Lösung zum Übungsblatt 7

Aufgabe 1: Kreise der Länge 4

Da es sich hierbei um ein Optimierungsproblem handelt, wenden wir Courcelles Theorem für Optimierung an. Das Prädikat $\varphi(X)$ gibt dabei an, ob eine Knotenmenge X eine valide Lösung ist, optimiert wird nach der Lösungsgröße $\alpha(X) = |X|$.

Eine Lösung X ist gültig, genau dann wenn es keinen Kreis der Länge vier im Graphen ohne X gibt, d.h. wenn es keine Knotenmenge gibt, die keine Knoten von X enthält und vier paarweise ungleiche Knoten enthält, welche einen Kreis bilden. In MSO_2 ausgedrückt ergibt sich also:

$\varphi(X) = \forall C \subseteq V\,:\, has4Circle(C) \to (\exists v \in X\,:\, v \in C)$

mit $has4Circle(C) = \exists v_1, v_2, v_3, v_4 \in C\,:\,(v_1 \neq v_2, v_1 \neq v_3, v_1 \neq v_4, v_2 \neq v_3, v_2 \neq v_4, v_3 \neq v_4) \to (adj(v_1,v_2) \wedge adj(v_2, v_3) \wedge adj(v_3, v_4) \wedge adj(v_4, v_1))$

und $adj(x, y) = \{x,y\} \in E = \exists e \in E\,:\, inc(x,e) \wedge inc(y,e)$ die Adjazenz zweier Knoten ausdrückt.

Nach Courcelles Theorem ist die minimale Lösung dann in $\mathcal{O}(f(|\varphi|, t) \cdot n)$ mit Baumweite t und berechenbarem f. Da die Länge von φ konstant ist, hängt f nur von der Baumweite ab, somit ist das Problem in FPT nach der Baumweite.

Aufgabe 2: Chordale Graphen

Teilaufgabe (a) Sei G ein chordaler Graph. Angenommen der inklusionsminimale Separator S zwischen a und b ist keine Clique, d.h. es gibt nicht adjazente Knoten $s_1, s_2 \in S$. Seien G_a und G_b die Zusammenhangskomponenten von a und b im Graphen ohne S. Aufgrund der Inklusionsminimalität von S, gibt es Pfade von a (und auch b) zu sowohl s_1 als auch s_2. Sei demnach P_a der kürzeste Pfad zwischen s_1 und s_2 in G_a und P_b der kürzeste Pfad zwischen s_1 und s_2 in G_b. Da sich die von S getrennten Komponenten nicht schneiden, ergibt die Vereinigung von P_a und P_b einen Kreis. Dieser Kreis hat mindestens Länge 4 und enthält keine Sehne, weshalb G nicht chordal sein kann.

Teilaufgabe (b) Zu zeigen: Entweder G ist eine Clique oder G hat (min.) zwei nicht-adjazente, simpliziale Knoten.

Teil 1:

Sei G eine Clique. Dann hat G keine nicht adjazenten Knoten. Also hat G auch nicht (min.) zwei nicht-adjazente simpliziale Knoten.

Teil 2:

Sei G keine Clique. Dann existieren zwei Knoten $a, b \in V$, die nicht adjazent sind und es gibt einen

inklusionsminimalen Separator S, der a und b trennt.
(*Da a und b nicht adjazent sind, gibt es diesen Separator auf jeden Fall. Im Zweifelsfalle besteht er aus allen Knoten von G außer a und b selbst. Und wenn es einen Separator gibt, gibt es natürlich auch einen inklusionsminimalen Separator.*)

Das bedeutet, der Separator unterteilt G in drei disjunkte Teilmengen A, B und S mit $a \in A$ und $b \in B$. Außerdem gibt es keine Kanten zwischen A und B. Aus Aufgabe 2a ist desweiteren bekannt, dass S eine Clique bildet.

Betrachte nun A. (Das folgende gilt analog für B) Für A genügt es nun, einen simplizialen Knoten zu finden, da für B dasselbe gilt und somit am Ende zwei simpliziale Knoten vorliegen.

Wir zeigen per vollständiger Induktion über die Anzahl von Knoten in A, dass A einen simplizialen Knoten enthält.

I. V.: $|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{n}$, A enthält mindestens einen simplizialen Knoten.

I. A.: $|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{n} = \mathbf{1}$

Dann kann der einzige Knoten $a \in A$ nur mit Knoten aus S verbunden sein, welches eine Clique bildet. Also ist S simplizial.

I. S.: $|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{n} + \mathbf{1}$

Betrachte den Knoten $a \in A$, der durch den Separator S von $b \in B$ getrennt wurde.

Fall 1: a ist simplizial. Dann haben wir einen simplizialen Knoten.

Fall 2: a ist nicht simplizial. Dann ist $A \cup S$ keine Clique. Es gibt also wieder zwei Knoten $a', b' \in A \cup S$, die nicht adjazent sind und einen inklusionsminimalen Separator S' der den Graphen $G[A \cup S]$ in zwei disjunkte Mengen A' mit $a' \in A'$ und B' mit $b' \in B'$ aufteilt. Mindestens eine der beiden Mengen ist disjunkt zum ursprünglichen S, denn wenn $A' \cap S \neq \emptyset$ und $B' \cap S \neq \emptyset$, so gäbe es eine direkte Kante zwischen einem Element aus A' und einem aus B' (da S eine Clique ist) und S' könnte kein Separator sein. Sei A' die zu S disjunkte Menge. Diese hat keine Kanten zu B sondern nur zu $A \cup S$. Da weder A', B' noch S' leer sind, ist $1 \leq |A'| < |A' \cup S'| < n$ und laut Induktionsvoraussetzung gibt es einen simplizialen Knoten in $A' \subseteq A$.

Da das gleiche auch für B gilt, gibt es mindestens zwei simpliziale Knoten.

Aufgabe 3: Induzierte Matchings

Enthalten in W[1]. Um zu zeigen, dass Induced Matching in W[1] ist, reduzieren wir auf WCS[1]. Für einen gegebenen Graph G müssen wir also einen Schaltkreis mit Weft höchstens 1 konstruieren, sodass G ein induziertes Matching mit k Kanten genau dann hat wenn der Schaltkreis sich durch k wahre Inputs erfüllen lässt.

Im Schaltkreis erstellen wir für jede Kante e des Graphen einen Eingangsknoten I_e der jeweils mit einem Negationsknoten verbunden wird. In der nächsten Schicht werden die Negationsknoten von zwei Kanten e_1 und e_2 genau dann durch einen Oder-Knoten verbunden, wenn sich die Kanten einen Endpunkt teilen oder es eine andere Kante gibt, die einen Endpunkt von e_1 mit einem Endpunkt von e_2 verbindet. Alle Oder-Knoten sind mit einem Und-Knoten verbunden, welcher mit dem Ausgangsknoten verbunden ist.

Für ein induziertes Matching der Größe k finden wir eine erfüllende Belegung mit k wahren Variablen, indem wir genau die Eingangsknoten der Matchingkanten auf Wahr setzen. Dies funktioniert, da die Oder-Knoten die Bedingung für ein induziertes Matching genau abbildet. Analog ergeben die Kanten der auf Wahr gesetzten Eingangsknoten einer erfüllenden Belegung auch ein induziertes Matching.

W[1]-Schwere. Wir reduzieren von Independent Set, einem bekannt W[1]-vollständigem Problem. Sei G der gegebene Graph einer Independent Set Instanz. Wir konstruieren einen Graphen G' als Induced Matching Instanz indem wir G kopieren und zusätzlich für jeden Knoten $v_i \in v_1, \dots, v_n = V(G)$ einen weiteren Knoten v_i' einfügen und diesen mit v_i und den Nachbarn von v_i verbinden.

Falls G eine unabhängige Menge X der Größe k enthält so bildet $\{(x, x') | x \in X\}$ in G' ein induziertes Matching der Größe k. Für die andere Richtung sei M ein induziertes Matching der Größe k in G'. Für jede Kante $m \in M$ gilt, dass einer der Endpunkte in der Menge $v_1, \dots, v_n$ ist. Wir finden somit eine Menge $X \in V(G)$ mit $|X| = |M|$ indem wir für jede Kante aus M einen Endpunkt wählen. Da die Kanten des Matchings sich keine Knoten teilen und die Endpunkte unterschiedlicher Matchingkanten jeweils unabhängig sein müssen ist X ebenfalls eine unabhängige Menge.