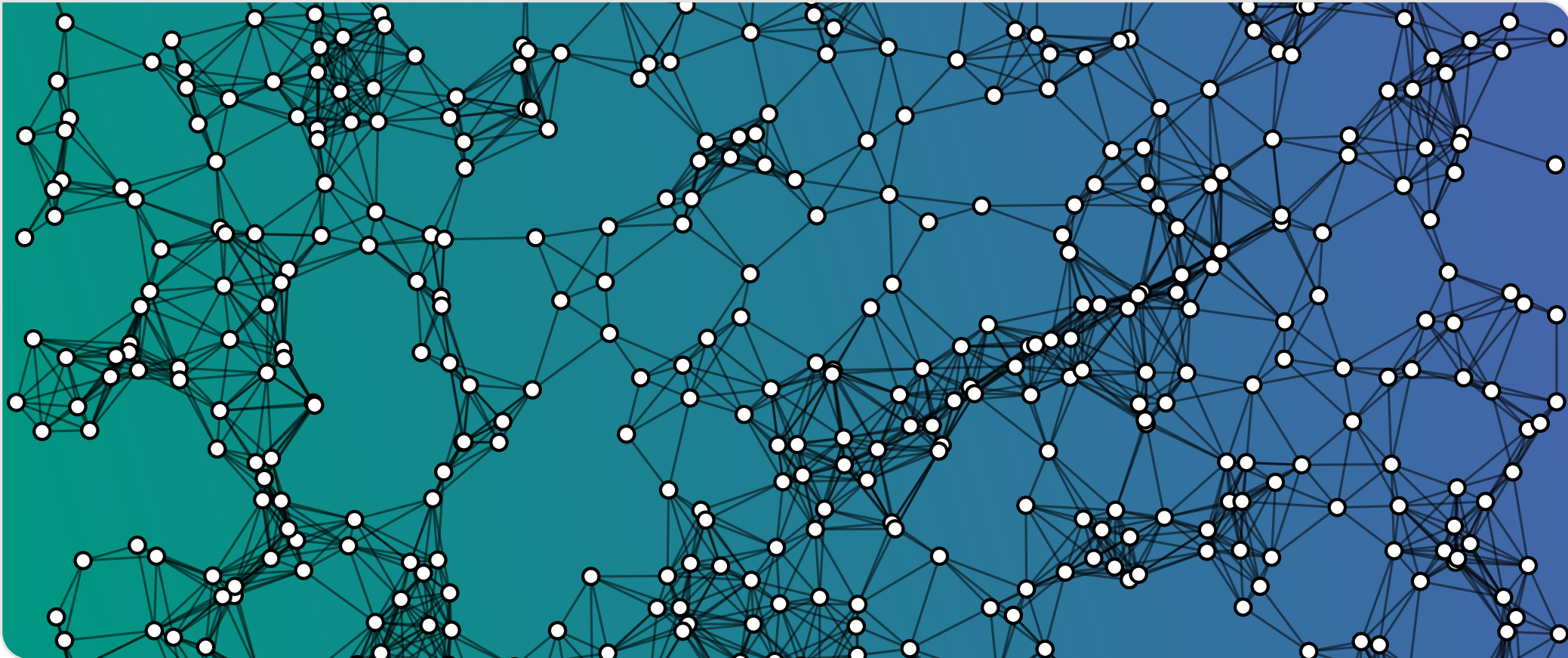


# Parametrisierte Algorithmen

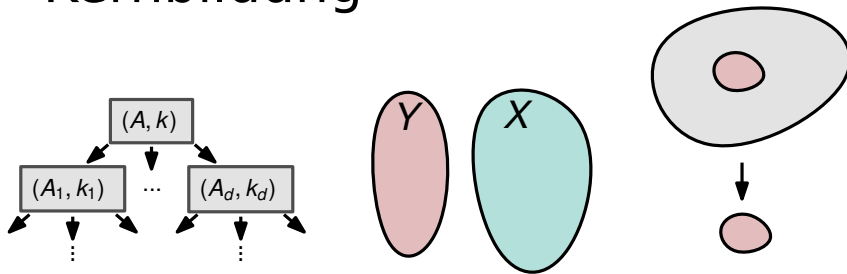
## Untere Schranken: Reduktionen und W-Hierarchie



# Inhalt

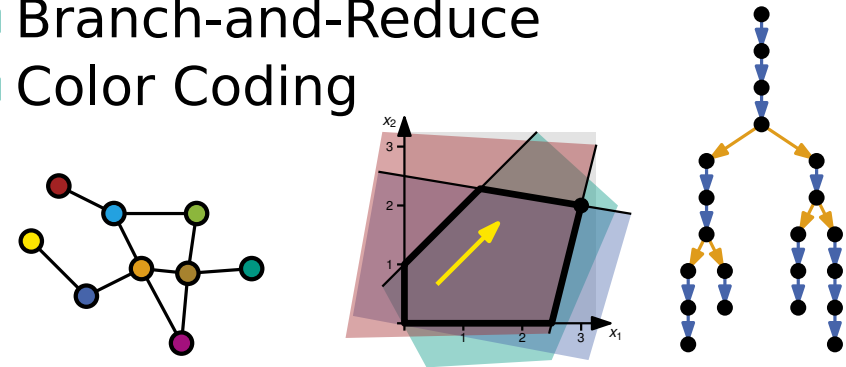
## Basic Toolbox

- beschränkte Suchbäume
- iterative Kompression
- Kernbildung



## Erweiterte Toolbox

- lineare Programme
- Branch-and-Reduce
- Color Coding



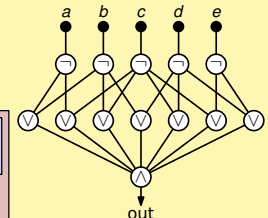
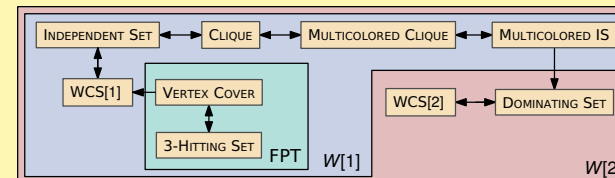
## Baumweite

- dynamische Programme
- chordale & planare Graphen
- Courcelles Theorem

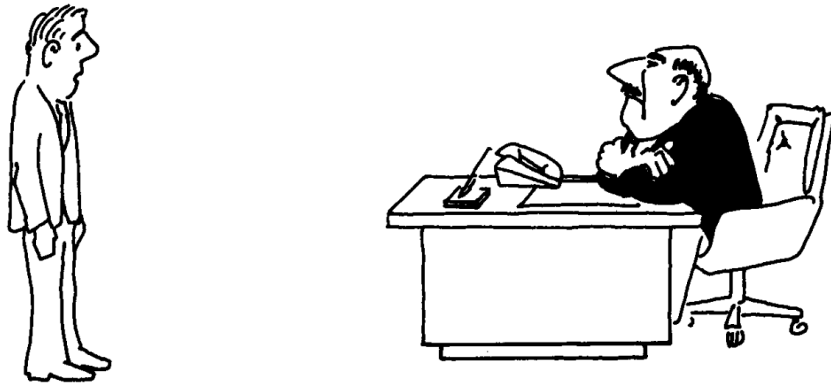


## Untere Schranken

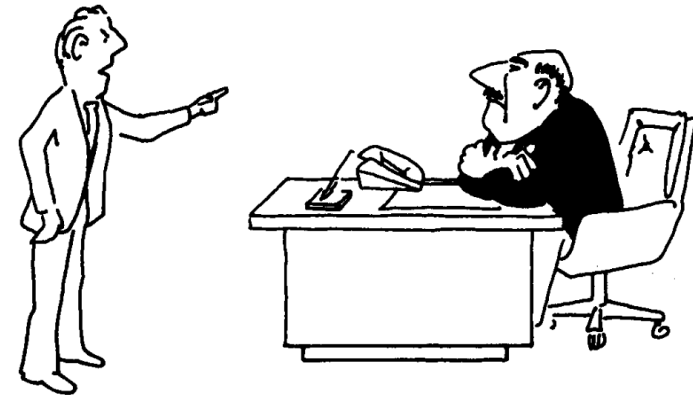
- parametrisierte Reduktionen
- boolesche Schaltkreise und die W-Hierarchie
- ETH und SETH



# Was bringen untere Schranken?



“I can’t find an efficient algorithm, I guess I’m just too dumb.”



“I can’t find an efficient algorithm, because no such algorithm is possible!”

## Problem

- nicht-Existenz eines Algorithmus ist schwer zu zeigen

## Lösung

- zeige: mein Problem effizient lösbar  $\Rightarrow$  ein bekanntes schwieriges Problem effizient lösbar
- Werkzeug: Reduktionen zwischen Problemen



“I can’t find an efficient algorithm, but neither can all these famous people.”

# Polynomielle Reduktionen

## Reduktion von Problem $\mathcal{L}$ zu Problem $\mathcal{L}'$

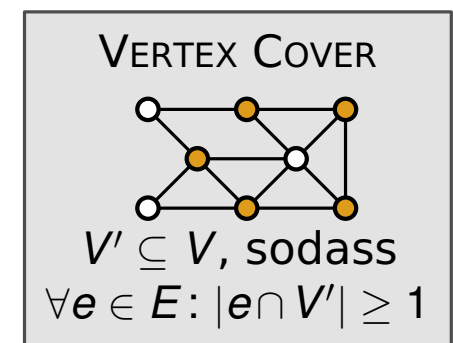
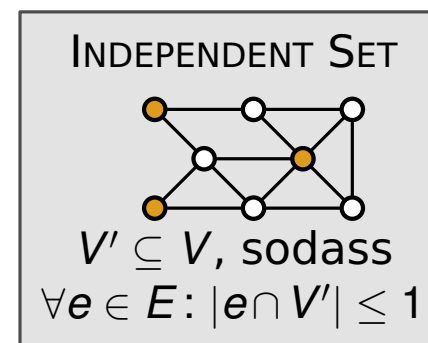
- bildet jede Instanz  $I$  von  $\mathcal{L}$  auf eine Instanz  $I'$  von  $\mathcal{L}'$  ab
- $I$  ist ja-Instanz  $\Leftrightarrow I'$  ist ja-Instanz
- die Abbildung muss in polynomieller Zeit berechnet werden können

## Folgerung

- polynomieller Algorithmus für  $\mathcal{L}' \Rightarrow$  polynomiellen Algorithmus für  $\mathcal{L}$
- mein Problem  $\mathcal{L}'$  effizient lösbar  $\Rightarrow$  bekanntes schwieriges Problem  $\mathcal{L}$  effizient lösbar  
(zumindest, wenn „effizient“ = „polynomiell“)

## Beispiel

- reduziere INDEPENDENT SET auf VERTEX COVER
- triviale Reduktion:  $G$  hat IS der Größe  $k \Leftrightarrow G$  hat VC der Größe  $n - k$
- also:  $VC \in P \Rightarrow IS \in P$
- gilt auch  $VC \in FPT \Rightarrow IS \in FPT$ ?  
→ nein, der Parameter wird zu groß
- für „effizient“ = „FPT“ benötigt man andere Reduktionen



# Parametrisierte Reduktionen

## Reduktion von Problem $\mathcal{L}$ zu Problem $\mathcal{L}'$

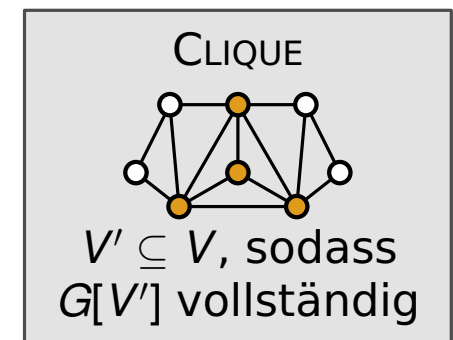
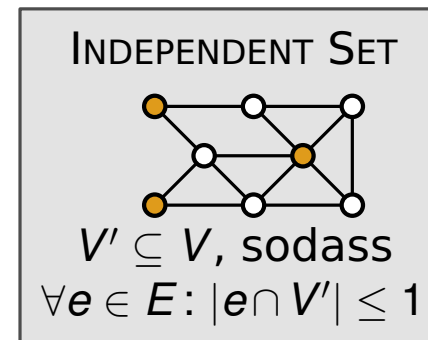
- bildet jede Instanz  $(I, k)$  von  $\mathcal{L}$  auf eine Instanz  $(I', k')$  von  $\mathcal{L}'$  ab
- $(I, k)$  ist ja-Instanz  $\Leftrightarrow (I', k')$  ist ja-Instanz; mit  $k' \leq g(k)$
- die Abbildung muss in FPT-Zeit  $(f(k) \cdot |I|^{O(1)})$  berechenbar sein  
( $f$  und  $g$  sind berechenbare Funktionen)

## Folgerung

- FPT-Algorithmus für  $\mathcal{L}' \Rightarrow$  FPT Algorithmus für  $\mathcal{L}$
- mein Problem  $\mathcal{L}'$  effizient lösbar  $\Rightarrow$  bekanntes schwieriges Problem  $\mathcal{L}$  effizient lösbar  
(zumindest, wenn „effizient“ = „FPT“ )

## Beispiel

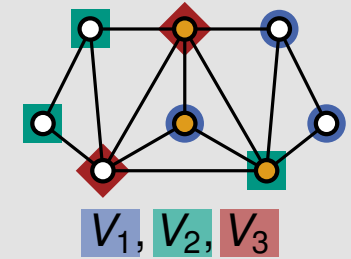
- reduziere INDEPENDENT SET auf CLIQUE
- $G$  hat IS der Größe  $k \Leftrightarrow$  Komplement von  $G$  hat Clique der Größe  $k$
- also: CLIQUE  $\in$  FPT  $\Rightarrow$  IS  $\in$  FPT
- Umkehrung gilt auch, also:  
CLIQUE  $\in$  FPT  $\Leftrightarrow$  IS  $\in$  FPT
- Vermutung: CLIQUE, IS  $\notin$  FPT



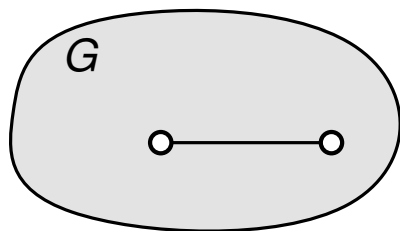
# Bunte Cliques

## Problem: MULTICOLORED CLIQUE

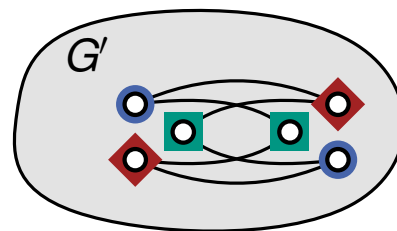
Sei  $G = (V, E)$  ein Graph,  $k$  ein Parameter und  $(V_1, \dots, V_k)$  eine Partitionierung der Knoten. Gibt es eine Clique  $V' \subseteq V$  der Größe  $k$ , sodass  $|V' \cap V_i| = 1$  für alle  $i$ ?



## Reduktion: von CLIQUE auf MULTICOLORED CLIQUE



Instanz  $(G, 3)$  von  
CLIQUE



Instanz von MC CLIQUE:  
 $(G', 3, (V_1, V_2, V_3))$

- ersetze  $v \in V$  durch  $v^1, \dots, v^k$  mit  $v^i \in V_i$
- für  $uv \in E$  verbinde  $u^i$  mit  $v^j$  für alle  $i \neq j$
- $k = k'$

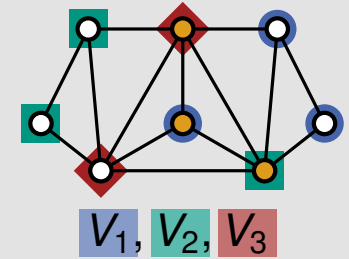
## $G$ hat Clique der Größe $k \Rightarrow G'$ hat bunte Clique der Größe $k$

- sei  $v_1, \dots, v_k$  eine Clique in  $G$
- dann ist  $v_1^1, \dots, v_k^k$  eine Clique in  $G'$
- alle Knoten haben unterschiedliche Farben

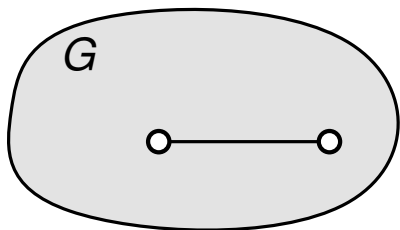
# Bunte Cliques

## Problem: MULTICOLORED CLIQUE

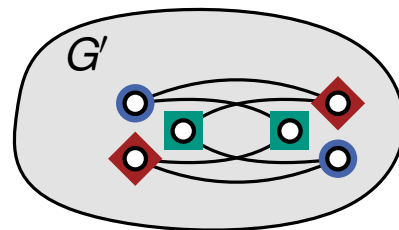
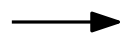
Sei  $G = (V, E)$  ein Graph,  $k$  ein Parameter und  $(V_1, \dots, V_k)$  ein Partitionierung der Knoten. Gibt es eine Clique  $V' \subseteq V$  der Größe  $k$ , sodass  $|V' \cap V_i| = 1$  für alle  $i$ ?



## Reduktion: von CLIQUE auf MULTICOLORED CLIQUE



Instanz  $(G, 3)$  von  
CLIQUE



Instanz von MC CLIQUE:  
 $(G', 3, (V_1, V_2, V_3))$

- ersetze  $v \in V$  durch  $v^1, \dots, v^k$  mit  $v^i \in V_i$
- für  $uv \in E$  verbinde  $u^i$  mit  $v^j$  für alle  $i \neq j$
- $k = k'$

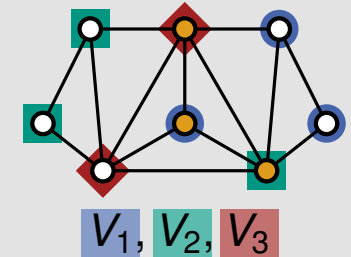
## $G'$ hat bunte Clique der Größe $k \Rightarrow G$ hat Clique der Größe $k$

- sei  $v_{\pi(1)}^1, \dots, v_{\pi(k)}^k$  bunte Clique in  $G$  mit  $\pi: \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$
- $\pi$  ist injektiv (die bunte Clique enthält keine zwei Kopien desselben Knotens)
- damit sind  $v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}$   $k$  unterschiedliche Knoten, die in  $G$  eine Clique bilden

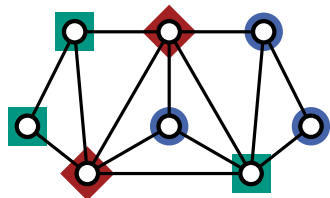
# Bunte Cliques

## Problem: MULTICOLORED CLIQUE

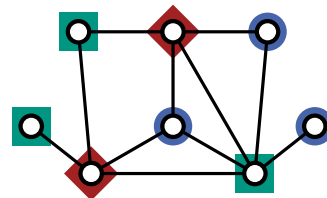
Sei  $G = (V, E)$  ein Graph,  $k$  ein Parameter und  $(V_1, \dots, V_k)$  ein Partitionierung der Knoten. Gibt es eine Clique  $V' \subseteq V$  der Größe  $k$ , sodass  $|V' \cap V_i| = 1$  für alle  $i$ ?



## Reduktion: von MULTICOLORED CLIQUE auf CLIQUE



Instanz von MC CLIQUE:  
 $(G, 3, (V_1, V_2, V_3))$



Instanz  $(G', 3)$   
 von CLIQUE

- lösche Kanten zwischen gleichfarbigen Knoten
- $k' = k$

**$G$  hat bunte Clique der Größe  $k \Rightarrow G'$  hat Clique der Größe  $k$**

- aus der bunten Clique wurden keine Kanten gelöscht
- damit bleibt sie eine Clique der Größe  $k$  in  $G'$

**$G'$  hat Clique der Größe  $k \Rightarrow G$  hat bunte Clique der Größe  $k$**

- in  $G'$  gibt es keine adjazente Knoten der gleichen Farbe
- jede Clique muss bunt sein



# Bisherige FPT-Reduktionen

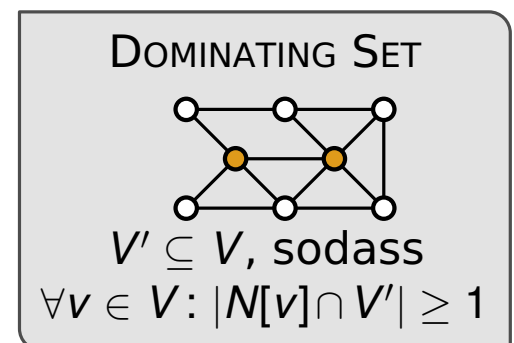
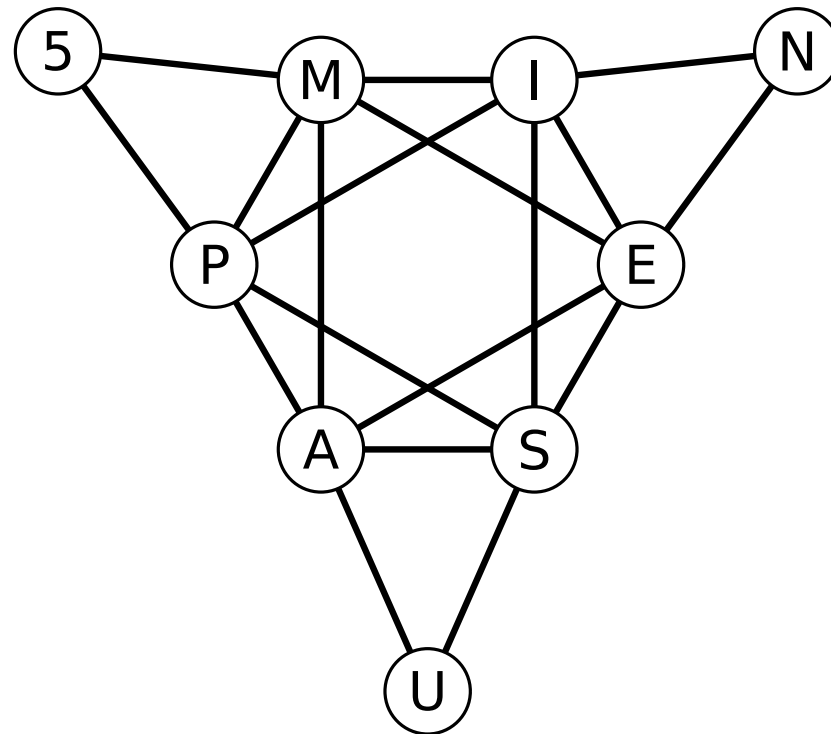


(genauso wie für INDEPENDENT SET  $\leftrightarrow$  CLIQUE)

# Dominating Set

## Ziel

- wähle möglichst wenige Knoten aus
- für jeden Knoten gilt: er selbst oder ein Nachbar ist ausgewählt



# DOMINATING SET

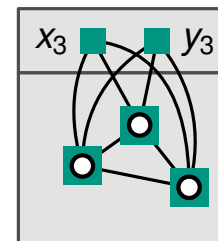
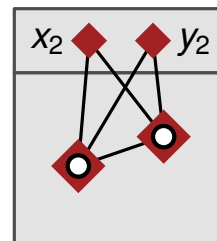
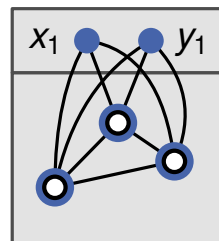
## Reduziere MULTICOLORED INDEPENDENT SET auf DOMINATING SET

- erzwingen folgende Eigenschaften mittels DOMINATING SET Instanzen
  - erzwinge die Wahl genau eines Elements für jede Farbklasse
  - verbiete die gleichzeitige Wahl von gewissen Knotenpaaren

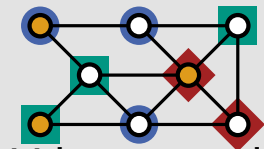


### Ein Element aus jeder Farbklasse

- Knoten  $x_i$  mit Kanten zu allen Knoten in  $V_i$  und ohne weitere Kanten  
(erzwingt die Wahl mindestens eines Knotens aus  $V_i \cup \{x_i\}$ )
- Problem: man könnte  $x_i$  wählen
- Lösung: erstelle weiteren Knoten  $y_i$  genauso  
( $x_i$  und  $y_i$  zu wählen ist zu teuer für ein DS der Größe  $k$ )
- damit es genügt einen Knoten aus  $V_i$  zu wählen:  
erstelle Clique auf diesen Knoten

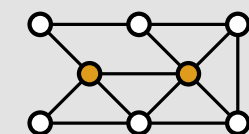


### MC INDEPENDENT SET



$V' \subseteq V$  bunt, sodass  
 $\forall e \in E: |e \cap V'| \leq 1$

### DOMINATING SET



$V' \subseteq V$ , sodass  
 $\forall v \in V: |N[v] \cap V'| \geq 1$

# DOMINATING SET

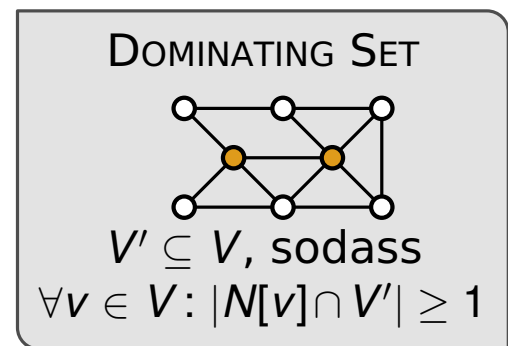
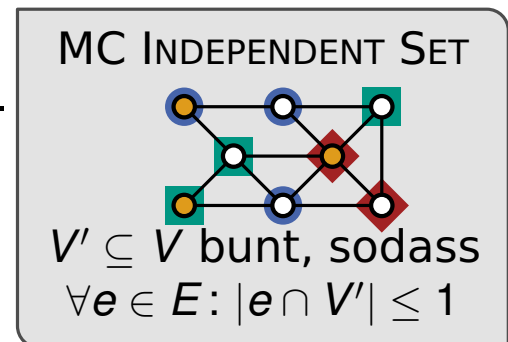
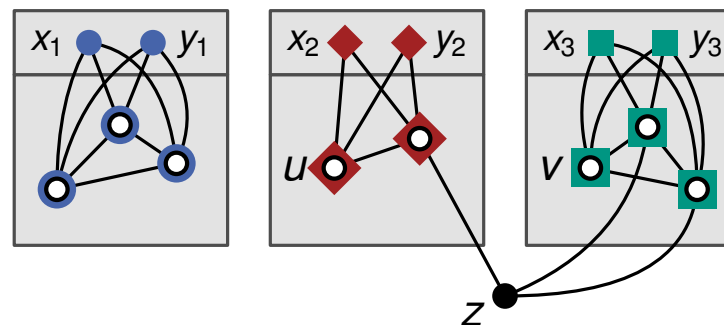
## Reduziere MULTICOLORED INDEPENDENT SET auf DOMINATING SET

- erzwingen folgende Eigenschaften mittels DOMINATING SET Instanzen
  - erzwinge die Wahl genau eines Elements für jede Farbklasse
  - verbiete die gleichzeitige Wahl von gewissen Knotenpaaren

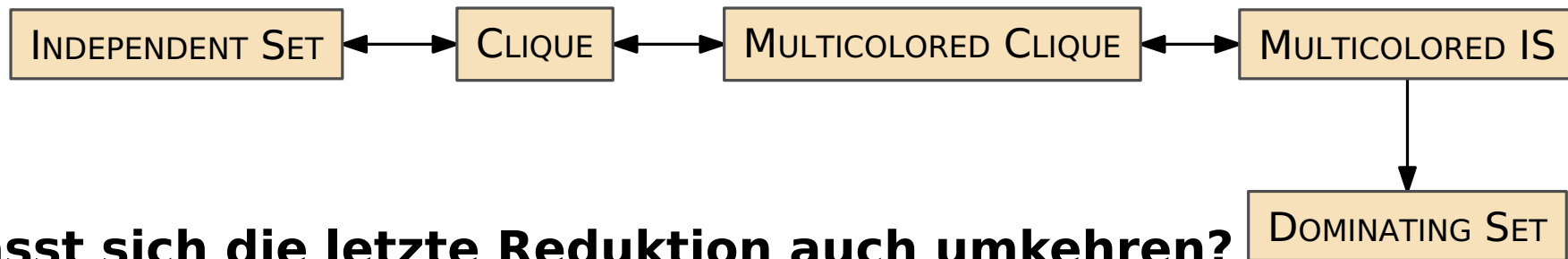


## Verbiete gleichzeitige Wahl von $u$ und $v$

- Idee: füge Knoten  $z$  ein, der immer abgedeckt ist, außer wenn  $u$  und  $v$  ausgewählt wurden
  - verbinde  $z$  weder mit  $u$  noch mit  $v$
  - aber mit allen anderen Knoten aus deren Farb-  
klassen



# Bisherige FPT-Reduktionen



## Lässt sich die letzte Reduktion auch umkehren?

- wissen wir nicht; Vermutung: nicht umkehrbar
- DOMINATING SET ist also (vermutlich) echt schwerer als CLIQUE oder INDEPENDENT SET  
( $DS \in \text{FPT} \Rightarrow IS \in \text{FPT}$ , aber nicht umgekehrt)
- wir brauchen also einen abgestuften Begriff der Schwere

## Vergleich mit der Komplexitätsklasse P





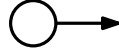
- hier reicht üblicherweise ein Begriff: NP-Schwere
- es gibt aber auch intermediate-Probleme (angenommen  $P \neq \text{NP}$ )
- es ist allerdings kein natürliches Problem aus NPI bekannt  
(Kandidaten: Primfaktorzerlegung, Graphisomorphie)

## Und jetzt?

- definiere Hierarchie an Komplexitätsklassen
- benutze dazu prototypische vollständige Probleme für jede Stufe

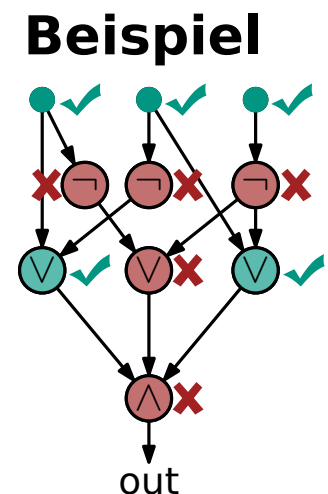
# WEIGHTED CIRCUIT SATISFIABILITY

## Boolesche Schaltkreise

- gerichteter azyklischer Graph (DAG) mit folgenden Knotentypen:
  - Quellen (Eingangsgrad 0) sind **Eingabeknoten** 
  - **Negationsknoten** haben Eingangsgrad 1 
  - **und-** bzw. **oder-Knoten** haben Eingangsgrad  $\geq 2$   
  - eine Senke (Ausgangsgrad 0) ist der **Ausgabeknoten**  out
- eine Belegung der Eingabeknoten mit 0 bzw. 1 ergibt Belegung für alle anderen Knoten (auf die offensichtliche Art und Weise)
- eine Belegung ist **erfüllend**, wenn der Ausgabeknoten Wert 1 hat
- **Gewicht** einer Belegung = Anzahl verwendeter 1en

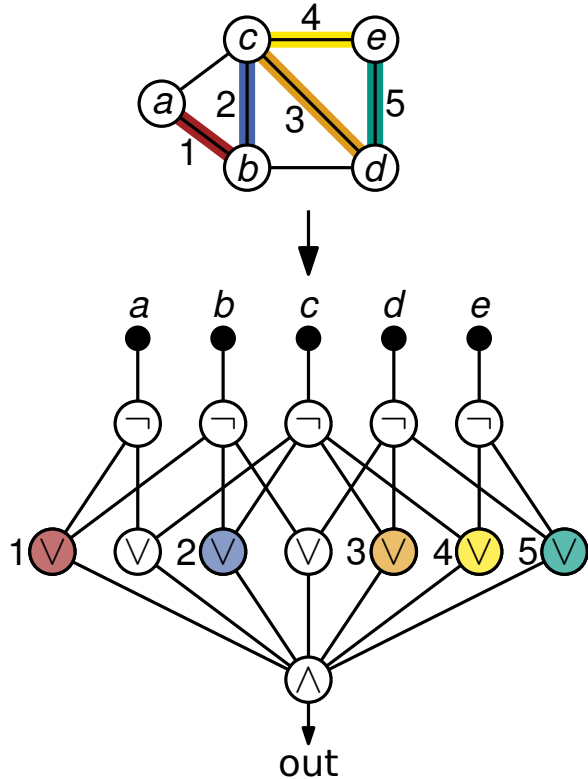
### Problem: WEIGHTED CIRCUIT SATISFIABILITY (WCS)

Gegeben ein Boolescher Schaltkreis und ein Parameter  $k$ .  
Gibt es eine erfüllende Belegung mit Gewicht genau  $k$ ?

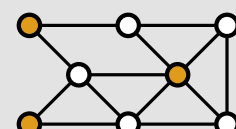


# Reduktionen so weit das Auge reicht

## INDEPENDENT SET $\rightarrow$ WCS

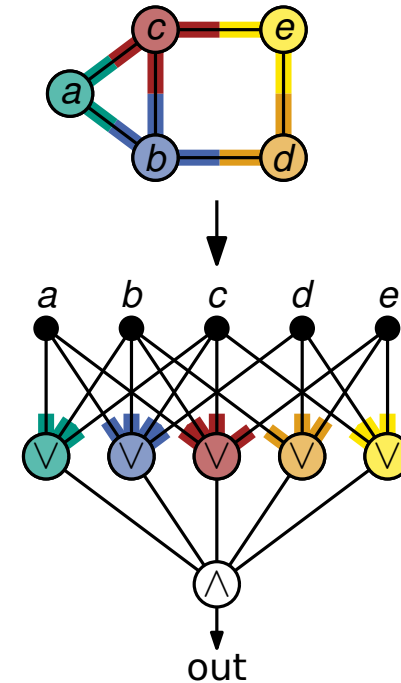


**INDEPENDENT SET**

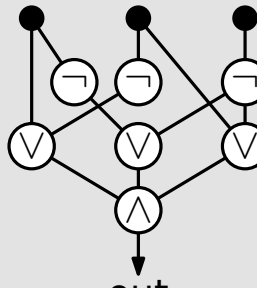


$V' \subseteq V$ , sodass  
 $\forall e \in E: |e \cap V'| \leq 1$

## DOMINATING SET $\rightarrow$ WCS

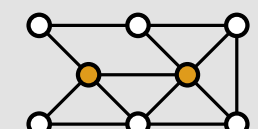


**WCS**



out

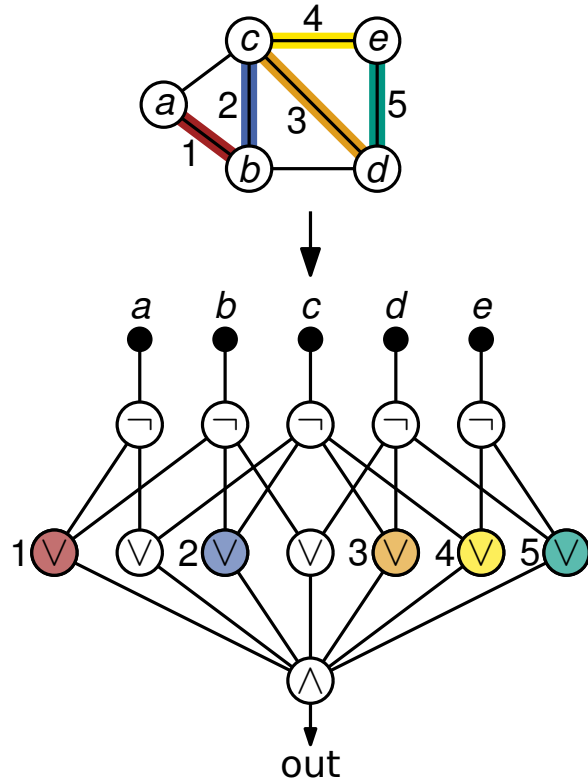
**DOMINATING SET**



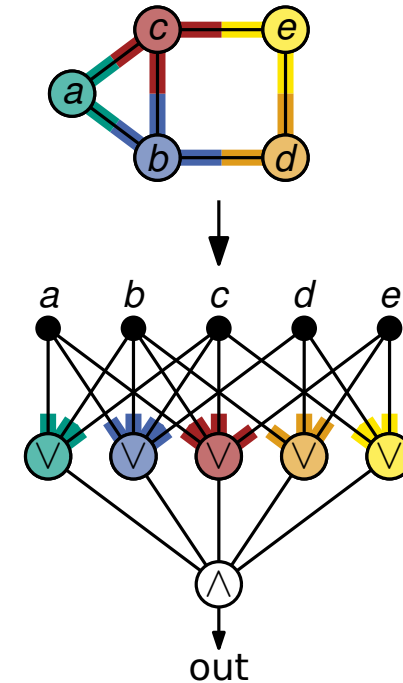
$V' \subseteq V$ , sodass  
 $\forall v \in V: |N[v] \cap V'| \geq 1$

# Reduktionen so weit das Auge reicht

## INDEPENDENT SET $\rightarrow$ WCS



## DOMINATING SET $\rightarrow$ WCS



## Beobachtungen

- die Schaltkreise haben beide konstante Tiefe
- der Schaltkreis für DS enthält mehr Knoten mit Eingangsgrad  $> 2$
- ist DS deshalb schwerer (bezüglich FPT) als IS?



# Weft

## Definition

Der **Weft** eines Booleschen Schaltkreises ist die maximale Anzahl an Knoten mit Eingangsgrad  $> 2$  auf einem gerichteten Pfad.

## Problem

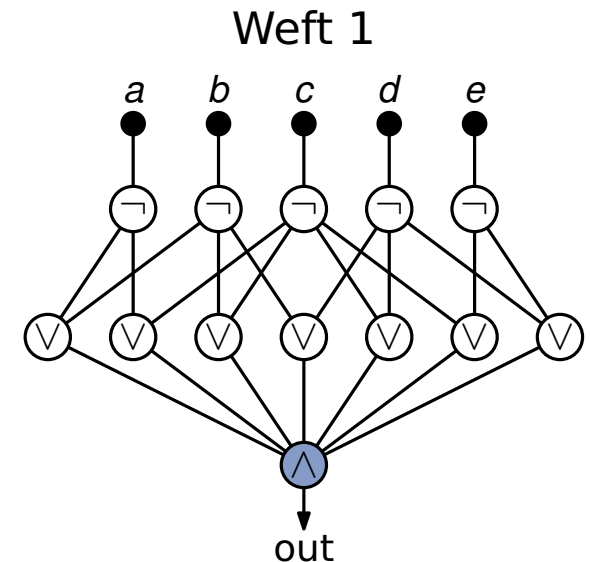
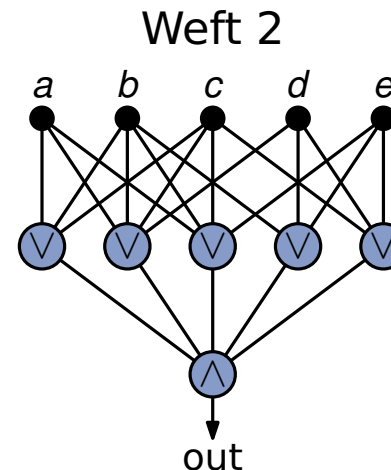
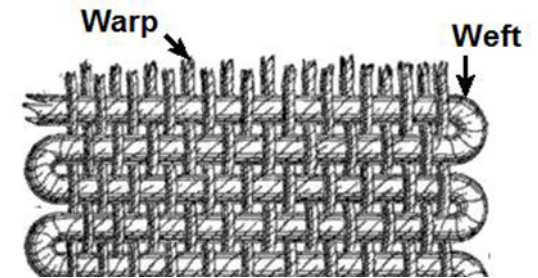
**WCS** $[t]$  ist WCS eingeschränkt auf Schaltkreise mit konstanter Tiefe und Weft maximal  $t$ .

## Definition

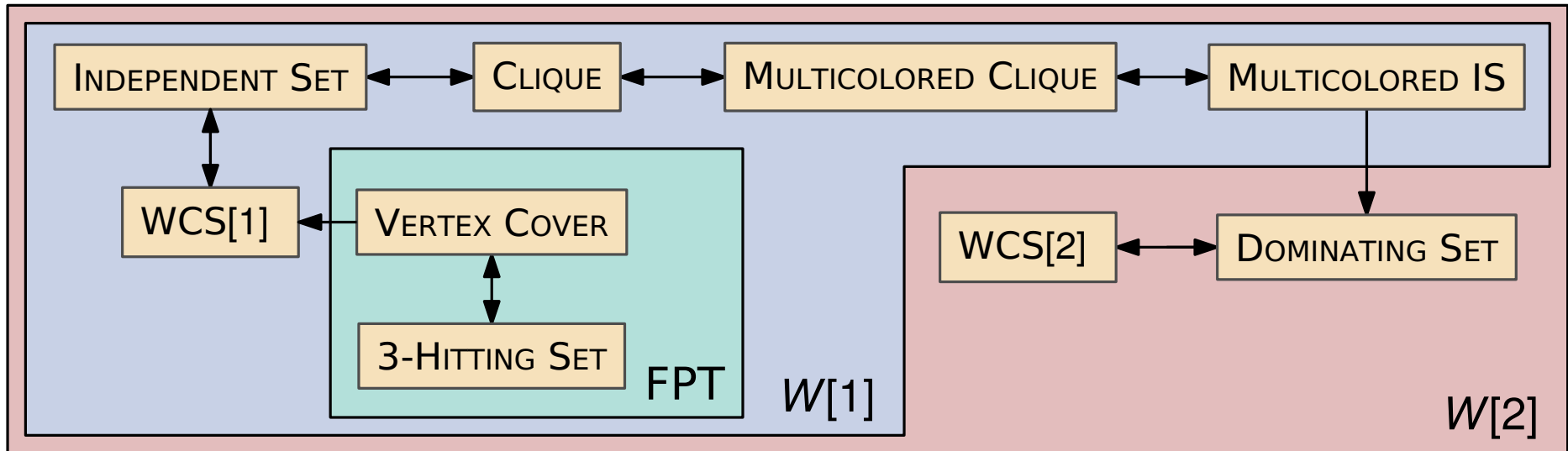
Die Klasse **W** $[t]$  enthält die Probleme, die eine parametrisierte Reduktion auf WCS $[t]$  zulassen.

## Eben gesehen

- INDEPENDENT SET  $\in W[1] \subseteq W[2]$
- DOMINATING SET  $\in W[2]$



# Bisherige FPT-Reduktionen



## Weitere Reduktionen

- man kann auch WCS[1] auf INDEPENDENT SET reduzieren
- und WCS[2] auf DOMINATING SET
- man kann also jedes Problem aus  $W[1]$  auf IS reduzieren
- solche Probleme nennt man  $W[1]$ -vollständig
- analog ist DS  $W[2]$ -vollständig
- beachte:  $W[1] \subseteq W[2]$  Warum?
- außerdem gilt:  $FPT \subseteq W[1] \subseteq W[2]$  Warum?

# Zusammenfassung

## Die $W$ -Hierarchie

- Komplexitätsklassen  $FPT \subseteq W[1] \subseteq W[2] \subseteq W[3] \subseteq \dots$
- $W[t]$  definiert über ein prototypisches vollständiges Problem  $WCS[t]$ :  
 $\mathcal{L} \in W[t] \Leftrightarrow \mathcal{L}$  auf  $WCS[t]$  reduzierbar (mittels FPT-Reduktion)
- Vermutung: jede der Inklusionen ist echt

## Ist mein $W[t]$ -Vollständigkeitsbeweis nutzlos, falls $W[t] = FPT$ ?

- man weiß trotzdem: ich finde keinen FPT-Algo, weil sich da ein fundamentales ungelöstes Problem versteckt, nicht weil ich zu dumm bin
- findet man einen FPT-Algo für ein vollständiges Problem, so liefern die Reduktionen weitere FPT-Algos

## Wie zeige ich, dass mein Problem schwer ist?

- reduziere von anderen schweren Problemen
- Reduktion von INDEPENDENT SET oder CLIQUE zeigt  $W[1]$ -Schwere
- Reduktion von DOMINATING SET oder HITTING SET zeigt  $W[2]$ -Schwere