

Übungsblatt 4

Abgabe bis 22. Dezember 2022

Aufgabe 1: VERTEX COVER in bipartiten Graphen 7 + 7 = 14 Punkte

Teilaufgabe (a) Zeige, dass die LP-Relaxierung des ILPs zu VERTEX COVER eine ganzzahlige optimale Lösung hat, wenn der Graph bipartit ist.

Hinweis: Zeige, dass die zugehörige Matrix total unimodular ist.

Teilaufgabe (b) Benutze den Dualitätssatz, um den Satz von König zu beweisen. Der Satz von König besagt, dass das minimale Vertex Cover und das maximale Matching in einem bipartiten Graphen die gleiche Kardinalität haben.

Aufgabe 2: MAX SAT 5 + 11 = 16 Punkte

Gegeben sei eine boolesche Formel φ (in KNF) mit n Variablen und m Klauseln. Bei dem Problem MAX SAT soll eine Variablenbelegung gefunden werden, die möglichst viele Klauseln erfüllt.

Teilaufgabe (a) Gib sichere Reduktionsregeln an, die einen Kern mit maximal $2k$ Klauseln und k Variablen liefern, wobei k die Lösungsgröße ist.

Hinweis: Benutze den Satz von Hall, um die Anzahl der Variablen zu reduzieren.

Satz (Hall's Theorem). Sei $G = (V_1 \cup V_2, E)$ ein bipartiter Graph. Es gibt genau dann ein Matching in G , das alle Knoten von V_1 abdeckt, wenn $|X| \leq |N(X)|$ für jede Teilmenge $X \subseteq V_1$. Andernfalls kann eine inklusionsminimale Menge $X \subseteq V_1$ mit $|X| > |N(X)|$ effizient gefunden werden.

Teilaufgabe (b) Gib einen FPT-Algorithmus für die folgende Parametrisierung „above $\frac{m}{2}$ “ mit Parameter k an: Gibt es eine Variablenbelegung, die mindestens $\frac{m}{2} + k$ Klauseln erfüllt?

Hinweis: Betrachte Klauseln mit nur einer Variable getrennt von größeren Klauseln und zeige zunächst, dass viele größere Klauseln dazu führen, dass es eine große Lösung gibt.