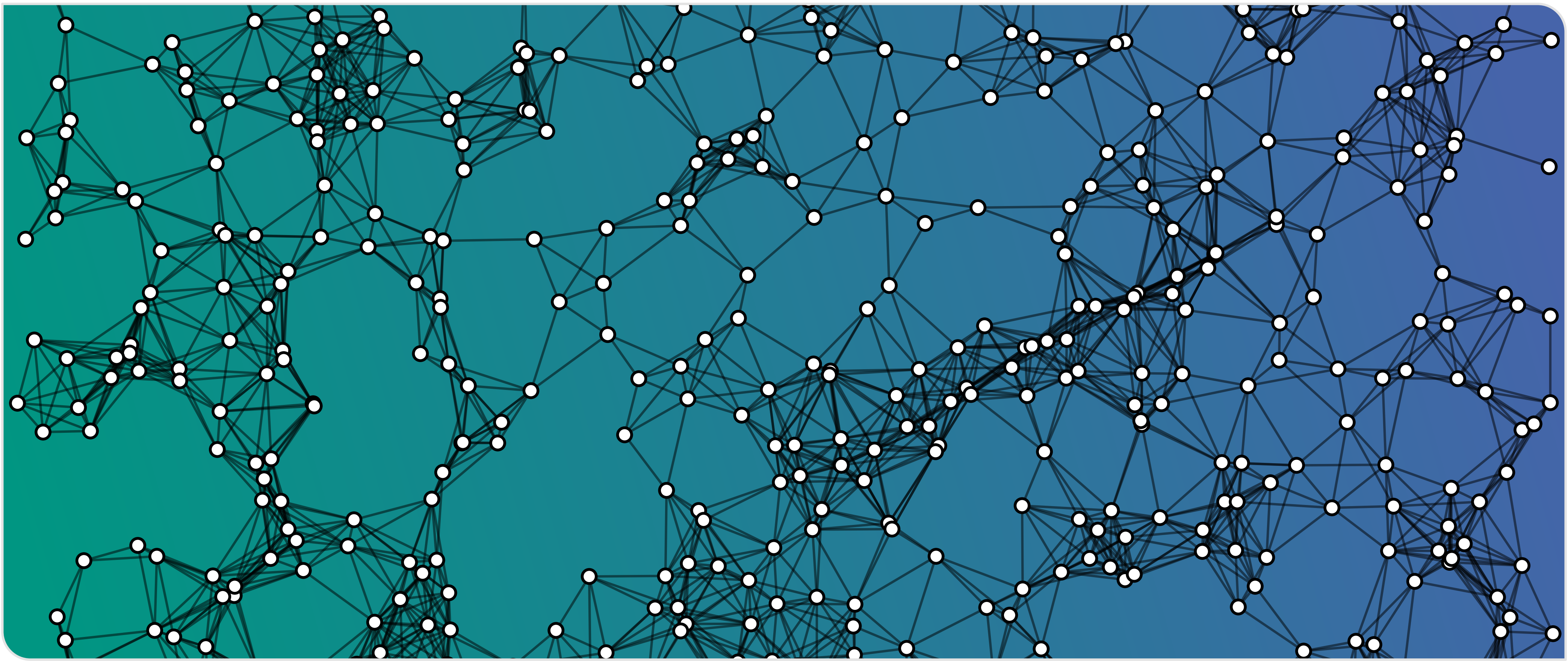
Karlsruher Institut für Technologie

Parametrisierte Algorithmen

Übung 5



Heute

Übungsblatt 4

Übungsblatt 5

Heute

Übungsblatt 4

- Vertex Cover in bipartiten Graphen
- Max Sat

Übungsblatt 5

Heute

Übungsblatt 4

- Vertex Cover in bipartiten Graphen
- Max Sat

Übungsblatt 5

- Sterne
- Longest Cycle
- Dominating Set auf speziellen Graphen

Übungsblatt 5

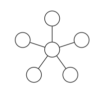
Parametrisierte Algorithmen
Wintersemester 2022/2023
Thomas Bläsius & Marcus Wilhelm

Übungsblatt 5

Abgabe bis 19. Januar 2023

Aufgabe 1: Sterne — 8 Punkte

Ein *5-Stern* ist folgender Graph:



Gegeben einem ungerichteten Graphen $G = (V,E)$ und Parameter k soll entschieden werden, ob G mindestens k knotendisjunkte induzierte 5-Sterne enthält. Verwende *color coding* um zu zeigen, dass dieses Problem in FPT liegt.

Aufgabe 2: Longest Cycle — 12 Punkte

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k. Bei Longest Cycle geht es darum, zu entscheiden ob es in G einen Kreis der Länge *mindestens* k in G gibt. Gib einen FPT-Algorithmus für dieses Problem an.

Aufgabe 3: Dominating Set auf speziellen Graphen — 10 Punkte

Betrachte folgende parametrisierte Variante von Dominating Set. Der Graph G ist gegeben zusammen mit einer Knotenordnung $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Die *Länge* einer Kante $\{v_i, v_j\}$ ist $|i - j|$. Der Parameter k ist die maximale Kantenlänge in G. Gib einen FPT-Algorithmus an, der diese Parametrisierung von Dominating Set löst.

1

Übungsblatt 4

Parametrisierte Algorithmen
Wintersemester 2022/2023
Thomas Bläsius & Marcus Wilhelm

Übungsblatt 4

Abgabe bis 22. Dezember 2022

Aufgabe 1: Vertex Cover in bipartiten Graphen — $7 + 7 = 14$ Punkte

Teilaufgabe (a) Zeige, dass die LP-Relaxierung des ILPs zu Vertex Cover eine ganzzahlige optimale Lösung hat, wenn der Graph bipartit ist.

Hinweis: Zeige, dass die zugehörige Matrix total unimodular ist.

Teilaufgabe (b) Benutze den Dualitätssatz, um den Satz von König zu beweisen. Der Satz von König besagt, dass das minimale Vertex Cover und das maximale Matching in einem bipartiten Graphen die gleiche Kardinalität haben.

Aufgabe 2: Max Sat — $5 + 11 = 16$ Punkte

Gegeben sei eine boolesche Formel φ (in KNF) mit n Variablen und m Klauseln. Bei dem Problem Max Sat soll eine Variablenbelegung gefunden werden, die möglichst viele Klauseln erfüllt.

Teilaufgabe (a) Gib sichere Reduktionsregeln an, die einen Kern mit maximal $2k$ Klauseln und k Variablen liefern, wobei k die Lösungsgröße ist.

Hinweis: Benutze den Satz von Hall, um die Anzahl der Variablen zu reduzieren.

Satz (Hall's Theorem). *Sei $G = (V_1 \cup V_2, E)$ ein bipartiter Graph. Es gibt genau dann ein Matching in G, das alle Knoten von V_1 abdeckt, wenn $|X| \leq |N(X)|$ für jede Teilmenge $X \subseteq V_1$. Andernfalls kann eine inklusionsminimale Menge $X \subseteq V_1$ mit $|X| > |N(X)|$ effizient gefunden werden.*

Teilaufgabe (b) Gib einen FPT-Algorithmus für die folgende Parametrisierung „above $\frac{m}{2}$" mit Parameter k an: Gibt es eine Variablenbelegung, die mindestens $\frac{m}{2} + k$ Klauseln erfüllt?

Hinweis: Betrachte Klauseln mit nur einer Variable getrennt von größeren Klauseln und zeige zunächst, dass viele größere Klauseln dazu führen, dass es eine große Lösung gibt.

1

Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

Teilaufgabe (a) Kern mit k Variablen, mit $2k$ Klauseln

Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

Teilaufgabe (a) Kern mit k Variablen, mit $2k$ Klauseln

Gesucht: Belegung mit mindestenz k erfüllten Klauseln

Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

Teilaufgabe (a) Kern mit k Variablen, mit $2k$ Klauseln

Gesucht: Belegung mit mindestenz k erfüllten Klauseln

- Falls $m > 2k$: JA-Instanz:

Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

Teilaufgabe (a) Kern mit k Variablen, mit $2k$ Klauseln

Gesucht: Belegung mit mindestenz k erfüllten Klauseln

- Falls $m > 2k$: JA-Instanz:
  - Beliebige Belegung B oder ihr Komplement erfüllt mindestenz die Hälfte der Klauseln

Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

Teilaufgabe (a) Kern mit k Variablen, mit $2k$ Klauseln

Gesucht: Belegung mit mindestenz k erfüllten Klauseln

- Falls $m > 2k$: JA-Instanz:
  - Beliebige Belegung B oder ihr Komplement erfüllt mindestenz die Hälfte der Klauseln

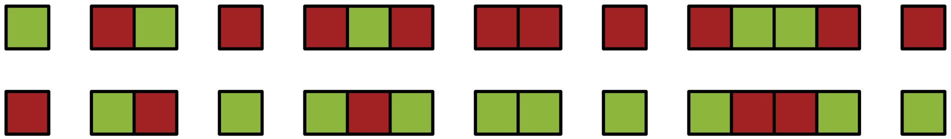
Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

Teilaufgabe (a) Kern mit k Variablen, mit $2k$ Klauseln

Gesucht: Belegung mit mindestenz k erfüllten Klauseln

- Falls $m > 2k$: JA-Instanz:
  - Beliebige Belegung B oder ihr Komplement erfüllt mindestenz die Hälfte der Klauseln



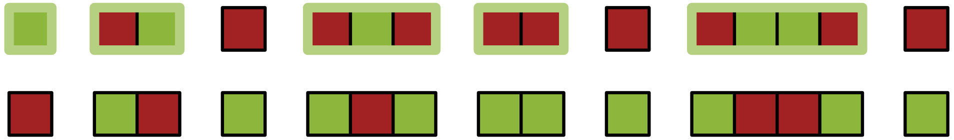
Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

Teilaufgabe (a) Kern mit k Variablen, mit $2k$ Klauseln

Gesucht: Belegung mit mindestenz k erfüllten Klauseln

- Falls $m > 2k$: JA-Instanz:
  - Beliebige Belegung B oder ihr Komplement erfüllt mindestenz die Hälfte der Klauseln



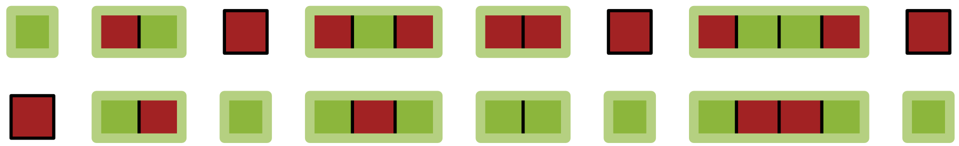
Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

Teilaufgabe (a) Kern mit k Variablen, mit $2k$ Klauseln

Gesucht: Belegung mit mindestenz k erfüllten Klauseln

- Falls $m > 2k$: JA-Instanz:
  - Beliebige Belegung B oder ihr Komplement erfüllt mindestenz die Hälfte der Klauseln



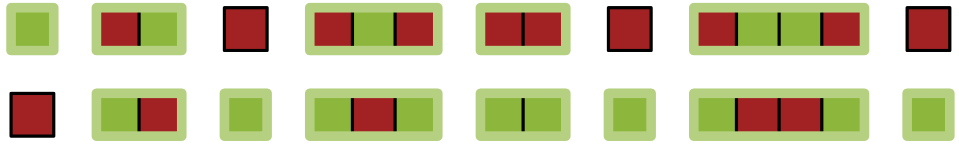
Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

Teilaufgabe (a) Kern mit k Variablen, mit $2k$ Klauseln

Gesucht: Belegung mit mindestenz k erfüllten Klauseln

- Falls $m > 2k$: JA-Instanz:
  - Beliebige Belegung B oder ihr Komplement erfüllt mindestenz die Hälfte der Klauseln



- Falls $n > k$: Satz von Hall

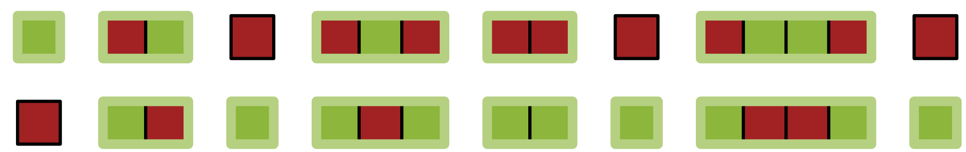
Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

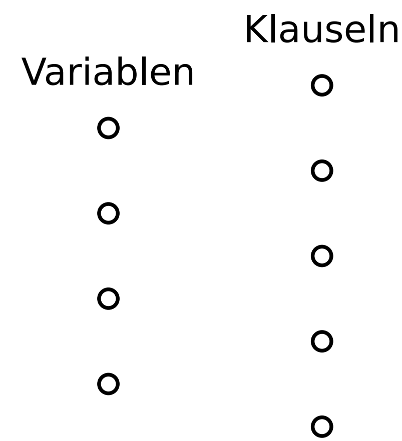
Teilaufgabe (a) Kern mit k Variablen, mit $2k$ Klauseln

Gesucht: Belegung mit mindestenz k erfüllten Klauseln

- Falls $m > 2k$: JA-Instanz:
  - Beliebige Belegung B oder ihr Komplement erfüllt mindestenz die Hälfte der Klauseln



- Falls $n > k$: Satz von Hall



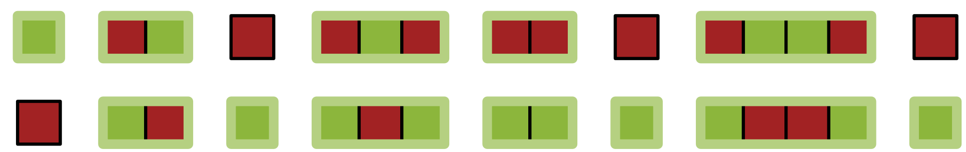
Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

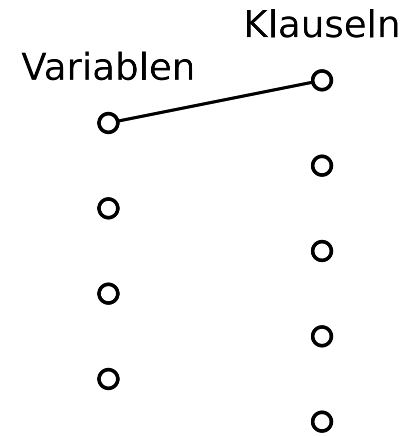
Teilaufgabe (a) Kern mit k Variablen, mit $2k$ Klauseln

Gesucht: Belegung mit mindestenz k erfüllten Klauseln

- Falls $m > 2k$: JA-Instanz:
  - Beliebige Belegung B oder ihr Komplement erfüllt mindestenz die Hälfte der Klauseln



- Falls $n > k$: Satz von Hall



$\{v, C\} \in E$
g.d.w.
$v \in C$

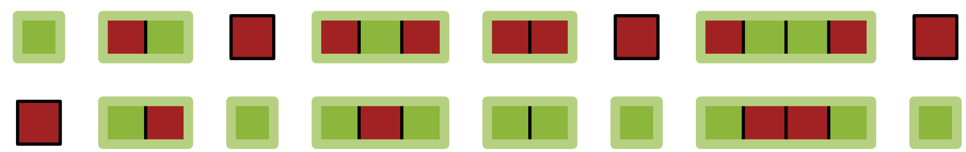
Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

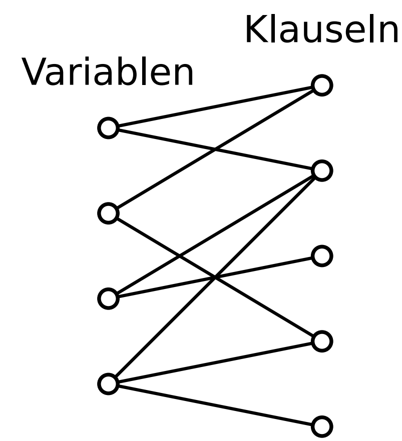
Teilaufgabe (a) Kern mit k Variablen, mit $2k$ Klauseln

Gesucht: Belegung mit mindestenz k erfüllten Klauseln

- Falls $m > 2k$: JA-Instanz:
  - Beliebige Belegung B oder ihr Komplement erfüllt mindestenz die Hälfte der Klauseln



- Falls $n > k$: Satz von Hall



$\{v, C\} \in E$
g.d.w.
$v \in C$

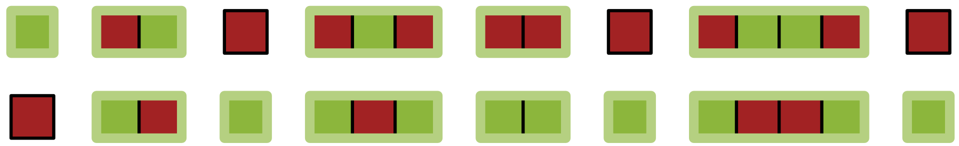
Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

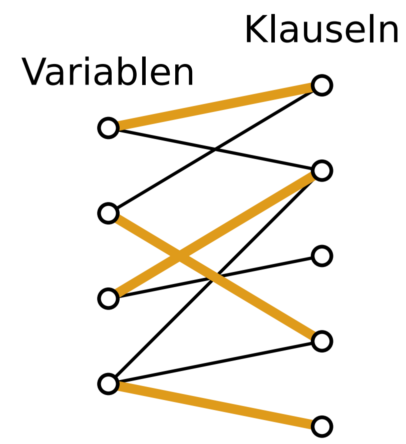
Teilaufgabe (a) Kern mit k Variablen, mit $2k$ Klauseln

Gesucht: Belegung mit mindestenz k erfüllten Klauseln

- Falls $m > 2k$: JA-Instanz:
  - Beliebige Belegung B oder ihr Komplement erfüllt mindestenz die Hälfte der Klauseln



- Falls $n > k$: Satz von Hall
  - Falls Matching mit allen Variablen: JA-Instanz



$\{v, C\} \in E$
g.d.w.
$v \in C$

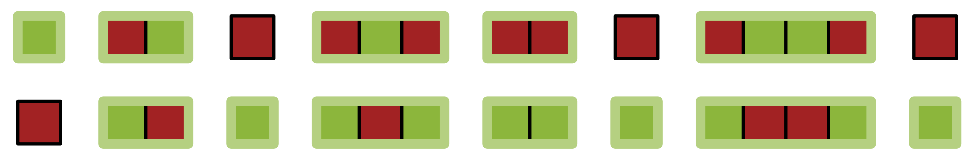
Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

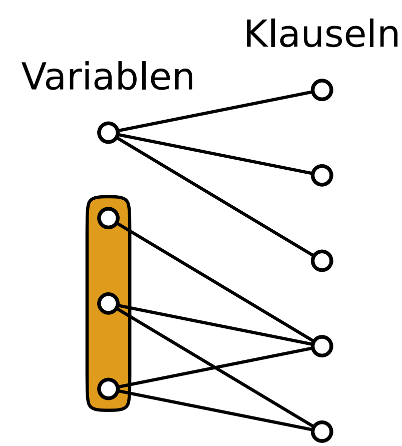
Teilaufgabe (a) Kern mit k Variablen, mit $2k$ Klauseln

Gesucht: Belegung mit mindestenz k erfüllten Klauseln

- Falls $m > 2k$: JA-Instanz:
  - Beliebige Belegung B oder ihr Komplement erfüllt mindestenz die Hälfte der Klauseln



- Falls $n > k$: Satz von Hall
  - Falls Matching mit allen Variablen: JA-Instanz
  - Sonst: finde inkl. min. Menge von Variablen X mit $|X| > |N(X)|$



$\{v, C\} \in E$
g.d.w.
$v \in C$

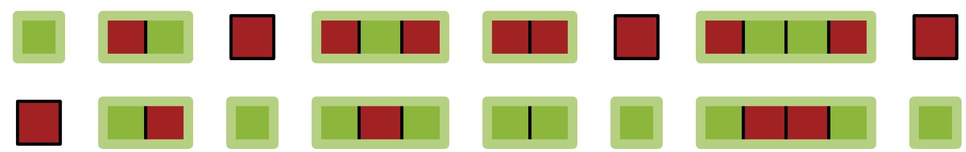
Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

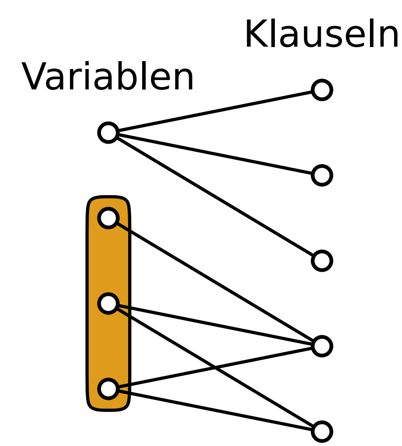
Teilaufgabe (a) Kern mit k Variablen, mit $2k$ Klauseln

Gesucht: Belegung mit mindestenz k erfüllten Klauseln

- Falls $m > 2k$: JA-Instanz:
  - Beliebige Belegung B oder ihr Komplement erfüllt mindestenz die Hälfte der Klauseln



- Falls $n > k$: Satz von Hall
  - Falls Matching mit allen Variablen: JA-Instanz
  - Sonst: finde inkl. min. Menge von Variablen X mit $|X| > |N(X)|$
  - für $x \in X$ hat $X \setminus x$ perfektes Matching



$\{v, C\} \in E$
g.d.w.
$v \in C$

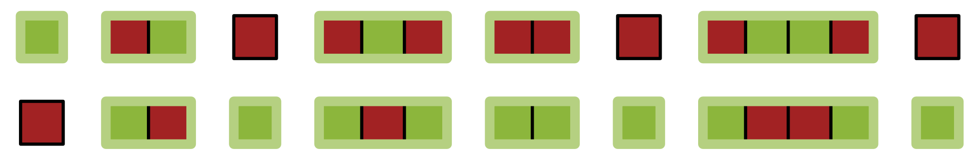
Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

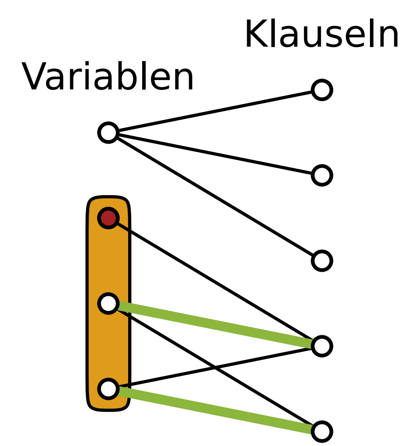
Teilaufgabe (a) Kern mit k Variablen, mit $2k$ Klauseln

Gesucht: Belegung mit mindestenz k erfüllten Klauseln

- Falls $m > 2k$: JA-Instanz:
  - Beliebige Belegung B oder ihr Komplement erfüllt mindestenz die Hälfte der Klauseln



- Falls $n > k$: Satz von Hall
  - Falls Matching mit allen Variablen: JA-Instanz
  - Sonst: finde inkl. min. Menge von Variablen X mit $|X| > |N(X)|$
  - für $x \in X$ hat $X \setminus x$ perfektes Matching



$\{v, C\} \in E$
g.d.w.
$v \in C$

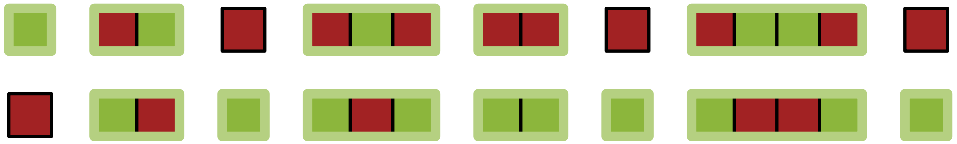
Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

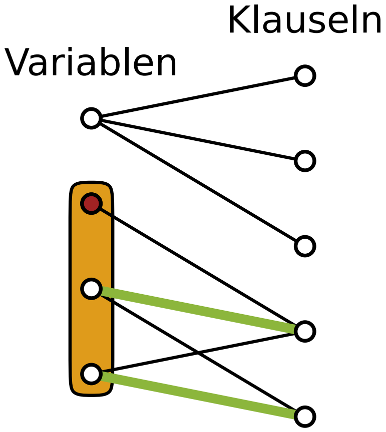
Teilaufgabe (a) Kern mit k Variablen, mit $2k$ Klauseln

Gesucht: Belegung mit mindestenz k erfüllten Klauseln

- Falls $m > 2k$: JA-Instanz:
  - Beliebige Belegung B oder ihr Komplement erfüllt mindestenz die Hälfte der Klauseln



- Falls $n > k$: Satz von Hall
  - Falls Matching mit allen Variablen: JA-Instanz
  - Sonst: finde inkl. min. Menge von Variablen X mit $|X| > |N(X)|$
  - für $x \in X$ hat $X \setminus x$ perfektes Matching
  - reduziere Instanz um X und $N(X)$



$\{v, C\} \in E$
g.d.w.
$v \in C$

Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

Teilaufgabe (b) FPT Algo für mindestenz $\frac{m}{2} + k$ erfüllte Klauseln

Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

Teilaufgabe (b) FPT Algo für mindestenz $\frac{m}{2} + k$ erfüllte Klauseln

- Reduktionsregel 1: Zwei unäre Klauseln $\{v\}$ und $\{\neg v\}$

Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

Teilaufgabe (b) FPT Algo für mindestenz $\frac{m}{2} + k$ erfüllte Klauseln

- Reduktionsregel 1: Zwei unäre Klauseln $\{v\}$ und $\{\neg v\}$
  - entferne Klausen, suche Lösung der Größe $\frac{m}{2} + k - 1 = \frac{m-2}{2} + k$

Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

Teilaufgabe (b) FPT Algo für mindestenz $\frac{m}{2} + k$ erfüllte Klauseln

- Reduktionsregel 1: Zwei unäre Klauseln $\{v\}$ und $\{\neg v\}$
  - entferne Klausen, suche Lösung der Größe $\frac{m}{2} + k - 1 = \frac{m-2}{2} + k$
- Setze $u :=$ #unäre Klauseln, $g :=$ #größere Klauseln

Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

Teilaufgabe (b) FPT Algo für mindestenz $\frac{m}{2} + k$ erfüllte Klauseln

- Reduktionsregel 1: Zwei unäre Klauseln $\{v\}$ und $\{\neg v\}$
  - entferne Klausen, suche Lösung der Größe $\frac{m}{2} + k - 1 = \frac{m-2}{2} + k$
- Setze $u :=$ #unäre Klauseln, $g :=$ #größere Klauseln
  - Nach Regel 1: $u < \frac{m}{2} + k$ (oder JA-Instanz)

Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

Teilaufgabe (b) FPT Algo für mindestenz $\frac{m}{2} + k$ erfüllte Klauseln

- Reduktionsregel 1: Zwei unäre Klauseln $\{v\}$ und $\{\neg v\}$
  - entferne Klausen, suche Lösung der Größe $\frac{m}{2} + k - 1 = \frac{m-2}{2} + k$
- Setze $u :=$ #unäre Klauseln, $g :=$ #größere Klauseln
  - Nach Regel 1: $u < \frac{m}{2} + k$ (oder JA-Instanz)
- Probabilistische Methode: $E[X] \geq k \Rightarrow Pr[X \geq k] > 0$
  Betrachte Anzahl erfüllter Klauseln X bei uniform zufälliger Belegung

Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

Teilaufgabe (b) FPT Algo für mindestenz $\frac{m}{2} + k$ erfüllte Klauseln

- Reduktionsregel 1: Zwei unäre Klauseln $\{v\}$ und $\{\neg v\}$
  - entferne Klausen, suche Lösung der Größe $\frac{m}{2} + k - 1 = \frac{m-2}{2} + k$
- Setze u := #unäre Klauseln, g := #größere Klauseln
  - Nach Regel 1: $u < \frac{m}{2} + k$ (oder JA-Instanz)
- Probabilistische Methode: $E[X] \geq k \Rightarrow Pr[X \geq k] > 0$
  Betrachte Anzahl erfüllter Klauseln X bei uniform zufälliger Belegung

$E[X]$

Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

Teilaufgabe (b) FPT Algo für mindestenz $\frac{m}{2} + k$ erfüllte Klauseln

- Reduktionsregel 1: Zwei unäre Klauseln $\{v\}$ und $\{\neg v\}$
  - entferne Klausen, suche Lösung der Größe $\frac{m}{2} + k - 1 = \frac{m-2}{2} + k$
- Setze $u :=$ #unäre Klauseln, $g :=$ #größere Klauseln
  - Nach Regel 1: $u < \frac{m}{2} + k$ (oder JA-Instanz)
- Probabilistische Methode: $E[X] \geq k \Rightarrow Pr[X \geq k] > 0$
  Betrachte Anzahl erfüllter Klauseln X bei uniform zufälliger Belegung

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{m} X_i\right]$$

Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

Teilaufgabe (b) FPT Algo für mindestenz $\frac{m}{2} + k$ erfüllte Klauseln

- Reduktionsregel 1: Zwei unäre Klauseln $\{v\}$ und $\{\neg v\}$
  - entferne Klausen, suche Lösung der Größe $\frac{m}{2} + k - 1 = \frac{m-2}{2} + k$
- Setze $u :=$ #unäre Klauseln, $g :=$ #größere Klauseln
  - Nach Regel 1: $u < \frac{m}{2} + k$ (oder JA-Instanz)
- Probabilistische Methode: $E[X] \geq k \Rightarrow Pr[X \geq k] > 0$
  Betrachte Anzahl erfüllter Klauseln X bei uniform zufälliger Belegung

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{m} X_i\right] = \sum_{i=1}^{m} E\left[X_i\right]$$

Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

Teilaufgabe (b) FPT Algo für mindestenz $\frac{m}{2} + k$ erfüllte Klauseln

- Reduktionsregel 1: Zwei unäre Klauseln $\{v\}$ und $\{\neg v\}$
  - entferne Klausen, suche Lösung der Größe $\frac{m}{2} + k - 1 = \frac{m-2}{2} + k$
- Setze $u :=$ #unäre Klauseln, $g :=$ #größere Klauseln
  - Nach Regel 1: $u < \frac{m}{2} + k$ (oder JA-Instanz)
- Probabilistische Methode: $E[X] \geq k \Rightarrow Pr[X \geq k] > 0$
  Betrachte Anzahl erfüllter Klauseln X bei uniform zufälliger Belegung

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{m} X_i\right] = \sum_{i=1}^{m} E\left[X_i\right] \geq \frac{u}{2} + \frac{3}{4}g$$

Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

Teilaufgabe (b) FPT Algo für mindestenz $\frac{m}{2} + k$ erfüllte Klauseln

- Reduktionsregel 1: Zwei unäre Klauseln $\{v\}$ und $\{\neg v\}$
  - entferne Klausen, suche Lösung der Größe $\frac{m}{2} + k - 1 = \frac{m-2}{2} + k$
- Setze $u :=$ #unäre Klauseln, $g :=$ #größere Klauseln
  - Nach Regel 1: $u < \frac{m}{2} + k$ (oder JA-Instanz)
- Probabilistische Methode: $E[X] \geq k \Rightarrow Pr[X \geq k] > 0$
  Betrachte Anzahl erfüllter Klauseln X bei uniform zufälliger Belegung

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{m} X_i\right] = \sum_{i=1}^{m} E\left[X_i\right] \geq \frac{u}{2} + \frac{3}{4}g = \frac{m}{2} + \frac{g}{4}$$

Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

Teilaufgabe (b) FPT Algo für mindestenz $\frac{m}{2} + k$ erfüllte Klauseln

- Reduktionsregel 1: Zwei unäre Klauseln $\{v\}$ und $\{\neg v\}$
  - entferne Klausen, suche Lösung der Größe $\frac{m}{2} + k - 1 = \frac{m-2}{2} + k$
- Setze $u :=$ #unäre Klauseln, $g :=$ #größere Klauseln
  - Nach Regel 1: $u < \frac{m}{2} + k$ (oder JA-Instanz)
- Probabilistische Methode: $E[X] \geq k \Rightarrow Pr[X \geq k] > 0$
  Betrachte Anzahl erfüllter Klauseln X bei uniform zufälliger Belegung

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{m} X_i\right] = \sum_{i=1}^{m} E\left[X_i\right] \geq \frac{u}{2} + \frac{3}{4}g = \frac{m}{2} + \frac{g}{4} \Rightarrow \frac{m}{2} + \frac{g}{4} \text{ Klauseln erfüllbar}$$

Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

Teilaufgabe (b) FPT Algo für mindestenz $\frac{m}{2} + k$ erfüllte Klauseln

- Reduktionsregel 1: Zwei unäre Klauseln $\{v\}$ und $\{\neg v\}$
  - entferne Klausen, suche Lösung der Größe $\frac{m}{2} + k - 1 = \frac{m-2}{2} + k$
- Setze $u :=$ #unäre Klauseln, $g :=$ #größere Klauseln
  - Nach Regel 1: $u < \frac{m}{2} + k$ (oder JA-Instanz)
- Probabilistische Methode: $E[X] \geq k \Rightarrow Pr[X \geq k] > 0$
  Betrachte Anzahl erfüllter Klauseln X bei uniform zufälliger Belegung

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{m} X_i\right] = \sum_{i=1}^{m} E[X_i] \geq \frac{u}{2} + \frac{3}{4}g = \frac{m}{2} + \frac{g}{4} \Rightarrow \tfrac{m}{2} + \tfrac{g}{4} \text{ Klauseln erfüllbar}$$

  - $g < 4k$, sonst JA-Instanz

Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

Teilaufgabe (b) FPT Algo für mindestenz $\frac{m}{2} + k$ erfüllte Klauseln

- Reduktionsregel 1: Zwei unäre Klauseln $\{v\}$ und $\{\neg v\}$
  - entferne Klausen, suche Lösung der Größe $\frac{m}{2}+k-1 = \frac{m-2}{2}+k$
- Setze $u :=$ #unäre Klauseln, $g :=$ #größere Klauseln
  - Nach Regel 1: $u < \frac{m}{2} + k$ (oder JA-Instanz)
- Probabilistische Methode: $E[X] \geq k \Rightarrow Pr[X \geq k] > 0$
  Betrachte Anzahl erfüllter Klauseln X bei uniform zufälliger Belegung

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{m} X_i\right] = \sum_{i=1}^{m} E\left[X_i\right] \geq \frac{u}{2} + \frac{3}{4}g = \frac{m}{2} + \frac{g}{4} \Rightarrow \tfrac{m}{2} + \tfrac{g}{4} \text{ Klauseln erfüllbar}$$

  - $g < 4k$, sonst JA-Instanz
  - $m = u + g < \frac{m}{2} + k + 4k = \frac{m}{2} + 5k \Rightarrow m < 10k$

Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

Teilaufgabe (b) FPT Algo für mindestenz $\frac{m}{2} + k$ erfüllte Klauseln

- Reduktionsregel 1: Zwei unäre Klauseln $\{v\}$ und $\{\neg v\}$
  - entferne Klausen, suche Lösung der Größe $\frac{m}{2} + k - 1 = \frac{m-2}{2} + k$
- Setze $u :=$ #unäre Klauseln, $g :=$ #größere Klauseln
  - Nach Regel 1: $u < \frac{m}{2} + k$ (oder JA-Instanz)
- Probabilistische Methode: $E[X] \geq k \Rightarrow Pr[X \geq k] > 0$
  Betrachte Anzahl erfüllter Klauseln X bei uniform zufälliger Belegung

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{m} X_i\right] = \sum_{i=1}^{m} E[X_i] \geq \frac{u}{2} + \frac{3}{4}g = \frac{m}{2} + \frac{g}{4} \Rightarrow \frac{m}{2} + \frac{g}{4} \text{ Klauseln erfüllbar}$$

  - $g < 4k$, sonst JA-Instanz
  - $m = u + g < \frac{m}{2} + k + 4k = \frac{m}{2} + 5k \Rightarrow m < 10k$
  - Frage nun: sind $\frac{m}{2} + k < 6k$ Klauseln erfüllbar?

Übungsblatt 4

Gegeben: Formel φ in KNF, mit n Variablen und m Klauseln

Teilaufgabe (b) FPT Algo für mindestenz $\frac{m}{2} + k$ erfüllte Klauseln

- Reduktionsregel 1: Zwei unäre Klauseln $\{v\}$ und $\{\neg v\}$
  - entferne Klausen, suche Lösung der Größe $\frac{m}{2} + k - 1 = \frac{m-2}{2} + k$
- Setze $u :=$ #unäre Klauseln, $g :=$ #größere Klauseln
  - Nach Regel 1: $u < \frac{m}{2} + k$ (oder JA-Instanz)
- Probabilistische Methode: $E[X] \geq k \Rightarrow Pr[X \geq k] > 0$
  Betrachte Anzahl erfüllter Klauseln X bei uniform zufälliger Belegung

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{m} X_i\right] = \sum_{i=1}^{m} E[X_i] \geq \frac{u}{2} + \frac{3}{4}g = \frac{m}{2} + \frac{g}{4} \Rightarrow \tfrac{m}{2} + \tfrac{g}{4} \text{ Klauseln erfüllbar}$$

  - $g < 4k$, sonst JA-Instanz
  - $m = u + g < \frac{m}{2} + k + 4k = \frac{m}{2} + 5k \Rightarrow m < 10k$
  - Frage nun: sind $\frac{m}{2} + k < 6k$ Klauseln erfüllbar? $\Rightarrow$ Teilaufgabe (a)