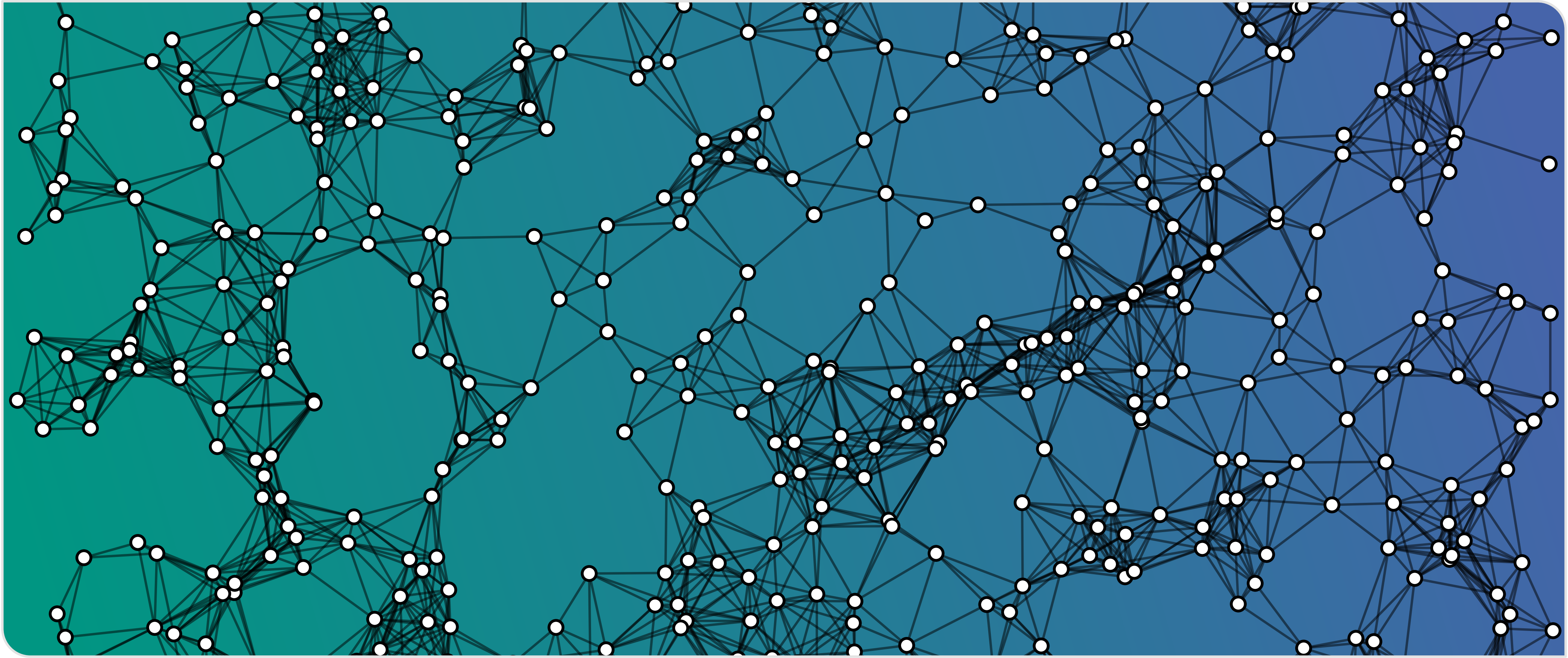
Karlsruher Institut für Technologie

# Parametrisierte Algorithmen

## Übung 4



# Heute

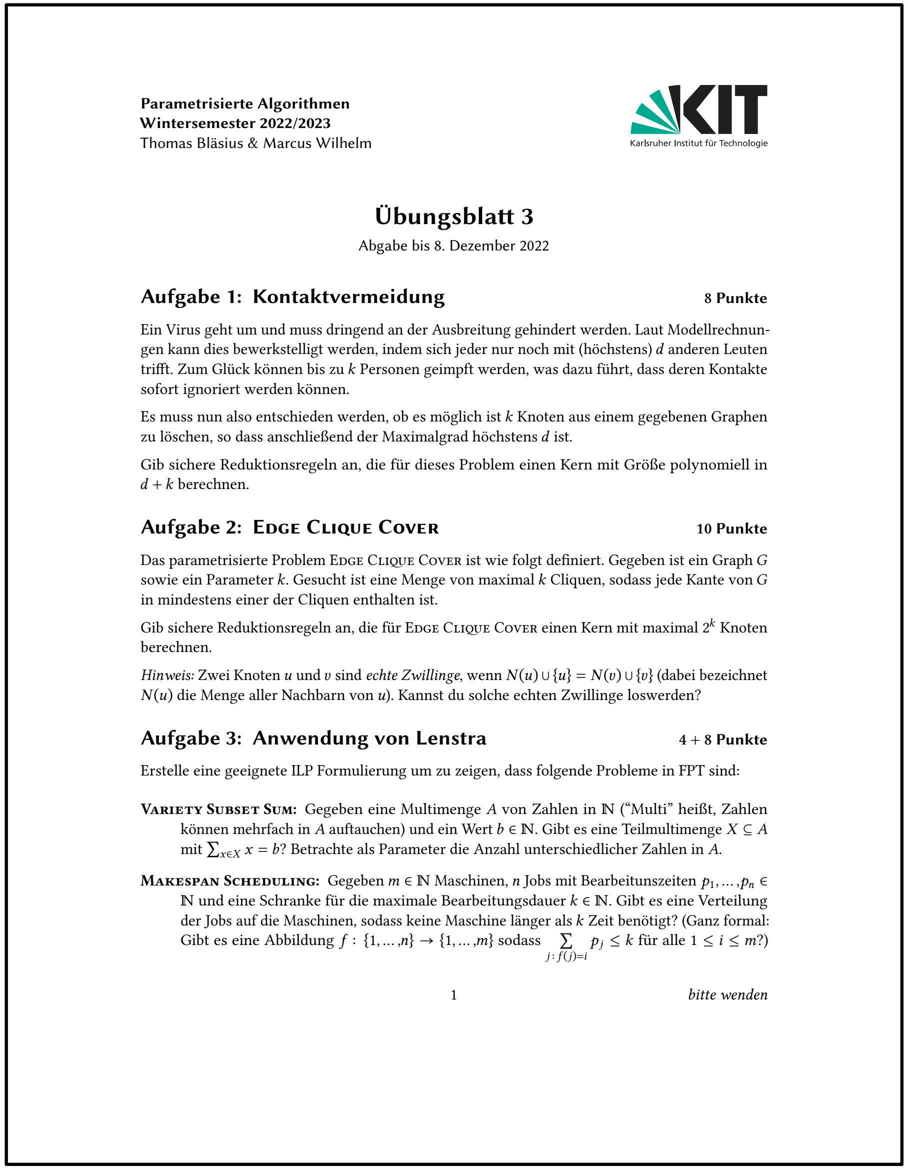
**Übungsblatt 3**

**Übungsblatt 4**

**Außerdem**

- Literaturhinweis
- schwierige Aufgaben

# Übungsblatt 3



**Parametrisierte Algorithmen**
**Wintersemester 2022/2023**
Thomas Bläsius & Marcus Wilhelm

Karlsruher Institut für Technologie

## Übungsblatt 3

Abgabe bis 8. Dezember 2022

### Aufgabe 1: Kontaktvermeidung — 8 Punkte

Ein Virus geht um und muss dringend an der Ausbreitung gehindert werden. Laut Modellrechnungen kann dies bewerkstelligt werden, indem sich jeder nur noch mit (höchstens) $d$ anderen Leuten trifft. Zum Glück können bis zu $k$ Personen geimpft werden, was dazu führt, dass deren Kontakte sofort ignoriert werden können.

Es muss nun also entschieden werden, ob es möglich ist $k$ Knoten aus einem gegebenen Graphen zu löschen, so dass anschließend der Maximalgrad höchstens $d$ ist.

Gib sichere Reduktionsregeln an, die für dieses Problem einen Kern mit Größe polynomiell in $d + k$ berechnen.

### Aufgabe 2: Edge Clique Cover — 10 Punkte

Das parametrisierte Problem Edge Clique Cover ist wie folgt definiert. Gegeben ist ein Graph $G$ sowie ein Parameter $k$. Gesucht ist eine Menge von maximal $k$ Cliquen, sodass jede Kante von $G$ in mindestens einer der Cliquen enthalten ist.

Gib sichere Reduktionsregeln an, die für Edge Clique Cover einen Kern mit maximal $2^k$ Knoten berechnen.

*Hinweis:* Zwei Knoten $u$ und $v$ sind *echte Zwillinge*, wenn $N(u) \cup \{u\} = N(v) \cup \{v\}$ (dabei bezeichnet $N(u)$ die Menge aller Nachbarn von $u$). Kannst du solche echten Zwillinge loswerden?

### Aufgabe 3: Anwendung von Lenstra — 4 + 8 Punkte

Erstelle eine geeignete ILP Formulierung um zu zeigen, dass folgende Probleme in FPT sind:

**Variety Subset Sum:** Gegeben eine Multimenge $A$ von Zahlen in $\mathbb{N}$ ("Multi" heißt, Zahlen können mehrfach in $A$ auftauchen) und ein Wert $b \in \mathbb{N}$. Gibt es eine Teilmultimenge $X \subseteq A$ mit $\sum_{x \in X} x = b$? Betrachte als Parameter die Anzahl unterschiedlicher Zahlen in $A$.

**Makespan Scheduling:** Gegeben $m \in \mathbb{N}$ Maschinen, $n$ Jobs mit Bearbeitunszeiten $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{N}$ und eine Schranke für die maximale Bearbeitungsdauer $k \in \mathbb{N}$. Gibt es eine Verteilung der Jobs auf die Maschinen, sodass keine Maschine länger als $k$ Zeit benötigt? (Ganz formal: Gibt es eine Abbildung $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$ sodass $\sum_{j : f(j) = i} p_j \le k$ für alle $1 \le i \le m$?)

1 — *bitte wenden*

Erweiterung von Vertex Cover

gut Bearbeitet

gleiche Nachbarschaft falls gleiche Cliquen

bei Reduktionsregel: ggf. $k$ dekrementieren

Notation: gerne frei $\leq, \geq, =$ verwenden

# Übungsblatt 3

Karlsruher Institut für Technologie

**Parametrisierte Algorithmen**
**Wintersemester 2022/2023**
Thomas Bläsius & Marcus Wilhelm

Karlsruher Institut für Technologie

## Übungsblatt 3

Abgabe bis 8. Dezember 2022

### Aufgabe 1: Kontaktvermeidung — 8 Punkte

Ein Virus geht um und muss dringend an der Ausbreitung gehindert werden. Laut Modellrechnungen kann dies bewerkstelligt werden, indem sich jeder nur noch mit (höchstens) $d$ anderen Leuten trifft. Zum Glück können bis zu $k$ Personen geimpft werden, was dazu führt, dass deren Kontakte sofort ignoriert werden können.

Es muss nun also entschieden werden, ob es möglich ist $k$ Knoten aus einem gegebenen Graphen zu löschen, so dass anschließend der Maximalgrad höchstens $d$ ist.

Gib sichere Reduktionsregeln an, die für dieses Problem einen Kern mit Größe polynomiell in $d + k$ berechnen.

### Aufgabe 2: Edge Clique Cover — 10 Punkte

Das parametrisierte Problem Edge Clique Cover ist wie folgt definiert. Gegeben ist ein Graph $G$ sowie ein Parameter $k$. Gesucht ist eine Menge von maximal $k$ Cliquen, sodass jede Kante von $G$ in mindestens einer der Cliquen enthalten ist.

Gib sichere Reduktionsregeln an, die für Edge Clique Cover einen Kern mit maximal $2^k$ Knoten berechnen.

*Hinweis:* Zwei Knoten $u$ und $v$ sind *echte Zwillinge*, wenn $N(u) \cup \{u\} = N(v) \cup \{v\}$ (dabei bezeichnet $N(u)$ die Menge aller Nachbarn von $u$). Kannst du solche echten Zwillinge loswerden?

### Aufgabe 3: Anwendung von Lenstra — 4 + 8 Punkte

Erstelle eine geeignete ILP Formulierung um zu zeigen, dass folgende Probleme in FPT sind:

**Variety Subset Sum:** Gegeben eine Multimenge $A$ von Zahlen in $\mathbb{N}$ ("Multi" heißt, Zahlen können mehrfach in $A$ auftauchen) und ein Wert $b \in \mathbb{N}$. Gibt es eine Teilmultimenge $X \subseteq A$ mit $\sum_{x \in X} x = b$? Betrachte als Parameter die Anzahl unterschiedlicher Zahlen in $A$.

**Makespan Scheduling:** Gegeben $m \in \mathbb{N}$ Maschinen, $n$ Jobs mit Bearbeitunszeiten $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ und eine Schranke für die maximale Bearbeitungsdauer $k \in \mathbb{N}$. Gibt es eine Verteilung der Jobs auf die Maschinen, sodass keine Maschine länger als $k$ Zeit benötigt? (Ganz formal: Gibt es eine Abbildung $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ sodass $\sum_{j : f(j) = i} p_j \leq k$ für alle $1 \leq i \leq m$?)

1 *bitte wenden*

Allgemein bei Reduktionsregeln:

- Regel beschreiben
- Sicherheit zeigen
- polynomielle Laufzeit zeigen

# Übungsblatt 4

**Parametrisierte Algorithmen**
**Wintersemester 2022/2023**
Thomas Bläsius & Marcus Wilhelm

## Übungsblatt 4

Abgabe bis 22. Dezember 2022

### Aufgabe 1: Vertex Cover in bipartiten Graphen — $7 + 7 = 14$ Punkte

**Teilaufgabe (a)** Zeige, dass die LP-Relaxierung des ILPs zu Vertex Cover eine ganzzahlige optimale Lösung hat, wenn der Graph bipartit ist.

*Hinweis:* Zeige, dass die zugehörige Matrix total unimodular ist.

**Teilaufgabe (b)** Benutze den Dualitätssatz, um den Satz von König zu beweisen. Der Satz von König besagt, dass das minimale Vertex Cover und das maximale Matching in einem bipartiten Graphen die gleiche Kardinalität haben.

### Aufgabe 2: Max Sat — $5 + 11 = 16$ Punkte

Gegeben sei eine boolesche Formel $\varphi$ (in KNF) mit $n$ Variablen und $m$ Klauseln. Bei dem Problem Max Sat soll eine Variablenbelegung gefunden werden, die möglichst viele Klauseln erfüllt.

**Teilaufgabe (a)** Gib sichere Reduktionsregeln an, die einen Kern mit maximal $2k$ Klauseln und $k$ Variablen liefern, wobei $k$ die Lösungsgröße ist.

*Hinweis:* Benutze den Satz von Hall, um die Anzahl der Variablen zu reduzieren.

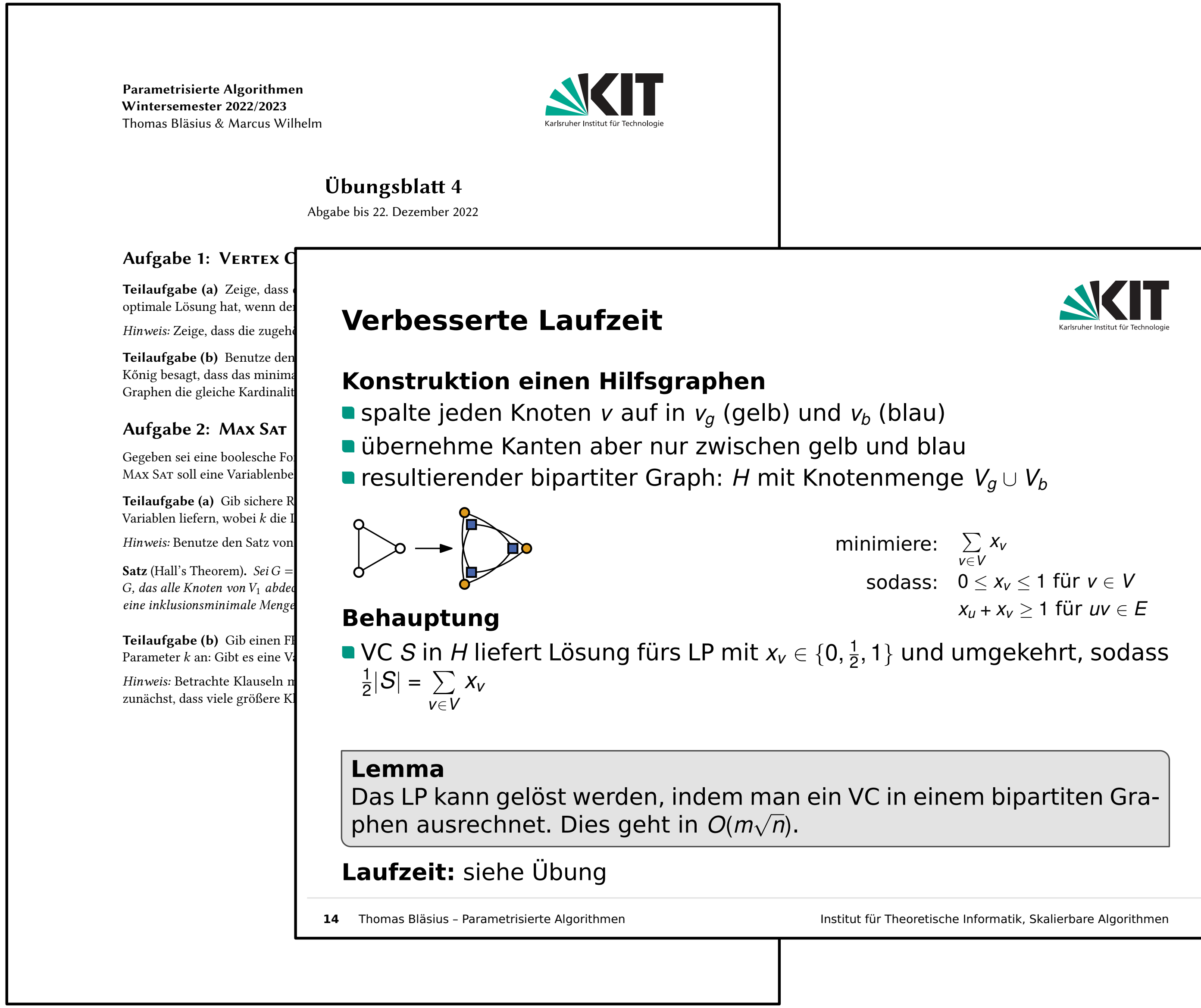
**Satz** (Hall's Theorem). *Sei $G = (V_1 \cup V_2, E)$ ein bipartiter Graph. Es gibt genau dann ein Matching in $G$, das alle Knoten von $V_1$ abdeckt, wenn $|X| \leq |N(X)|$ für jede Teilmenge $X \subseteq V_1$. Andernfalls kann eine inklusionsminimale Menge $X \subseteq V_1$ mit $|X| > |N(X)|$ effizient gefunden werden.*

**Teilaufgabe (b)** Gib einen FPT-Algorithmus für die folgende Parametrisierung „above $\frac{m}{2}$" mit Parameter $k$ an: Gibt es eine Variablenbelegung, die mindestens $\frac{m}{2} + k$ Klauseln erfüllt?

*Hinweis:* Betrachte Klauseln mit nur einer Variable getrennt von größeren Klauseln und zeige zunächst, dass viele größere Klauseln dazu führen, dass es eine große Lösung gibt.

1

# Übungsblatt 4



**Parametrisierte Algorithmen**
**Wintersemester 2022/2023**
Thomas Bläsius & Marcus Wilhelm

Karlsruher Institut für Technologie

### Übungsblatt 4

Abgabe bis 22. Dezember 2022

**Aufgabe 1: Vertex C**

**Teilaufgabe (a)** Zeige, dass
optimale Lösung hat, wenn de

*Hinweis:* Zeige, dass die zugeh

**Teilaufgabe (b)** Benutze den
König besagt, dass das minima
Graphen die gleiche Kardinalit

**Aufgabe 2: Max Sat**

Gegeben sei eine boolesche Fo
Max Sat soll eine Variablenbe

**Teilaufgabe (a)** Gib sichere R
Variablen liefern, wobei $k$ die I

*Hinweis:* Benutze den Satz von

**Satz** (Hall's Theorem). *Sei $G$ =*
*$G$, das alle Knoten von $V_1$ abdec*
*eine inklusionsminimale Menge*

**Teilaufgabe (b)** Gib einen FI
Parameter $k$ an: Gibt es eine V

*Hinweis:* Betrachte Klauseln m
zunächst, dass viele größere Kl

## Verbesserte Laufzeit

Karlsruher Institut für Technologie

**Konstruktion einen Hilfsgraphen**

- spalte jeden Knoten $v$ auf in $v_g$ (gelb) und $v_b$ (blau)
- übernehme Kanten aber nur zwischen gelb und blau
- resultierender bipartiter Graph: $H$ mit Knotenmenge $V_g \cup V_b$

minimiere: $\sum_{v \in V} x_v$

sodass: $0 \leq x_v \leq 1$ für $v \in V$

$x_u + x_v \geq 1$ für $uv \in E$

**Behauptung**

- VC $S$ in $H$ liefert Lösung fürs LP mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ und umgekehrt, sodass $\frac{1}{2}|S| = \sum_{v \in V} x_v$

**Lemma**
Das LP kann gelöst werden, indem man ein VC in einem bipartiten Graphen ausrechnet. Dies geht in $O(m\sqrt{n})$.

**Laufzeit:** siehe Übung

14 Thomas Bläsius – Parametrisierte Algorithmen Institut für Theoretische Informatik, Skalierbare Algorithmen

# Übungsblatt 4

**Parametrisierte Algorithmen**
**Wintersemester 2022/2023**
Thomas Bläsius & Marcus Wilhelm

## Übungsblatt 4

Abgabe bis 22. Dezember 2022

### Aufgabe 1: Vertex Cover in bipartiten Graphen — $7 + 7 = 14$ Punkte

**Teilaufgabe (a)** Zeige, dass die LP-Relaxierung des ILPs zu Vertex Cover eine ganzzahlige optimale Lösung hat, wenn der Graph bipartit ist.

*Hinweis:* Zeige, dass die zugehörige Matrix total unimodular ist.

**Teilaufgabe (b)** Benutze den Dualitätssatz, um den Satz von König zu beweisen. Der Satz von König besagt, dass das minimale Vertex Cover und das maximale Matching in einem bipartiten Graphen die gleiche Kardinalität haben.

### Aufgabe 2: Max Sat — $5 + 11 = 16$ Punkte

Gegeben sei eine boolesche Formel $\varphi$ (in KNF) mit $n$ Variablen und $m$ Klauseln. Bei dem Problem Max Sat soll eine Variablenbelegung gefunden werden, die möglichst viele Klauseln erfüllt.

**Teilaufgabe (a)** Gib sichere Reduktionsregeln an, die einen Kern mit maximal $2k$ Klauseln und $k$ Variablen liefern, wobei $k$ die Lösungsgröße ist.

*Hinweis:* Benutze den Satz von Hall, um die Anzahl der Variablen zu reduzieren.

**Satz** (Hall's Theorem). *Sei $G = (V_1 \cup V_2, E)$ ein bipartiter Graph. Es gibt genau dann ein Matching in $G$, das alle Knoten von $V_1$ abdeckt, wenn $|X| \leq |N(X)|$ für jede Teilmenge $X \subseteq V_1$. Andernfalls kann eine inklusionsminimale Menge $X \subseteq V_1$ mit $|X| > |N(X)|$ effizient gefunden werden.*

**Teilaufgabe (b)** Gib einen FPT-Algorithmus für die folgende Parametrisierung „above $\frac{m}{2}$“ mit Parameter $k$ an: Gibt es eine Variablenbelegung, die mindestens $\frac{m}{2} + k$ Klauseln erfüllt?

*Hinweis:* Betrachte Klauseln mit nur einer Variable getrennt von größeren Klauseln und zeige zunächst, dass viele größere Klauseln dazu führen, dass es eine große Lösung gibt.

1

# Außerdem

Karlsruher Institut für Technologie

## Literaturhinweis

Finding Optimal Triangulations Parameterized by Edge Clique Cover

https://arxiv.org/abs/1912.10989

## Aufgaben zu Kernbildung

UNIQUE HITTING SET: gegeben eine Menge $X$ und $k$ Teilmengen $X_1, dots, X_k$ gibt es eine Menge $S$, die jedes $X_i$ in *genau* einem Element schneidet?

- Gib eine Kernbildung für UNIQUE HITTING SET an!

LONG CYCLE: entscheide für einen Graphen $G$ und $k > 0$, ob $G$ einen Kreis mit mindestens $k$ Knoten enthält.

- *max leaf number* $\ell$: Kein Spannbaum von $G$ hat mehr als $\ell$ Blätter.
- Gib für LONG CYCLE mit Parameter $\ell$ einen polynomiellen Kern an.
  - *Tipp:* Snyyf y xyrva vfg ung T jravtr Xabgra zvg Tenq tebrffre qerv.