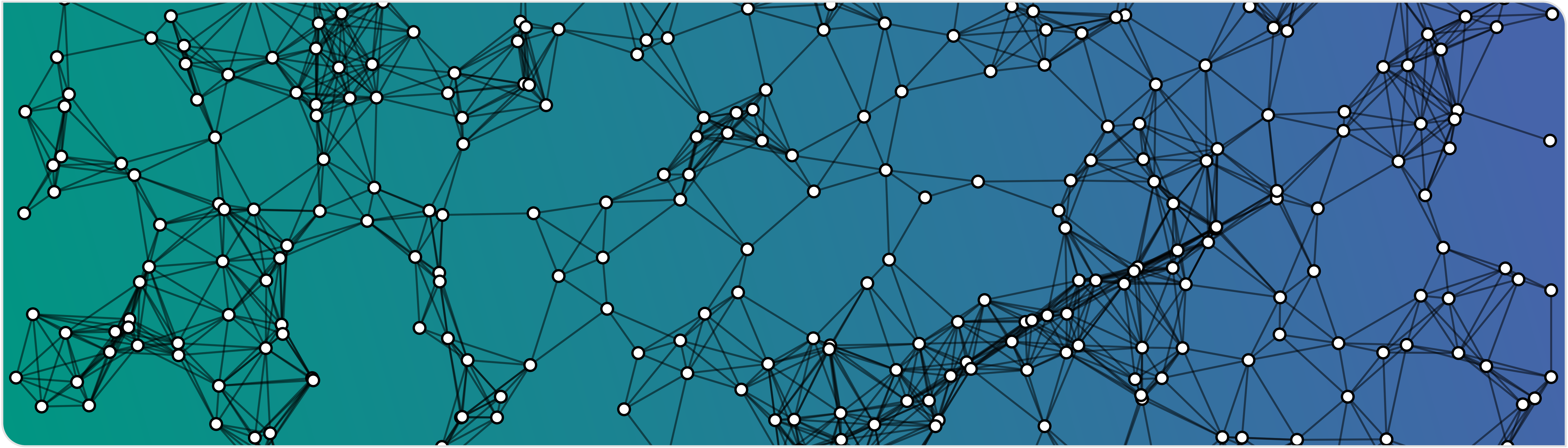
Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen 1

Sortieren: Mergesort, Quicksort, untere Schranke



Anmerkung: untere Laufzeitschranken

Karlsruher Institut für Technologie

Der Algorithmus benötigt $\Omega(n^2)$ Schritte – Was bedeutet das?

- Interpretation 1: auf allen Eingaben ist die Laufzeit mindestens quadratisch
- Interpretation 2: es gibt Eingaben, sodass die Laufzeit mindestens quadratisch ist

Was gilt für die Vorlesung?

- außer explizit angegeben sprechen wir immer über den Worst Case
- also: Interpretation 2

Warum machen wir das so?

- Interpretation 1 betrachtet den Best Case $\to$ der ist selten relevant
- Interpretation 2 nützlich in verschiedenen Situationen:
  - „jeder Algo hat Laufzeit $\Omega(n^2)$“ $\to$ es gibt keinen sub-quadratischen Algo
  - „ein konkreter Algo hat Laufzeit $\Omega(n^2)$ und $O(n^3)$“ $\to$ die Laufzeit ist im Worst Case zwischen quadratisch und kubisch

Sortieren

13 5 7 48 1 17 0 89 9 82 4 76 28 32 63 37

Gegeben

- n Elemente aus einer geordneten Menge (z.B. Zahlen)

Gesucht

- sortierte Folge dieser Elemente (z.B. als Array oder Liste)

$\longrightarrow \langle 0, 1, 4, 5, 7, 9, 13, 17, 28, 32, 37, 48, 63, 76, 82, 89 \rangle$

Insertion Sort

- füge Elemente nach und nach ein
- halte Folge dabei sortiert
- Bearbeitung des $i$ten Elements:
  - suchen in Folge der Länge $i - 1$
  - einfügen in Folge der Länge $i - 1$

bisher sortierte Teilfolge:

$\langle 0, 5, 13, 17, 28, 76 \rangle$

für Arrays (random access)

binäre Suche: $O(\log n)$
einfügen: $O(1)$

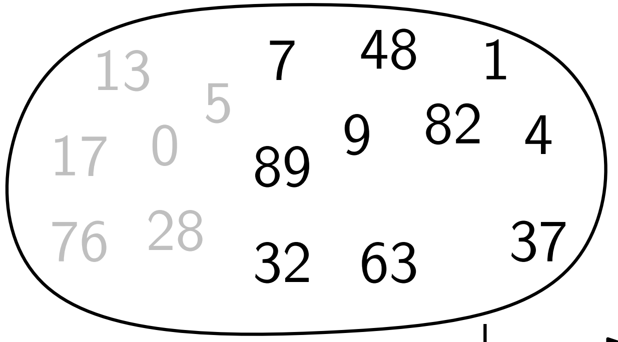
für Listen

$O(\log n)$ pro Element
$\Rightarrow O(n \log n)$ gesamt

Problem

- wir kennen noch keine Datenstruktur, mit der wir schnell suchen **und** einfügen können

Sortieren



Gegeben
- n Elemente aus einer geordneten Menge (z.B. Zahlen)

Gesucht
- sortierte Folge dieser Elemente (z.B. als Array oder Liste)

$\langle 0, 1, 4, 5, 7, 9, 13, 17, 28, 32, 37, 48, 63, 76, 82, 89 \rangle$

Insertion Sort
- füge Elemente nach und nach ein
- halte Folge dabei sortiert
- Bearbeitung des $i$ten Elements:

bisher sortierte Teilfolge:

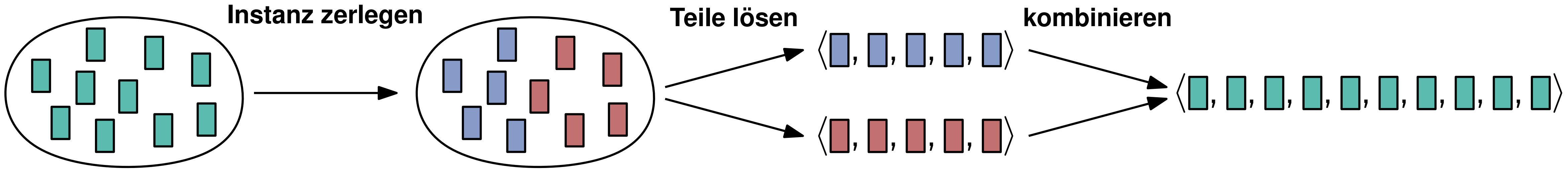
$\langle 0, 5, 13, 17, 28, 76 \rangle$

	Liste	**Array**
suchen in Folge der Länge $i-1$	$\Theta(i)$	$\Theta(\log i)$
einfügen in Folge der Länge $i-1$	$\Theta(1)$	$\Theta(i)$
Kosten in Schritt i:	$\Theta(i)$	$\Theta(i)$

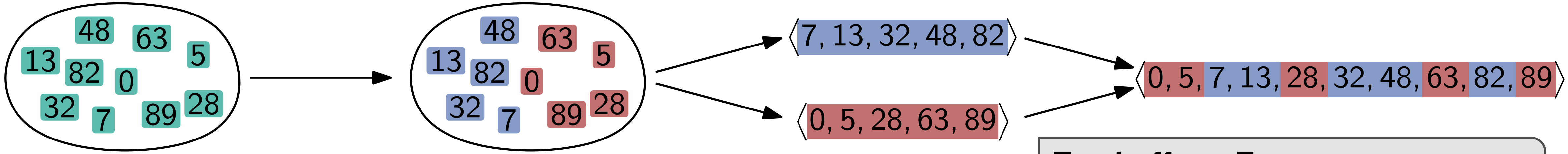
- Laufzeit: $\sum_{i=1}^{n} \Theta(i) = \Theta(n^2)$

heute: zwei andere Algorithmen mit $\Theta(n \log n)$ Laufzeit

Sortieren mittels Teile und Herrsche

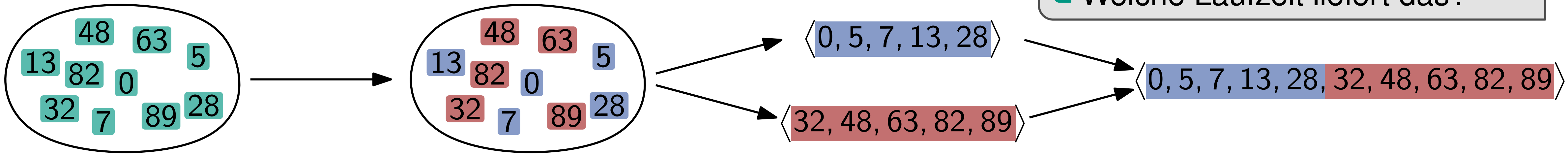


Mergesort: arbeite beim Zusammenfügen



Zwei offene Fragen
- Wie setzt man das im Detail um?
- Welche Laufzeit liefert das?

Quicksort: arbeite beim Zerlegen



Mergesort im Detail

mergesort(*Array* A)

// base case: small array

if A.**size**() ≤ 1 **then return** A

// partition instance

$B :=$ first half of A

$C :=$ second half of A

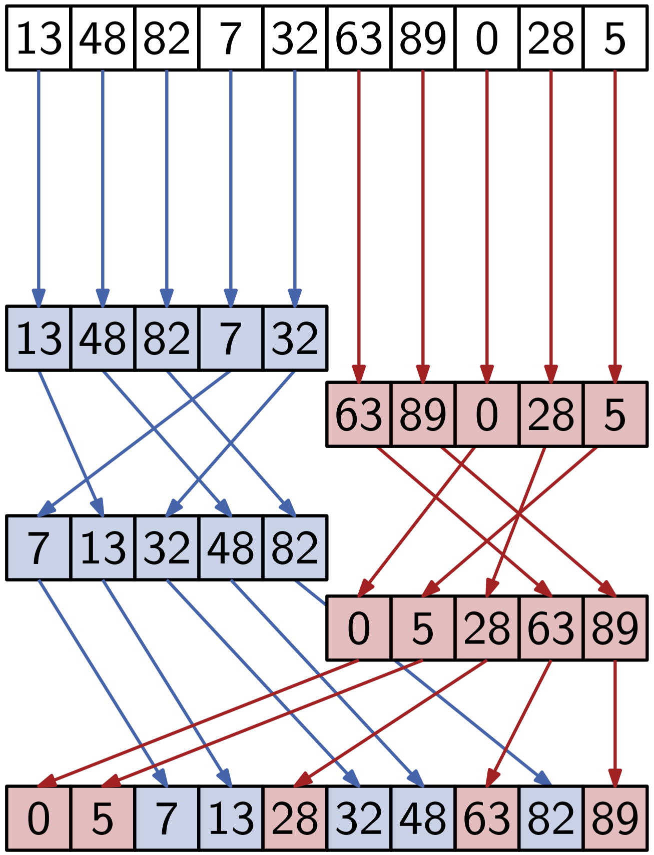
// solve parts

$B :=$ **mergesort**(B)

$C :=$ **mergesort**(C)

// combine solutions

return merge(B, C)



Korrektheit

- Induktion über A.**size**()
- Anfang: passt für A.**size**() ≤ 1
- Induktionsschritt:
  - B.**size**() $<$ A.**size**()
  - Induktionsvoraussetzung $\Rightarrow$ **mergesort**(B) sortiert B
  - analog: **mergesort**(C) sortiert C
  - daher: **merge**(B, C) liefert A in sortierter Form (vorrausgesetzt **merge** ist korrekt)

merge(*Array* B, *Array* C)

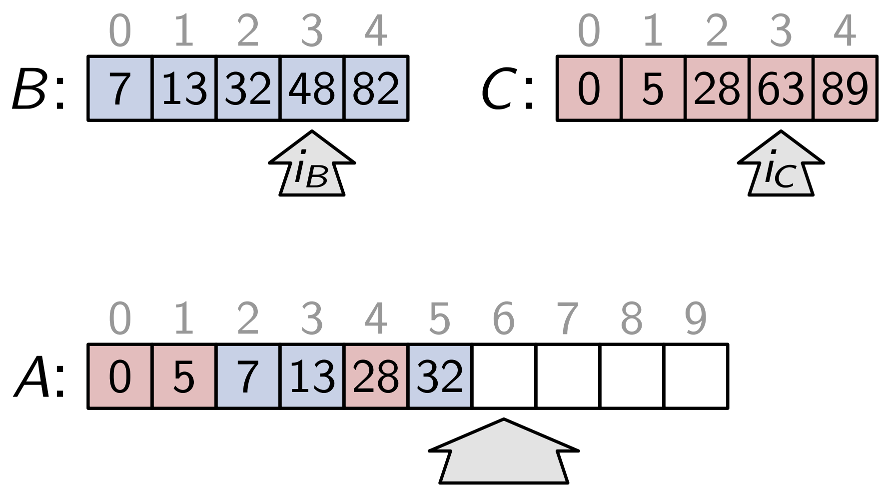
// **input:** sorted arrays B and C; **output:** $B \sqcup C$ in sorted order

Wie funktioniert merge?

Karlsruher Institut für Technologie

Plan

- erstelle neues Array A für das Ergebnis
- füge iterativ das kleinste noch nicht eingefügte Element in A ein
- für B, C: kenne Positionen i_B, i_C ab der die noch nicht eingefügten Elemente kommen



Invariante (nach jedem Einfügen)

- genau die Elemente vor i_B aus B und vor i_C aus C wurden schon in A eingefügt
- alle eingefügten Elemente sind kleiner als die nicht eingefügten Elemente
- bisher in A eingefügte Elemente sind sortiert

Bleibt die Invariante in jedem Schritt erhalten? (beachte: sie gilt am Anfang)

- B und C sortiert $\Rightarrow$ kleinstes nicht eingefügtes Element ist $B[i_B]$ oder $C[i_C]$
- damit: $\min\{B[i_B], C[i_C]\}$ in A einfügen (und i_B bzw. i_C erhöhen) erhält Invariante

Merge im Detail

merge(*Array* B, *Array* C)

$i_B, i_C, n_B, n_C := 0, 0, B.$**size**$(), C.$**size**$()$

$A :=$ *Array* of size $n_B + n_C$ // result

// iterate over B and C simultaneously

while $i_B < n_B$ **or** $i_C < n_C$ **do**

  // next element comes from B

  if $i_C = n_C$ **or** $(i_B \neq n_B$ **and** $B[i_B] \leq C[i_C])$ **then**

    $A[i_B + i_C] := B[i_B]$

    $i_B := i_B + 1$

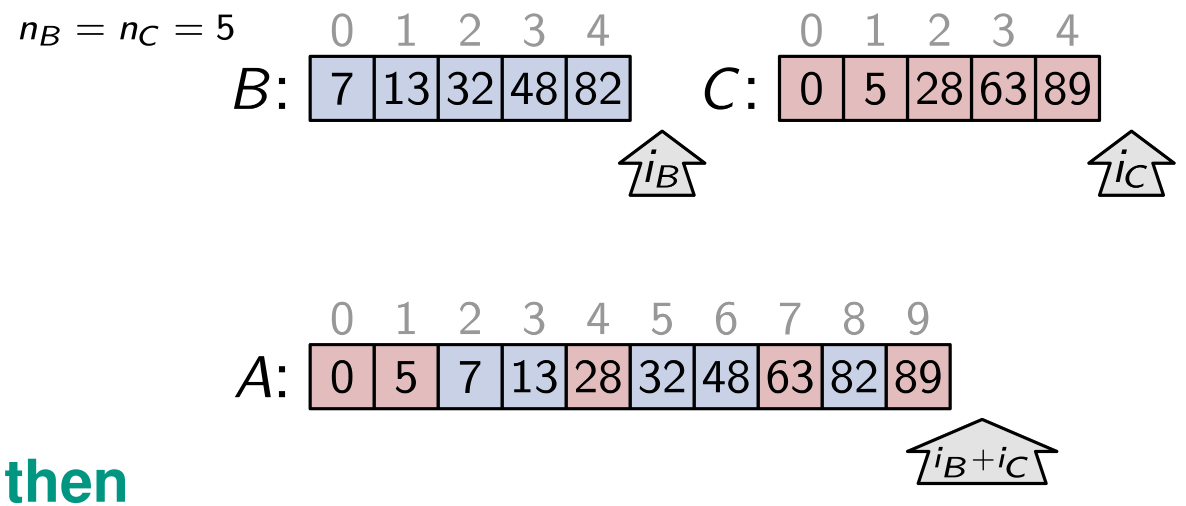
  // next element comes from C

  else

    $A[i_B + i_C] := C[i_C]$

    $i_C := i_C + 1$

return A



Laufzeitanalyse

- $i_B + i_C$ wird in jedem Schleifendurchlauf um genau 1 größer
- daher: $n_B + n_C$ Schleifendurchläufe
- Laufzeit: $\Theta(n_B + n_C) = \Theta(A.$**size**$())$

Laufzeit Mergesort

$\textbf{mergesort}(\textit{Array}\ A)$ — $T(n)$

// base case: small array

if $A.\textbf{size}() \leq 1$ **then return** A — $\Theta(1)$

// partition instance

$B :=$ first half of A
$C :=$ second half of A — $\Theta(n)$

// solve parts

$B := \textbf{mergesort}(B)$ — $T(\frac{n}{2})$

$C := \textbf{mergesort}(C)$ — $T(\frac{n}{2})$

// combine solutions

return merge(B, C) — $\Theta(n)$

Laufzeit
$(n = A.\textbf{size}())$

- Rekurrenz: $T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$
- Mastertheorem $\Rightarrow T(n) \in \Theta(n \log n)$

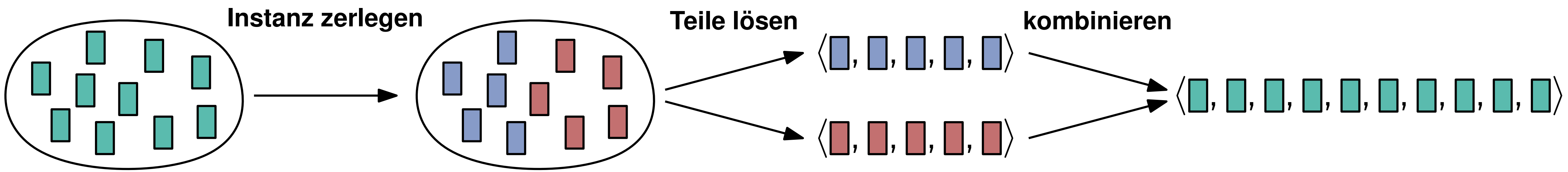
Mastertheorem?
Voll anstrengend!
Muss ich das auswendig können?

Herleitung für $\Theta(n \log n)$ in diesem Fall

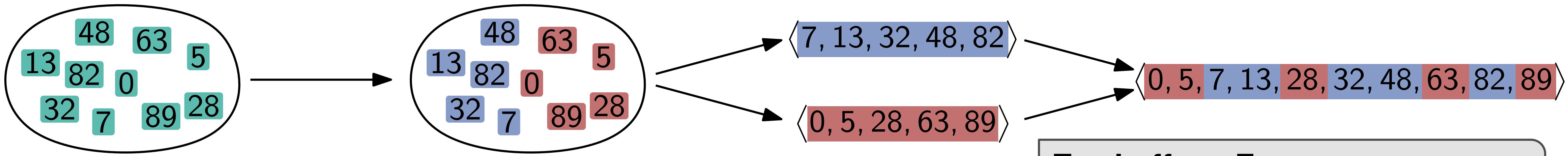
- Rekursionsbaum: Binärbaum der Tiefe $\log_2 n$
- Aufwand auf Ebene i:
  - 2^i Knoten mit $n \cdot 2^{-i}$ Elementen
  - $\Theta(n)$ Kosten für n Elem. $\Rightarrow \Theta(n)$ pro Ebene
- gesamt: $\Theta(n \log n)$

Bild: Grumpy cat line art / XXspiritwolf2000XX / Creative Commons

Sortieren mittels Teile und Herrsche



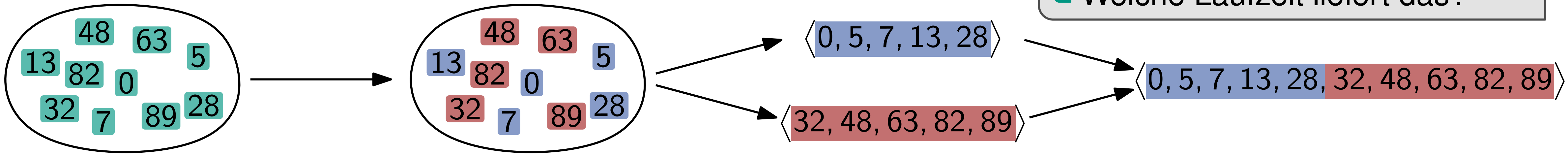
Mergesort: arbeite beim Zusammenfügen



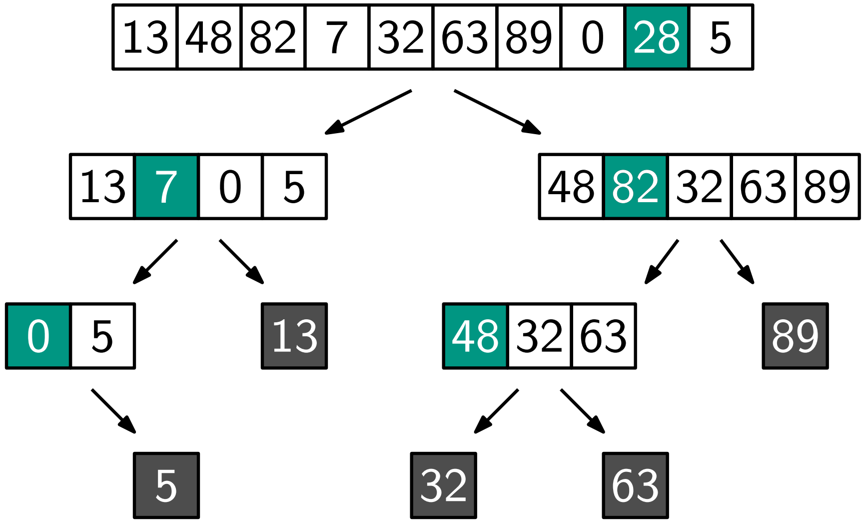
Zwei offene Fragen

- Wie setzt man das im Detail um?
- Welche Laufzeit liefert das?

Quicksort: arbeite beim Zerlegen



Quicksort: arbeiten beim Zerlegen



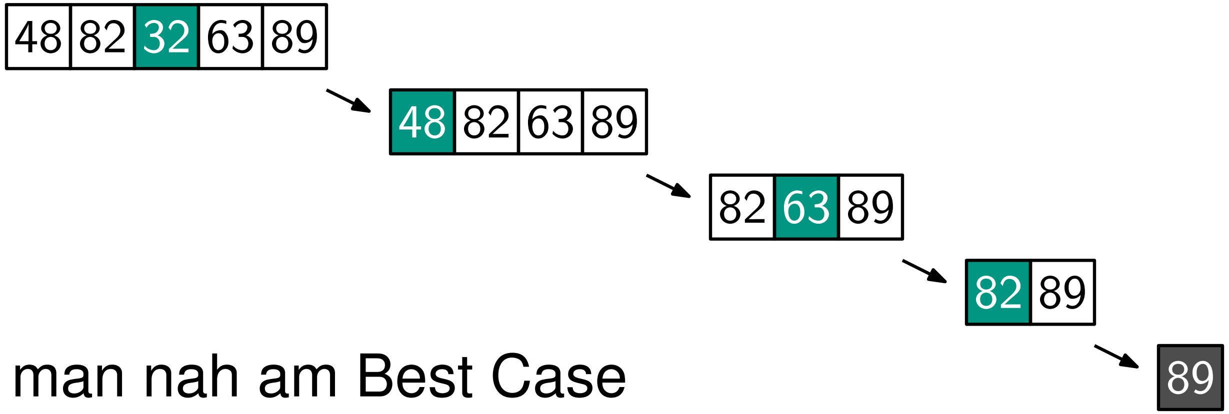
Zerlegung in große und kleine Elemente

- wähle ein Element als **Pivot Element**
- zwei Teilarrays: Elemente die kleiner/größer sind als das Pivot

Best Case

- die zwei Teilarrays sind etwa gleich groß
- $\Theta(\log n)$ Ebenen, $\Theta(n)$ Vergleiche pro Ebene
- Gesamtkosten: $\Theta(n \log n)$

Worst Case



- Pivot ist kleinstes oder größtes Element
- Vergleich zwischen jedem Elementpaar
- Gesamtkosten: $\Theta(n^2)$

Hoffnung: mit zufällig gewähltem Pivot ist man nah am Best Case

Erwartete Laufzeit bei zufälligen Pivots

Nutze Linearität des Erwartungswerts

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] \in O(n \log n)$$

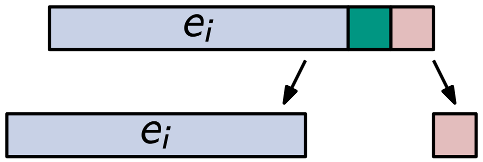
- Ziel: schätze $\mathbb{E}[X_i]$ ab für beliebiges aber festes i

Zufallsvariablen

- X: Anzahl Vergleiche insgesamt
- X_i: Anzahl Vergleiche des i-ten Elements e_i mit einem Pivot
- X_i^-: Anzahl schlechte Vergleiche von e_i mit einem Pivot
- X_i^+: Anzahl gute Vergleiche von e_i mit einem Pivot

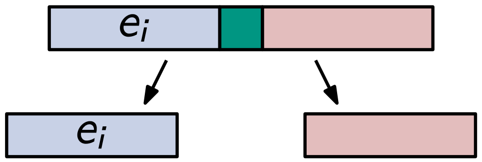
Vergleiche des i-ten Elements e_i

schlechter Vergleich



ungleichmäßige Aufteilung

guter Vergleich



gleichmäßige Aufteilung

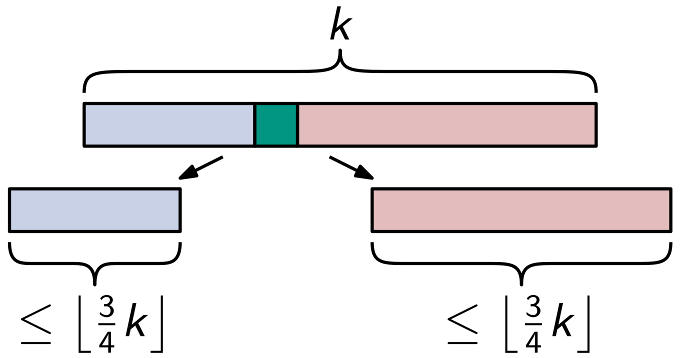
- Ziel: wähle genaue Definition sodass
  - weniger schlecht als gut: $\mathbb{E}[X_i^-] \leq \mathbb{E}[X_i^+]$
  - wenige gute Vergleiche: $X_i^+ \in O(\log n)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_i] &= \mathbb{E}[X_i^- + X_i^+] \\ &= \mathbb{E}[X_i^-] + \mathbb{E}[X_i^+] \\ &\leq 2\mathbb{E}[X_i^+] \in O(\log n) \end{aligned}$$

Gute und schlechte Vergleiche im Detail

Wann nennen wir den Vergleich mit einem Pivot gut?

- k: Größe des aktuellen Arrays
- guter Vergleich: beide Teilarrays $\leq \lfloor \frac{3}{4} k \rfloor$



Zufallsvariablen

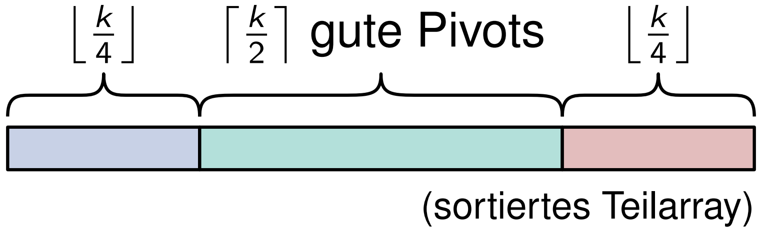
- X_i^-: Anzahl schlechte Vergleiche von e_i mit einem Pivot
- X_i^+: Anzahl gute Vergleiche von e_i mit einem Pivot

Wenige gute Vergleiche: $X_i^+ \in O(\log n)$

- Teilarray von e_i schrumpft bei jedem guten Vergleich um den Faktor $\frac{3}{4}$
- das kann nur $O(\log n)$ oft passieren

Mehr gute als schlechte Vergleiche: $\mathbb{E}\left[X_i^+\right] \geq \mathbb{E}\left[X_i^-\right]$

- Hälfte der möglichen Pivots führen zu gutem Vergleich
- daher: $\Pr\left[\text{guter Vergleich}\right] \geq \frac{1}{2} \geq \Pr\left[\text{schlechter Vergleich}\right]$



Quicksort: Ergebnis

Karlsruher Institut für Technologie

Theorem
Auf jeder Eingabe der Länge n benötigt Quicksort mit zufälligen Pivots im Erwartungswert $O(n \log n)$ Vergleiche.

Anmerkungen

- damit ist auch die Erwartete Laufzeit in $O(n \log n)$
- wir sprechen hier auch vom **Average Case**
- der Erwartungswert bezieht sich nur auf die zufälligen Entscheidungen des Algorithmus
- bei der Eingabe wird weiterhin der Worst Case betrachtet

Bonus am Ende der Folien: alternative Analyse

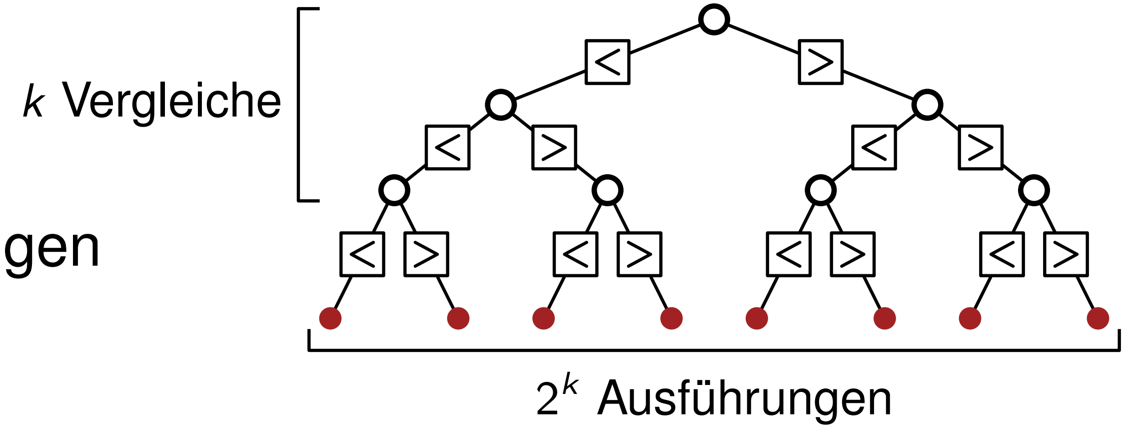
- liefert alternative Perspektive
- gibt genaueres Ergebnis

Untere Schranke: Geht es schneller?

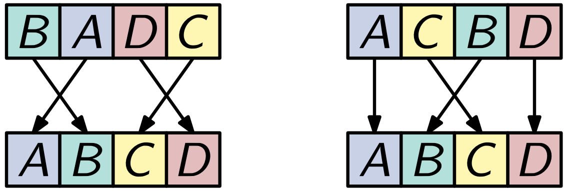
Theorem
Jeder vergleichsbasierte Sortieralgorithmus benötigt $\Omega(n \log n)$ Vergleiche um eine Folge von n Elementen zu sortieren.

Beweis

- ähnlich wie bei der binären Suche:
  - binäre Entscheidung pro Vergleich
  - k Vergleiche $\rightarrow 2^k$ verschiedene Ausführungen



- verschiedene Ausführungen:
  - betrachte zwei Permutationen der Eingabe
  - Elemente müssen unterschiedlich umsortiert werden
  - jede Permutation führt zu unterschiedlicher Ausführung
  - jeder korrekte Algo braucht $n!$ verschiedene Ausführungen ($n!$ Blätter im Entscheidungsbaum)



- min. $n!$ Ausführungen $\Rightarrow$ min. $\log(n!)$ Vergleiche

zu zeigen: $\log(n!) \in \Theta(n \log n)$

Nebenrechnung: $\log(n!) \in \Theta(n \log n)$

Möglichkeit 1: Stirlingformel

- die Stirlingformel sagt: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \in \Theta\left(\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$
- daher: $\log(n!) \in \Theta\left(\log\left(\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)\right)$

$$= \Theta\left(\log\left(\sqrt{n}\right) + n \cdot (\log n - \log e)\right) = \Theta(n \log n)$$

Logarithmengesetze

- $\log(a \cdot b) = \log(a) + log(b)$
- $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - log(b)$
- $\log(a^b) = b \cdot \log(a)$

Möglichkeit 2: von Hand

- $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$
- $\log(n!) = \underbrace{\log(n) + \log(n-1) + \log(n-2) + \cdots}_{\text{ersten } \frac{n}{2} \text{ Summanden} \geq \log(\frac{n}{2})} + \log(1) \overset{n \text{ Summanden, jeder} \leq \log n}{\in} O(n \log n)$
- also: $\log(n!) \geq \frac{n}{2} \cdot \log(\frac{n}{2}) = \frac{n}{2} \log n - \frac{n}{2} \log 2 \in \Omega(n \log n)$

$$\Rightarrow \log(n!) \in \Theta(n \log n)$$

Zusammenfassung

Heute gesehen

- Teile und Herrsche zum Sortieren von Folgen
- Mergesort: arbeite beim Zusammenfügen der Teillösungen
- Quicksort: arbeite beim Zerlegen in Teilprobleme

Average Case Analyse bei Quicksort

- hier gesehen: zähle Vergleiche für ein einzelnes Element
- Abschätzen von Erwartungswerten: Aufspaltung in Summe einfacherer Zufallsvariablen

Bonus (nach dieser Folie): Average Case Analyse bei Quicksort

- betrachte Vergleichswahrscheinlichkeit für jedes Elementpaar
- Abschätzung von Summen: Approximation mittels Integral

Vergleichsbasiertes Sortieren

- untere Schranke: jeder vergleichsbasierte Sortieralgo benötigt $\Omega(n \log n)$ Vergleiche
- Technik: Entscheidungsbaum (wie schon bei der binären Suche)

Bonus: Alternative Analyse

Summe der einzelnen Vergleiche

- seien $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_n$ die sortierten Elemente
- $X_{ij} = 1$ wenn e_i und e_j verglichen werden, $X_{ij} = 0$ sonst

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{E}[X_{ij}]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{n-i+1} \frac{2}{k} \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k}$$

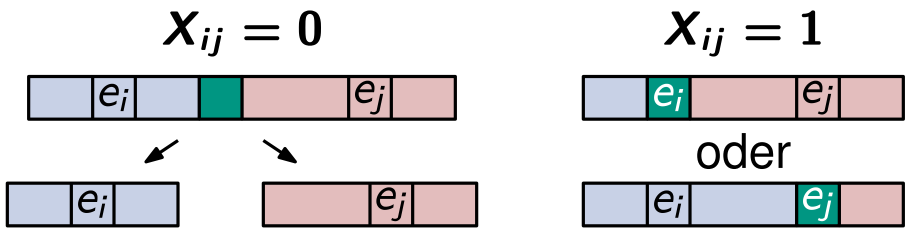
$$= 2n \cdot \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq 2n \ln n$$

Zufallsvariablen

- X: Anzahl Vergleiche insgesamt
- X_{ij}: Indikatorvariable für Vergleich zwischen e_i und e_j

Wahrscheinlichkeit für $X_{ij} = 1$

- $X_{ij} = 1 \Leftrightarrow$ das erste Pivot aus $\{e_i, e_{i+1}, \ldots, e_{j-1}, e_j\}$ ist e_i oder e_j



- $\mathbb{E}[X_{ij}] = \Pr[X_{ij} = 1] = \frac{2}{j-i+1}$

Theorem
Auf jeder Eingabe der Länge n benötigt Quicksort mit zufälligen Pivots erwartet $\leq 2n \ln n$ Vergleiche.

Bonus: Nebenbemerkung zur harmonischen Summe

Karlsruher Institut für Technologie

Harmonische Zahl H_n

- $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
- nützlich zu wissen: $H_n \in \Theta(\log n)$

Beweis und genauere Abschätzung

$$H_n - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \le \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$$

$$\int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\ln x\right]_1^n = \ln n$$