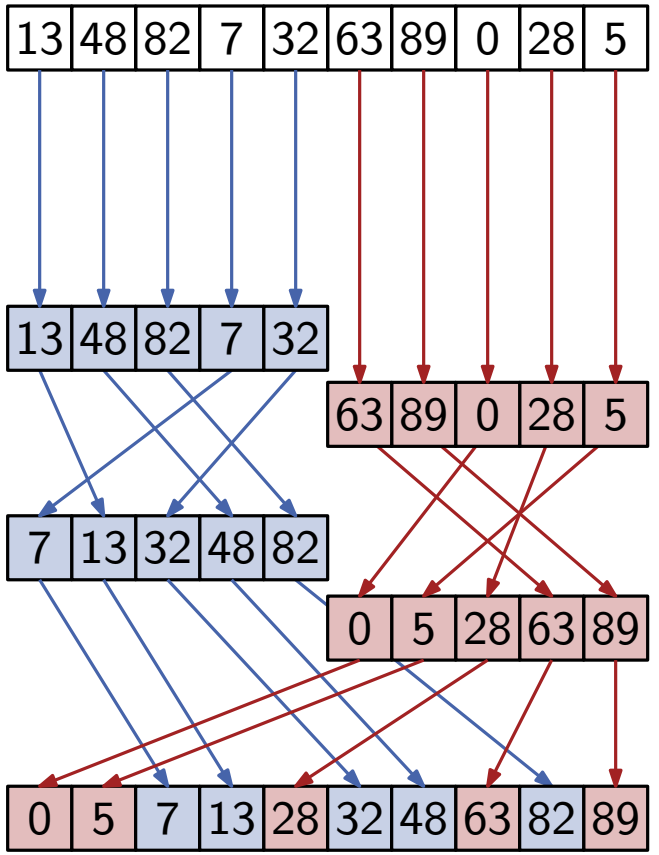
Korrektheit

- Induktion über A.**size**()
- Anfang: passt für A.**size**() ≤ 1

```
merge(Array B, Array C)
    // input: sorted arrays B and C; output: B ⊔ C in sorted order
```

Mergesort im Detail

```
mergesort(Array A)
    // base case: small array
    if A.size() ≤ 1 then return A
    // partition instance
    B := first half of A
    C := second half of A
    // solve parts
    B := mergesort(B)
    C := mergesort(C)
    // combine solutions
    return merge(B, C)
```



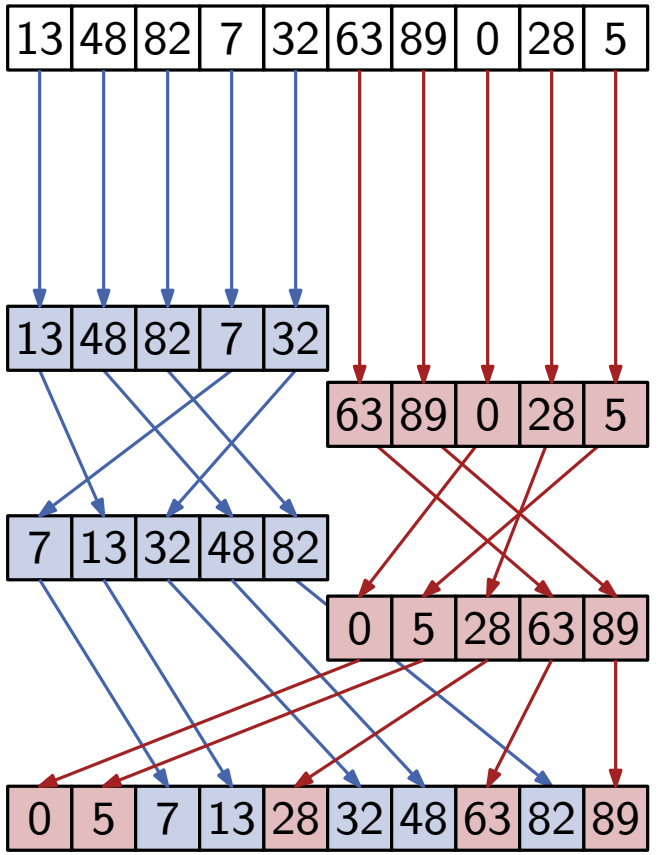
Korrektheit

- Induktion über A.**size**()
- Anfang: passt für A.**size**() ≤ 1
- Induktionsschritt:
  - B.**size**() $<$ A.**size**()
  - Induktionsvoraussetzung $\Rightarrow$ **mergesort**(B) sortiert B

```
merge(Array B, Array C)
    // input: sorted arrays B and C; output: B ⊔ C in sorted order
```

Mergesort im Detail

```
mergesort(Array A)
    // base case: small array
    if A.size() ≤ 1 then return A
    // partition instance
    B := first half of A
    C := second half of A
    // solve parts
    B := mergesort(B)
    C := mergesort(C)
    // combine solutions
    return merge(B, C)
```



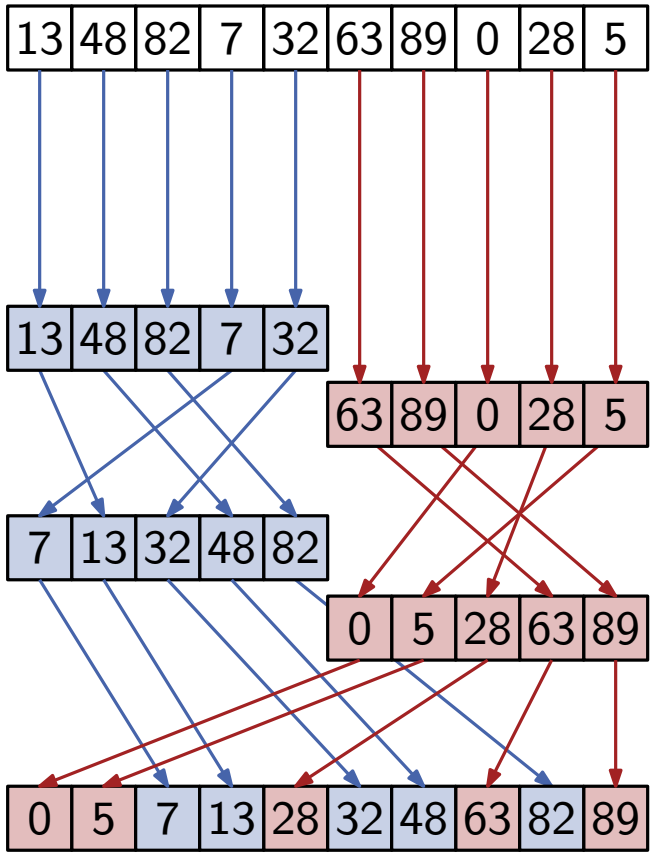
Korrektheit

- Induktion über A.**size**()
- Anfang: passt für A.**size**() ≤ 1
- Induktionsschritt:
  - B.**size**() $< A$.**size**()
  - Induktionsvoraussetzung $\Rightarrow$ **mergesort**(B) sortiert B
  - analog: **mergesort**(C) sortiert C

```
merge(Array B, Array C)
    // input: sorted arrays B and C; output: B ⊔ C in sorted order
```

Mergesort im Detail

```
mergesort(Array A)
    // base case: small array
    if A.size() ≤ 1 then return A
    // partition instance
    B := first half of A
    C := second half of A
    // solve parts
    B := mergesort(B)
    C := mergesort(C)
    // combine solutions
    return merge(B, C)
```



Korrektheit

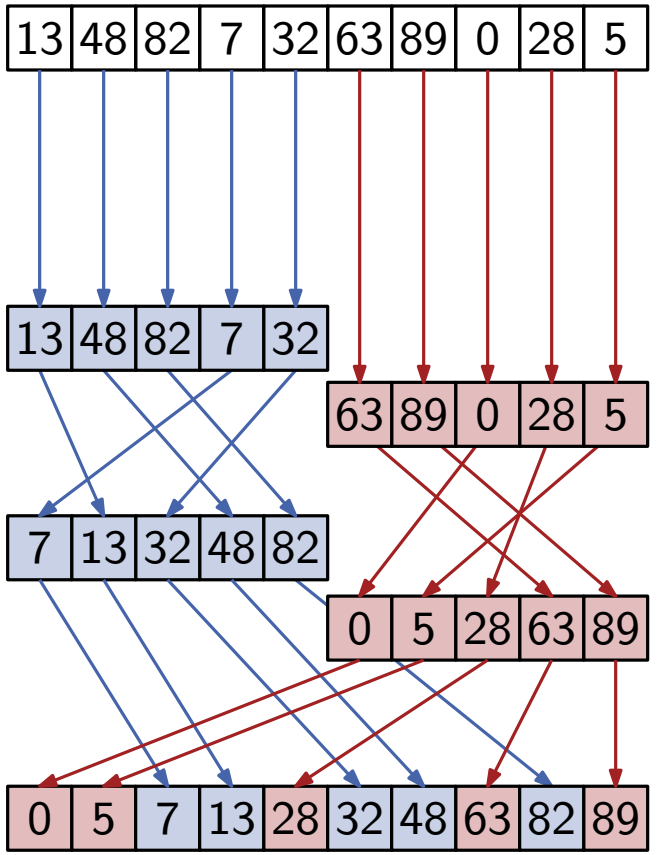
- Induktion über A.**size**()
- Anfang: passt für A.**size**() ≤ 1
- Induktionsschritt:
  - B.**size**() $< A$.**size**()
  - Induktionsvoraussetzung $\Rightarrow$ **mergesort**(B) sortiert B
  - analog: **mergesort**(C) sortiert C
  - daher: **merge**(B, C) liefert A in sortierter Form

(vorrausgesetzt **merge** ist korrekt)

```
merge(Array B, Array C)
    // input: sorted arrays B and C; output: B ⊔ C in sorted order
```

Mergesort im Detail

```
mergesort(Array A)
    // base case: small array
    if A.size() ≤ 1 then return A
    // partition instance
    B := first half of A
    C := second half of A
    // solve parts
    B := mergesort(B)
    C := mergesort(C)
    // combine solutions
    return merge(B, C)
```



Korrektheit

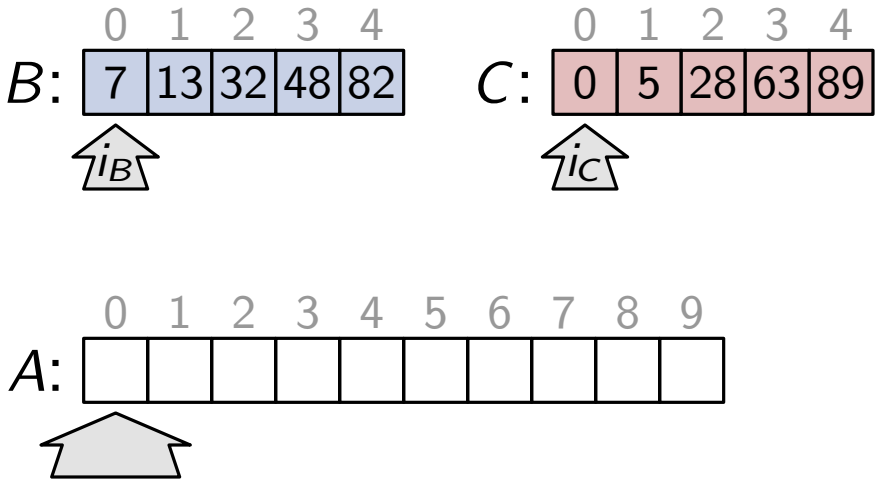
- Induktion über A.**size**()
- Anfang: passt für A.**size**() ≤ 1
- Induktionsschritt:
  - B.**size**() $< A$.**size**()
  - Induktionsvoraussetzung $\Rightarrow$ **mergesort**(B) sortiert B
  - analog: **mergesort**(C) sortiert C
  - daher: **merge**(B, C) liefert A in sortierter Form
    (vorrausgesetzt **merge** ist korrekt)

```
merge(Array B, Array C)
    // input: sorted arrays B and C; output: B ⊔ C in sorted order
```

Wie funktioniert merge?

Plan

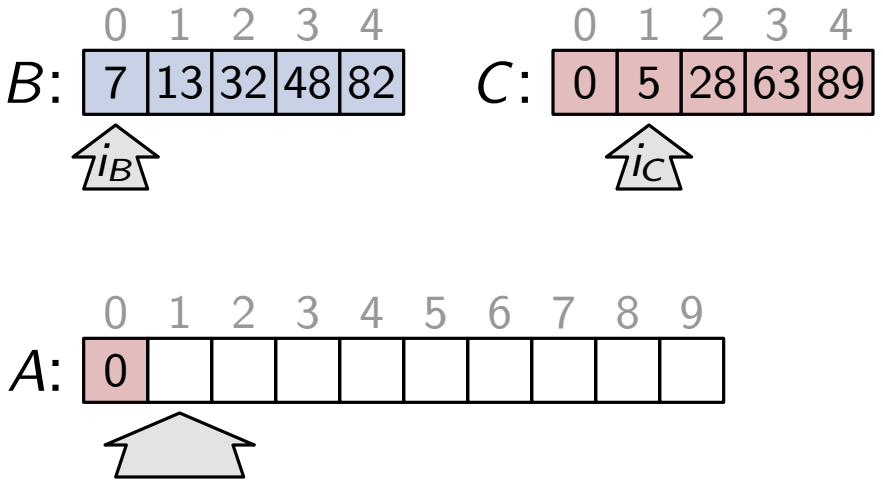
- erstelle neues Array A für das Ergebnis
- füge iterativ das kleinste noch nicht eingefügte Element in A ein
- für B, C: kenne Positionen i_B, i_C ab der die noch nicht eingefügten Elemente kommen



Wie funktioniert merge?

Plan

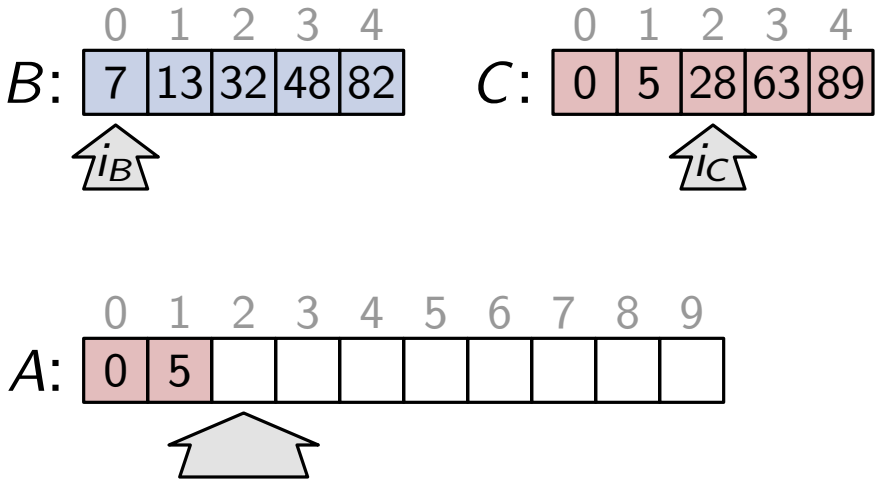
- erstelle neues Array A für das Ergebnis
- füge iterativ das kleinste noch nicht eingefügte Element in A ein
- für B, C: kenne Positionen i_B, i_C ab der die noch nicht eingefügten Elemente kommen



Wie funktioniert merge?

Plan

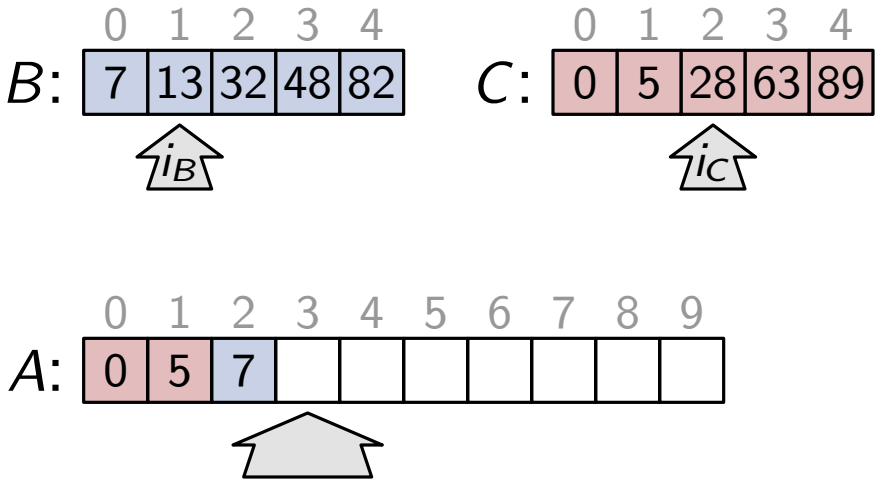
- erstelle neues Array A für das Ergebnis
- füge iterativ das kleinste noch nicht eingefügte Element in A ein
- für B, C: kenne Positionen i_B, i_C ab der die noch nicht eingefügten Elemente kommen



Wie funktioniert merge?

Plan

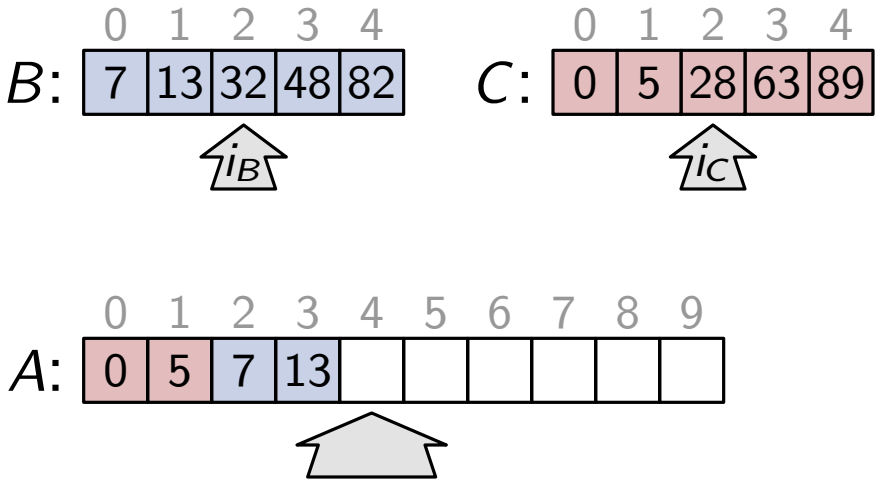
- erstelle neues Array A für das Ergebnis
- füge iterativ das kleinste noch nicht eingefügte Element in A ein
- für B, C: kenne Positionen i_B, i_C ab der die noch nicht eingefügten Elemente kommen



Wie funktioniert merge?

Plan

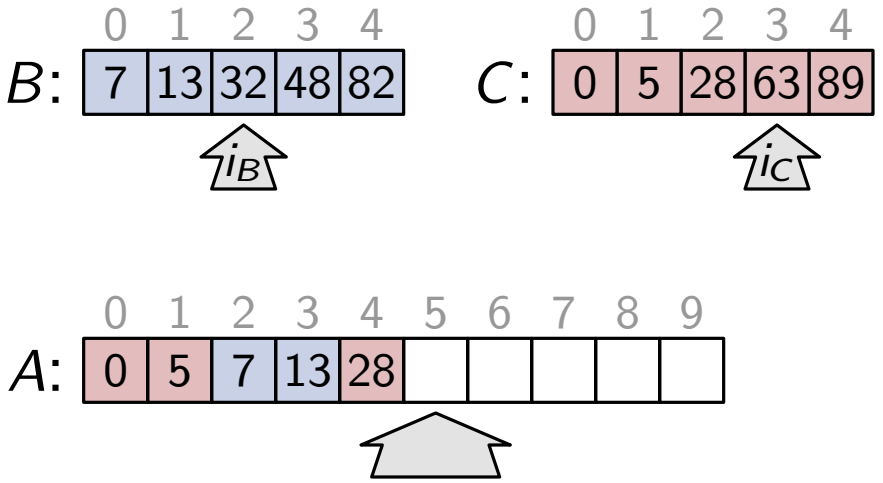
- erstelle neues Array A für das Ergebnis
- füge iterativ das kleinste noch nicht eingefügte Element in A ein
- für B, C: kenne Positionen i_B, i_C ab der die noch nicht eingefügten Elemente kommen



Wie funktioniert merge?

Plan

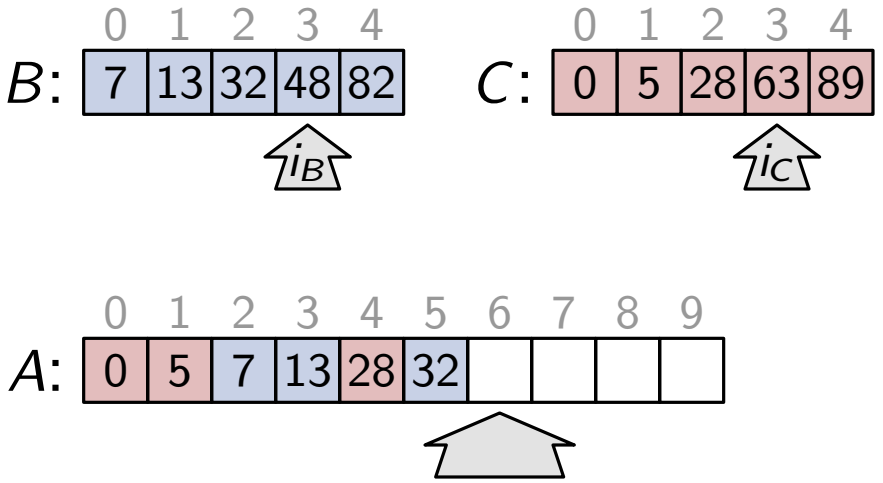
- erstelle neues Array A für das Ergebnis
- füge iterativ das kleinste noch nicht eingefügte Element in A ein
- für B, C: kenne Positionen i_B, i_C ab der die noch nicht eingefügten Elemente kommen



Wie funktioniert merge?

Plan

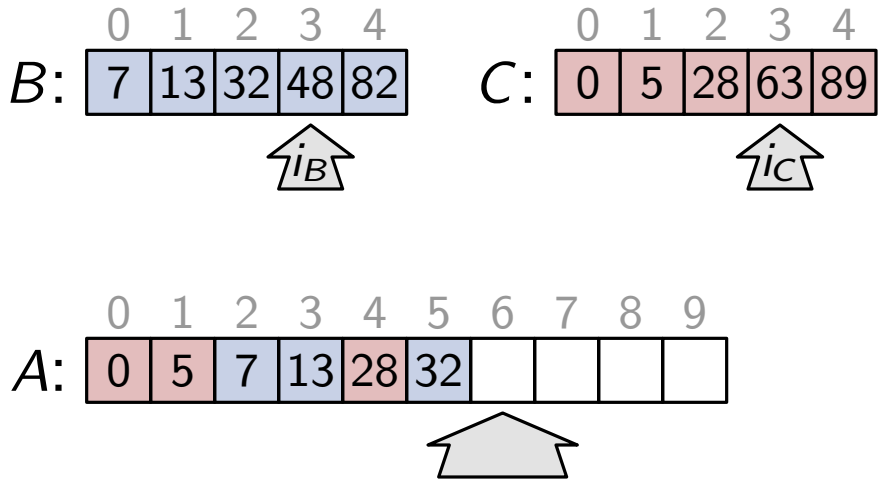
- erstelle neues Array A für das Ergebnis
- füge iterativ das kleinste noch nicht eingefügte Element in A ein
- für B, C: kenne Positionen i_B, i_C ab der die noch nicht eingefügten Elemente kommen



Wie funktioniert merge?

Plan

- erstelle neues Array A für das Ergebnis
- füge iterativ das kleinste noch nicht eingefügte Element in A ein
- für B, C: kenne Positionen i_B, i_C ab der die noch nicht eingefügten Elemente kommen



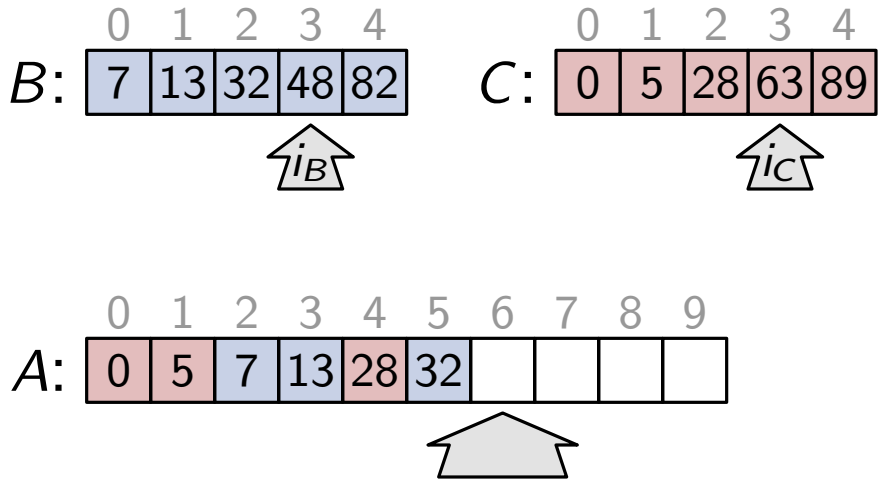
Invariante (nach jedem Einfügen)

- genau die Elemente vor i_B aus B und vor i_C aus C wurden schon in A eingefügt
- alle eingefügten Elemente sind kleiner als die nicht eingefügten Elemente
- bisher in A eingefügte Elemente sind sortiert

Wie funktioniert merge?

Plan

- erstelle neues Array A für das Ergebnis
- füge iterativ das kleinste noch nicht eingefügte Element in A ein
- für B, C: kenne Positionen i_B, i_C ab der die noch nicht eingefügten Elemente kommen



Invariante (nach jedem Einfügen)

- genau die Elemente vor i_B aus B und vor i_C aus C wurden schon in A eingefügt
- alle eingefügten Elemente sind kleiner als die nicht eingefügten Elemente
- bisher in A eingefügte Elemente sind sortiert

Bleibt die Invariante in jedem Schritt erhalten?

(beachte: sie gilt am Anfang)

- B und C sortiert $\Rightarrow$ kleinstes nicht eingefügtes Element ist $B[i_B]$ oder $C[i_C]$
- damit: $\min\{B[i_B], C[i_C]\}$ in A einfügen (und i_B bzw. i_C erhöhen) erhält Invariante

Merge im Detail

merge(*Array B*, *Array C*)

$i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.\textbf{size}(), C.\textbf{size}()$

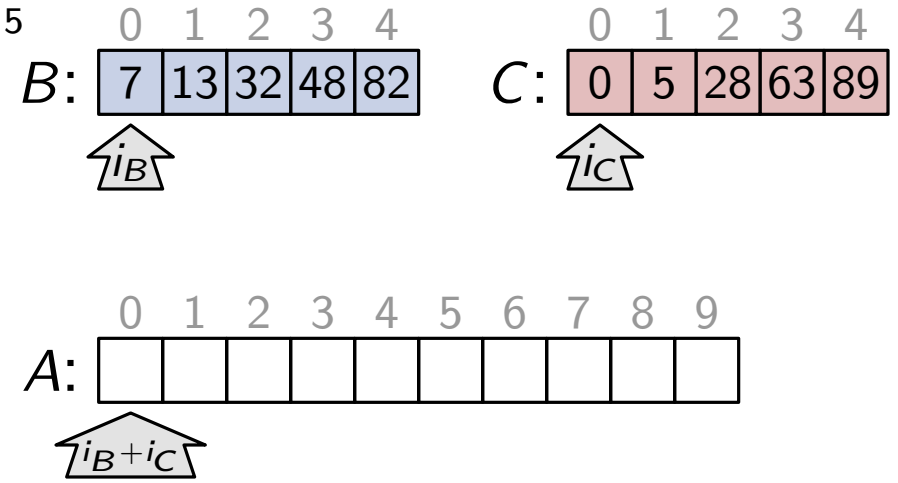
$A :=$ *Array* of size $n_B + n_C$ // result

// iterate over B and C simultaneously

while $i_B < n_B$ **or** $i_C < n_C$ **do**

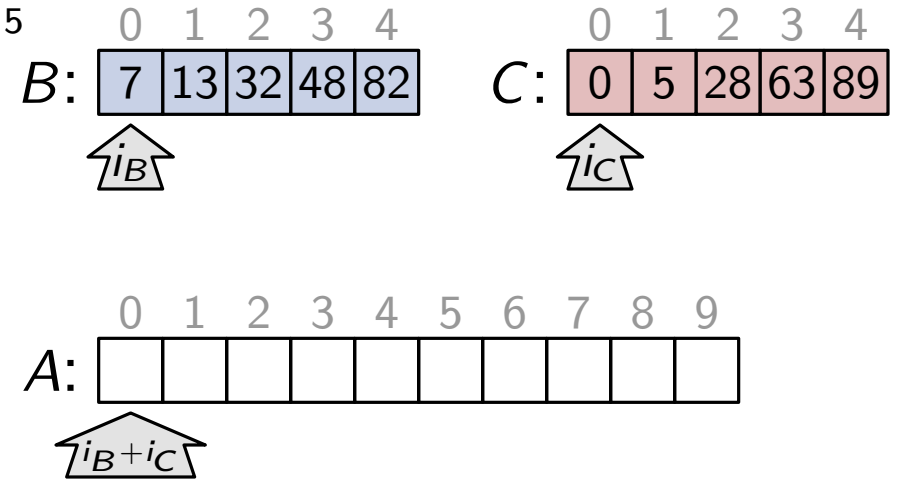
return A

$n_B = n_C = 5$



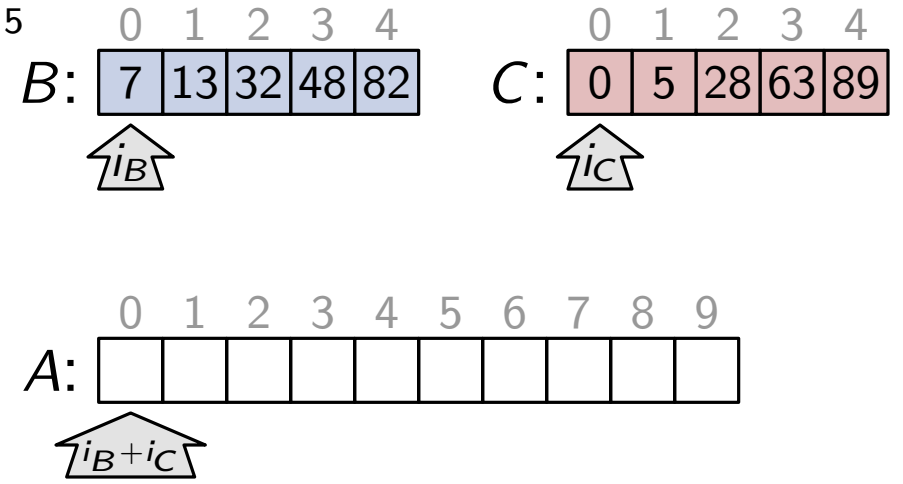
Merge im Detail

```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```



Merge im Detail

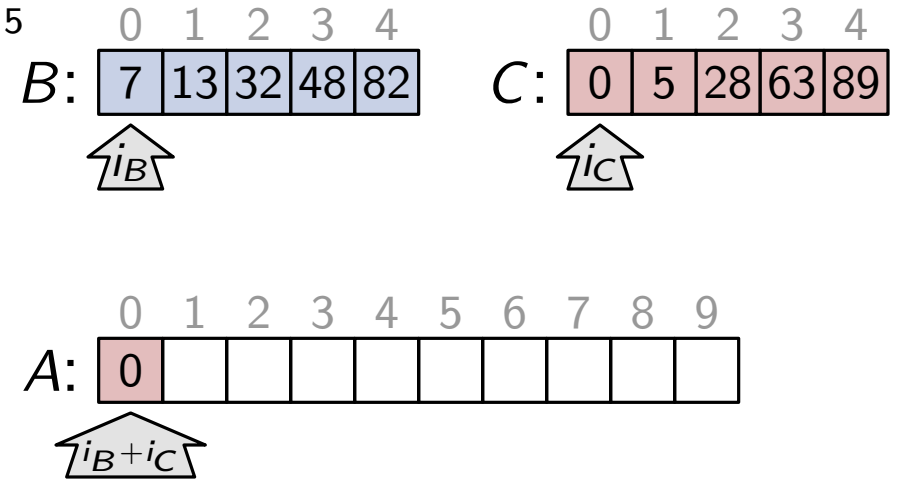
```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```



Merge im Detail

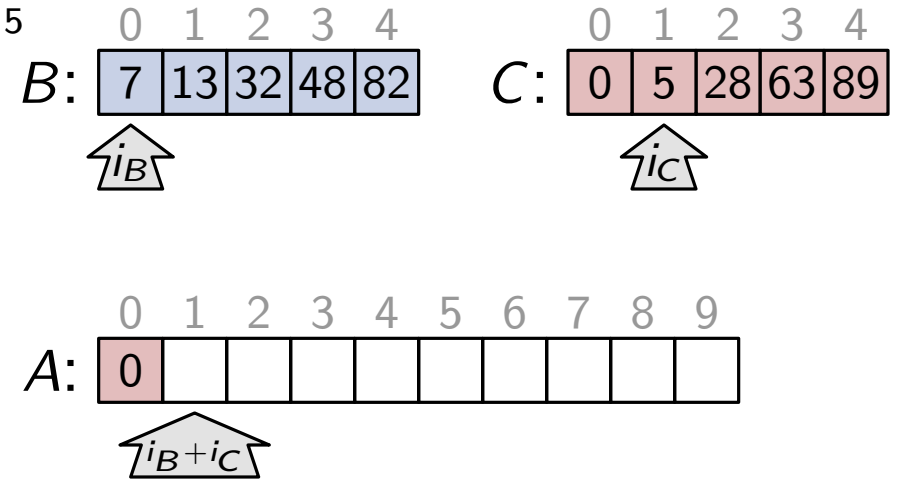
```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```

$n_B = n_C = 5$



Merge im Detail

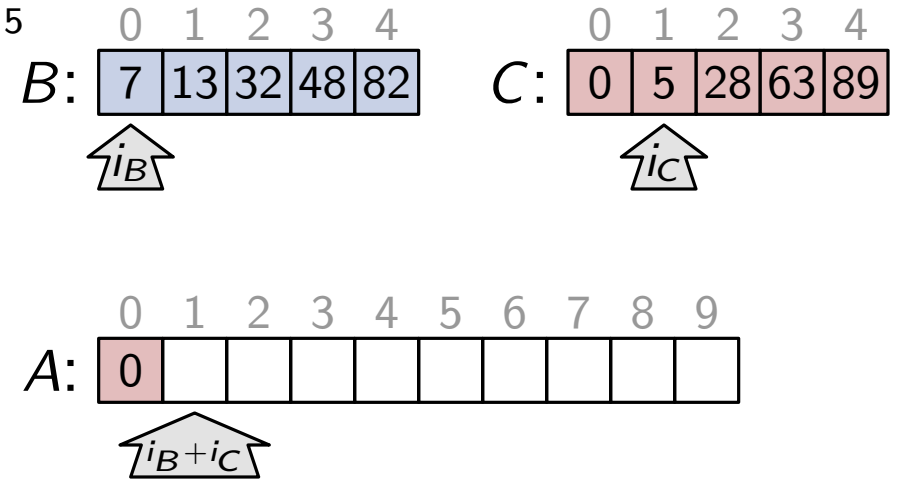
```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```



Merge im Detail

```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```

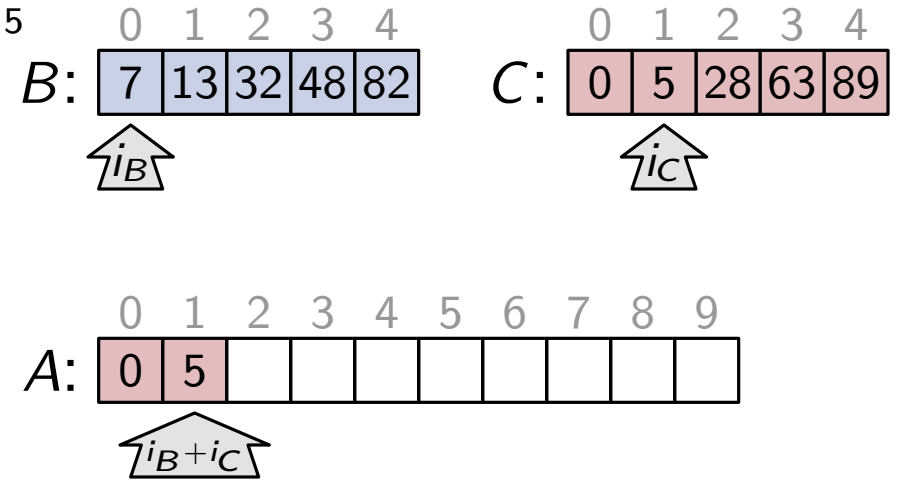
$n_B = n_C = 5$



Merge im Detail

```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```

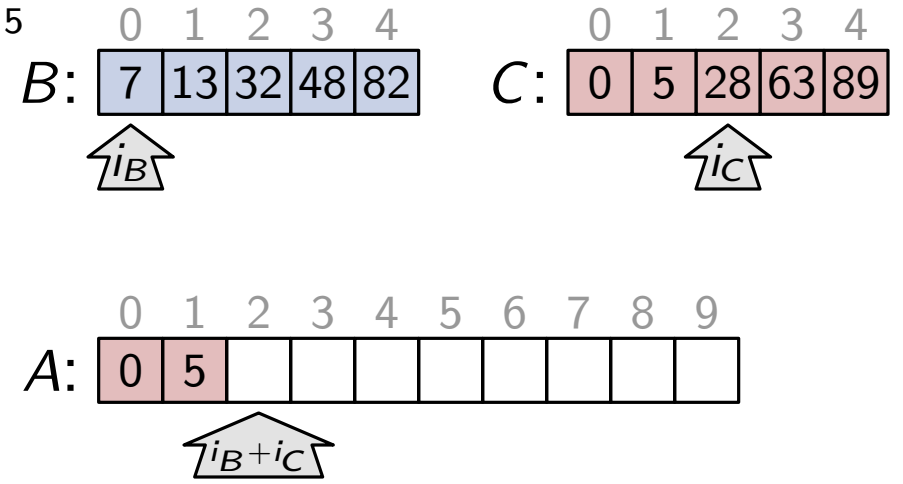
$n_B = n_C = 5$



Merge im Detail

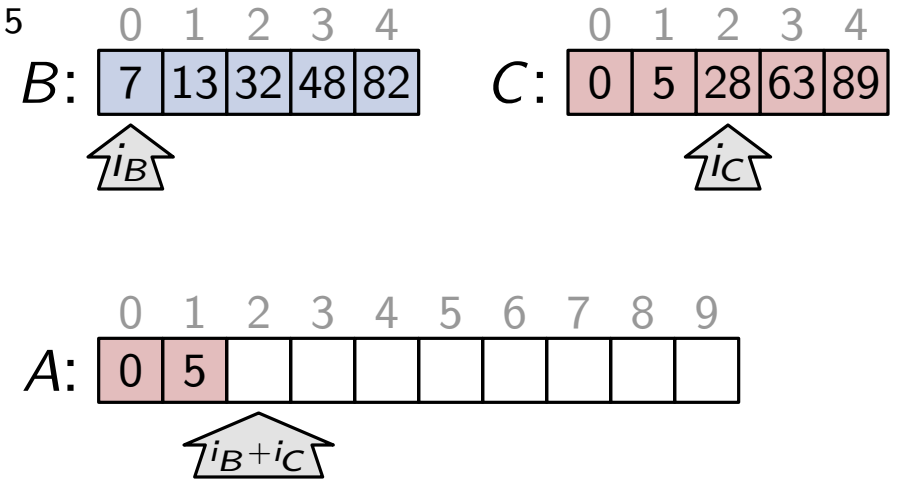
```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```

$n_B = n_C = 5$



Merge im Detail

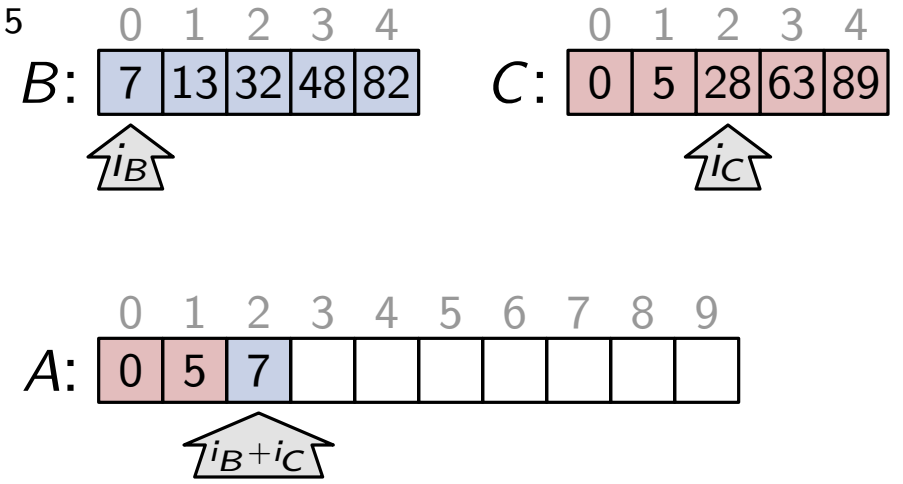
```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```



Merge im Detail

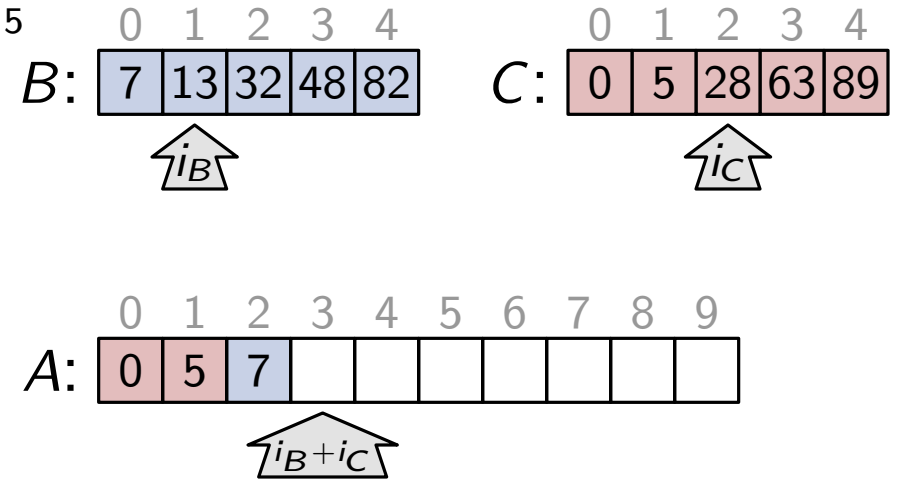
```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```

$n_B = n_C = 5$



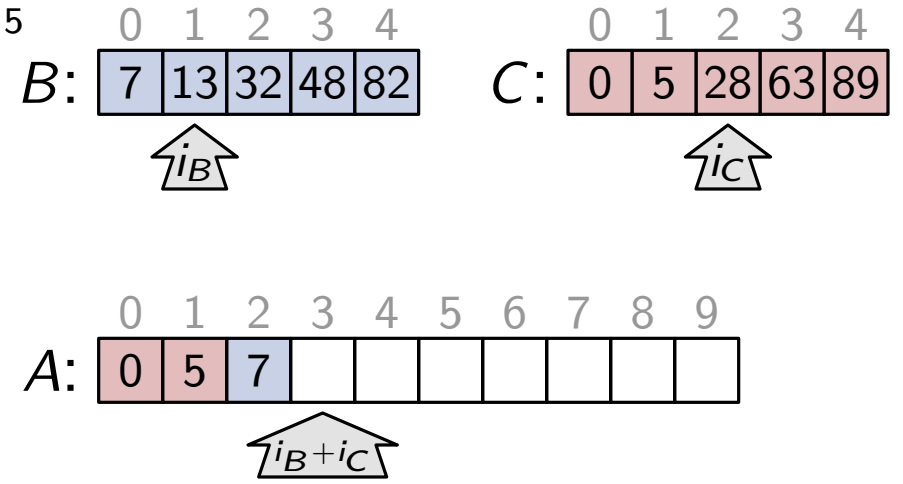
Merge im Detail

```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```



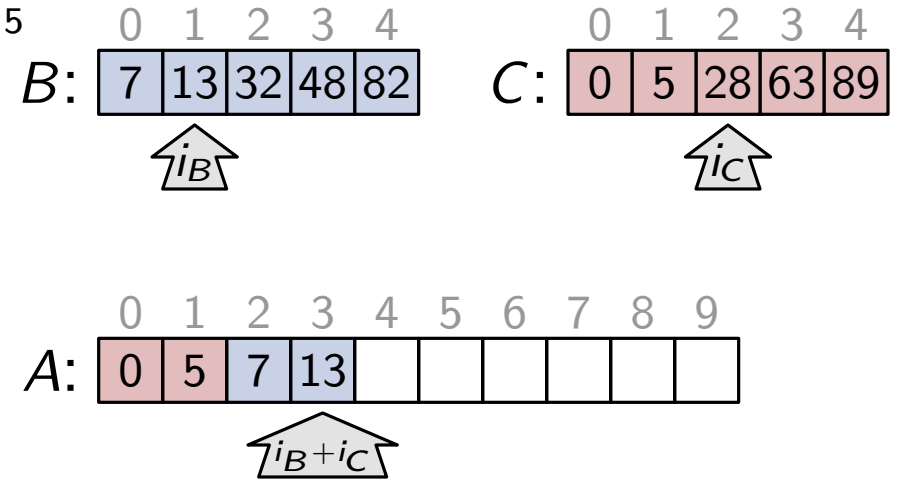
Merge im Detail

```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```



Merge im Detail

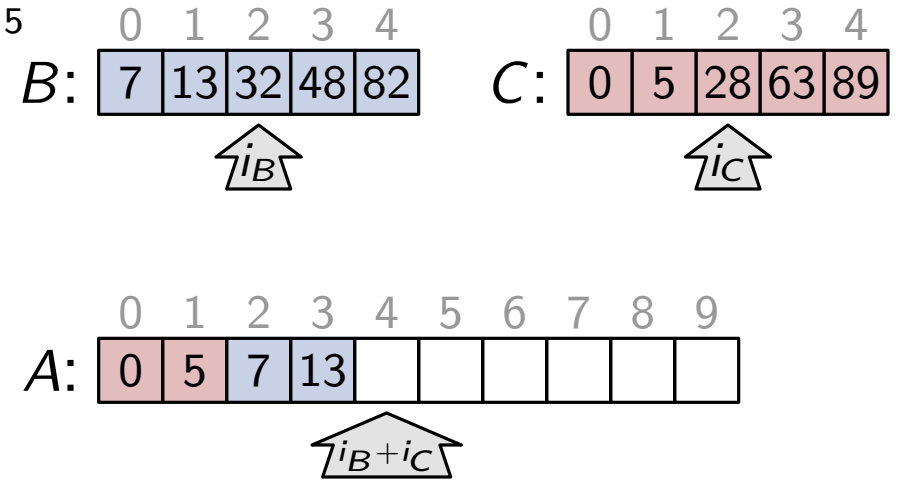
```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```



Merge im Detail

```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```

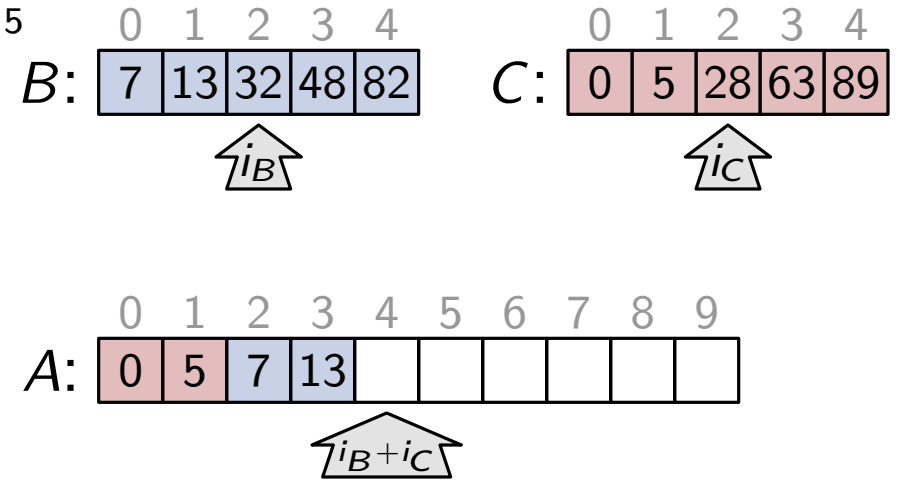
$n_B = n_C = 5$



Merge im Detail

```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```

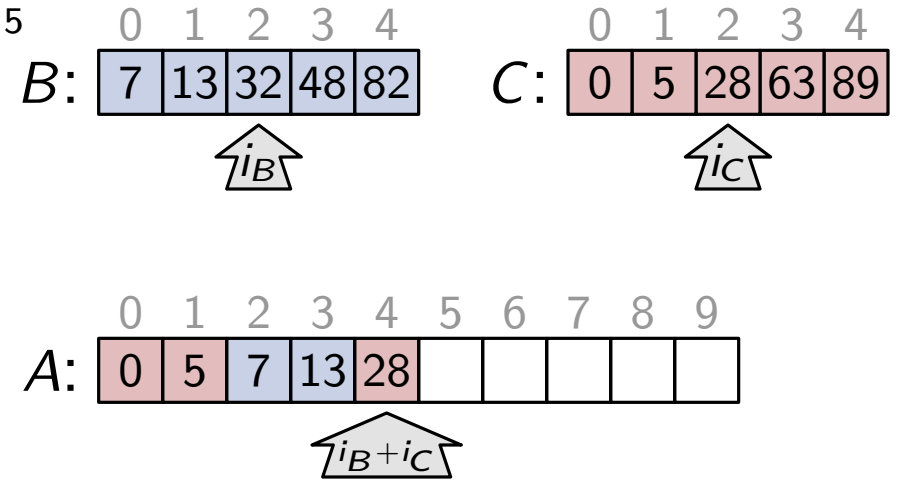
$n_B = n_C = 5$



Merge im Detail

```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```

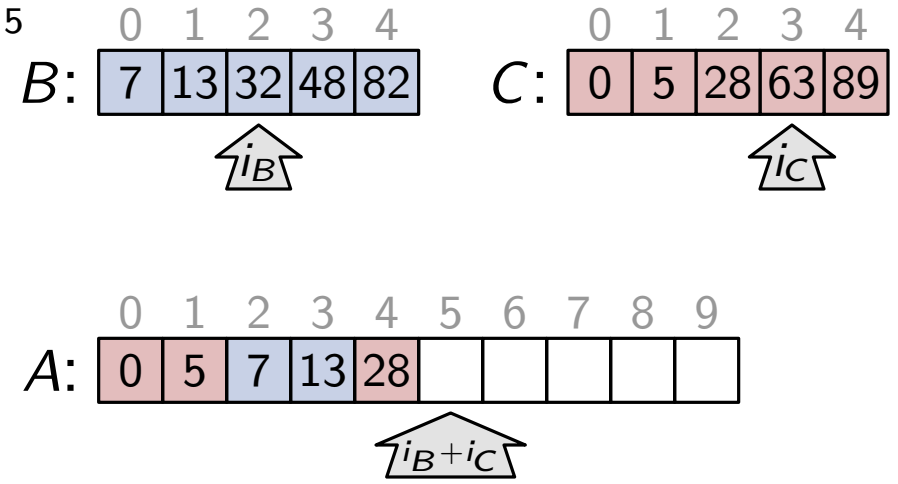
$n_B = n_C = 5$



Merge im Detail

```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```

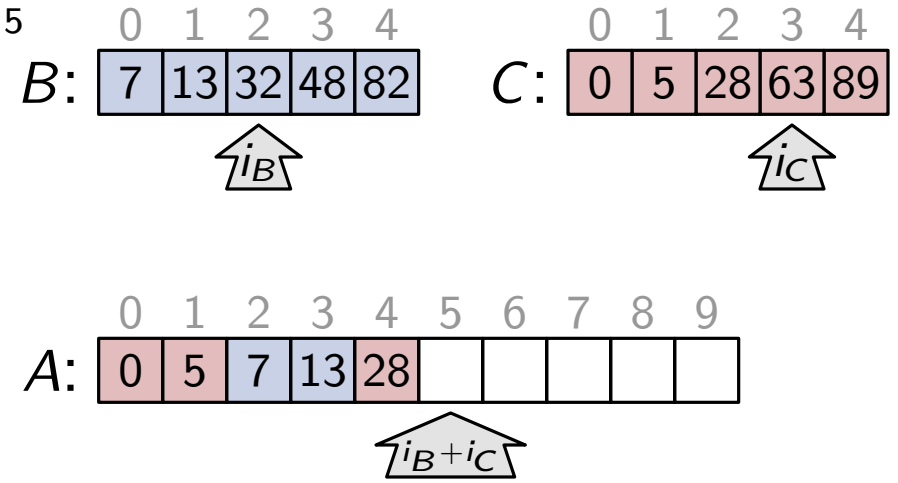
$n_B = n_C = 5$



Merge im Detail

```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```

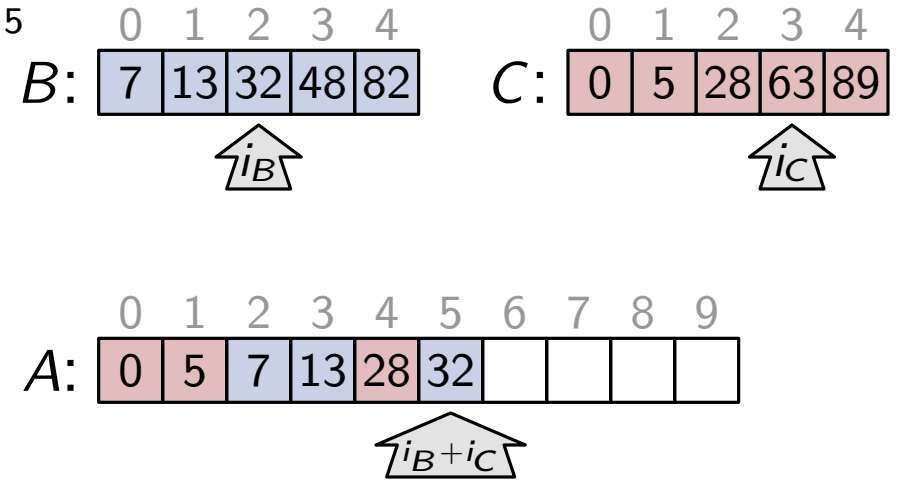
$n_B = n_C = 5$



Merge im Detail

```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```

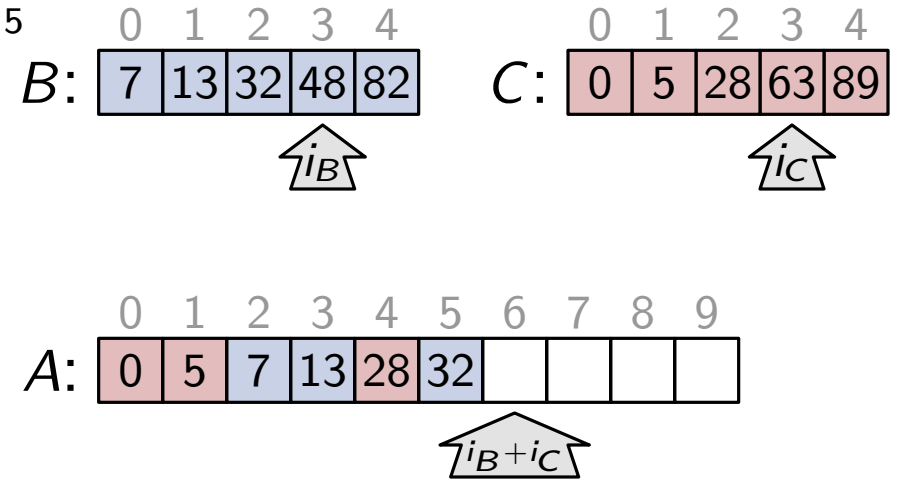
$n_B = n_C = 5$



Merge im Detail

```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```

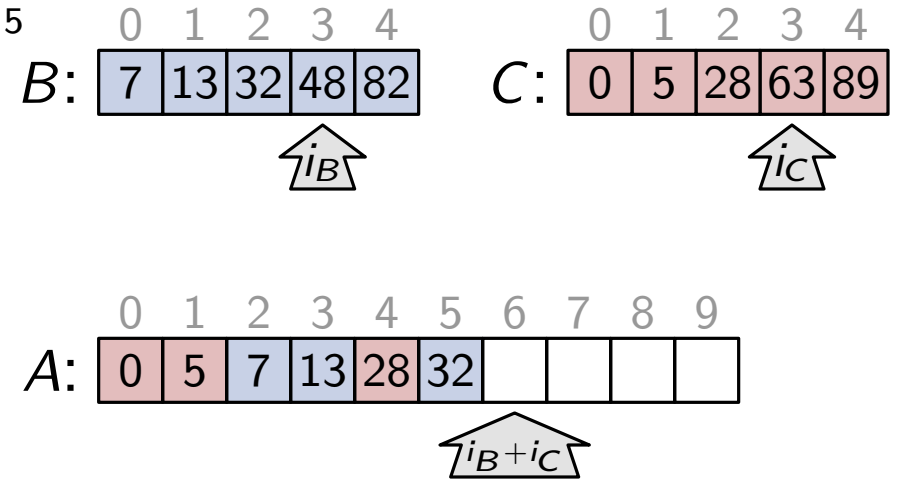
$n_B = n_C = 5$



Merge im Detail

```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```

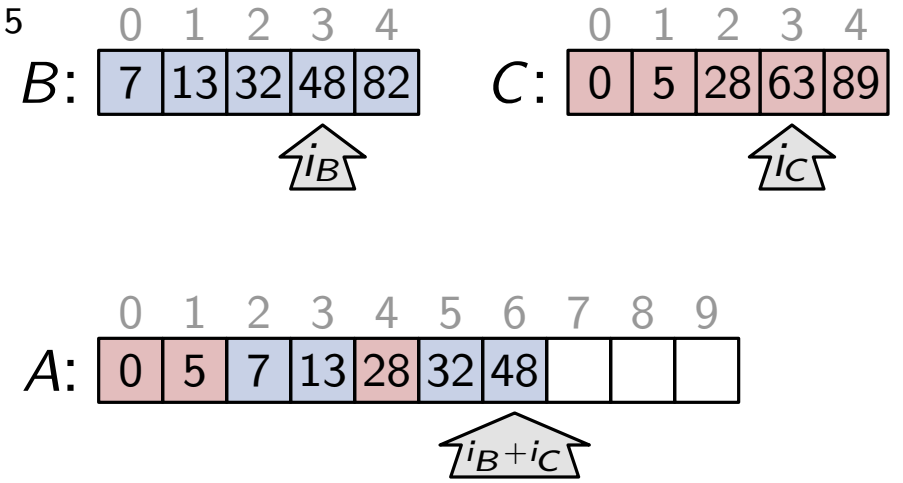
$n_B = n_C = 5$



Merge im Detail

```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```

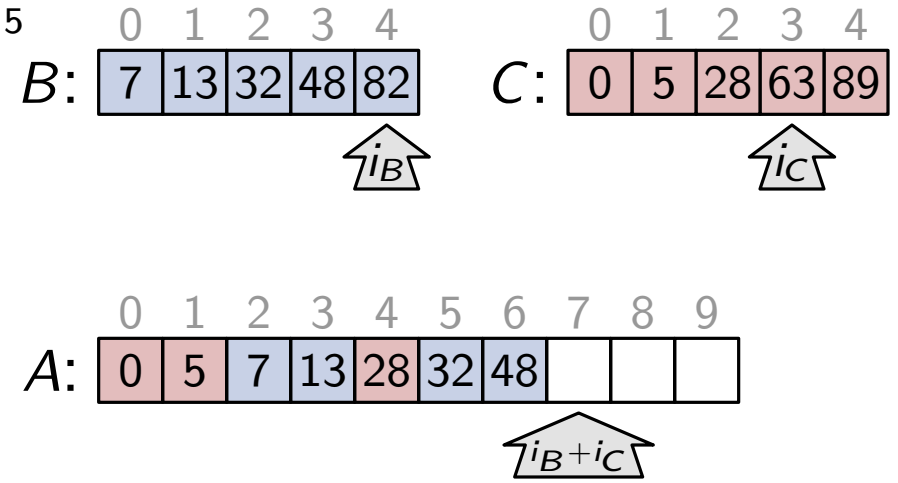
$n_B = n_C = 5$



Merge im Detail

```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```

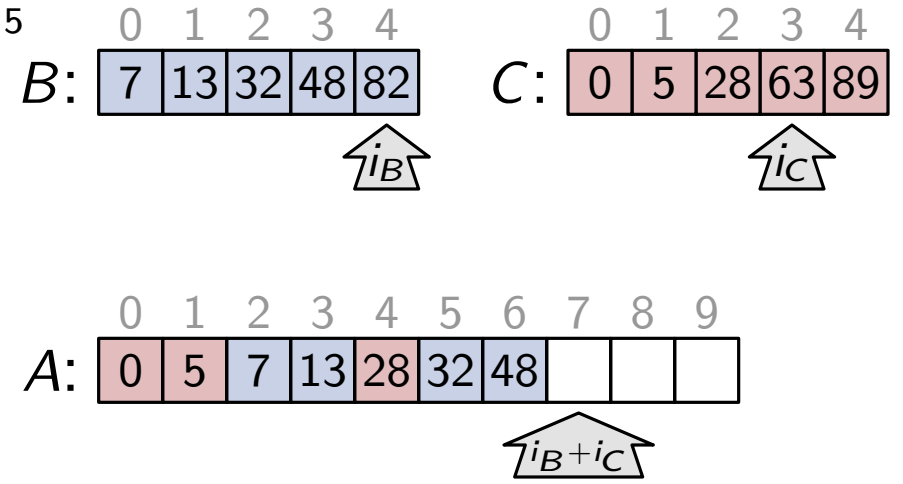
$n_B = n_C = 5$



Merge im Detail

```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```

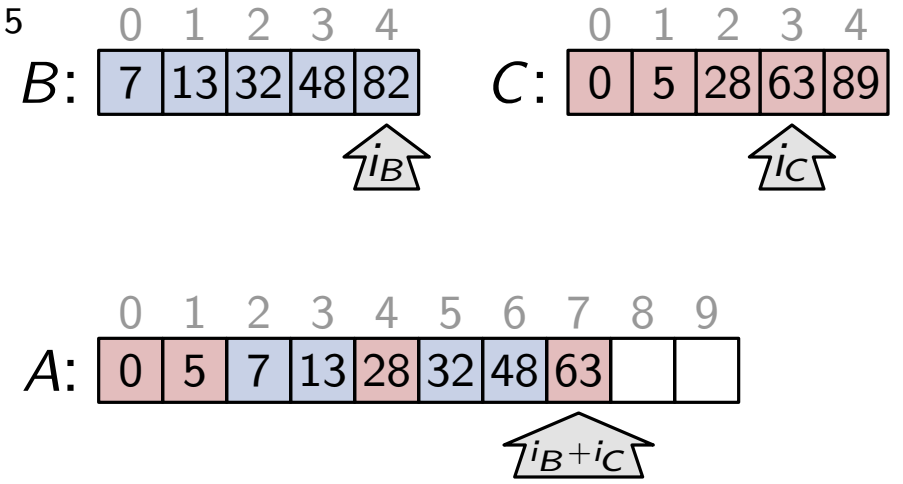
$n_B = n_C = 5$



Merge im Detail

```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```

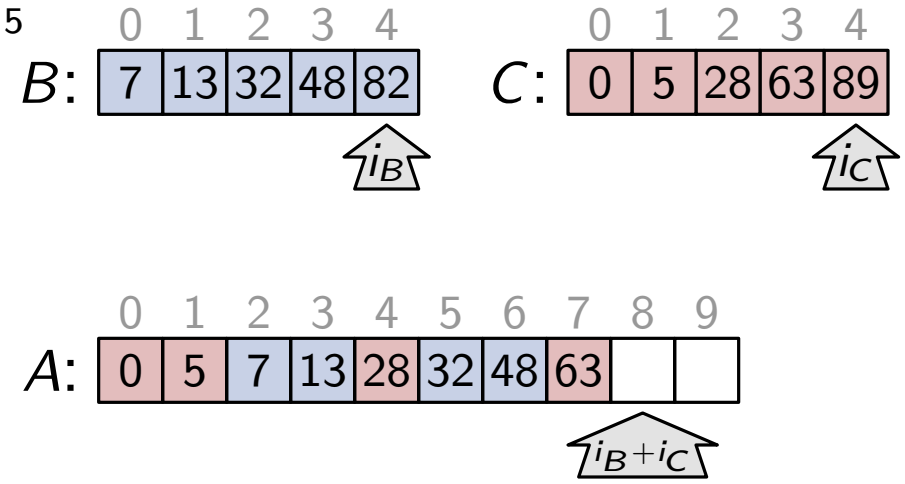
$n_B = n_C = 5$



Merge im Detail

```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```

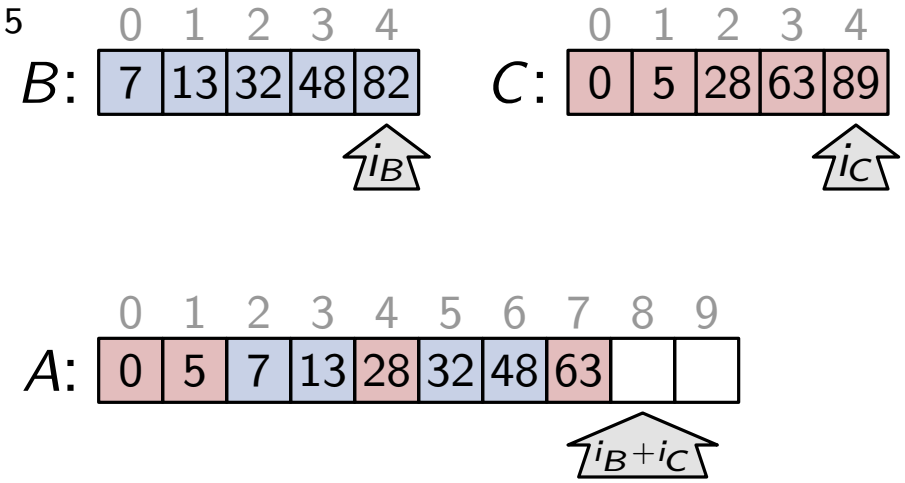
$n_B = n_C = 5$



Merge im Detail

```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```

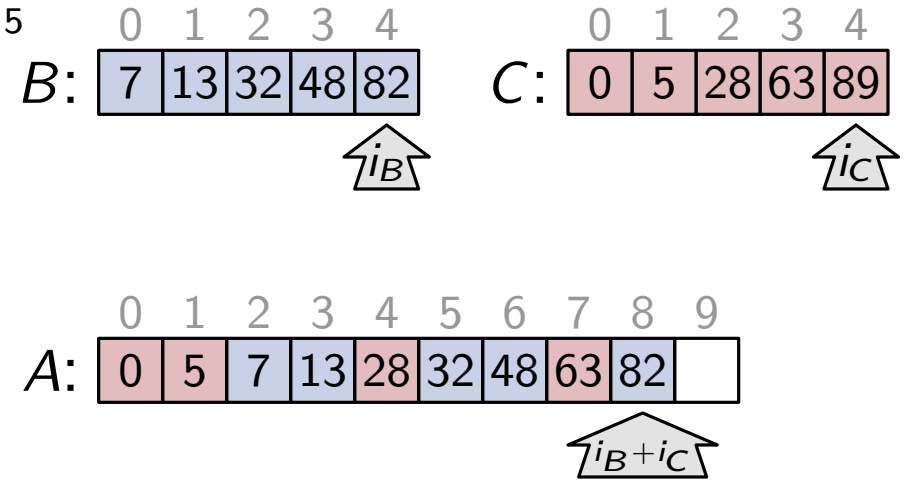
$n_B = n_C = 5$



Merge im Detail

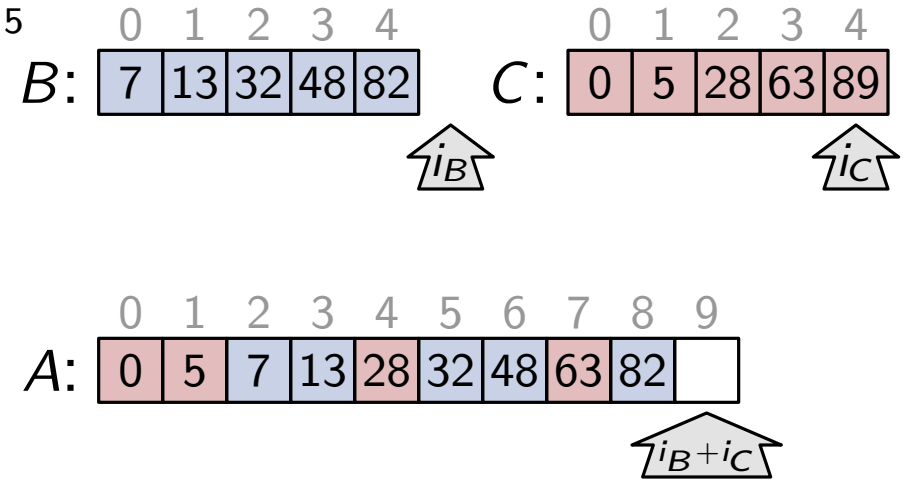
```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```

$n_B = n_C = 5$



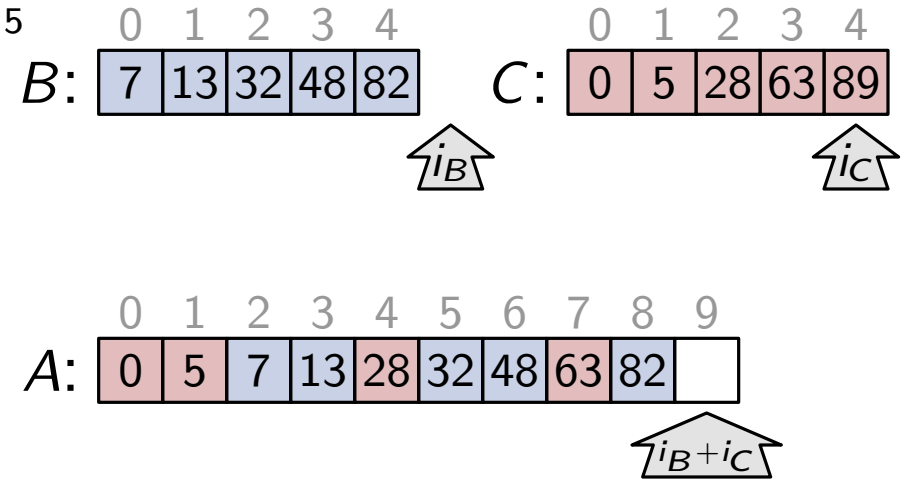
Merge im Detail

```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```



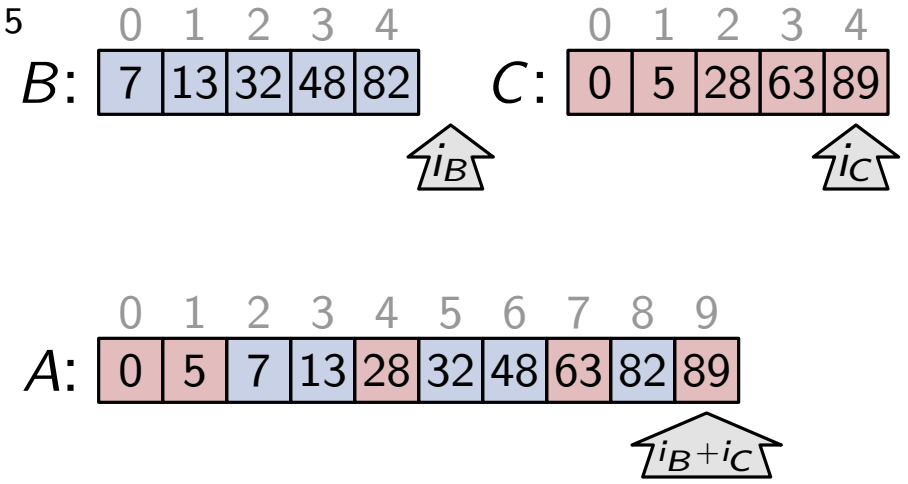
Merge im Detail

```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```



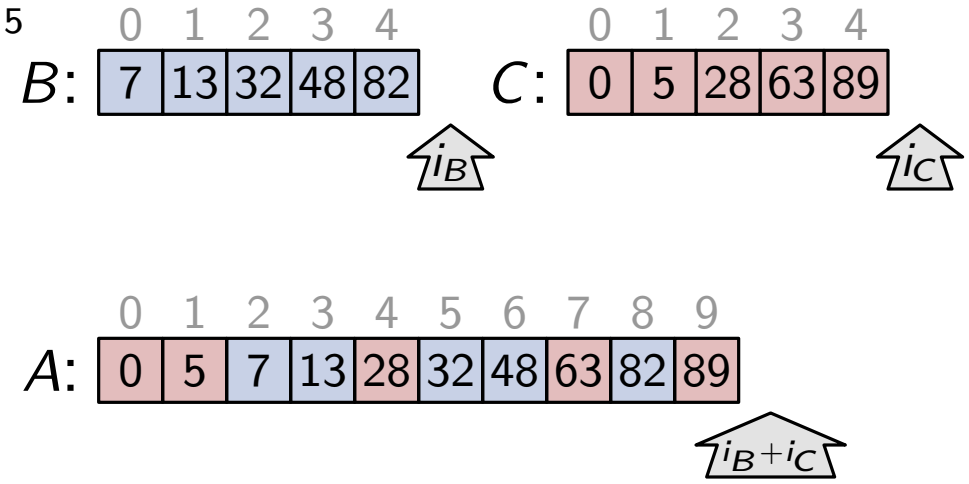
Merge im Detail

```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```



Merge im Detail

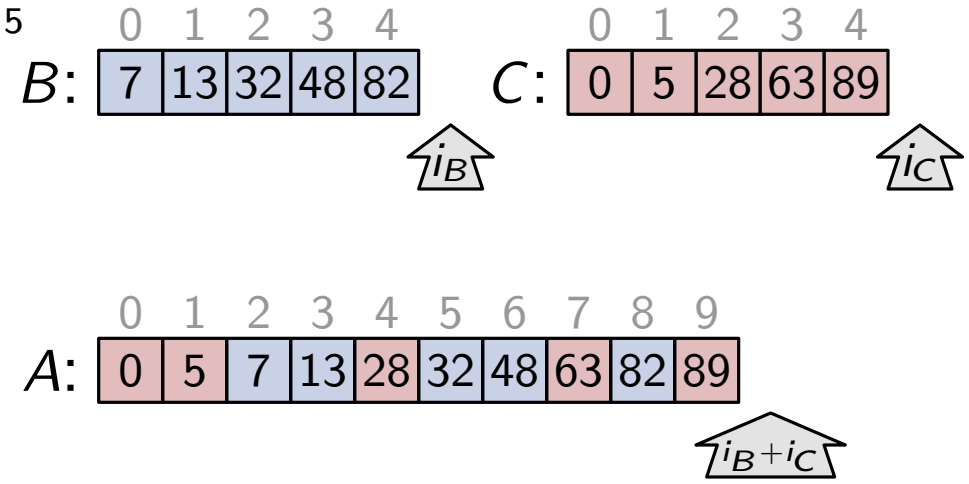
```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```



Merge im Detail

```
merge(Array B, Array C)
    i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.size(), C.size()
    A := Array of size n_B + n_C                    // result
    // iterate over B and C simultaneously
    while i_B < n_B or i_C < n_C do
        // next element comes from B
        if i_C = n_C or (i_B ≠ n_B and B[i_B] ≤ C[i_C]) then
            A[i_B + i_C] := B[i_B]
            i_B := i_B + 1
        // next element comes from C
        else
            A[i_B + i_C] := C[i_C]
            i_C := i_C + 1
    return A
```

$n_B = n_C = 5$



Laufzeitanalyse

- i_B+i_C wird in jedem Schleifendurchlauf um genau 1 größer
- daher: $n_B + n_C$ Schleifendurchläufe
- Laufzeit: $\Theta(n_B + n_C) = \Theta(A.\mathbf{size}())$

app.klicker.uzh.ch/join/algo1

Laufzeit Mergesort

```
mergesort(Array A)
    // base case: small array
    if A.size() ≤ 1 then return A
    // partition instance
    B := first half of A
    C := second half of A
    // solve parts
    B := mergesort(B)
    C := mergesort(C)
    // combine solutions
    return merge(B, C)
```

Welche Rekurrenz beschreibt die Laufzeit?

Laufzeit Mergesort

```
mergesort(Array A)                                   T(n)
  // base case: small array
  if A.size() ≤ 1 then return A                      Θ(1)
  // partition instance
  B := first half of A                               Θ(n)
  C := second half of A
  // solve parts
  B := mergesort(B)                                  T(n/2)
  C := mergesort(C)                                  T(n/2)
  // combine solutions
  return merge(B, C)                                 Θ(n)
```

Laufzeit $(n = A.\text{size}())$

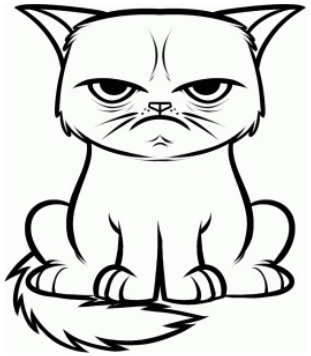
- Rekurrenz: $T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$
- Mastertheorem $\Rightarrow T(n) \in \Theta(n \log n)$

Laufzeit Mergesort

```
mergesort(Array A)                                   T(n)
  // base case: small array
  if A.size() ≤ 1 then return A                      Θ(1)
  // partition instance
  B := first half of A                               Θ(n)
  C := second half of A
  // solve parts
  B := mergesort(B)                                  T(n/2)
  C := mergesort(C)                                  T(n/2)
  // combine solutions
  return merge(B, C)                                 Θ(n)
```

Laufzeit $(n = A.\text{size}())$

- Rekurrenz: $T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$
- Mastertheorem $\Rightarrow T(n) \in \Theta(n \log n)$



Mastertheorem?
Voll anstrengend!
Muss ich das auswendig können?

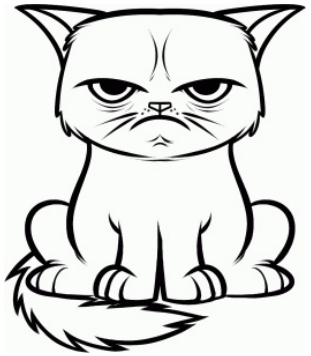
Bild: Grumpy cat line art / XXspiritwolf2000XX / Creative Commons

Laufzeit Mergesort

```
mergesort(Array A)                                   T(n)
  // base case: small array
  if A.size() ≤ 1 then return A                      Θ(1)
  // partition instance
  B := first half of A                               Θ(n)
  C := second half of A
  // solve parts
  B := mergesort(B)                                  T(n/2)
  C := mergesort(C)                                  T(n/2)
  // combine solutions
  return merge(B, C)                                 Θ(n)
```

Laufzeit $(n = A.\text{size}())$

- Rekurrenz: $T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$
- Mastertheorem $\Rightarrow T(n) \in \Theta(n \log n)$



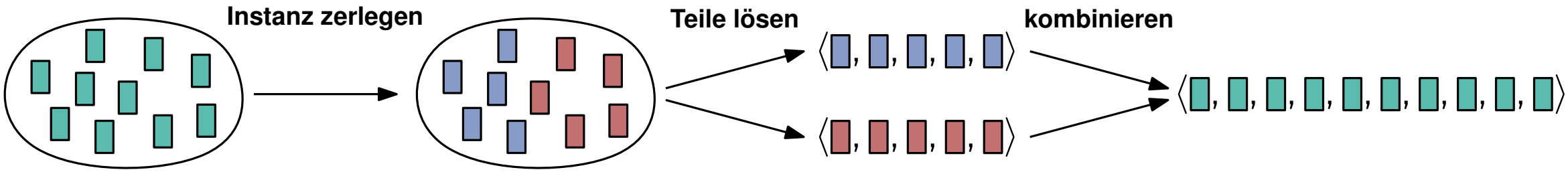
Mastertheorem?
Voll anstrengend!
Muss ich das auswendig können?

Herleitung für $\Theta(n \log n)$ in diesem Fall

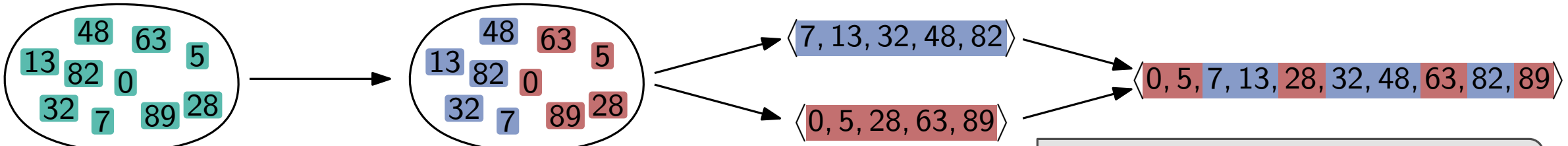
- Rekursionsbaum: Binärbaum der Tiefe $\log_2 n$
- Aufwand auf Ebene i:
  - 2^i Knoten mit $n \cdot 2^{-i}$ Elementen
  - $\Theta(n)$ Kosten für n Elem. $\Rightarrow \Theta(n)$ pro Ebene
- gesamt: $\Theta(n \log n)$

Bild: Grumpy cat line art / XXspiritwolf2000XX / Creative Commons

Sortieren mittels Teile und Herrsche



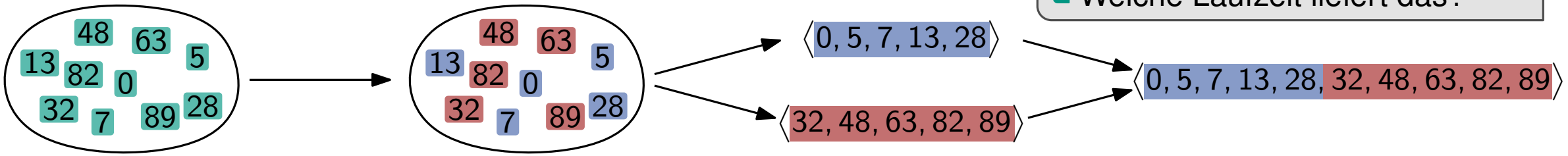
Mergesort: arbeite beim Zusammenfügen



Zwei offene Fragen

- Wie setzt man das im Detail um?
- Welche Laufzeit liefert das?

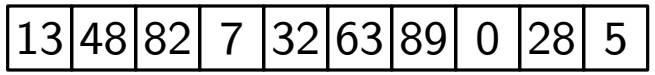
Quicksort: arbeite beim Zerlegen



Quicksort: arbeiten beim Zerlegen

Zerlegung in große und kleine Elemente

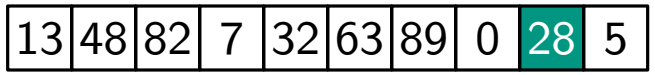
- wähle ein Element als **Pivot Element**
- zwei Teilarrays: Elemente die kleiner/größer sind als das Pivot



Quicksort: arbeiten beim Zerlegen

Zerlegung in große und kleine Elemente

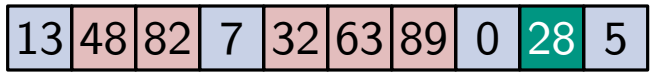
- wähle ein Element als **Pivot Element**
- zwei Teilarrays: Elemente die kleiner/größer sind als das Pivot



Quicksort: arbeiten beim Zerlegen

Zerlegung in große und kleine Elemente

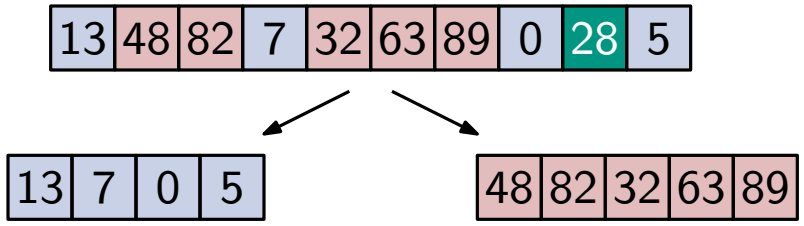
- wähle ein Element als **Pivot Element**
- zwei Teilarrays: Elemente die kleiner/größer sind als das Pivot



Quicksort: arbeiten beim Zerlegen

Zerlegung in große und kleine Elemente

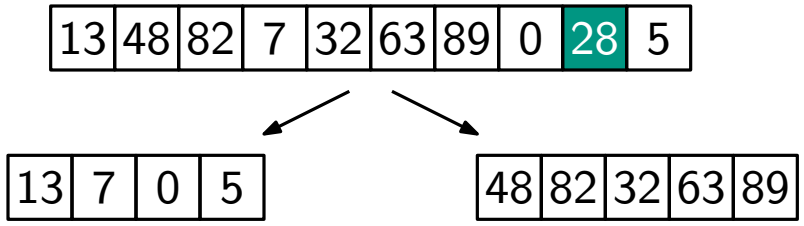
- wähle ein Element als **Pivot Element**
- zwei Teilarrays: Elemente die kleiner/größer sind als das Pivot



Quicksort: arbeiten beim Zerlegen

Zerlegung in große und kleine Elemente

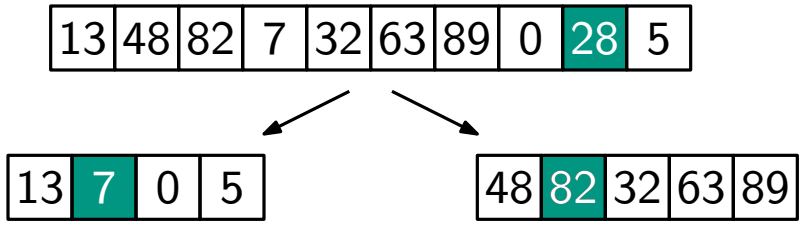
- wähle ein Element als **Pivot Element**
- zwei Teilarrays: Elemente die kleiner/größer sind als das Pivot



Quicksort: arbeiten beim Zerlegen

Zerlegung in große und kleine Elemente

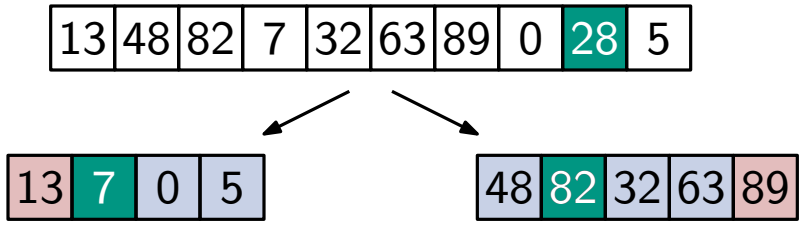
- wähle ein Element als **Pivot Element**
- zwei Teilarrays: Elemente die kleiner/größer sind als das Pivot



Quicksort: arbeiten beim Zerlegen

Zerlegung in große und kleine Elemente

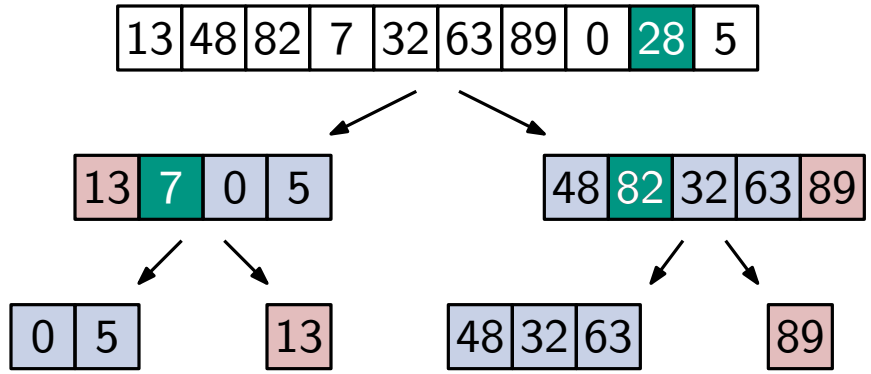
- wähle ein Element als **Pivot Element**
- zwei Teilarrays: Elemente die kleiner/größer sind als das Pivot



Quicksort: arbeiten beim Zerlegen

Zerlegung in große und kleine Elemente

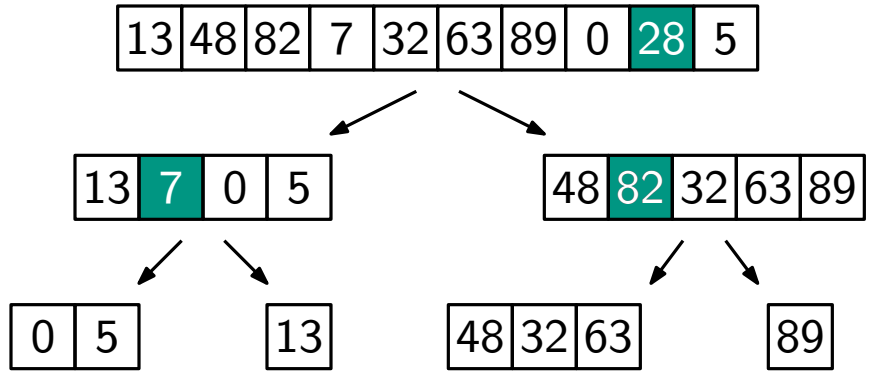
- wähle ein Element als **Pivot Element**
- zwei Teilarrays: Elemente die kleiner/größer sind als das Pivot



Quicksort: arbeiten beim Zerlegen

Zerlegung in große und kleine Elemente

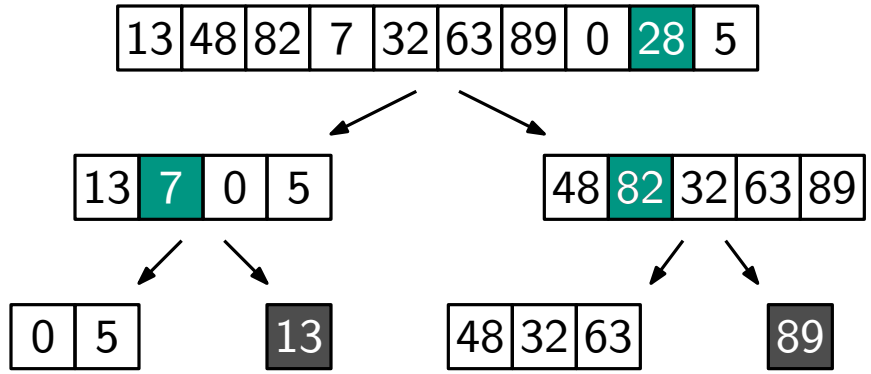
- wähle ein Element als **Pivot Element**
- zwei Teilarrays: Elemente die kleiner/größer sind als das Pivot



Quicksort: arbeiten beim Zerlegen

Zerlegung in große und kleine Elemente

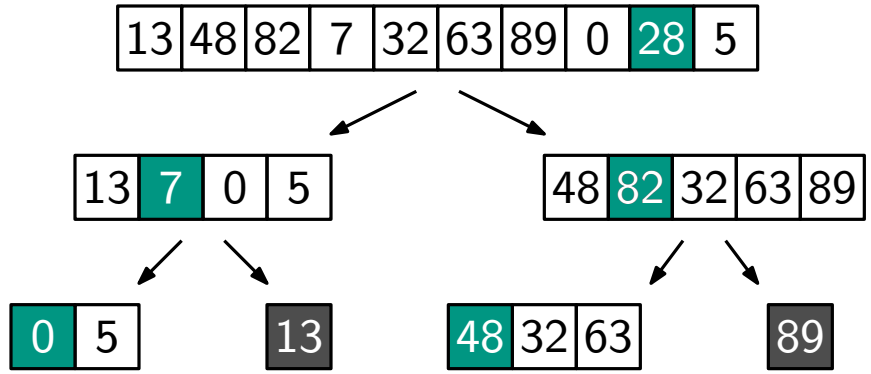
- wähle ein Element als **Pivot Element**
- zwei Teilarrays: Elemente die kleiner/größer sind als das Pivot



Quicksort: arbeiten beim Zerlegen

Zerlegung in große und kleine Elemente

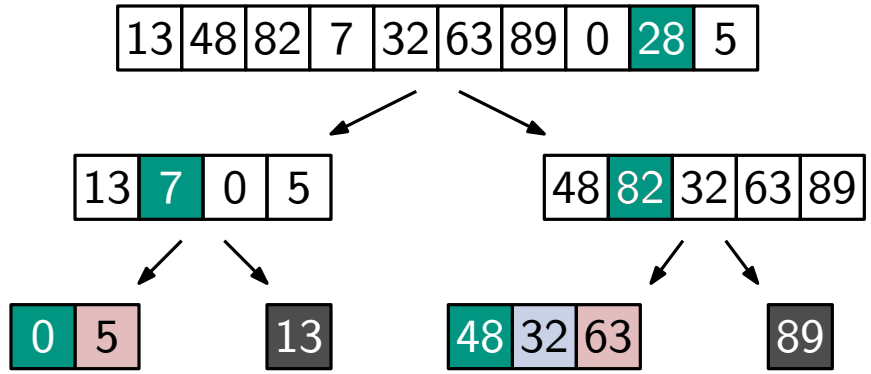
- wähle ein Element als **Pivot Element**
- zwei Teilarrays: Elemente die kleiner/größer sind als das Pivot



Quicksort: arbeiten beim Zerlegen

Zerlegung in große und kleine Elemente

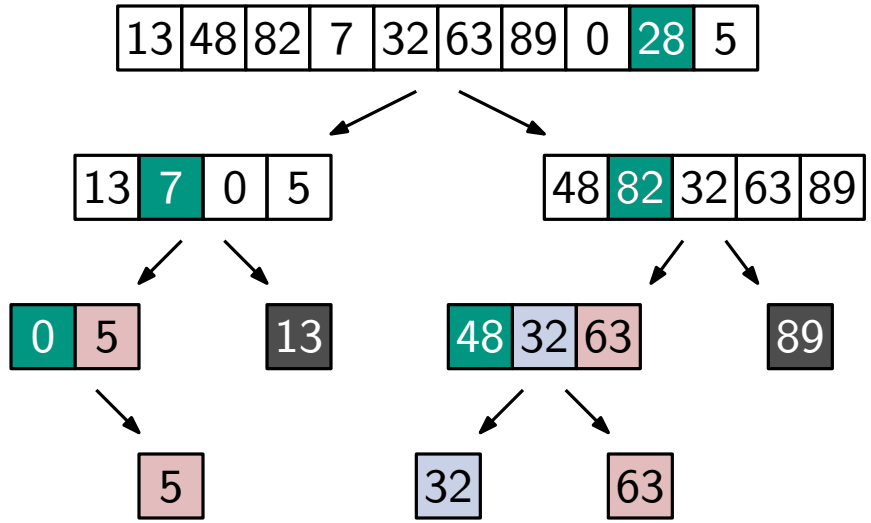
- wähle ein Element als **Pivot Element**
- zwei Teilarrays: Elemente die kleiner/größer sind als das Pivot



Quicksort: arbeiten beim Zerlegen

Zerlegung in große und kleine Elemente

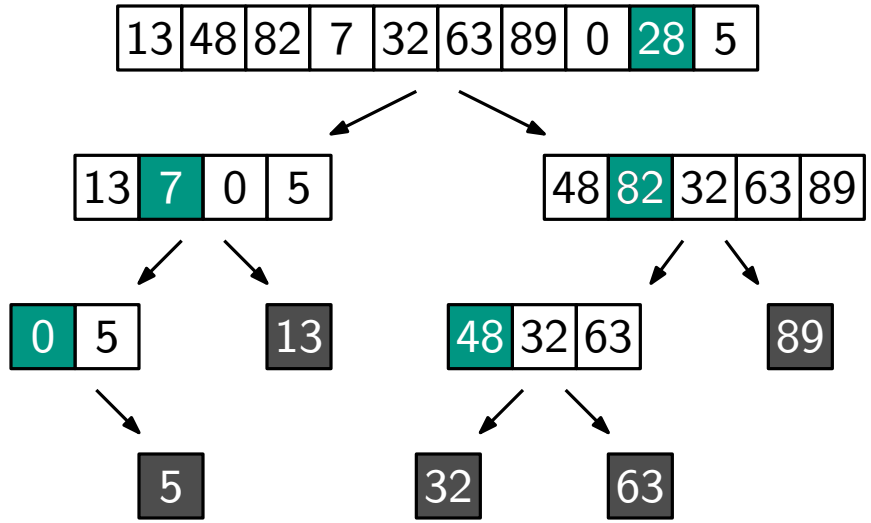
- wähle ein Element als **Pivot Element**
- zwei Teilarrays: Elemente die kleiner/größer sind als das Pivot



Quicksort: arbeiten beim Zerlegen

Zerlegung in große und kleine Elemente

- wähle ein Element als **Pivot Element**
- zwei Teilarrays: Elemente die kleiner/größer sind als das Pivot



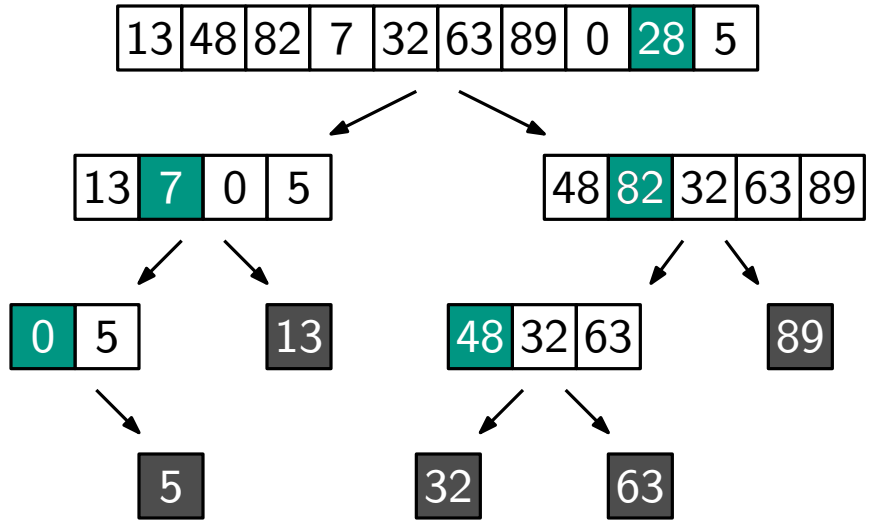
Quicksort: arbeiten beim Zerlegen

Zerlegung in große und kleine Elemente

- wähle ein Element als **Pivot Element**
- zwei Teilarrays: Elemente die kleiner/größer sind als das Pivot

Best Case

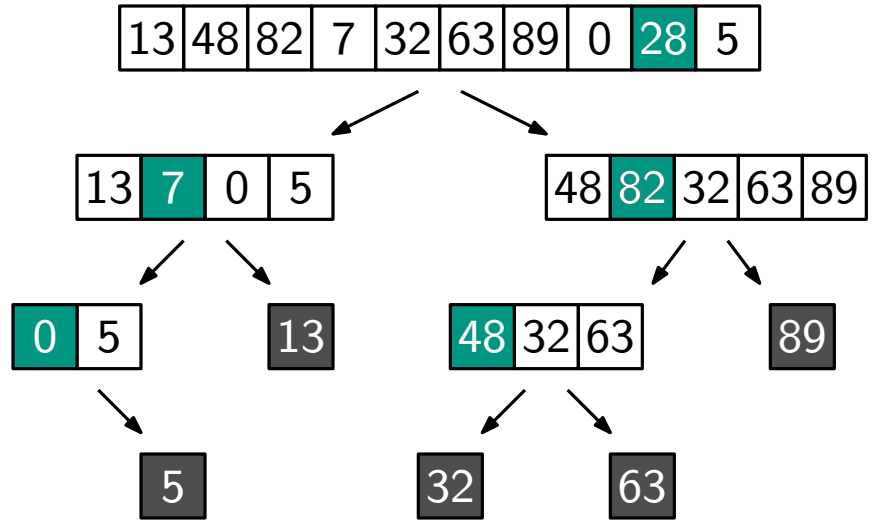
- die zwei Teilarrays sind etwa gleich groß
- $\Theta(\log n)$ Ebenen, $\Theta(n)$ Vergleiche pro Ebene
- Gesamtkosten: $\Theta(n \log n)$



Quicksort: arbeiten beim Zerlegen

Zerlegung in große und kleine Elemente

- wähle ein Element als **Pivot Element**
- zwei Teilarrays: Elemente die kleiner/größer sind als das Pivot

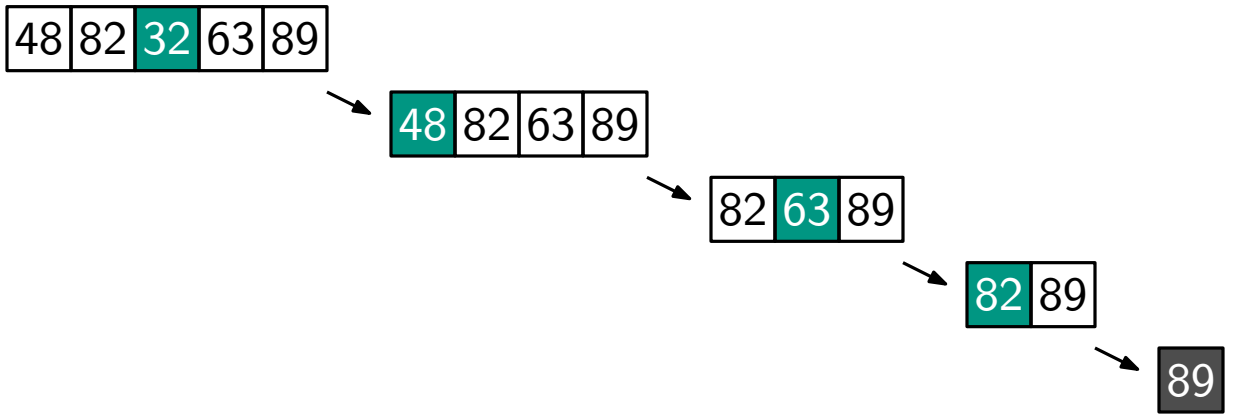


Best Case

- die zwei Teilarrays sind etwa gleich groß
- $\Theta(\log n)$ Ebenen, $\Theta(n)$ Vergleiche pro Ebene
- Gesamtkosten: $\Theta(n \log n)$

Worst Case

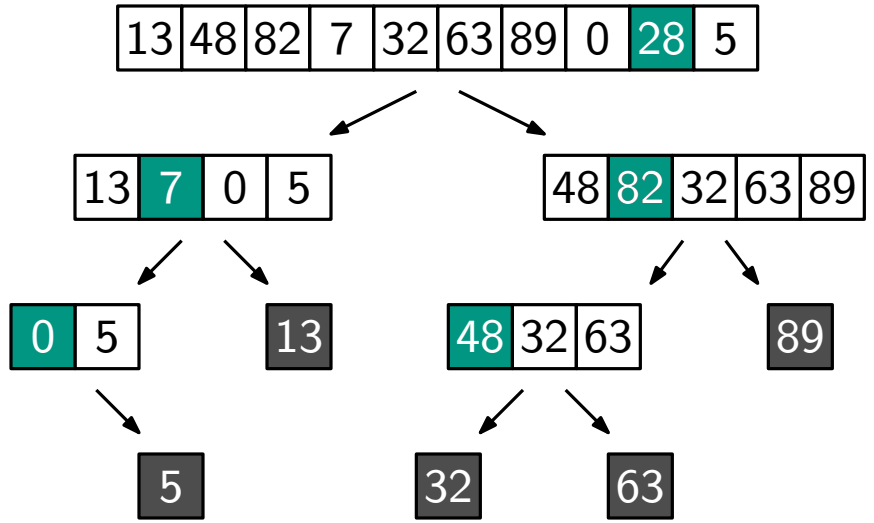
- Pivot ist kleinstes oder größtes Element
- Vergleich zwischen jedem Elementpaar
- Gesamtkosten: $\Theta(n^2)$



Quicksort: arbeiten beim Zerlegen

Zerlegung in große und kleine Elemente

- wähle ein Element als **Pivot Element**
- zwei Teilarrays: Elemente die kleiner/größer sind als das Pivot

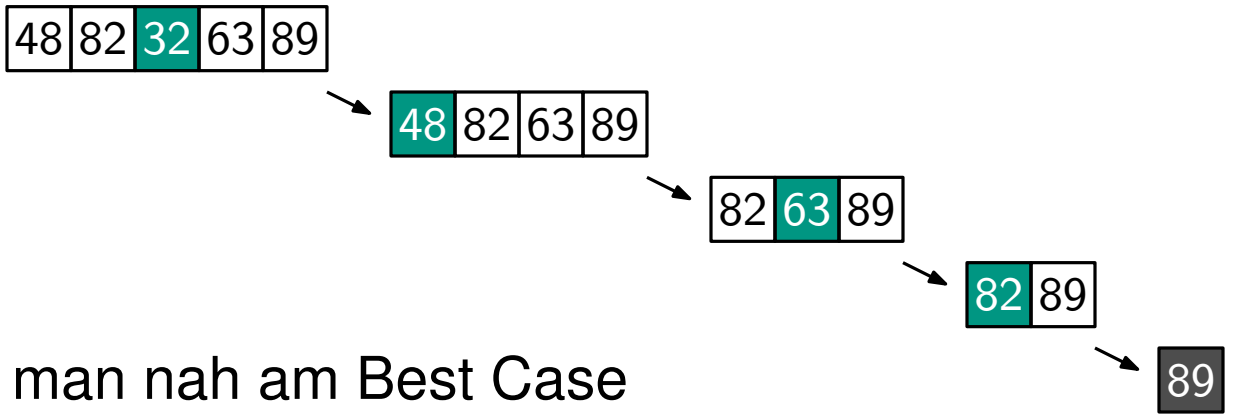


Best Case

- die zwei Teilarrays sind etwa gleich groß
- $\Theta(\log n)$ Ebenen, $\Theta(n)$ Vergleiche pro Ebene
- Gesamtkosten: $\Theta(n \log n)$

Worst Case

- Pivot ist kleinstes oder größtes Element
- Vergleich zwischen jedem Elementpaar
- Gesamtkosten: $\Theta(n^2)$



Hoffnung: mit zufällig gewähltem Pivot ist man nah am Best Case

Erwartete Laufzeit bei zufälligen Pivots

Zufallsvariablen

- X: Anzahl Vergleiche insgesamt
- X_i: Anzahl Vergleiche des i-ten Elements e_i mit einem Pivot

Erwartete Laufzeit bei zufälligen Pivots

Nutze Linearität des Erwartungswerts

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$$

- Ziel: schätze $\mathbb{E}[X_i]$ ab für beliebiges aber festes i

Zufallsvariablen

- X: Anzahl Vergleiche insgesamt
- X_i: Anzahl Vergleiche des i-ten Elements e_i mit einem Pivot

Erwartete Laufzeit bei zufälligen Pivots

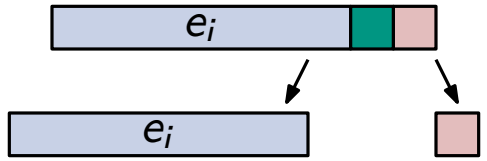
Nutze Linearität des Erwartungswerts

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$$

- Ziel: schätze $\mathbb{E}[X_i]$ ab für beliebiges aber festes i

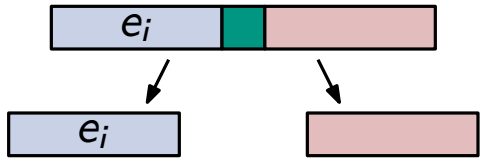
Vergleiche des i-ten Elements e_i

schlechter Vergleich



ungleichmäßige Aufteilung

guter Vergleich



gleichmäßige Aufteilung

Zufallsvariablen

- X: Anzahl Vergleiche insgesamt
- X_i: Anzahl Vergleiche des i-ten Elements e_i mit einem Pivot
- X_i^-: Anzahl schlechte Vergleiche von e_i mit einem Pivot
- X_i^+: Anzahl gute Vergleiche von e_i mit einem Pivot

Erwartete Laufzeit bei zufälligen Pivots

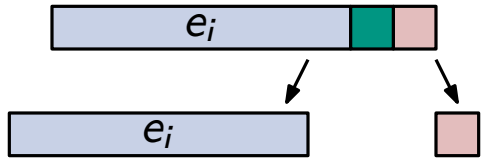
Nutze Linearität des Erwartungswerts

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$$

- Ziel: schätze $\mathbb{E}[X_i]$ ab für beliebiges aber festes i

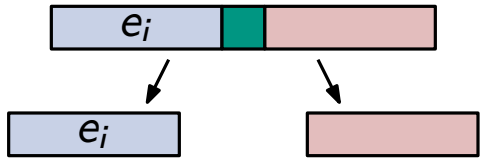
Vergleiche des i-ten Elements e_i

schlechter Vergleich



ungleichmäßige Aufteilung

guter Vergleich



gleichmäßige Aufteilung

Zufallsvariablen

- X: Anzahl Vergleiche insgesamt
- X_i: Anzahl Vergleiche des i-ten Elements e_i mit einem Pivot
- X_i^-: Anzahl schlechte Vergleiche von e_i mit einem Pivot
- X_i^+: Anzahl gute Vergleiche von e_i mit einem Pivot

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_i] &= \mathbb{E}\left[X_i^- + X_i^+\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X_i^-\right] + \mathbb{E}\left[X_i^+\right]\end{aligned}$$

Erwartete Laufzeit bei zufälligen Pivots

Nutze Linearität des Erwartungswerts

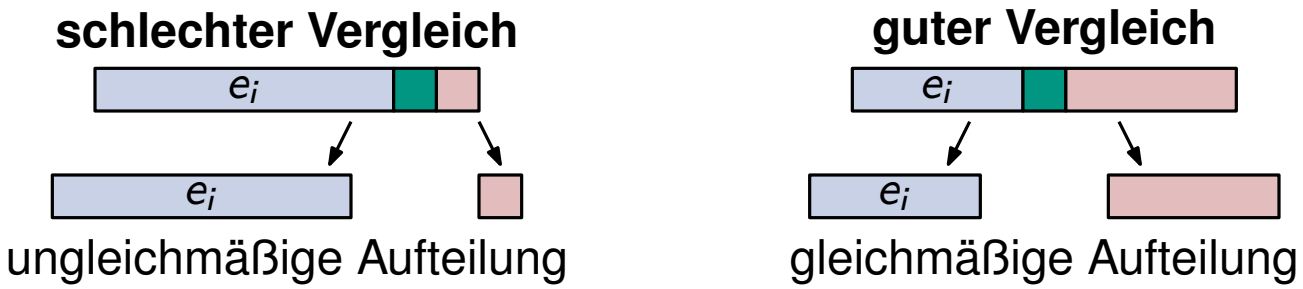
$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$$

- Ziel: schätze $\mathbb{E}[X_i]$ ab für beliebiges aber festes i

Zufallsvariablen

- X: Anzahl Vergleiche insgesamt
- X_i: Anzahl Vergleiche des i-ten Elements e_i mit einem Pivot
- X_i^-: Anzahl schlechte Vergleiche von e_i mit einem Pivot
- X_i^+: Anzahl gute Vergleiche von e_i mit einem Pivot

Vergleiche des i-ten Elements e_i



- Ziel: wähle genaue Definition sodass
  - weniger schlecht als gut: $\mathbb{E}\left[X_i^-\right] \leq \mathbb{E}\left[X_i^+\right]$
  - wenige gute Vergleiche: $X_i^+ \in O(\log n)$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_i] &= \mathbb{E}\left[X_i^- + X_i^+\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X_i^-\right] + \mathbb{E}\left[X_i^+\right]\end{aligned}$$

Erwartete Laufzeit bei zufälligen Pivots

Nutze Linearität des Erwartungswerts

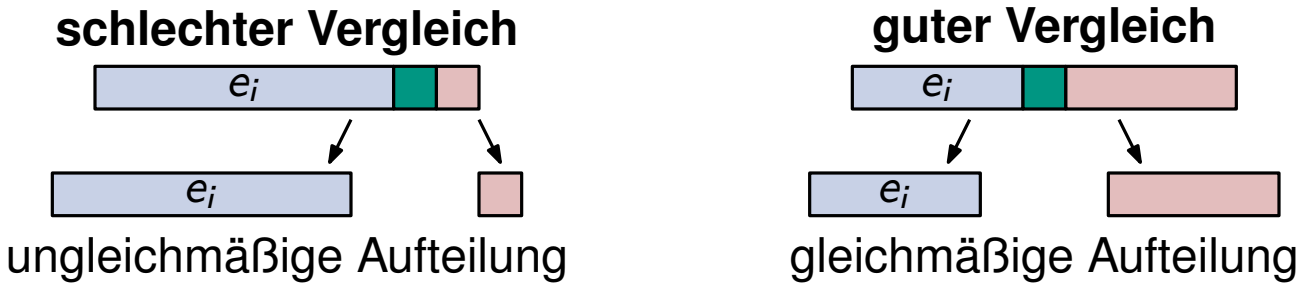
$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$$

- Ziel: schätze $\mathbb{E}[X_i]$ ab für beliebiges aber festes i

Zufallsvariablen

- X: Anzahl Vergleiche insgesamt
- X_i: Anzahl Vergleiche des i-ten Elements e_i mit einem Pivot
- X_i^-: Anzahl schlechte Vergleiche von e_i mit einem Pivot
- X_i^+: Anzahl gute Vergleiche von e_i mit einem Pivot

Vergleiche des i-ten Elements e_i



- Ziel: wähle genaue Definition sodass
  - weniger schlecht als gut: $\mathbb{E}[X_i^-] \leq \mathbb{E}[X_i^+]$
  - wenige gute Vergleiche: $X_i^+ \in O(\log n)$

$$\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X_i^- + X_i^+] = \mathbb{E}[X_i^-] + \mathbb{E}[X_i^+] \leq 2\mathbb{E}[X_i^+] \in O(\log n)$$

Erwartete Laufzeit bei zufälligen Pivots

Nutze Linearität des Erwartungswerts

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] \in O(n \log n)$$

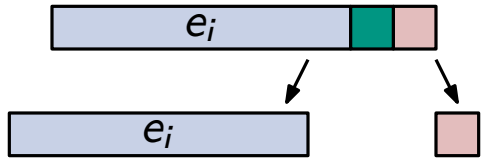
- Ziel: schätze $\mathbb{E}[X_i]$ ab für beliebiges aber festes i

Zufallsvariablen

- X: Anzahl Vergleiche insgesamt
- X_i: Anzahl Vergleiche des i-ten Elements e_i mit einem Pivot
- X_i^-: Anzahl schlechte Vergleiche von e_i mit einem Pivot
- X_i^+: Anzahl gute Vergleiche von e_i mit einem Pivot

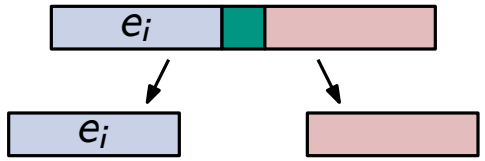
Vergleiche des i-ten Elements e_i

schlechter Vergleich



ungleichmäßige Aufteilung

guter Vergleich



gleichmäßige Aufteilung

- Ziel: wähle genaue Definition sodass
  - weniger schlecht als gut: $\mathbb{E}[X_i^-] \leq \mathbb{E}[X_i^+]$
  - wenige gute Vergleiche: $X_i^+ \in O(\log n)$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_i] &= \mathbb{E}[X_i^- + X_i^+] \\ &= \mathbb{E}[X_i^-] + \mathbb{E}[X_i^+] \\ &\leq 2\mathbb{E}[X_i^+] \in O(\log n)\end{aligned}$$

Gute und schlechte Vergleiche im Detail

Wann nennen wir den Vergleich mit einem Pivot gut?

Zufallsvariablen

- X_i^-: Anzahl schlechte Vergleiche von e_i mit einem Pivot
- X_i^+: Anzahl gute Vergleiche von e_i mit einem Pivot

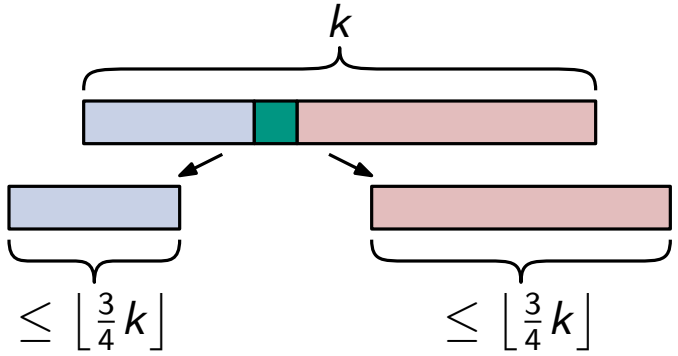
Wenige gute Vergleiche: $X_i^+ \in O(\log n)$

Mehr gute als schlechte Vergleiche: $\mathbb{E}\left[X_i^+\right] \geq \mathbb{E}\left[X_i^-\right]$

Gute und schlechte Vergleiche im Detail

Wann nennen wir den Vergleich mit einem Pivot gut?

- k: Größe des aktuellen Arrays
- guter Vergleich: beide Teilarrays $\leq \left\lfloor \frac{3}{4} k \right\rfloor$



Zufallsvariablen

- X_i^-: Anzahl schlechte Vergleiche von e_i mit einem Pivot
- X_i^+: Anzahl gute Vergleiche von e_i mit einem Pivot

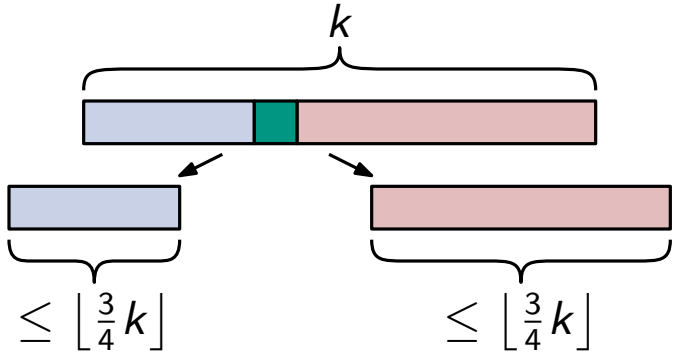
Wenige gute Vergleiche: $X_i^+ \in O(\log n)$

Mehr gute als schlechte Vergleiche: $\mathbb{E}\left[X_i^+\right] \geq \mathbb{E}\left[X_i^-\right]$

Gute und schlechte Vergleiche im Detail

Wann nennen wir den Vergleich mit einem Pivot gut?

- k: Größe des aktuellen Arrays
- guter Vergleich: beide Teilarrays $\leq \left\lfloor \frac{3}{4} k \right\rfloor$



Zufallsvariablen

- X_i^-: Anzahl schlechte Vergleiche von e_i mit einem Pivot
- X_i^+: Anzahl gute Vergleiche von e_i mit einem Pivot

Wenige gute Vergleiche: $X_i^+ \in O(\log n)$

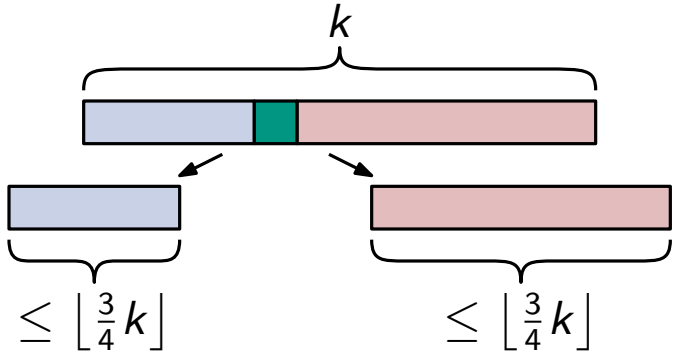
- Teilarray von e_i schrumpft bei jedem guten Vergleich um den Faktor $\frac{3}{4}$
- das kann nur $O(\log n)$ oft passieren

Mehr gute als schlechte Vergleiche: $\mathbb{E}\left[X_i^+\right] \geq \mathbb{E}\left[X_i^-\right]$

Gute und schlechte Vergleiche im Detail

Wann nennen wir den Vergleich mit einem Pivot gut?

- k: Größe des aktuellen Arrays
- guter Vergleich: beide Teilarrays $\leq \left\lfloor \frac{3}{4} k \right\rfloor$



Zufallsvariablen

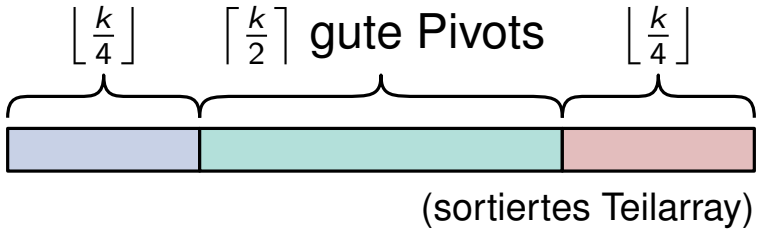
- X_i^-: Anzahl schlechte Vergleiche von e_i mit einem Pivot
- X_i^+: Anzahl gute Vergleiche von e_i mit einem Pivot

Wenige gute Vergleiche: $X_i^+ \in O(\log n)$

- Teilarray von e_i schrumpft bei jedem guten Vergleich um den Faktor $\frac{3}{4}$
- das kann nur $O(\log n)$ oft passieren

Mehr gute als schlechte Vergleiche: $\mathbb{E}\left[X_i^+\right] \geq \mathbb{E}\left[X_i^-\right]$

- Hälfte der möglichen Pivots führen zu gutem Vergleich
- daher: $\Pr$ [guter Vergleich] $\geq \frac{1}{2} \geq \Pr$ [schlechter Vergleich]



Quicksort: Ergebnis

Theorem
Auf jeder Eingabe der Länge n benötigt Quicksort mit zufälligen Pivots im Erwartungswert $O(n \log n)$ Vergleiche.

Quicksort: Ergebnis

Theorem
Auf jeder Eingabe der Länge n benötigt Quicksort mit zufälligen Pivots im Erwartungswert $O(n \log n)$ Vergleiche.

Anmerkungen

- damit ist auch die Erwartete Laufzeit in $O(n \log n)$
- wir sprechen hier auch vom **Average Case**
- der Erwartungswert bezieht sich nur auf die zufälligen Entscheidungen des Algorithmus
- bei der Eingabe wird weiterhin der Worst Case betrachtet

Quicksort: Ergebnis

Theorem
Auf jeder Eingabe der Länge n benötigt Quicksort mit zufälligen Pivots im Erwartungswert $O(n \log n)$ Vergleiche.

Anmerkungen

- damit ist auch die Erwartete Laufzeit in $O(n \log n)$
- wir sprechen hier auch vom **Average Case**
- der Erwartungswert bezieht sich nur auf die zufälligen Entscheidungen des Algorithmus
- bei der Eingabe wird weiterhin der Worst Case betrachtet

Bonus am Ende der Folien: alternative Analyse

- liefert alternative Perspektive
- gibt genaueres Ergebnis

Untere Schranke: Geht es schneller?

Theorem
Jeder vergleichsbasierte Sortieralgorithmus benötigt $\Omega(n \log n)$ Vergleiche um eine Folge von n Elementen zu sortieren.

Beweis

Anmerkung: vergleichsbasiert

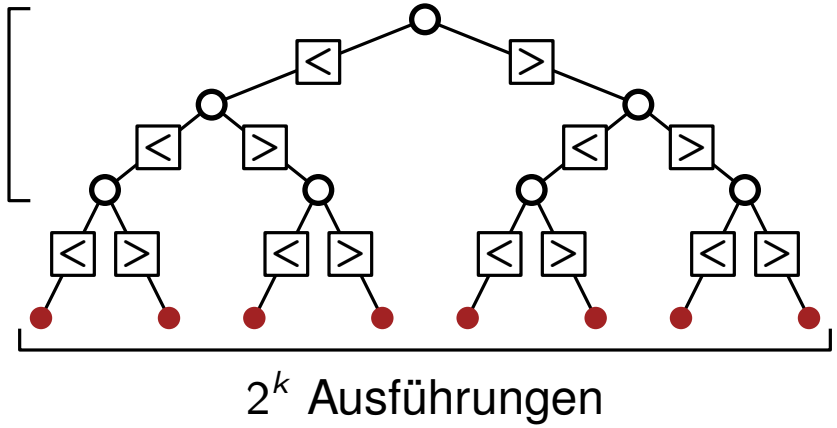
- Ausführung des Algo: Sequenz von Lese- und Schreibzugriffen auf den Speicher
- vergleichsbasiert: diese Sequenz hängt nur von den Vergleichen ab
- selbe Vergleichsergebnisse $\Rightarrow$ selbe Ausführung

Untere Schranke: Geht es schneller?

Theorem
Jeder vergleichsbasierte Sortieralgorithmus benötigt $\Omega(n \log n)$ Vergleiche um eine Folge von n Elementen zu sortieren.

Beweis

- ähnlich wie bei der binären Suche:
  - binäre Entscheidung pro Vergleich
  - k Vergleiche $\rightarrow 2^k$ verschiedene Ausführungen



Anmerkung: vergleichsbasiert

- Ausführung des Algo: Sequenz von Lese- und Schreibzugriffen auf den Speicher
- vergleichsbasiert: diese Sequenz hängt nur von den Vergleichen ab
- selbe Vergleichsergebnisse $\Rightarrow$ selbe Ausführung

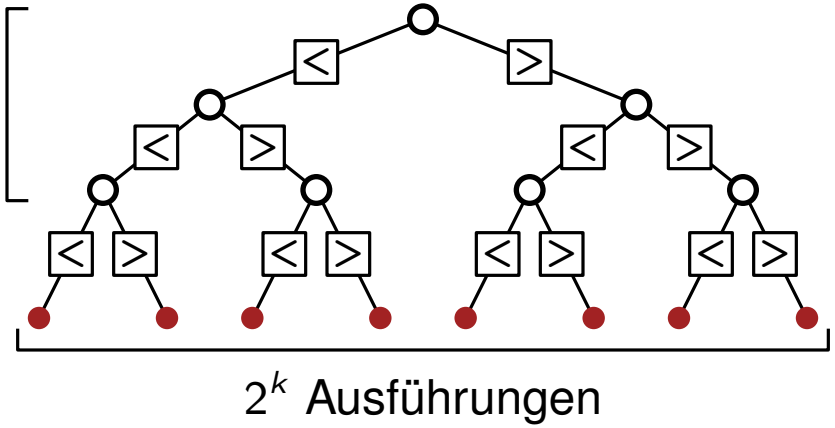
app.klicker.uzh.ch/join/algo1

Untere Schranke: Geht es schneller?

Theorem
Jeder vergleichsbasierte Sortieralgorithmus benötigt $\Omega(n \log n)$ Vergleiche um eine Folge von n Elementen zu sortieren.

Beweis

- ähnlich wie bei der binären Suche:
  - binäre Entscheidung pro Vergleich
  - k Vergleiche $\rightarrow 2^k$ verschiedene Ausführungen



Wie viele verschiedene Ausführungen muss jeder korrekte Algorithmus haben können?

Anmerkung: vergleichsbasiert

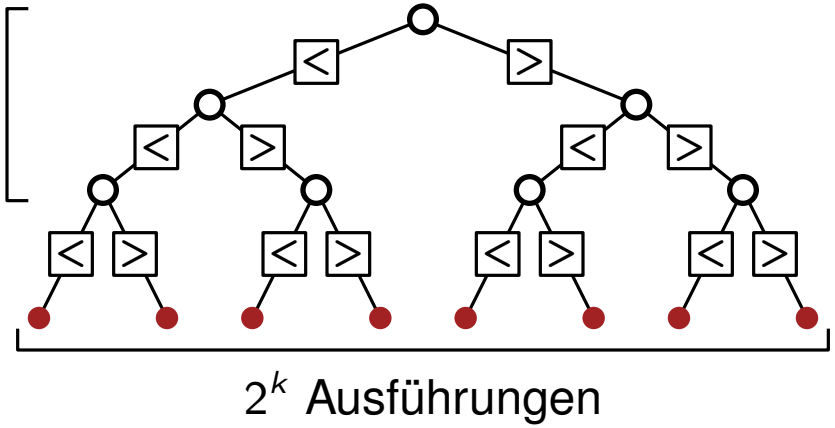
- Ausführung des Algo: Sequenz von Lese- und Schreibzugriffen auf den Speicher
- vergleichsbasiert: diese Sequenz hängt nur von den Vergleichen ab
- selbe Vergleichsergebnisse $\Rightarrow$ selbe Ausführung

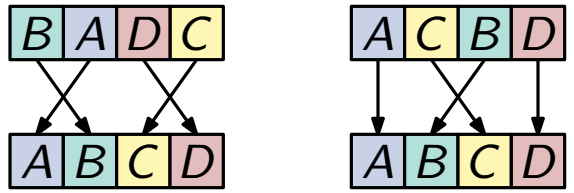
Untere Schranke: Geht es schneller?

Theorem
Jeder vergleichsbasierte Sortieralgorithmus benötigt $\Omega(n \log n)$ Vergleiche um eine Folge von n Elementen zu sortieren.

Beweis

- ähnlich wie bei der binären Suche:
  - binäre Entscheidung pro Vergleich
  - k Vergleiche $\rightarrow 2^k$ verschiedene Ausführungen
- verschiedene Ausführungen:
  - betrachte zwei Permutationen der Eingabe
  - Elemente müssen unterschiedlich umsortiert werden
  - jede Permutation führt zu unterschiedlicher Ausführung
  - jeder korrekte Algo braucht $n!$ verschiedene Ausführungen ($n!$ Blätter im Entscheidungsbaum)



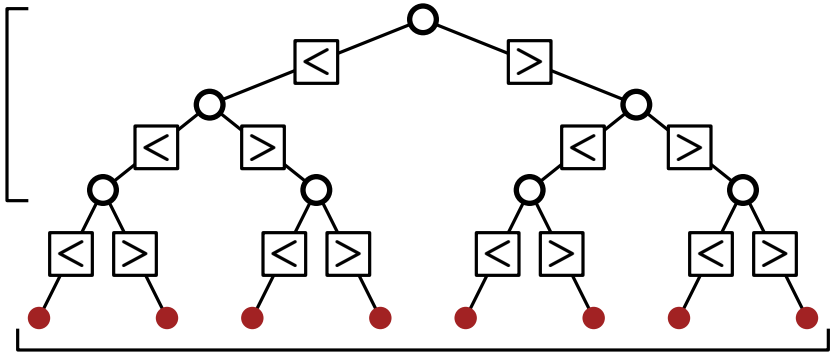


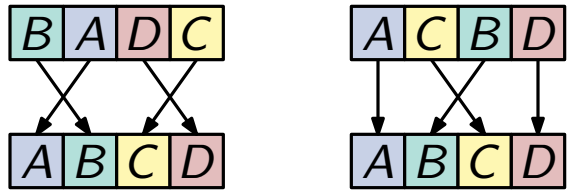
Untere Schranke: Geht es schneller?

Theorem
Jeder vergleichsbasierte Sortieralgorithmus benötigt $\Omega(n \log n)$ Vergleiche um eine Folge von n Elementen zu sortieren.

Beweis

- ähnlich wie bei der binären Suche:
  - binäre Entscheidung pro Vergleich
  - k Vergleiche $\rightarrow 2^k$ verschiedene Ausführungen
- verschiedene Ausführungen:
  - betrachte zwei Permutationen der Eingabe
  - Elemente müssen unterschiedlich umsortiert werden
  - jede Permutation führt zu unterschiedlicher Ausführung
  - jeder korrekte Algo braucht $n!$ verschiedene Ausführungen ($n!$ Blätter im Entscheidungsbaum)
- min. $n!$ Ausführungen $\Rightarrow$ min. $\log(n!)$ Vergleiche



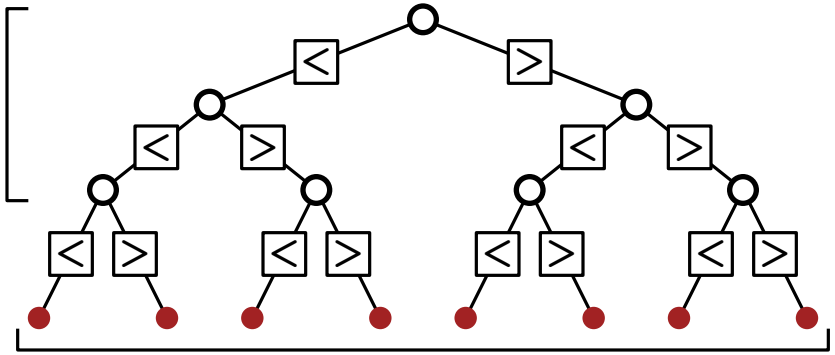


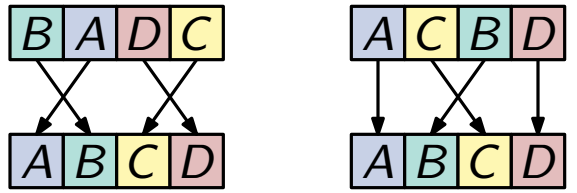
Untere Schranke: Geht es schneller?

Theorem
Jeder vergleichsbasierte Sortieralgorithmus benötigt $\Omega(n \log n)$ Vergleiche um eine Folge von n Elementen zu sortieren.

Beweis

- ähnlich wie bei der binären Suche:
  - binäre Entscheidung pro Vergleich
  - k Vergleiche $\rightarrow 2^k$ verschiedene Ausführungen
- verschiedene Ausführungen:
  - betrachte zwei Permutationen der Eingabe
  - Elemente müssen unterschiedlich umsortiert werden
  - jede Permutation führt zu unterschiedlicher Ausführung
  - jeder korrekte Algo braucht $n!$ verschiedene Ausführungen ($n!$ Blätter im Entscheidungsbaum)
- min. $n!$ Ausführungen $\Rightarrow$ min. $\log(n!)$ Vergleiche





zu zeigen: $\log(n!) \in \Theta(n \log n)$

Nebenrechnung: $\log(n!) \in \Theta(n \log n)$

Möglichkeit 1: Stirlingformel

- die Stirlingformel sagt: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \in \Theta\left(\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$

Logarithmengesetze

- $\log(a \cdot b) = \log(a) + log(b)$
- $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - log(b)$
- $\log(a^b) = b \cdot \log(a)$

Nebenrechnung: $\log(n!) \in \Theta(n \log n)$

Möglichkeit 1: Stirlingformel

- die Stirlingformel sagt: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \in \Theta\left(\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$
- daher: $\log(n!) \in \Theta\left(\log\left(\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)\right)$

$$= \Theta\left(\log\left(\sqrt{n}\right) + n \cdot (\log n - \log e)\right) = \Theta(n \log n)$$

Logarithmengesetze

- $\log(a \cdot b) = \log(a) + log(b)$
- $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - log(b)$
- $\log(a^b) = b \cdot \log(a)$

Nebenrechnung: $\log(n!) \in \Theta(n \log n)$

Möglichkeit 1: Stirlingformel

- die Stirlingformel sagt: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \in \Theta\left(\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$
- daher: $\log(n!) \in \Theta\left(\log\left(\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)\right)$

$$= \Theta\left(\log\left(\sqrt{n}\right) + n \cdot (\log n - \log e)\right) = \Theta(n \log n)$$

Logarithmengesetze

- $\log(a \cdot b) = \log(a) + log(b)$
- $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - log(b)$
- $\log(a^b) = b \cdot \log(a)$

Möglichkeit 2: von Hand

- $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 1$
- $\log(n!) = \log(n) + \log(n-1) + \log(n-2) + \cdots + \log(1) \in O(n \log n)$

(n Summanden, jeder $\leq \log n$)

Nebenrechnung: $\log(n!) \in \Theta(n \log n)$

Möglichkeit 1: Stirlingformel

- die Stirlingformel sagt: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \in \Theta\left(\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$
- daher: $\log(n!) \in \Theta\left(\log\left(\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)\right)$

$$= \Theta\left(\log\left(\sqrt{n}\right) + n \cdot (\log n - \log e)\right) = \Theta(n \log n)$$

Logarithmengesetze

- $\log(a \cdot b) = \log(a) + log(b)$
- $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - log(b)$
- $\log(a^b) = b \cdot \log(a)$

Möglichkeit 2: von Hand

- $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 1$
- $\log(n!) = \underbrace{\log(n) + \log(n-1) + \log(n-2) + \cdots}_{\text{ersten } \frac{n}{2} \text{ Summanden} \geq \log(\frac{n}{2})} + \log(1) \in O(n \log n)$

n Summanden, jeder $\leq \log n$

Nebenrechnung: $\log(n!) \in \Theta(n \log n)$

Möglichkeit 1: Stirlingformel

- die Stirlingformel sagt: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \in \Theta\left(\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$
- daher: $\log(n!) \in \Theta\left(\log\left(\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)\right)$

$$= \Theta\left(\log\left(\sqrt{n}\right) + n \cdot (\log n - \log e)\right) = \Theta(n \log n)$$

Logarithmengesetze

- $\log(a \cdot b) = \log(a) + log(b)$
- $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - log(b)$
- $\log(a^b) = b \cdot \log(a)$

Möglichkeit 2: von Hand

- $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 1$
- $\log(n!) = \underbrace{\log(n) + \log(n-1) + \log(n-2) + \cdots}_{\text{ersten } \frac{n}{2} \text{ Summanden} \geq \log(\frac{n}{2})} + \log(1) \in O(n \log n)$

n Summanden, jeder $\leq \log n$

- also: $\log(n!) \geq \frac{n}{2} \cdot \log(\frac{n}{2}) = \frac{n}{2} \log n - \frac{n}{2} \log 2 \in \Omega(n \log n)$

Nebenrechnung: $\log(n!) \in \Theta(n \log n)$

Möglichkeit 1: Stirlingformel

- die Stirlingformel sagt: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \in \Theta\left(\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$
- daher: $\log(n!) \in \Theta\left(\log\left(\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)\right)$

$$= \Theta\left(\log\left(\sqrt{n}\right) + n \cdot (\log n - \log e)\right) = \Theta(n \log n)$$

Logarithmengesetze

- $\log(a \cdot b) = \log(a) + log(b)$
- $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - log(b)$
- $\log(a^b) = b \cdot \log(a)$

Möglichkeit 2: von Hand

- $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 1$
- $\log(n!) = \underbrace{\log(n) + \log(n-1) + \log(n-2) + \cdots}_{\text{ersten } \frac{n}{2} \text{ Summanden} \geq \log(\frac{n}{2})} + \log(1) \in O(n \log n)$

n Summanden, jeder $\leq \log n$

- also: $\log(n!) \geq \frac{n}{2} \cdot \log(\frac{n}{2}) = \frac{n}{2} \log n - \frac{n}{2} \log 2 \in \Omega(n \log n)$

$$\Rightarrow \log(n!) \in \Theta(n \log n)$$

Zusammenfassung

Heute gesehen

- Teile und Herrsche zum Sortieren von Folgen
- Mergesort: arbeite beim Zusammenfügen der Teillösungen
- Quicksort: arbeite beim Zerlegen in Teilprobleme

Zusammenfassung

Heute gesehen

- Teile und Herrsche zum Sortieren von Folgen
- Mergesort: arbeite beim Zusammenfügen der Teillösungen
- Quicksort: arbeite beim Zerlegen in Teilprobleme

Average Case Analyse bei Quicksort

- hier gesehen: zähle Vergleiche für ein einzelnes Element
- Abschätzen von Erwartungswerten: Aufspaltung in Summe einfacherer Zufallsvariablen

Zusammenfassung

Heute gesehen

- Teile und Herrsche zum Sortieren von Folgen
- Mergesort: arbeite beim Zusammenfügen der Teillösungen
- Quicksort: arbeite beim Zerlegen in Teilprobleme

Average Case Analyse bei Quicksort

- hier gesehen: zähle Vergleiche für ein einzelnes Element
- Abschätzen von Erwartungswerten: Aufspaltung in Summe einfacherer Zufallsvariablen

Bonus (nach dieser Folie): Average Case Analyse bei Quicksort

- betrachte Vergleichswahrscheinlichkeit für jedes Elementpaar
- Abschätzung von Summen: Approximation mittels Integral

Zusammenfassung

Heute gesehen

- Teile und Herrsche zum Sortieren von Folgen
- Mergesort: arbeite beim Zusammenfügen der Teillösungen
- Quicksort: arbeite beim Zerlegen in Teilprobleme

Average Case Analyse bei Quicksort

- hier gesehen: zähle Vergleiche für ein einzelnes Element
- Abschätzen von Erwartungswerten: Aufspaltung in Summe einfacherer Zufallsvariablen

Bonus (nach dieser Folie): Average Case Analyse bei Quicksort

- betrachte Vergleichswahrscheinlichkeit für jedes Elementpaar
- Abschätzung von Summen: Approximation mittels Integral

Vergleichsbasiertes Sortieren

- untere Schranke: jeder vergleichsbasierte Sortieralgo benötigt $\Omega(n \log n)$ Vergleiche
- Technik: Entscheidungsbaum (wie schon bei der binären Suche)

Bonus: Alternative Analyse

Summe der einzelnen Vergleiche

- seien $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_n$ die sortierten Elemente
- $X_{ij} = 1$ wenn e_i und e_j verglichen werden, $X_{ij} = 0$ sonst

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{E}[X_{ij}]$$

Zufallsvariablen

- X: Anzahl Vergleiche insgesamt
- X_{ij}: Indikatorvariable für Vergleich zwischen e_i und e_j

Bonus: Alternative Analyse

Summe der einzelnen Vergleiche

- seien $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_n$ die sortierten Elemente
- $X_{ij} = 1$ wenn e_i und e_j verglichen werden, $X_{ij} = 0$ sonst

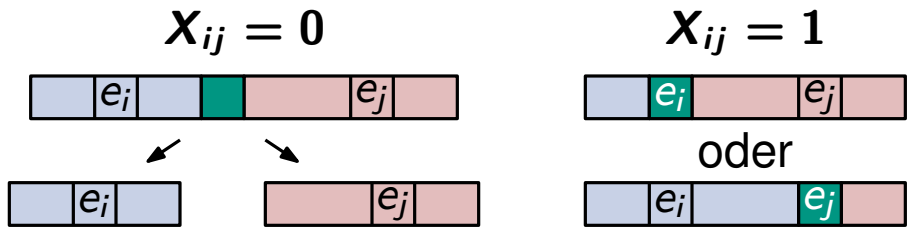
$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{E}[X_{ij}]$$

Zufallsvariablen

- X: Anzahl Vergleiche insgesamt
- X_{ij}: Indikatorvariable für Vergleich zwischen e_i und e_j

Wahrscheinlichkeit für $X_{ij} = 1$

- $X_{ij} = 1 \Leftrightarrow$ das erste Pivot aus $\{e_i, e_{i+1}, \ldots, e_{j-1}, e_j\}$ ist e_i oder e_j



app.klicker.uzh.ch/join/algo1

Bonus: Alternative Analyse

Summe der einzelnen Vergleiche

- seien $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_n$ die sortierten Elemente
- $X_{ij} = 1$ wenn e_i und e_j verglichen werden, $X_{ij} = 0$ sonst

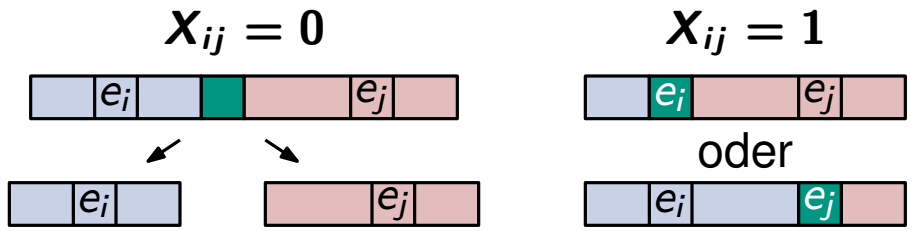
$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{E}[X_{ij}]$$

Zufallsvariablen

- X: Anzahl Vergleiche insgesamt
- X_{ij}: Indikatorvariable für Vergleich zwischen e_i und e_j

Wahrscheinlichkeit für $X_{ij} = 1$

- $X_{ij} = 1 \Leftrightarrow$ das erste Pivot aus $\{e_i, e_{i+1}, \ldots, e_{j-1}, e_j\}$ ist e_i oder e_j



Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird e_i mit e_j verglichen?

Bonus: Alternative Analyse

Summe der einzelnen Vergleiche

- seien $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_n$ die sortierten Elemente
- $X_{ij} = 1$ wenn e_i und e_j verglichen werden, $X_{ij} = 0$ sonst

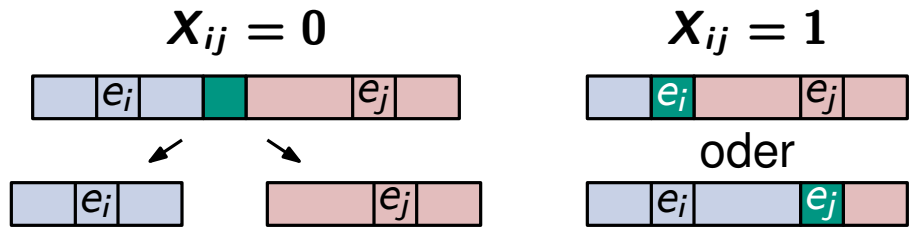
$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{E}[X_{ij}]$$

Zufallsvariablen

- X: Anzahl Vergleiche insgesamt
- X_{ij}: Indikatorvariable für Vergleich zwischen e_i und e_j

Wahrscheinlichkeit für $X_{ij} = 1$

- $X_{ij} = 1 \Leftrightarrow$ das erste Pivot aus $\{e_i, e_{i+1}, \ldots, e_{j-1}, e_j\}$ ist e_i oder e_j



- $\mathbb{E}[X_{ij}] = \Pr[X_{ij} = 1] = \frac{2}{j-i+1}$

Bonus: Alternative Analyse

Summe der einzelnen Vergleiche

- seien $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_n$ die sortierten Elemente
- $X_{ij} = 1$ wenn e_i und e_j verglichen werden, $X_{ij} = 0$ sonst

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{E}[X_{ij}]$$

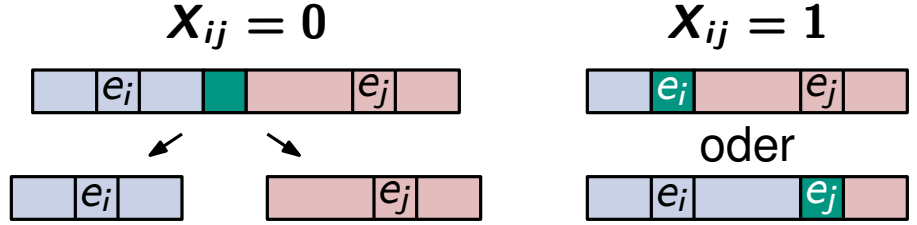
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1}$$

Zufallsvariablen

- X: Anzahl Vergleiche insgesamt
- X_{ij}: Indikatorvariable für Vergleich zwischen e_i und e_j

Wahrscheinlichkeit für $X_{ij} = 1$

- $X_{ij} = 1 \Leftrightarrow$ das erste Pivot aus $\{e_i, e_{i+1}, \ldots, e_{j-1}, e_j\}$ ist e_i oder e_j



- $\mathbb{E}[X_{ij}] = \Pr[X_{ij} = 1] = \frac{2}{j-i+1}$

Bonus: Alternative Analyse

Summe der einzelnen Vergleiche

- seien $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_n$ die sortierten Elemente
- $X_{ij} = 1$ wenn e_i und e_j verglichen werden, $X_{ij} = 0$ sonst

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{E}[X_{ij}]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1}$$

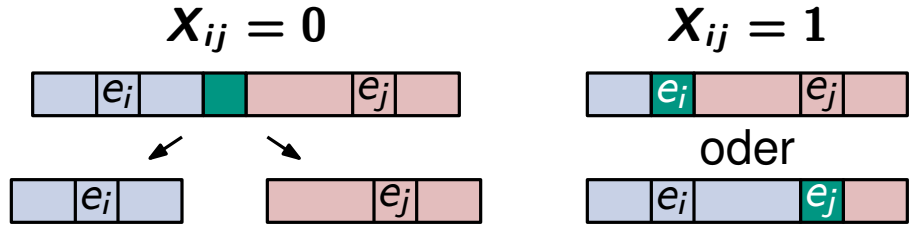
j	$k = j - i + 1$
$i+1$	2
$i+2$	3
$\vdots$	$\vdots$
n	$n-i+1$

Zufallsvariablen

- X: Anzahl Vergleiche insgesamt
- X_{ij}: Indikatorvariable für Vergleich zwischen e_i und e_j

Wahrscheinlichkeit für $X_{ij} = 1$

- $X_{ij} = 1 \Leftrightarrow$ das erste Pivot aus $\{e_i, e_{i+1}, \ldots, e_{j-1}, e_j\}$ ist e_i oder e_j



- $\mathbb{E}[X_{ij}] = \Pr[X_{ij} = 1] = \frac{2}{j-i+1}$

Bonus: Alternative Analyse

Summe der einzelnen Vergleiche

- seien $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_n$ die sortierten Elemente
- $X_{ij} = 1$ wenn e_i und e_j verglichen werden, $X_{ij} = 0$ sonst

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{E}[X_{ij}]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{n-i+1} \frac{2}{k}$$

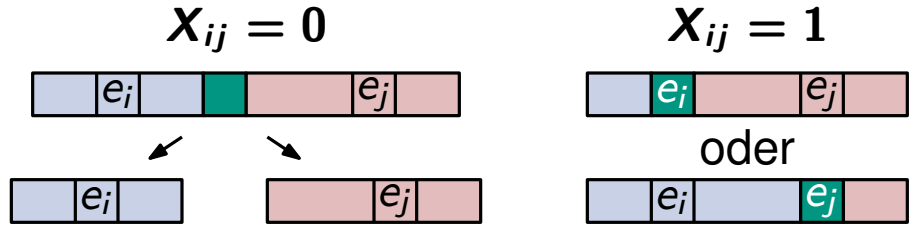
j	$k = j - i + 1$
$i+1$	2
$i+2$	3
$\vdots$	$\vdots$
n	$n-i+1$

Zufallsvariablen

- X: Anzahl Vergleiche insgesamt
- X_{ij}: Indikatorvariable für Vergleich zwischen e_i und e_j

Wahrscheinlichkeit für $X_{ij} = 1$

- $X_{ij} = 1 \Leftrightarrow$ das erste Pivot aus $\{e_i, e_{i+1}, \ldots, e_{j-1}, e_j\}$ ist e_i oder e_j



- $\mathbb{E}[X_{ij}] = \Pr[X_{ij} = 1] = \frac{2}{j-i+1}$

Bonus: Alternative Analyse

Summe der einzelnen Vergleiche

- seien $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_n$ die sortierten Elemente
- $X_{ij} = 1$ wenn e_i und e_j verglichen werden, $X_{ij} = 0$ sonst

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{E}[X_{ij}]$$

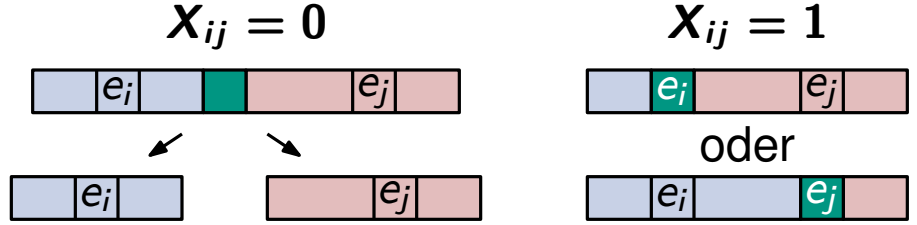
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{n-i+1} \frac{2}{k} \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k}$$

Zufallsvariablen

- X: Anzahl Vergleiche insgesamt
- X_{ij}: Indikatorvariable für Vergleich zwischen e_i und e_j

Wahrscheinlichkeit für $X_{ij} = 1$

- $X_{ij} = 1 \Leftrightarrow$ das erste Pivot aus $\{e_i, e_{i+1}, \ldots, e_{j-1}, e_j\}$ ist e_i oder e_j



- $\mathbb{E}[X_{ij}] = \Pr[X_{ij} = 1] = \frac{2}{j-i+1}$

Bonus: Alternative Analyse

Summe der einzelnen Vergleiche

- seien $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_n$ die sortierten Elemente
- $X_{ij} = 1$ wenn e_i und e_j verglichen werden, $X_{ij} = 0$ sonst

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{E}[X_{ij}]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{n-i+1} \frac{2}{k} \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k}$$

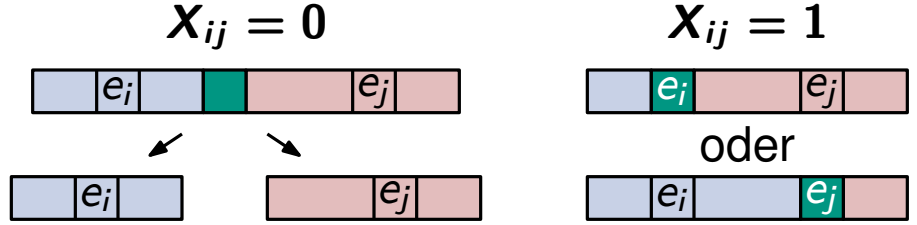
$$= 2n \cdot \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

Zufallsvariablen

- X: Anzahl Vergleiche insgesamt
- X_{ij}: Indikatorvariable für Vergleich zwischen e_i und e_j

Wahrscheinlichkeit für $X_{ij} = 1$

- $X_{ij} = 1 \Leftrightarrow$ das erste Pivot aus $\{e_i, e_{i+1}, \ldots, e_{j-1}, e_j\}$ ist e_i oder e_j



- $\mathbb{E}[X_{ij}] = \Pr[X_{ij} = 1] = \frac{2}{j-i+1}$

Bonus: Alternative Analyse

Summe der einzelnen Vergleiche

- seien $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_n$ die sortierten Elemente
- $X_{ij} = 1$ wenn e_i und e_j verglichen werden, $X_{ij} = 0$ sonst

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{E}[X_{ij}]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{n-i+1} \frac{2}{k} \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k}$$

$$= 2n \cdot \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq 2n \ln n$$

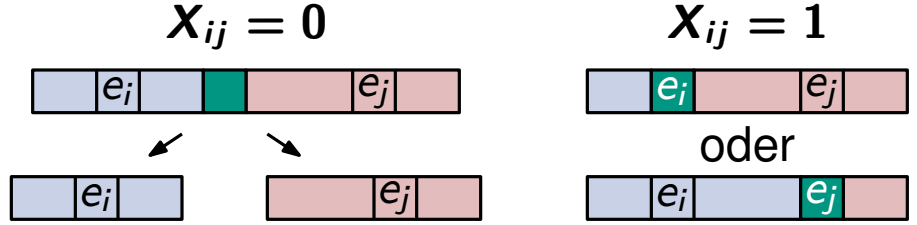
harmonische Summe
(gleich mehr dazu)

Zufallsvariablen

- X: Anzahl Vergleiche insgesamt
- X_{ij}: Indikatorvariable für Vergleich zwischen e_i und e_j

Wahrscheinlichkeit für $X_{ij} = 1$

- $X_{ij} = 1 \Leftrightarrow$ das erste Pivot aus $\{e_i, e_{i+1}, \ldots, e_{j-1}, e_j\}$ ist e_i oder e_j



- $\mathbb{E}[X_{ij}] = \Pr[X_{ij} = 1] = \frac{2}{j-i+1}$

Bonus: Alternative Analyse

Summe der einzelnen Vergleiche

- seien $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_n$ die sortierten Elemente
- $X_{ij} = 1$ wenn e_i und e_j verglichen werden, $X_{ij} = 0$ sonst

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{E}[X_{ij}]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{n-i+1} \frac{2}{k} \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k}$$

$$= 2n \cdot \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq 2n \ln n$$

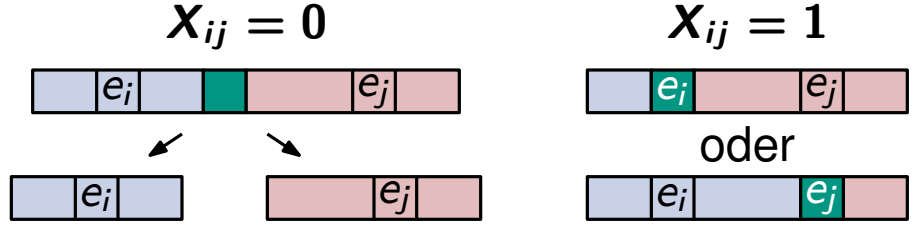
Theorem
Auf jeder Eingabe der Länge n benötigt Quicksort mit zufälligen Pivots erwartet $\leq 2n \ln n$ Vergleiche.

Zufallsvariablen

- X: Anzahl Vergleiche insgesamt
- X_{ij}: Indikatorvariable für Vergleich zwischen e_i und e_j

Wahrscheinlichkeit für $X_{ij} = 1$

- $X_{ij} = 1 \Leftrightarrow$ das erste Pivot aus $\{e_i, e_{i+1}, \ldots, e_{j-1}, e_j\}$ ist e_i oder e_j



- $\mathbb{E}[X_{ij}] = \Pr[X_{ij} = 1] = \frac{2}{j-i+1}$

Bonus: Nebenbemerkung zur harmonischen Summe

Harmonische Zahl H_n

- $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
- nützlich zu wissen: $H_n \in \Theta(\log n)$

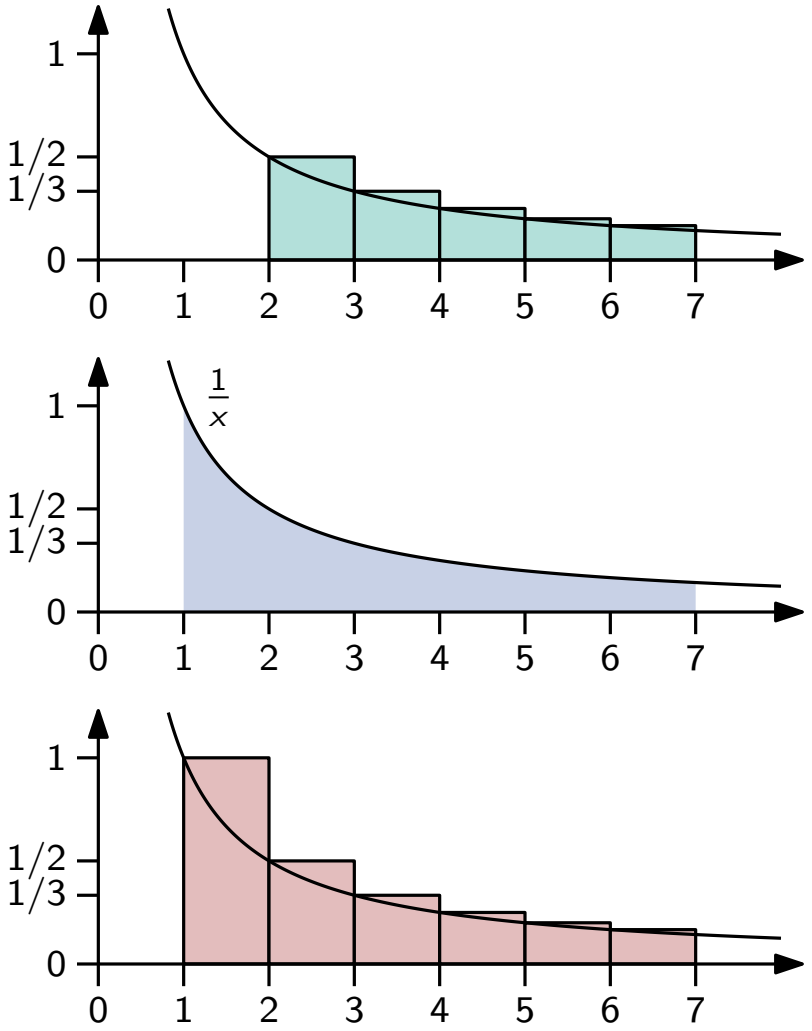
Bonus: Nebenbemerkung zur harmonischen Summe

Harmonische Zahl H_n

- $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
- nützlich zu wissen: $H_n \in \Theta(\log n)$

Beweis und genauere Abschätzung

$$H_n - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_{1}^{n} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$$



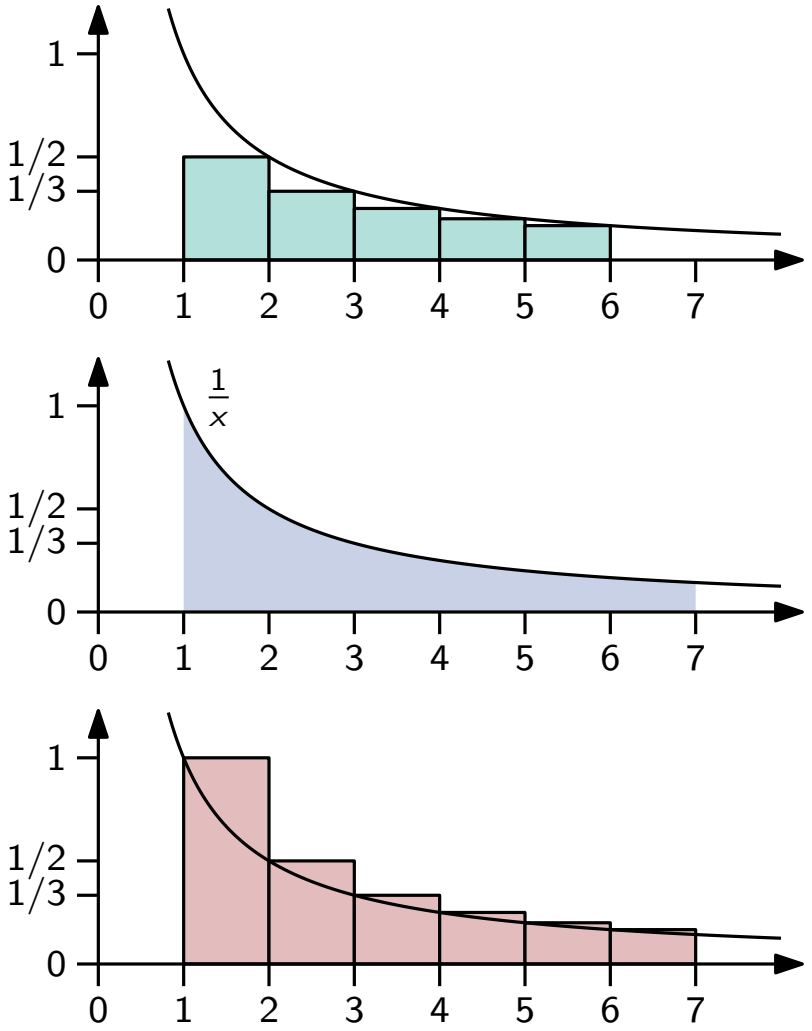
Bonus: Nebenbemerkung zur harmonischen Summe

Harmonische Zahl H_n

- $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
- nützlich zu wissen: $H_n \in \Theta(\log n)$

Beweis und genauere Abschätzung

$$H_n - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_{1}^{n} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$$



Bonus: Nebenbemerkung zur harmonischen Summe

Harmonische Zahl H_n

- $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
- nützlich zu wissen: $H_n \in \Theta(\log n)$

Beweis und genauere Abschätzung

$$H_n - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_{1}^{n} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$$

$$\int_{1}^{n} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\ln x\right]_1^n = \ln n$$