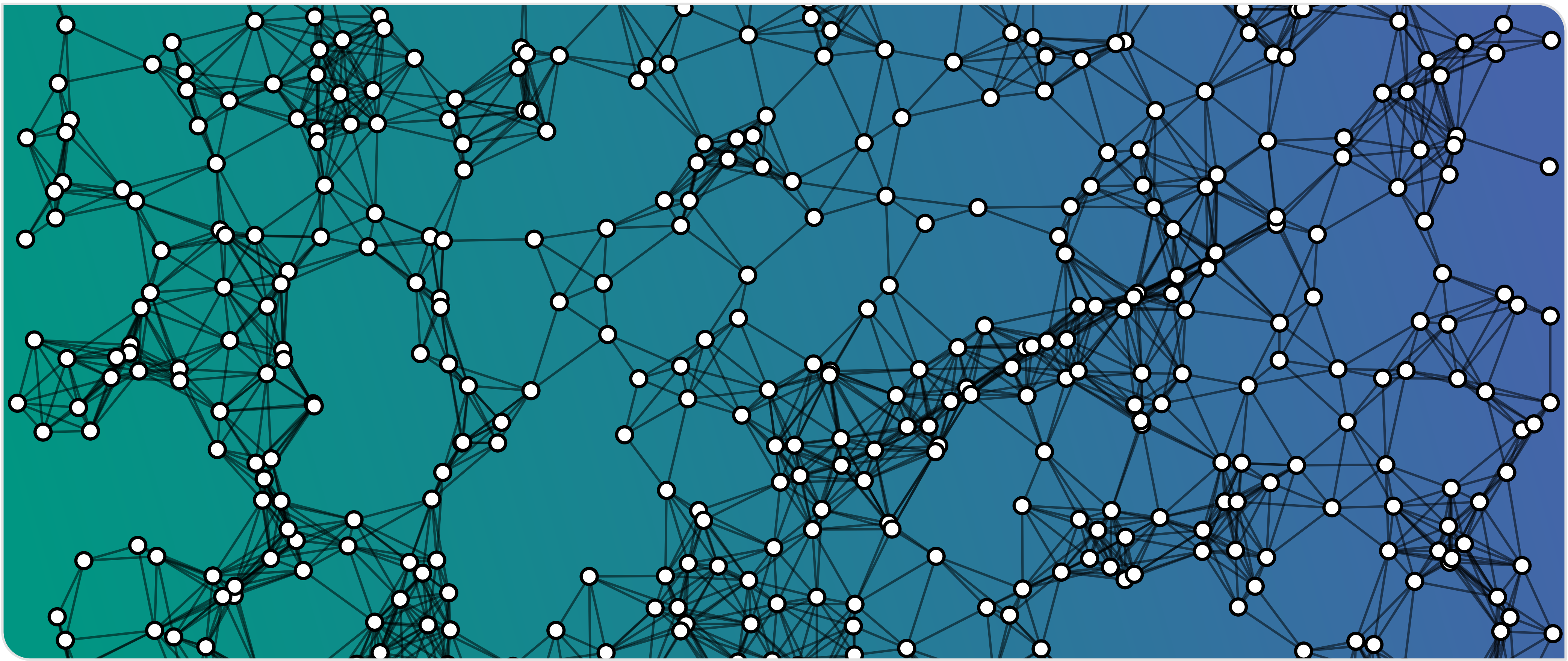
Karlsruher Institut für Technologie

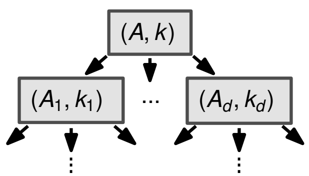
Parametrisierte Algorithmen

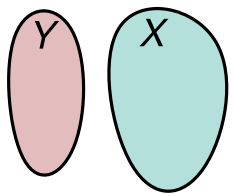
Branch and Reduce: Above Lower Bound

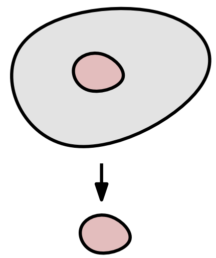


Inhalt

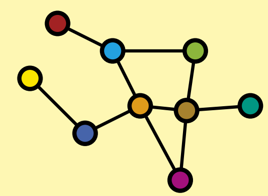
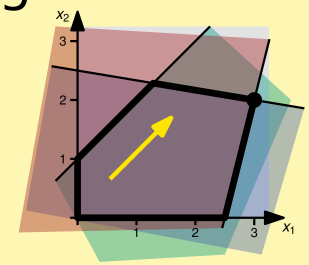
Basic Toolbox
- beschränkte Suchbäume
- iterative Kompression
- Kernbildung

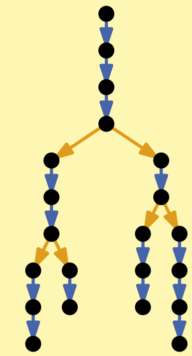






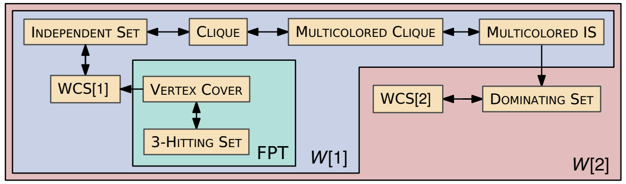
Erweiterte Toolbox
- lineare Programme
- Branch-and-Reduce
- Color Coding

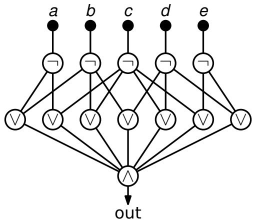





Baumweite
- dynamische Programme
- chordale & planare Graphen
- Courcelles Theorem

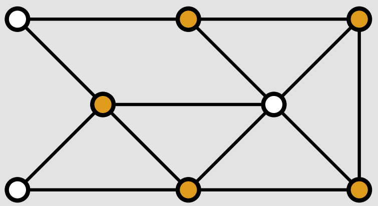
Untere Schranken
- parametrisierte Reduktionen
- boolesche Schaltkreise und die W-Hierarchie
- ETH und SETH



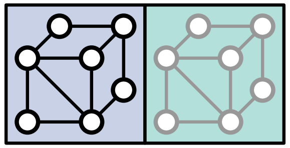


Wiederholung: Beschränkter Suchbaum

Problem: VERTEX COVER
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe k?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



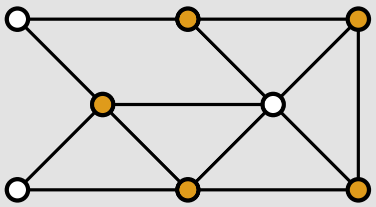
noch zu überdeckender Teilgraph   gewählte Knoten & überdeckte Kanten



Gibt es ein Vertex Cover mit maximal $k = 3$ Knoten?

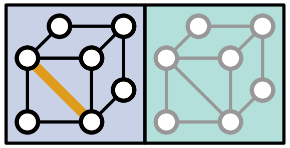
Wiederholung: Beschränkter Suchbaum

Problem: VERTEX COVER
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe k?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



noch zu überdeckender Teilgraph — gewählte Knoten & überdeckte Kanten

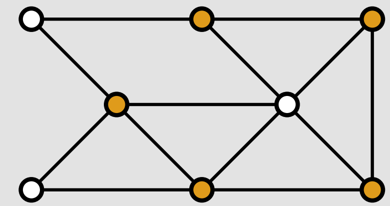
Jede Kante muss noch überdeckt werden $\rightarrow$ wähle eine beliebige



Gibt es ein Vertex Cover mit maximal $k = 3$ Knoten?

Wiederholung: Beschränkter Suchbaum

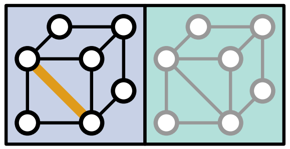
Problem: VERTEX COVER
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe k?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



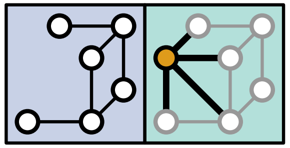
noch zu überdeckender Teilgraph

gewählte Knoten & überdeckte Kanten

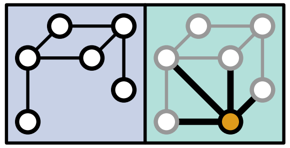
Jede Kante muss noch überdeckt werden $\rightarrow$ wähle eine beliebige



Gibt es ein Vertex Cover mit maximal $k = 3$ Knoten?

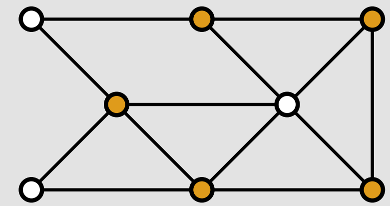


für Kante $\{u, v\}$ muss u oder v enthalten sein
$\rightarrow$ binäre Entscheidung



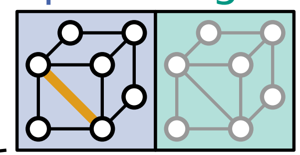
Wiederholung: Beschränkter Suchbaum

Problem: Vertex Cover
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe k?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

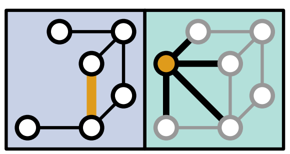


noch zu überdeckender Teilgraph   gewählte Knoten & überdeckte Kanten

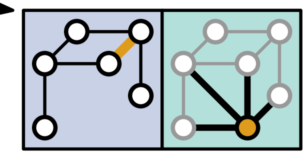
Jede Kante muss noch überdeckt werden $\rightarrow$ wähle eine beliebige



Gibt es ein Vertex Cover mit maximal $k = 3$ Knoten?

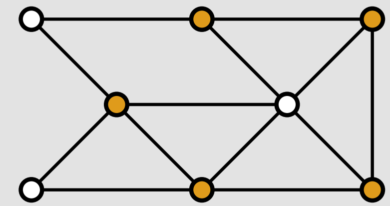


für Kante $\{u, v\}$ muss u oder v enthalten sein
$\rightarrow$ binäre Entscheidung



Wiederholung: Beschränkter Suchbaum

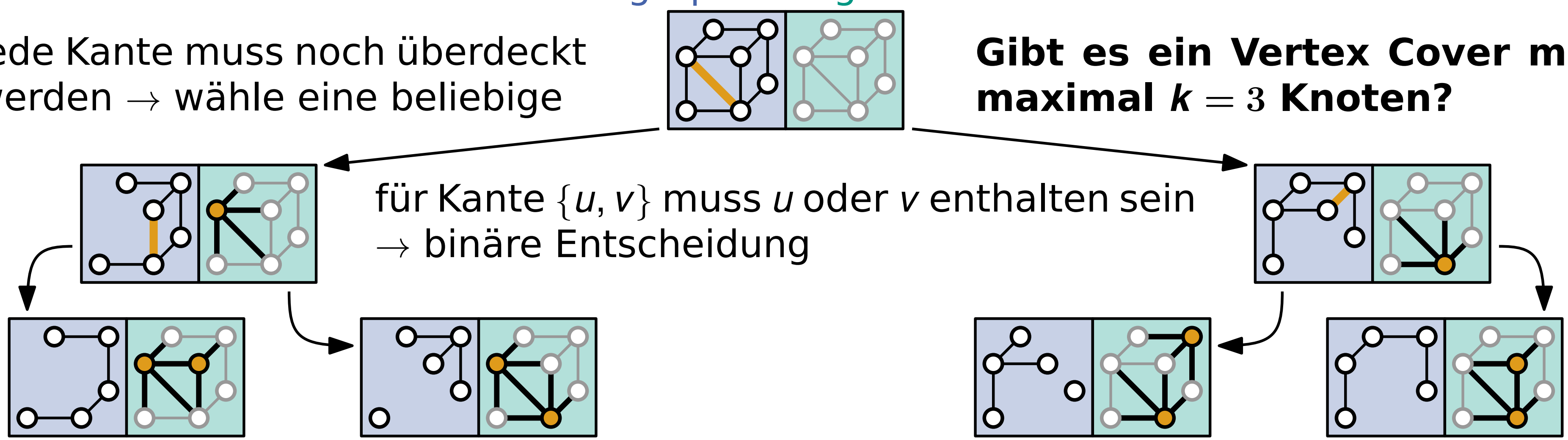
Problem: VERTEX COVER
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe k?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



noch zu überdeckender Teilgraph — gewählte Knoten & überdeckte Kanten

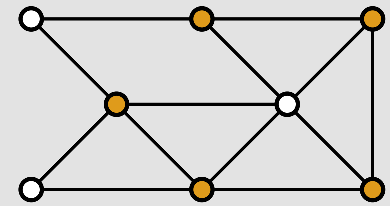
Jede Kante muss noch überdeckt werden $\rightarrow$ wähle eine beliebige

Gibt es ein Vertex Cover mit maximal $k = 3$ Knoten?



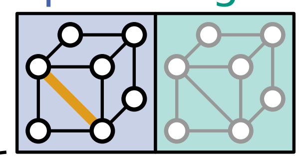
Wiederholung: Beschränkter Suchbaum

Problem: Vertex Cover
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe k?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



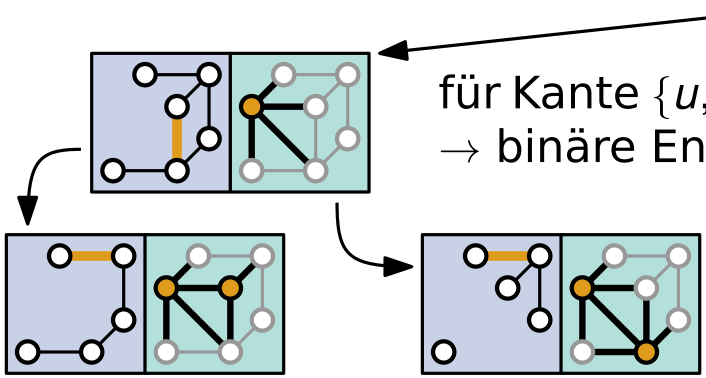
noch zu überdeckender Teilgraph   gewählte Knoten & überdeckte Kanten

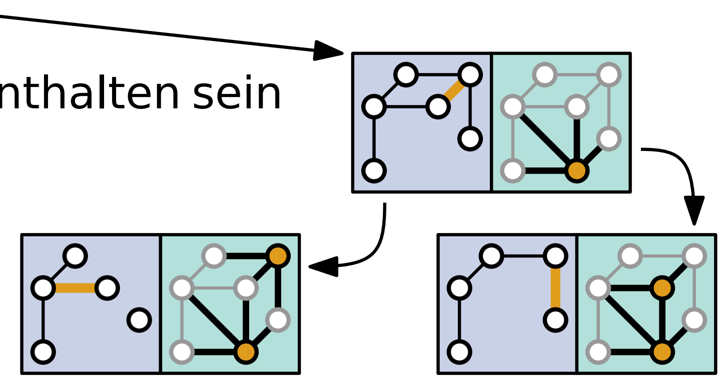
Jede Kante muss noch überdeckt werden $\rightarrow$ wähle eine beliebige



Gibt es ein Vertex Cover mit maximal $k = 3$ Knoten?

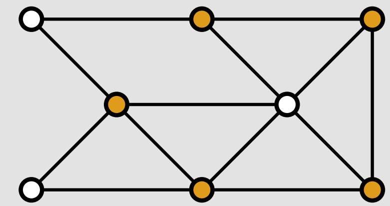
für Kante $\{u, v\}$ muss u oder v enthalten sein
$\rightarrow$ binäre Entscheidung





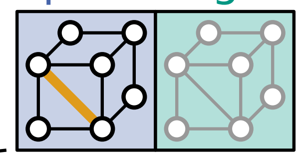
Wiederholung: Beschränkter Suchbaum

Problem: Vertex Cover
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe k?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



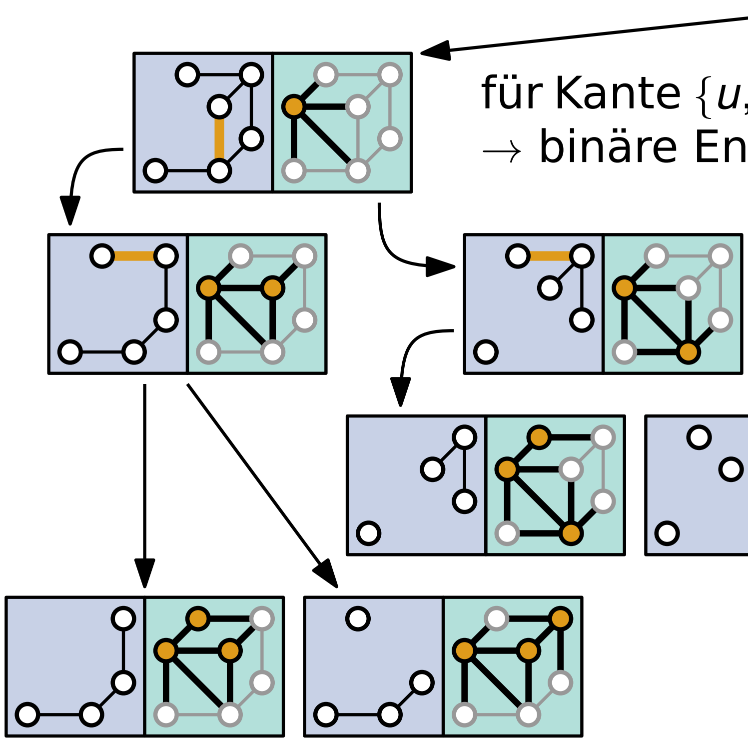
noch zu überdeckender Teilgraph — gewählte Knoten & überdeckte Kanten

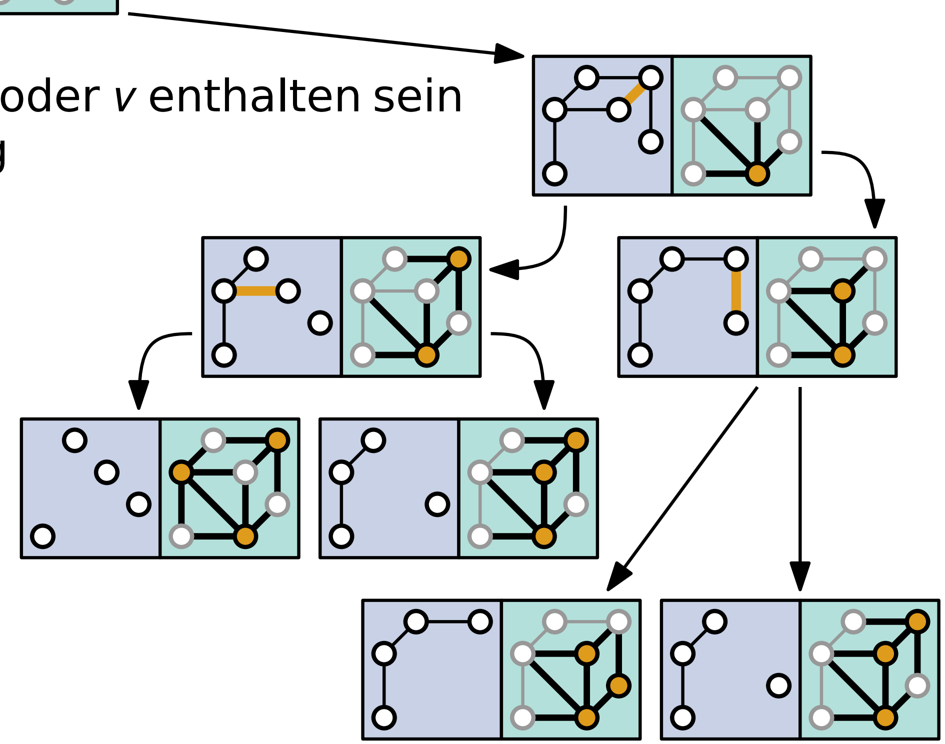
Jede Kante muss noch überdeckt werden $\rightarrow$ wähle eine beliebige



Gibt es ein Vertex Cover mit maximal $k = 3$ Knoten?

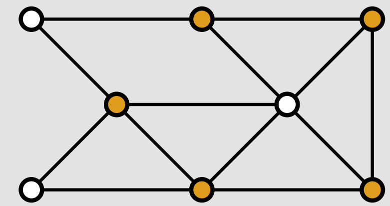
für Kante $\{u, v\}$ muss u oder v enthalten sein
$\rightarrow$ binäre Entscheidung





Wiederholung: Beschränkter Suchbaum

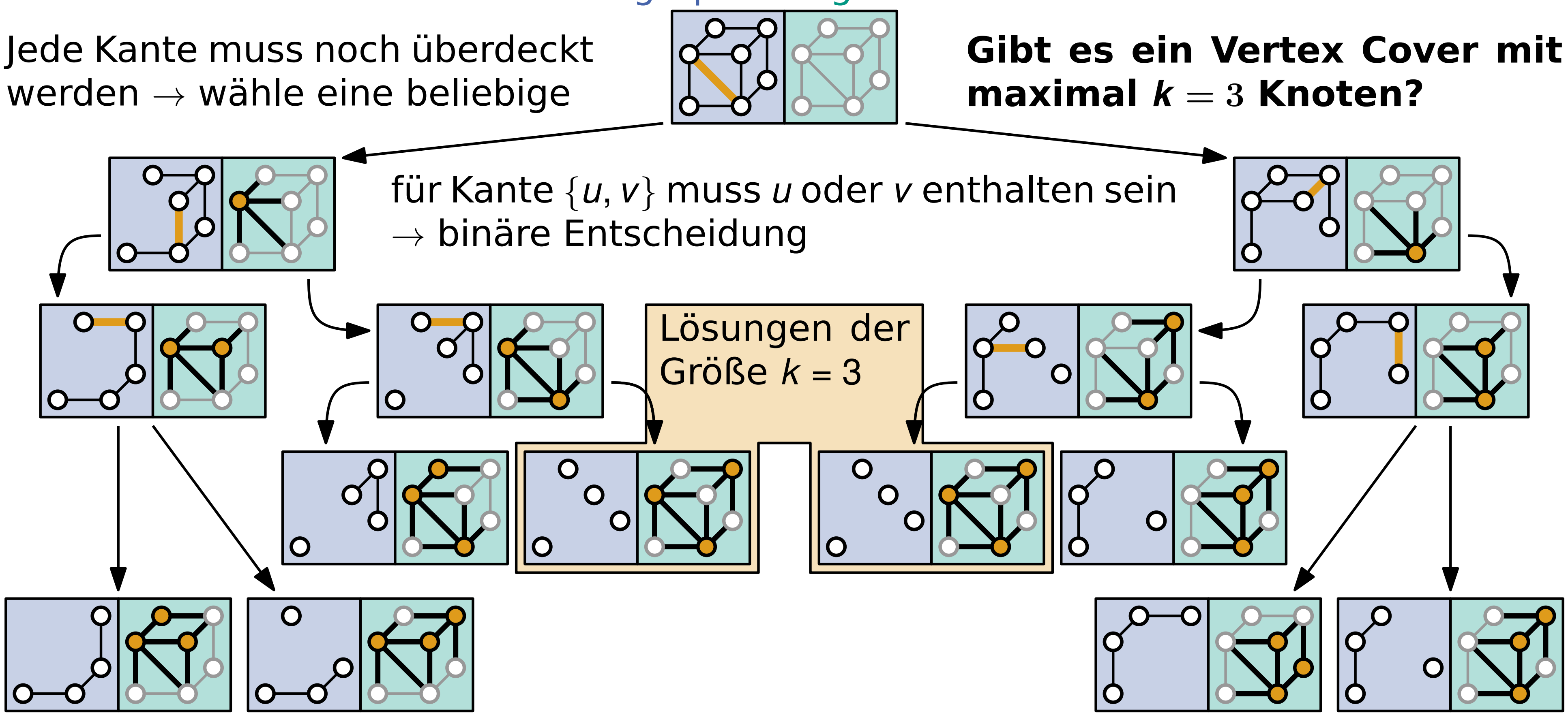
Problem: Vertex Cover
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe k?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



noch zu überdeckender Teilgraph — gewählte Knoten & überdeckte Kanten

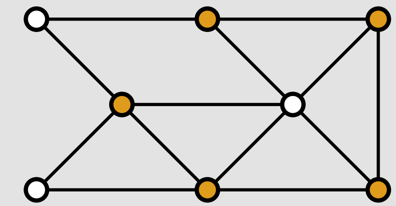
Jede Kante muss noch überdeckt werden $\rightarrow$ wähle eine beliebige

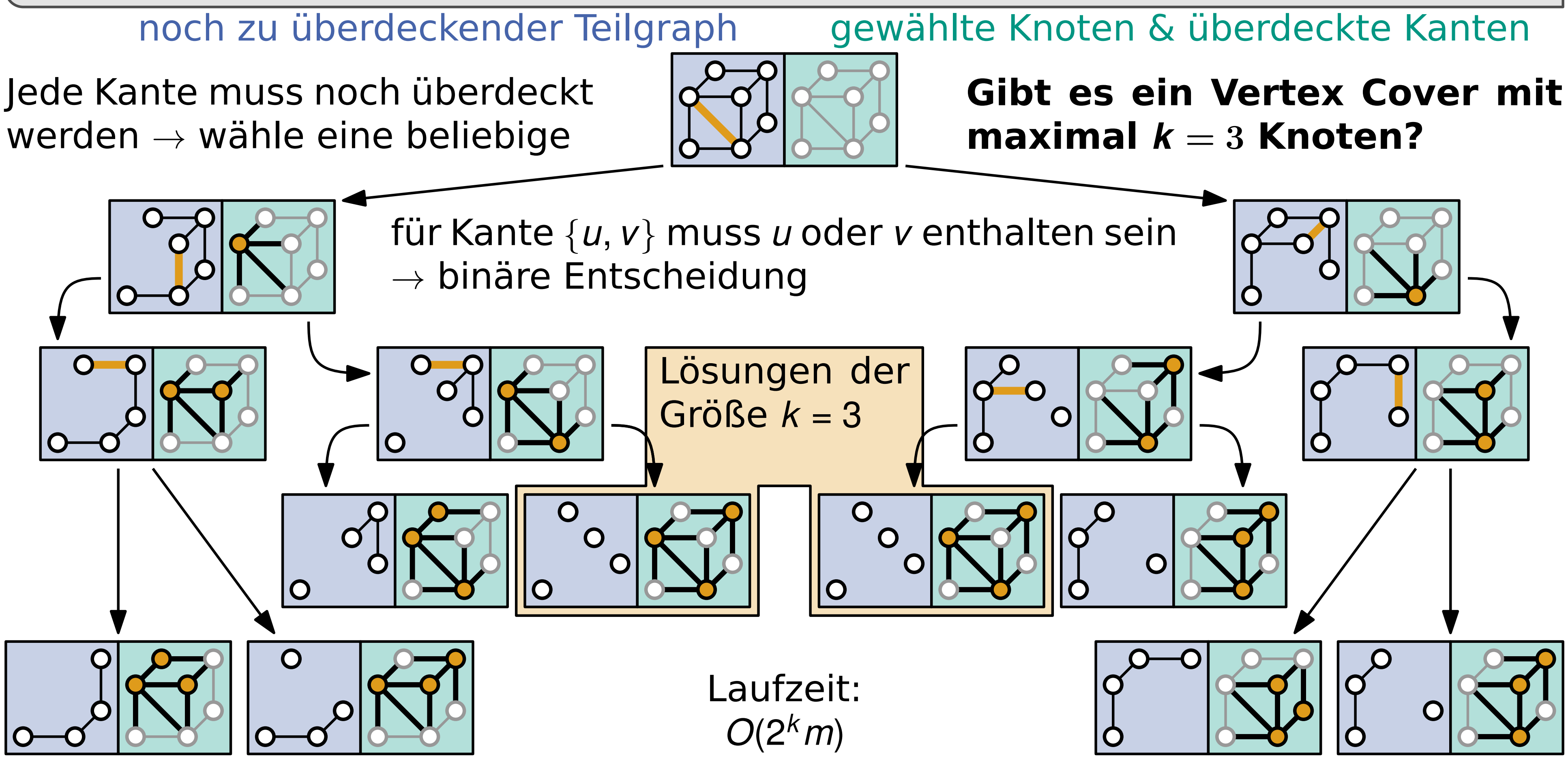
Gibt es ein Vertex Cover mit maximal $k = 3$ Knoten?



Wiederholung: Beschränkter Suchbaum

Problem: Vertex Cover
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe k?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

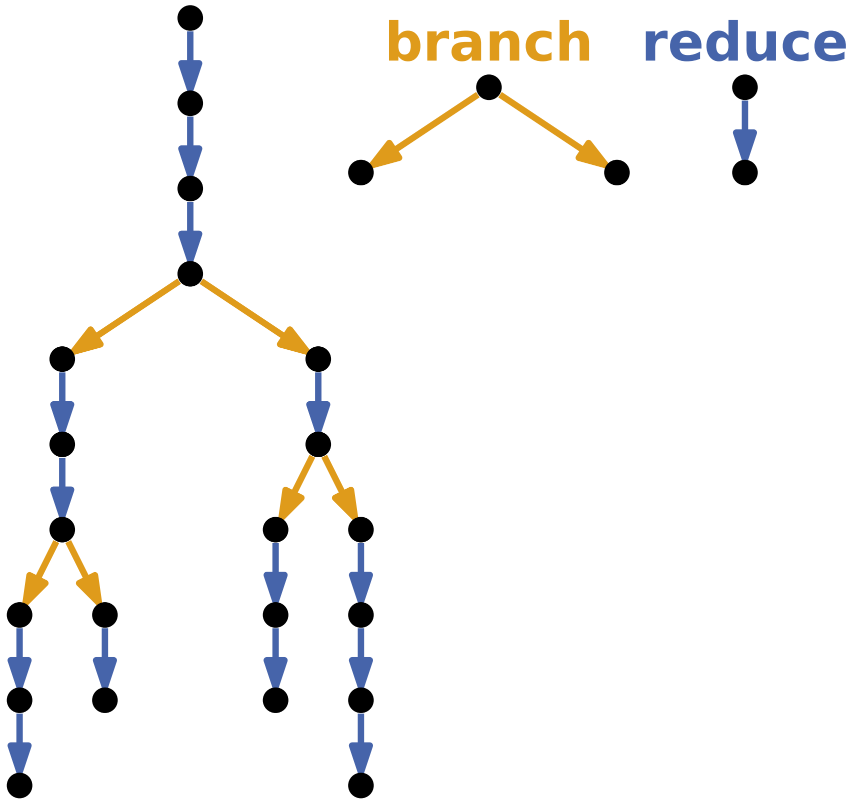




Kernbildung und Suchbäume

Branch-and-Reduce

- wende Reduktionsregeln so lange wie möglich an
- keine Regel anwendbar: verzweige einmal



Kernbildung und Suchbäume

Branch-and-Reduce

- wende Reduktionsregeln so lange wie möglich an
- keine Regel anwendbar: verzweige einmal
- für Vertex Cover sehr effizient in der Praxis

Instance					B&R
Name	$\|V\|$	$\|E\|$	LP	VC	T
Social networks:					
ca-GrQc	5242	14,484	2412.5	2783	0.1
ca-HepTh	9877	25,973	4553.0	4981	0.2
ca-CondMat	23,133	93,439	11,156.5	13,521	0.1
wiki-Vote	7115	100,762	2249.0	2249	0.0
ca-HepPh	12,008	118,489	5722.5	7012	0.1
email-Enron	36,692	183,831	12,559.5	14,437	0.6
ca-AstroPh	18,772	198,050	9218.5	12,012	0.1
email-EuAll	265,214	364,481	18,315.5	18,316	0.1
soc-Epinions1	75,879	405,740	22,080.0	22,280	1.1
soc-Slashdot0811	77,360	469,180	23,936.0	24,046	0.2
soc-Slashdot0902	82,168	504,230	25,657.5	25,770	0.2
dblp-2010	300,647	807,700	138,634.5	166,234	2.0
youtube-links	1,138,499	2,990,443	276,684.0	278,125	1.0
dblp-2011	933,258	3,353,618	427,093.5	498,969	4.8
wiki-Talk	2,394,385	4,659,565	56,111.5	56,163	1.3
petster-friendships-cat	149,700	5,448,197	40,975.0	41,103	3.0
petster-friendships-dog	426,820	8,543,549	149,419.5	150,117	5.8
youtube-u-growth	3,223,589	9,376,594	834,673.5	840,060	2.6
flickr-links	1,715,255	15,555,041	467,585.5	474,637	2.1
petster-carnivore	623,766	15,695,166	290,474.0	371,189	3.6
libimseti	220,970	17,233,144	93,378.0	93,676	1642.8
soc-pokec	1,632,803	22,301,964	781,066.0	–	–
flickr-growth	2,302,925	22,838,276	632,011.0	640,921	2.8
soc-LiveJournal1	4,847,571	42,851,237	2,110,273.5	2,215,668	11.5
hollywood-2009	1,107,243	56,375,711	553,223.0	890,039	26.8
hollywood-2011	1,985,306	114,492,816	992,238.0	1,657,357	50.5
orkut-links	3,072,441	117,185,083	1,519,101.5	–	–

Akibaa, Iwata: *Branch-and-reduce exponential/FPT algorithms in practice: A case study of vertex cover* (2016)

Kernbildung und Suchbäume

Karlsruher Institut für Technologie

Branch-and-Reduce

- wende Reduktionsregeln so lange wie möglich an
- keine Regel anwendbar: verzweige einmal
- für Vertex Cover sehr effizient in der Praxis

FPT-Sichtweise

- erklärt, warum das in der Praxis gut funktioniert

Instance					B&R
Name	$\|V\|$	$\|E\|$	LP	VC	T
Social networks:					
ca-GrQc	5242	14,484	2412.5	2783	0.1
ca-HepTh	9877	25,973	4553.0	4981	0.2
ca-CondMat	23,133	93,439	11,156.5	13,521	0.1
wiki-Vote	7115	100,762	2249.0	2249	0.0
ca-HepPh	12,008	118,489	5722.5	7012	0.1
email-Enron	36,692	183,831	12,559.5	14,437	0.6
ca-AstroPh	18,772	198,050	9218.5	12,012	0.1
email-EuAll	265,214	364,481	18,315.5	18,316	0.1
soc-Epinions1	75,879	405,740	22,080.0	22,280	1.1
soc-Slashdot0811	77,360	469,180	23,936.0	24,046	0.2
soc-Slashdot0902	82,168	504,230	25,657.5	25,770	0.2
dblp-2010	300,647	807,700	138,634.5	166,234	2.0
youtube-links	1,138,499	2,990,443	276,684.0	278,125	1.0
dblp-2011	933,258	3,353,618	427,093.5	498,969	4.8
wiki-Talk	2,394,385	4,659,565	56,111.5	56,163	1.3
petster-friendships-cat	149,700	5,448,197	40,975.0	41,103	3.0
petster-friendships-dog	426,820	8,543,549	149,419.5	150,117	5.8
youtube-u-growth	3,223,589	9,376,594	834,673.5	840,060	2.6
flickr-links	1,715,255	15,555,041	467,585.5	474,637	2.1
petster-carnivore	623,766	15,695,166	290,474.0	371,189	3.6
libimseti	220,970	17,233,144	93,378.0	93,676	1642.8
soc-pokec	1,632,803	22,301,964	781,066.0	–	–
flickr-growth	2,302,925	22,838,276	632,011.0	640,921	2.8
soc-LiveJournal1	4,847,571	42,851,237	2,110,273.5	2,215,668	11.5
hollywood-2009	1,107,243	56,375,711	553,223.0	890,039	26.8
hollywood-2011	1,985,306	114,492,816	992,238.0	1,657,357	50.5
orkut-links	3,072,441	117,185,083	1,519,101.5	–	–

Akibaa, Iwata: *Branch-and-reduce exponential/FPT algorithms in practice: A case study of vertex cover* (2016)

Kernbildung und Suchbäume

Branch-and-Reduce

- wende Reduktionsregeln so lange wie möglich an
- keine Regel anwendbar: verzweige einmal
- für VERTEX COVER sehr effizient in der Praxis

FPT-Sichtweise

- erklärt, warum das in der Praxis gut funktioniert

Wirklich?

Instance					B&R
Name	$\|V\|$	$\|E\|$	LP	VC	T
Social networks:					
ca-GrQc	5242	14,484	2412.5	2783	0.1
ca-HepTh	9877	25,973	4553.0	4981	0.2
ca-CondMat	23,133	93,439	11,156.5	13,521	0.1
wiki-Vote	7115	100,762	2249.0	2249	0.0
ca-HepPh	12,008	118,489	5722.5	7012	0.1
email-Enron	36,692	183,831	12,559.5	14,437	0.6
ca-AstroPh	18,772	198,050	9218.5	12,012	0.1
email-EuAll	265,214	364,481	18,315.5	18,316	0.1
soc-Epinions1	75,879	405,740	22,080.0	22,280	1.1
soc-Slashdot0811	77,360	469,180	23,936.0	24,046	0.2
soc-Slashdot0902	82,168	504,230	25,657.5	25,770	0.2
dblp-2010	300,647	807,700	138,634.5	166,234	2.0
youtube-links	1,138,499	2,990,443	276,684.0	278,125	1.0
dblp-2011	933,258	3,353,618	427,093.5	498,969	4.8
wiki-Talk	2,394,385	4,659,565	56,111.5	56,163	1.3
petster-friendships-cat	149,700	5,448,197	40,975.0	41,103	3.0
petster-friendships-dog	426,820	8,543,549	149,419.5	150,117	5.8
youtube-u-growth	3,223,589	9,376,594	834,673.5	840,060	2.6
flickr-links	1,715,255	15,555,041	467,585.5	474,637	2.1
petster-carnivore	623,766	15,695,166	290,474.0	371,189	3.6
libimseti	220,970	17,233,144	93,378.0	93,676	1642.8
soc-pokec	1,632,803	22,301,964	781,066.0	–	–
flickr-growth	2,302,925	22,838,276	632,011.0	640,921	2.8
soc-LiveJournal1	4,847,571	42,851,237	2,110,273.5	2,215,668	11.5
hollywood-2009	1,107,243	56,375,711	553,223.0	890,039	26.8
hollywood-2011	1,985,306	114,492,816	992,238.0	1,657,357	50.5
orkut-links	3,072,441	117,185,083	1,519,101.5	–	–

Akibaa, Iwata: *Branch-and-reduce exponential/FPT algorithms in practice: A case study of vertex cover* (2016)

Kernbildung und Suchbäume

Karlsruher Institut für Technologie

Branch-and-Reduce

- wende Reduktionsregeln so lange wie möglich an
- keine Regel anwendbar: verzweige einmal
- für VERTEX COVER sehr effizient in der Praxis

FPT-Sichtweise

- erklärt, warum das in der Praxis gut funktioniert
- $O(2^k n)$ erklärt nicht viel, wenn $n = 1.1M$ und $k = 0.9M$

Instance					B&R
Name	$\|V\|$	$\|E\|$	LP	VC	T
Social networks:					
ca-GrQc	5242	14,484	2412.5	2783	0.1
ca-HepTh	9877	25,973	4553.0	4981	0.2
ca-CondMat	23,133	93,439	11,156.5	13,521	0.1
wiki-Vote	7115	100,762	2249.0	2249	0.0
ca-HepPh	12,008	118,489	5722.5	7012	0.1
email-Enron	36,692	183,831	12,559.5	14,437	0.6
ca-AstroPh	18,772	198,050	9218.5	12,012	0.1
email-EuAll	265,214	364,481	18,315.5	18,316	0.1
soc-Epinions1	75,879	405,740	22,080.0	22,280	1.1
soc-Slashdot0811	77,360	469,180	23,936.0	24,046	0.2
soc-Slashdot0902	82,168	504,230	25,657.5	25,770	0.2
dblp-2010	300,647	807,700	138,634.5	166,234	2.0
youtube-links	1,138,499	2,990,443	276,684.0	278,125	1.0
dblp-2011	933,258	3,353,618	427,093.5	498,969	4.8
wiki-Talk	2,394,385	4,659,565	56,111.5	56,163	1.3
petster-friendships-cat	149,700	5,448,197	40,975.0	41,103	3.0
petster-friendships-dog	426,820	8,543,549	149,419.5	150,117	5.8
youtube-u-growth	3,223,589	9,376,594	834,673.5	840,060	2.6
flickr-links	1,715,255	15,555,041	467,585.5	474,637	2.1
petster-carnivore	623,766	15,695,166	290,474.0	371,189	3.6
libimseti	220,970	17,233,144	93,378.0	93,676	1642.8
soc-pokec	1,632,803	22,301,964	781,066.0	–	–
flickr-growth	2,302,925	22,838,276	632,011.0	640,921	2.8
soc-LiveJournal1	4,847,571	42,851,237	2,110,273.5	2,215,668	11.5
hollywood-2009	1,107,243	56,375,711	553,223.0	890,039	26.8
hollywood-2011	1,985,306	114,492,816	992,238.0	1,657,357	50.5
orkut-links	3,072,441	117,185,083	1,519,101.5	–	–

Akibaa, Iwata: *Branch-and-reduce exponential/FPT algorithms in practice: A case study of vertex cover* (2016)

Kernbildung und Suchbäume

Karlsruher Institut für Technologie

Branch-and-Reduce

- wende Reduktionsregeln so lange wie möglich an
- keine Regel anwendbar: verzweige einmal
- für Vertex Cover sehr effizient in der Praxis

FPT-Sichtweise

- erklärt, warum das in der Praxis gut funktioniert
- $O(2^k n)$ erklärt nicht viel, wenn $n = 1.1M$ und $k = 0.9M$
- Lösungsgröße ist kein guter Parameter für Vertex Cover

Instance					B&R
Name	$\|V\|$	$\|E\|$	LP	VC	T
Social networks:					
ca-GrQc	5242	14,484	2412.5	2783	0.1
ca-HepTh	9877	25,973	4553.0	4981	0.2
ca-CondMat	23,133	93,439	11,156.5	13,521	0.1
wiki-Vote	7115	100,762	2249.0	2249	0.0
ca-HepPh	12,008	118,489	5722.5	7012	0.1
email-Enron	36,692	183,831	12,559.5	14,437	0.6
ca-AstroPh	18,772	198,050	9218.5	12,012	0.1
email-EuAll	265,214	364,481	18,315.5	18,316	0.1
soc-Epinions1	75,879	405,740	22,080.0	22,280	1.1
soc-Slashdot0811	77,360	469,180	23,936.0	24,046	0.2
soc-Slashdot0902	82,168	504,230	25,657.5	25,770	0.2
dblp-2010	300,647	807,700	138,634.5	166,234	2.0
youtube-links	1,138,499	2,990,443	276,684.0	278,125	1.0
dblp-2011	933,258	3,353,618	427,093.5	498,969	4.8
wiki-Talk	2,394,385	4,659,565	56,111.5	56,163	1.3
petster-friendships-cat	149,700	5,448,197	40,975.0	41,103	3.0
petster-friendships-dog	426,820	8,543,549	149,419.5	150,117	5.8
youtube-u-growth	3,223,589	9,376,594	834,673.5	840,060	2.6
flickr-links	1,715,255	15,555,041	467,585.5	474,637	2.1
petster-carnivore	623,766	15,695,166	290,474.0	371,189	3.6
libimseti	220,970	17,233,144	93,378.0	93,676	1642.8
soc-pokec	1,632,803	22,301,964	781,066.0	–	–
flickr-growth	2,302,925	22,838,276	632,011.0	640,921	2.8
soc-LiveJournal1	4,847,571	42,851,237	2,110,273.5	2,215,668	11.5
hollywood-2009	1,107,243	56,375,711	553,223.0	890,039	26.8
hollywood-2011	1,985,306	114,492,816	992,238.0	1,657,357	50.5
orkut-links	3,072,441	117,185,083	1,519,101.5	–	–

Akibaa, Iwata: *Branch-and-reduce exponential/FPT algorithms in practice: A case study of vertex cover* (2016)

Kernbildung und Suchbäume

Karlsruher Institut für Technologie

Branch-and-Reduce

- wende Reduktionsregeln so lange wie möglich an
- keine Regel anwendbar: verzweige einmal
- für Vertex Cover sehr effizient in der Praxis

FPT-Sichtweise

- erklärt, warum das in der Praxis gut funktioniert
- $O(2^k n)$ erklärt nicht viel, wenn $n = 1.1M$ und $k = 0.9M$
- Lösungsgröße ist kein guter Parameter für Vertex Cover
- besser: Lösungsgröße – Wert der LP-Lösung

Instance					B&R
Name	|V|	|E|	LP	VC	T
Social networks:					
ca-GrQc	5242	14,484	2412.5	2783	0.1
ca-HepTh	9877	25,973	4553.0	4981	0.2
ca-CondMat	23,133	93,439	11,156.5	13,521	0.1
wiki-Vote	7115	100,762	2249.0	2249	0.0
ca-HepPh	12,008	118,489	5722.5	7012	0.1
email-Enron	36,692	183,831	12,559.5	14,437	0.6
ca-AstroPh	18,772	198,050	9218.5	12,012	0.1
email-EuAll	265,214	364,481	18,315.5	18,316	0.1
soc-Epinions1	75,879	405,740	22,080.0	22,280	1.1
soc-Slashdot0811	77,360	469,180	23,936.0	24,046	0.2
soc-Slashdot0902	82,168	504,230	25,657.5	25,770	0.2
dblp-2010	300,647	807,700	138,634.5	166,234	2.0
youtube-links	1,138,499	2,990,443	276,684.0	278,125	1.0
dblp-2011	933,258	3,353,618	427,093.5	498,969	4.8
wiki-Talk	2,394,385	4,659,565	56,111.5	56,163	1.3
petster-friendships-cat	149,700	5,448,197	40,975.0	41,103	3.0
petster-friendships-dog	426,820	8,543,549	149,419.5	150,117	5.8
youtube-u-growth	3,223,589	9,376,594	834,673.5	840,060	2.6
flickr-links	1,715,255	15,555,041	467,585.5	474,637	2.1
petster-carnivore	623,766	15,695,166	290,474.0	371,189	3.6
libimseti	220,970	17,233,144	93,378.0	93,676	1642.8
soc-pokec	1,632,803	22,301,964	781,066.0	–	–
flickr-growth	2,302,925	22,838,276	632,011.0	640,921	2.8
soc-LiveJournal1	4,847,571	42,851,237	2,110,273.5	2,215,668	11.5
hollywood-2009	1,107,243	56,375,711	553,223.0	890,039	26.8
hollywood-2011	1,985,306	114,492,816	992,238.0	1,657,357	50.5
orkut-links	3,072,441	117,185,083	1,519,101.5	–	–

Akibaa, Iwata: *Branch-and-reduce exponential/FPT algorithms in practice: A case study of vertex cover* (2016)

Untere Schranken und Parameter

Bessere Parameter als Lösungsgröße

- sei $\ell(G)$ untere Schranke für das minimale Vertex Cover in G

Untere Schranken und Parameter

Bessere Parameter als Lösungsgröße

- sei $\ell(G)$ untere Schranke für das minimale Vertex Cover in G
- $\ell(G)$ sollte effizient berechenbar sein

Untere Schranken und Parameter

Bessere Parameter als Lösungsgröße

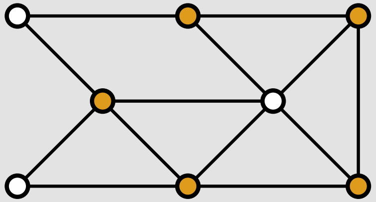
- sei $\ell(G)$ untere Schranke für das minimale Vertex Cover in G
- $\ell(G)$ sollte effizient berechenbar sein
- Beispiel: $\ell_{\mathrm{LP}}(G)$ = optimale Lösung der LP-Relaxierung

Untere Schranken und Parameter

Bessere Parameter als Lösungsgröße

- sei $\ell(G)$ untere Schranke für das minimale Vertex Cover in G
- $\ell(G)$ sollte effizient berechenbar sein
- Beispiel: $\ell_{\text{LP}}(G)$ = optimale Lösung der LP-Relaxierung

Problem: VERTEX COVER ABOVE LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\text{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

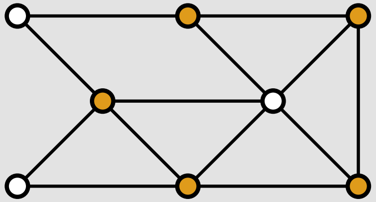


Untere Schranken und Parameter

Bessere Parameter als Lösungsgröße

- sei $\ell(G)$ untere Schranke für das minimale Vertex Cover in G
- $\ell(G)$ sollte effizient berechenbar sein
- Beispiel: $\ell_{\mathrm{LP}}(G)$ = optimale Lösung der LP-Relaxierung

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



Heute

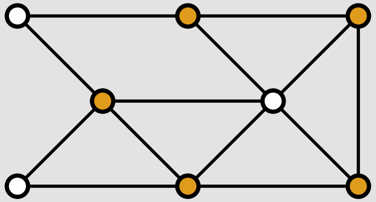
- FPT-Algorithmus für Vertex Cover above LP

Untere Schranken und Parameter

Bessere Parameter als Lösungsgröße

- sei $\ell(G)$ untere Schranke für das minimale Vertex Cover in G
- $\ell(G)$ sollte effizient berechenbar sein
- Beispiel: $\ell_{\mathrm{LP}}(G)$ = optimale Lösung der LP-Relaxierung

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



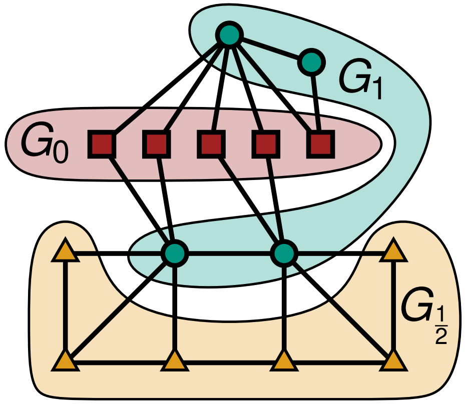
Heute

- FPT-Algorithmus für Vertex Cover above LP
- beachte: $\mathrm{vc}(G)$ (bisheriger Parameter) ist meist deutlich größer als $\mathrm{vc}(G) - \ell_{\mathrm{LP}}(G)$ (neuer Parameter)

Branch-and-Reduce

Reduktionsregel

- wenn die LP-Relaxierung eine Lösung hat, bei der nicht $|V_{\frac{1}{2}}| = n$, dann reduziere auf $G_{\frac{1}{2}}$



Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

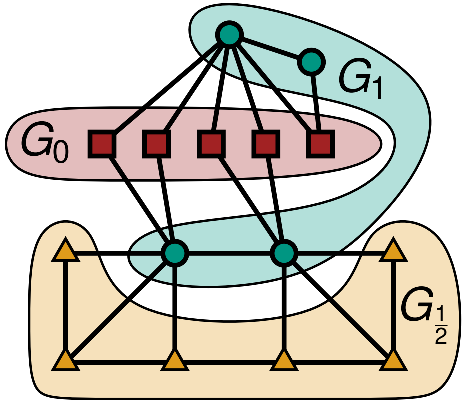
Branch-and-Reduce

Reduktionsregel

- wenn die LP-Relaxierung eine Lösung hat, bei der nicht $|V_{\frac{1}{2}}| = n$, dann reduziere auf $G_{\frac{1}{2}}$

Verzweigungsregel

- für eine Kante uv, betrachte die Instanzen $G - u$ und $G - v$

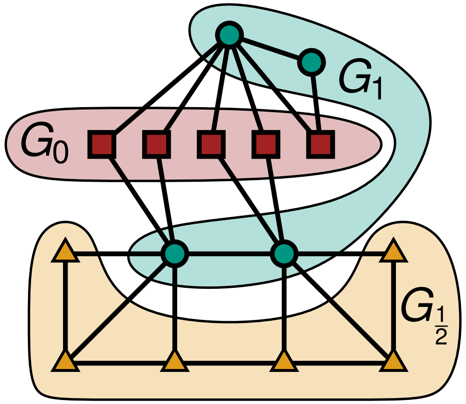


Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

Branch-and-Reduce

Reduktionsregel

- wenn die LP-Relaxierung eine Lösung hat, bei der nicht $|V_{\frac{1}{2}}| = n$, dann reduziere auf $G_{\frac{1}{2}}$



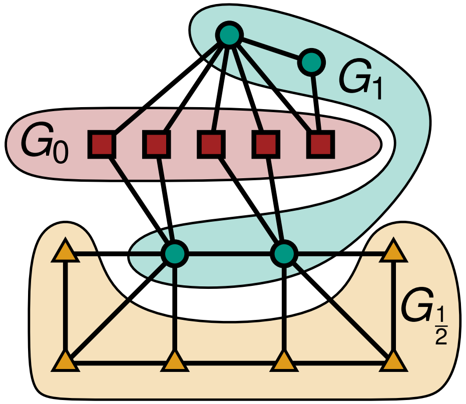
Verzweigungsregel

- für eine Kante uv, betrachte die Instanzen $G - u$ und $G - v$

Wie muss der Parameter angepasst werden?

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\text{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

Branch-and-Reduce



Reduktionsregel

- wenn die LP-Relaxierung eine Lösung hat, bei der nicht $|V_{\frac{1}{2}}| = n$, dann reduziere auf $G_{\frac{1}{2}}$

Verzweigungsregel

- für eine Kante uv, betrachte die Instanzen $G - u$ und $G - v$

Wie muss der Parameter angepasst werden?

Reduktionsregel

- es werden $|V_1|$ Knoten zum VC hinzugefügt

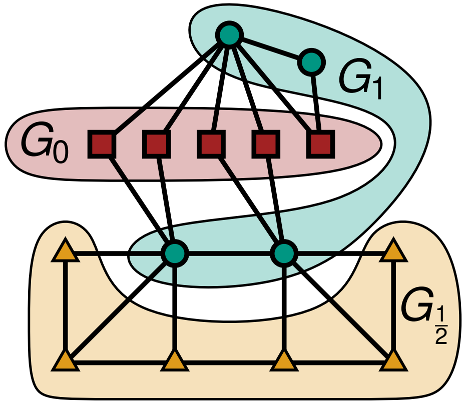
Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

Branch-and-Reduce

Karlsruher Institut für Technologie

Reduktionsregel

- wenn die LP-Relaxierung eine Lösung hat, bei der nicht $|V_{\frac{1}{2}}| = n$, dann reduziere auf $G_{\frac{1}{2}}$



Verzweigungsregel

- für eine Kante uv, betrachte die Instanzen $G - u$ und $G - v$

Wie muss der Parameter angepasst werden?

Reduktionsregel

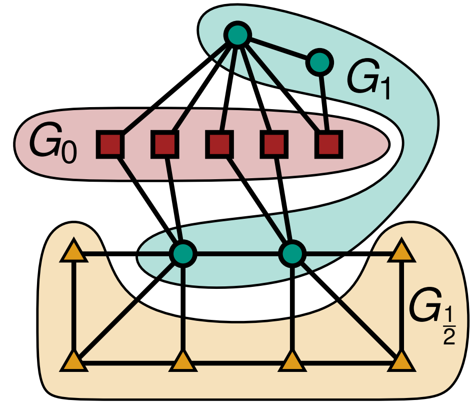
- es werden $|V_1|$ Knoten zum VC hinzugefügt
- $\ell_{\mathrm{LP}}(G_{\frac{1}{2}}) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - |V_1|$

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

Branch-and-Reduce

Reduktionsregel

- wenn die LP-Relaxierung eine Lösung hat, bei der nicht $|V_{\frac{1}{2}}| = n$, dann reduziere auf $G_{\frac{1}{2}}$



Verzweigungsregel

- für eine Kante uv, betrachte die Instanzen $G - u$ und $G - v$

Wie muss der Parameter angepasst werden?

Reduktionsregel

- es werden $|V_1|$ Knoten zum VC hinzugefügt
- $\ell_{\mathrm{LP}}(G_{\frac{1}{2}}) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - |V_1|$
- G hat VC der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k \Leftrightarrow$
  $G_{\frac{1}{2}}$ hat VC der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k - |V_1| = \ell_{\mathrm{LP}}(G_{\frac{1}{2}}) + k$

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

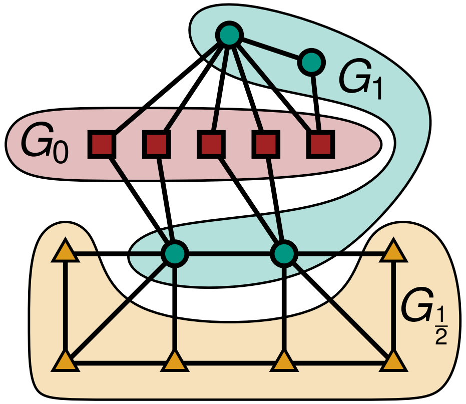
Branch-and-Reduce

Reduktionsregel

- wenn die LP-Relaxierung eine Lösung hat, bei der nicht $|V_{\frac{1}{2}}| = n$, dann reduziere auf $G_{\frac{1}{2}}$

Verzweigungsregel

- für eine Kante uv, betrachte die Instanzen $G - u$ und $G - v$



Wie muss der Parameter angepasst werden?

Reduktionsregel

- es werden $|V_1|$ Knoten zum VC hinzugefügt
- $\ell_{\mathrm{LP}}(G_{\frac{1}{2}}) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - |V_1|$
- G hat VC der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k \Leftrightarrow$
  $G_{\frac{1}{2}}$ hat VC der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k - |V_1| = \ell_{\mathrm{LP}}(G_{\frac{1}{2}}) + k$

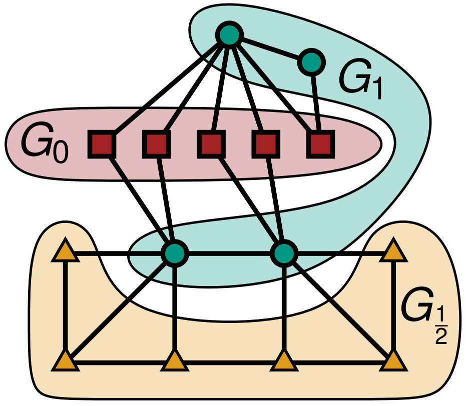
$\Rightarrow$ der Parameter wird nicht verändert

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

Branch-and-Reduce

Reduktionsregel

- wenn die LP-Relaxierung eine Lösung hat, bei der nicht $|V_{\frac{1}{2}}| = n$, dann reduziere auf $G_{\frac{1}{2}}$



Verzweigungsregel

- für eine Kante uv, betrachte die Instanzen $G - u$ und $G - v$

Wie muss der Parameter angepasst werden?

Reduktionsregel

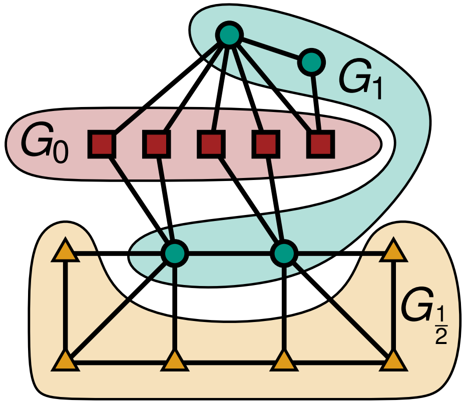
- es werden $|V_1|$ Knoten zum VC hinzugefügt
- $\ell_{\mathrm{LP}}(G_{\frac{1}{2}}) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - |V_1|$
- G hat VC der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k \Leftrightarrow$
  $G_{\frac{1}{2}}$ hat VC der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k - |V_1| = \ell_{\mathrm{LP}}(G_{\frac{1}{2}}) + k$

$\Rightarrow$ der Parameter wird nicht verändert

Verzweigungsregel

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

Branch-and-Reduce



Reduktionsregel

- wenn die LP-Relaxierung eine Lösung hat, bei der nicht $|V_{\frac{1}{2}}| = n$, dann reduziere auf $G_{\frac{1}{2}}$

Verzweigungsregel

- für eine Kante uv, betrachte die Instanzen $G - u$ und $G - v$

Wie muss der Parameter angepasst werden?

Reduktionsregel

- es werden $|V_1|$ Knoten zum VC hinzugefügt
- $\ell_{\text{LP}}(G_{\frac{1}{2}}) = \ell_{\text{LP}}(G) - |V_1|$
- G hat VC der Größe $\ell_{\text{LP}}(G) + k \Leftrightarrow$
  $G_{\frac{1}{2}}$ hat VC der Größe $\ell_{\text{LP}}(G) + k - |V_1| = \ell_{\text{LP}}(G_{\frac{1}{2}}) + k$

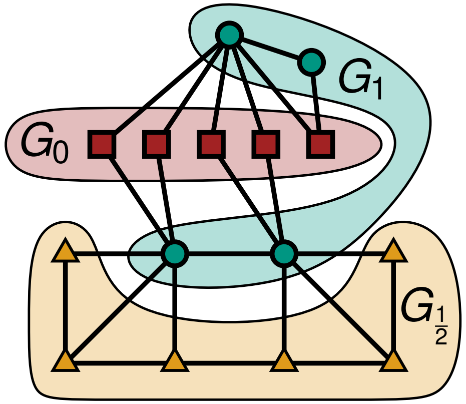
$\Rightarrow$ der Parameter wird nicht verändert

Verzweigungsregel

- ein Knoten zum VC hinzugefügt

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\text{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

Branch-and-Reduce



Reduktionsregel

- wenn die LP-Relaxierung eine Lösung hat, bei der nicht $|V_{\frac{1}{2}}| = n$, dann reduziere auf $G_{\frac{1}{2}}$

Verzweigungsregel

- für eine Kante uv, betrachte die Instanzen $G - u$ und $G - v$

Wie muss der Parameter angepasst werden?

Reduktionsregel

- es werden $|V_1|$ Knoten zum VC hinzugefügt
- $\ell_{\mathrm{LP}}(G_{\frac{1}{2}}) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - |V_1|$
- G hat VC der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k \Leftrightarrow$
  $G_{\frac{1}{2}}$ hat VC der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k - |V_1| = \ell_{\mathrm{LP}}(G_{\frac{1}{2}}) + k$

$\Rightarrow$ der Parameter wird nicht verändert

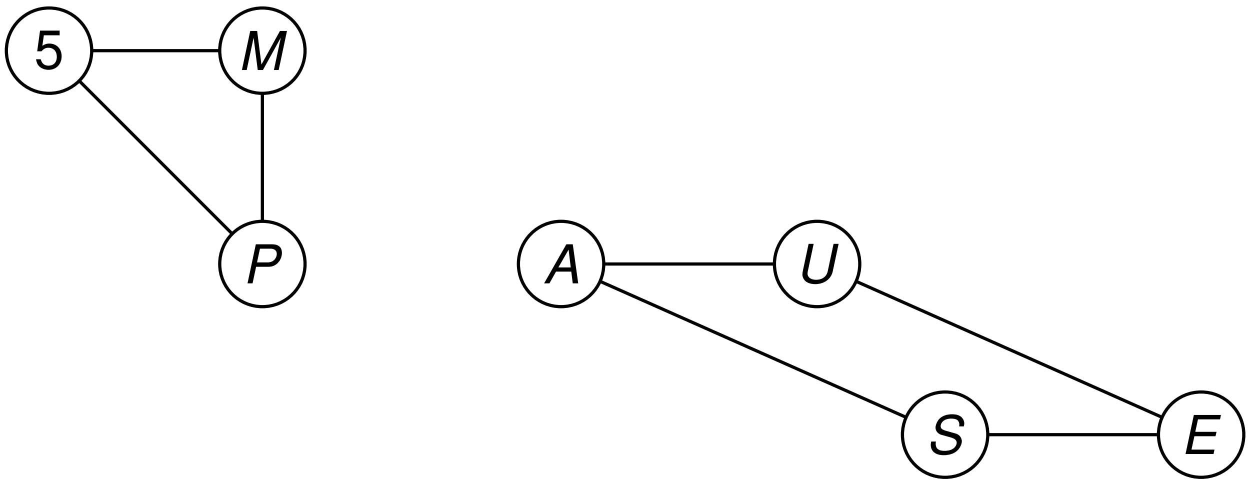
Verzweigungsregel

- ein Knoten zum VC hinzugefügt
- aber wie verändert sich $\ell_{\mathrm{LP}}(G)$?

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

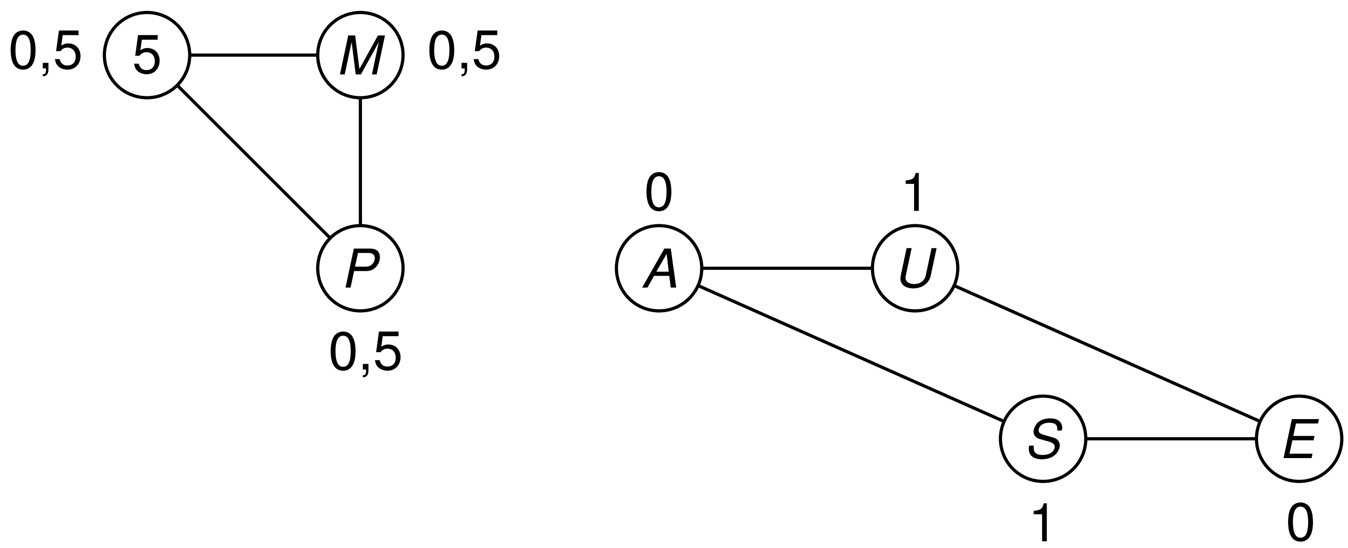
Untere Schranken

Wie groß ist $\ell_{\mathbf{LP}}(G)$? Wie verändert es sich beim Branching?



Untere Schranken

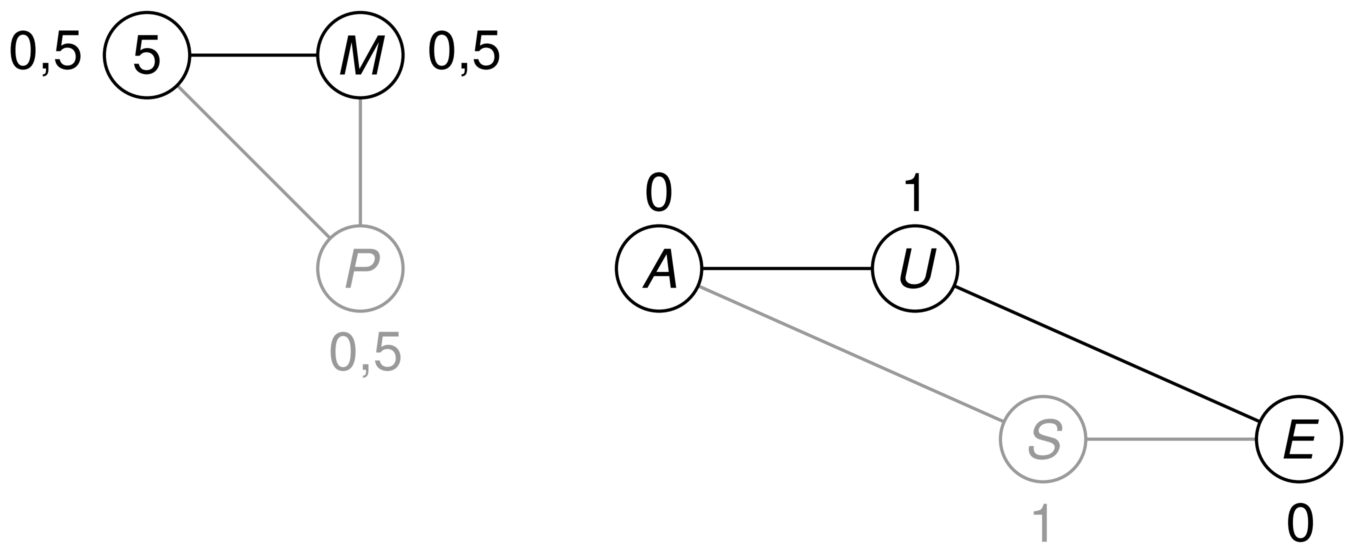
Wie groß ist $\ell_{\mathbf{LP}}(G)$? Wie verändert es sich beim Branching?



untere Schranke: 1,5 2

Untere Schranken

Wie groß ist $\ell_{\mathrm{LP}}(G)$? Wie verändert es sich beim Branching?



untere Schranke: 1,5 2

nach Branching: 1 1

Wie groß ist $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v)$?

Lemma
Die LP-Lösung, die alles auf $\frac{1}{2}$ setzt ist die einzige Lösung genau dann, wenn $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$.

Beweis

Wie groß ist $\ell_{\text{LP}}(G - v)$?

Lemma
Die LP-Lösung, die alles auf $\frac{1}{2}$ setzt ist die einzige Lösung genau dann, wenn $\ell_{\text{LP}}(G - v) = \ell_{\text{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$.

Beweis

alles auf $\frac{1}{2}$ ist die einzige Lösung $\Leftarrow \ell_{\text{LP}}(G - v) = \ell_{\text{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$

Wie groß ist $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v)$?

Lemma
Die LP-Lösung, die alles auf $\frac{1}{2}$ setzt ist die einzige Lösung genau dann, wenn $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$.

Beweis

alles auf $\frac{1}{2}$ ist die einzige Lösung $\Leftarrow \ell_{\mathrm{LP}}(G - v) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$

- angenommen, es gibt eine Lösung mit $x_v = 1$ für einen Knoten v

Wie groß ist $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v)$?

Lemma
Die LP-Lösung, die alles auf $\frac{1}{2}$ setzt ist die einzige Lösung genau dann, wenn $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$.

Beweis

alles auf $\frac{1}{2}$ ist die einzige Lösung $\Leftarrow \ell_{\mathrm{LP}}(G - v) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$

- angenommen, es gibt eine Lösung mit $x_v = 1$ für einen Knoten v
- die gleichen Werte (abgesehen von x_v) liefern Lösung für $G - v$

Wie groß ist $\ell_{\mathbf{LP}}(G - v)$?

Lemma
Die LP-Lösung, die alles auf $\frac{1}{2}$ setzt ist die einzige Lösung genau dann, wenn $\ell_{\text{LP}}(G - v) = \ell_{\text{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$.

Beweis

alles auf $\frac{1}{2}$ ist die einzige Lösung $\Leftarrow \ell_{\text{LP}}(G - v) = \ell_{\text{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$

- angenommen, es gibt eine Lösung mit $x_v = 1$ für einen Knoten v
- die gleichen Werte (abgesehen von x_v) liefern Lösung für $G - v$
- also hat $G - v$ eine Lösung der Größe $\ell_{\text{LP}}(G) - 1$

Wie groß ist $\ell_{\mathbf{LP}}(G - v)$?

Lemma
Die LP-Lösung, die alles auf $\frac{1}{2}$ setzt ist die einzige Lösung genau dann, wenn $\ell_{\text{LP}}(G - v) = \ell_{\text{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$.

Beweis

alles auf $\frac{1}{2}$ ist die einzige Lösung $\Leftarrow \ell_{\text{LP}}(G - v) = \ell_{\text{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$

- angenommen, es gibt eine Lösung mit $x_v = 1$ für einen Knoten v
- die gleichen Werte (abgesehen von x_v) liefern Lösung für $G - v$
- also hat $G - v$ eine Lösung der Größe $\ell_{\text{LP}}(G) - 1$

alles auf $\frac{1}{2}$ ist die einzige Lösung $\Rightarrow \ell_{\text{LP}}(G - v) = \ell_{\text{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$

Wie groß ist $\ell_{\mathbf{LP}}(G - v)$?

Lemma
Die LP-Lösung, die alles auf $\frac{1}{2}$ setzt ist die einzige Lösung genau dann, wenn $\ell_{\text{LP}}(G - v) = \ell_{\text{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$.

Beweis

alles auf $\frac{1}{2}$ ist die einzige Lösung $\Leftarrow \ell_{\text{LP}}(G - v) = \ell_{\text{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$

- angenommen, es gibt eine Lösung mit $x_v = 1$ für einen Knoten v
- die gleichen Werte (abgesehen von x_v) liefern Lösung für $G - v$
- also hat $G - v$ eine Lösung der Größe $\ell_{\text{LP}}(G) - 1$

alles auf $\frac{1}{2}$ ist die einzige Lösung $\Rightarrow \ell_{\text{LP}}(G - v) = \ell_{\text{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$

- klar: $\ell_{\text{LP}}(G - v) \leq \ell_{\text{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ (lösche v aus Lösung für G)

Wie groß ist $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v)$?

Lemma
Die LP-Lösung, die alles auf $\frac{1}{2}$ setzt ist die einzige Lösung genau dann, wenn $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$.

Beweis

alles auf $\frac{1}{2}$ ist die einzige Lösung $\Leftarrow \ell_{\mathrm{LP}}(G - v) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$

- angenommen, es gibt eine Lösung mit $x_v = 1$ für einen Knoten v
- die gleichen Werte (abgesehen von x_v) liefern Lösung für $G - v$
- also hat $G - v$ eine Lösung der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) - 1$

alles auf $\frac{1}{2}$ ist die einzige Lösung $\Rightarrow \ell_{\mathrm{LP}}(G - v) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$

- klar: $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v) \leq \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ (lösche v aus Lösung für G)
- angenommen, $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v) < \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$

Wie groß ist $\ell_{\mathbf{LP}}(G - v)$?

Lemma
Die LP-Lösung, die alles auf $\frac{1}{2}$ setzt ist die einzige Lösung genau dann, wenn $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$.

Beweis

alles auf $\frac{1}{2}$ ist die einzige Lösung $\Leftarrow \ell_{\mathrm{LP}}(G - v) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$

- angenommen, es gibt eine Lösung mit $x_v = 1$ für einen Knoten v
- die gleichen Werte (abgesehen von x_v) liefern Lösung für $G - v$
- also hat $G - v$ eine Lösung der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) - 1$

alles auf $\frac{1}{2}$ ist die einzige Lösung $\Rightarrow \ell_{\mathrm{LP}}(G - v) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$

- klar: $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v) \leq \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ (lösche v aus Lösung für G)
- angenommen, $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v) < \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$
- dann gibt es Lösung für $G - v$ mit Wert maximal $\ell_{\mathrm{LP}}(G) - 1$

Wie groß ist $\ell_{\text{LP}}(G - v)$?

Lemma
Die LP-Lösung, die alles auf $\frac{1}{2}$ setzt ist die einzige Lösung genau dann, wenn $\ell_{\text{LP}}(G - v) = \ell_{\text{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$.

Beweis

alles auf $\frac{1}{2}$ ist die einzige Lösung $\Leftarrow \ell_{\text{LP}}(G - v) = \ell_{\text{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$

- angenommen, es gibt eine Lösung mit $x_v = 1$ für einen Knoten v
- die gleichen Werte (abgesehen von x_v) liefern Lösung für $G - v$
- also hat $G - v$ eine Lösung der Größe $\ell_{\text{LP}}(G) - 1$

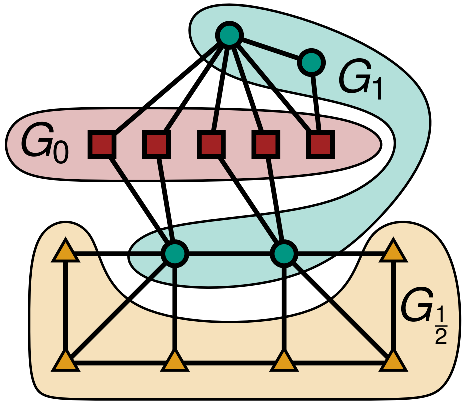
alles auf $\frac{1}{2}$ ist die einzige Lösung $\Rightarrow \ell_{\text{LP}}(G - v) = \ell_{\text{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$

- klar: $\ell_{\text{LP}}(G - v) \leq \ell_{\text{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ (lösche v aus Lösung für G)
- angenommen, $\ell_{\text{LP}}(G - v) < \ell_{\text{LP}}(G) - \frac{1}{2}$
- dann gibt es Lösung für $G - v$ mit Wert maximal $\ell_{\text{LP}}(G) - 1$
- hinzufügen von v mit $x_v = 1$ liefert optimale Lösung für G

Branch-and-Reduce

Reduktionsregel

- wenn die LP-Relaxierung eine Lösung hat, bei der nicht $|V_{\frac{1}{2}}| = n$, dann reduziere auf $G_{\frac{1}{2}}$
- Parameter bleibt unverändert

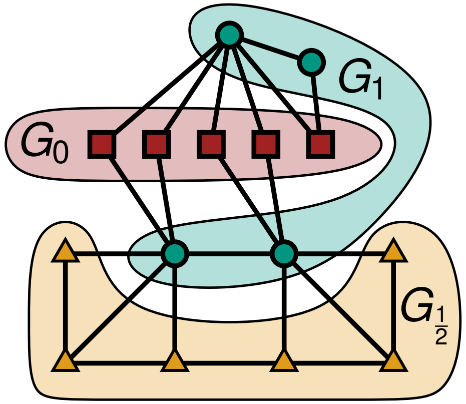


Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

Branch-and-Reduce

Reduktionsregel

- wenn die LP-Relaxierung eine Lösung hat, bei der nicht $|V_{\frac{1}{2}}| = n$, dann reduziere auf $G_{\frac{1}{2}}$
- Parameter bleibt unverändert

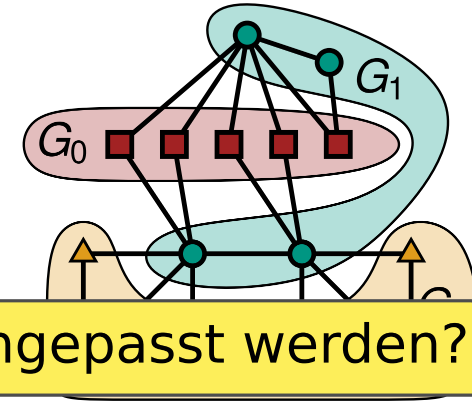


Reduktionsregel ist sicher

- siehe Beweis zur Kernbildung in letzter Vorlesung
- Parameter unverändert lassen ist korrekt: vorhin gesehen

Problem: VERTEX COVER ABOVE LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

Branch-and-Reduce



Reduktionsregel

- wenn die LP-Relaxierung eine Lösung hat, bei der nicht $|V_{\frac{1}{2}}| = n$, dann reduziere auf $G_{\frac{1}{2}}$
- Parameter bleibt unverändert

Wie muss der Parameter angepasst werden?

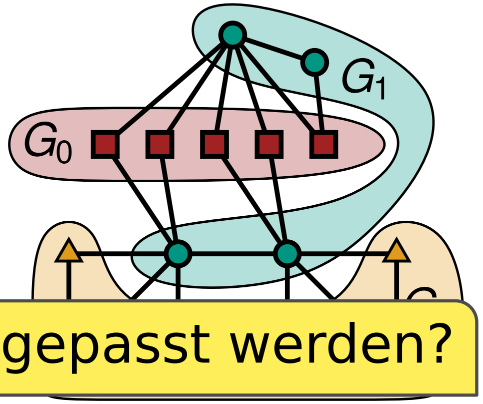
Verzweigungsregel

- für eine Kante uv, betrachte die Instanzen $G - u$ und $G - v$

Lemma
Die LP-Lösung, die alles auf $\frac{1}{2}$ setzt ist die einzige Lösung genau dann, wenn $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$.

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

Branch-and-Reduce



Reduktionsregel

- wenn die LP-Relaxierung eine Lösung hat, bei der nicht $|V_{\frac{1}{2}}| = n$, dann reduziere auf $G_{\frac{1}{2}}$
- Parameter bleibt unverändert

Wie muss der Parameter angepasst werden?

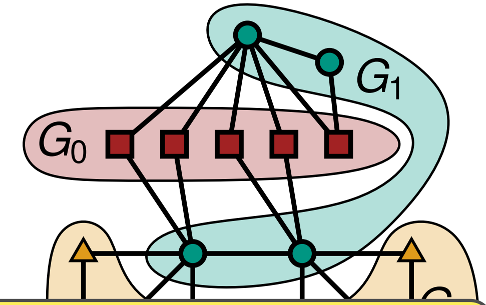
Verzweigungsregel

- für eine Kante uv, betrachte die Instanzen $G - u$ und $G - v$
- es wird ein Knoten zum VC hinzugefügt

Lemma
Die LP-Lösung, die alles auf $\frac{1}{2}$ setzt ist die einzige Lösung genau dann, wenn $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$.

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

Branch-and-Reduce



Reduktionsregel

- wenn die LP-Relaxierung eine Lösung hat, bei der nicht $|V_{\frac{1}{2}}| = n$, dann reduziere auf $G_{\frac{1}{2}}$
- Parameter bleibt unverändert

Wie muss der Parameter angepasst werden?

Verzweigungsregel

- für eine Kante uv, betrachte die Instanzen $G - u$ und $G - v$
- es wird ein Knoten zum VC hinzugefügt
- $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ (siehe Lemma)

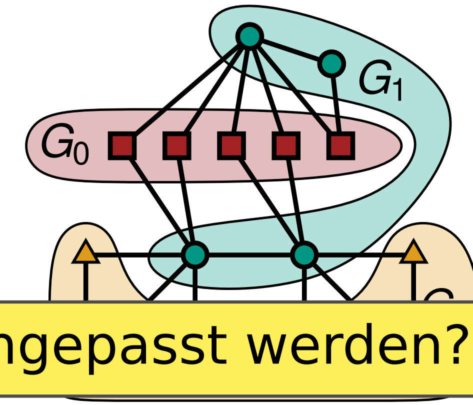
Lemma
Die LP-Lösung, die alles auf $\frac{1}{2}$ setzt ist die einzige Lösung genau dann, wenn $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$.

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

Branch-and-Reduce

Reduktionsregel

- wenn die LP-Relaxierung eine Lösung hat, bei der nicht $|V_{\frac{1}{2}}| = n$, dann reduziere auf $G_{\frac{1}{2}}$
- Parameter bleibt unverändert



Wie muss der Parameter angepasst werden?

Verzweigungsregel

- für eine Kante uv, betrachte die Instanzen $G - u$ und $G - v$
- es wird ein Knoten zum VC hinzugefügt
- $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ (siehe Lemma)
- G hat VC der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k \Leftrightarrow$
  $G - v$ hat VC der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k - 1 = \ell_{\mathrm{LP}}(G - v) + k - \frac{1}{2}$ oder
  $G - u$ hat VC der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k - 1 = \ell_{\mathrm{LP}}(G - u) + k - \frac{1}{2}$

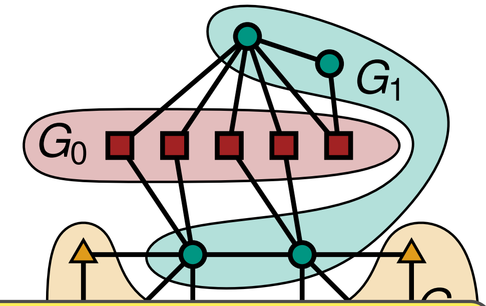
Lemma
Die LP-Lösung, die alles auf $\frac{1}{2}$ setzt ist die einzige Lösung genau dann, wenn $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$.

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

Branch-and-Reduce

Reduktionsregel

- wenn die LP-Relaxierung eine Lösung hat, bei der nicht $|V_{\frac{1}{2}}| = n$, dann reduziere auf $G_{\frac{1}{2}}$
- Parameter bleibt unverändert



Wie muss der Parameter angepasst werden?

Verzweigungsregel

- für eine Kante uv, betrachte die Instanzen $G - u$ und $G - v$
- es wird ein Knoten zum VC hinzugefügt
- $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ (siehe Lemma)
- G hat VC der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k \Leftrightarrow$
  $G - v$ hat VC der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k - 1 = \ell_{\mathrm{LP}}(G - v) + k - \frac{1}{2}$ oder
  $G - u$ hat VC der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k - 1 = \ell_{\mathrm{LP}}(G - u) + k - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Parameter um $\frac{1}{2}$ verringern

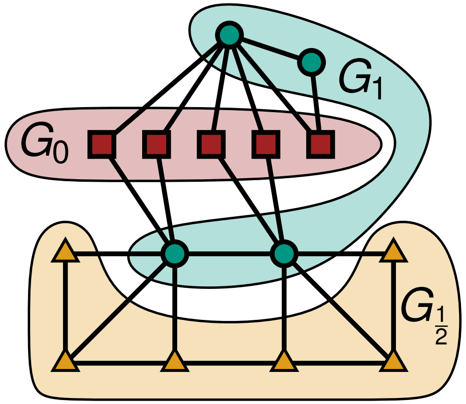
Lemma
Die LP-Lösung, die alles auf $\frac{1}{2}$ setzt ist die einzige Lösung genau dann, wenn $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$.

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

Branch-and-Reduce

Reduktionsregel

- wenn die LP-Relaxierung eine Lösung hat, bei der nicht $|V_{\frac{1}{2}}| = n$, dann reduziere auf $G_{\frac{1}{2}}$
- Parameter bleibt unverändert



Verzweigungsregel

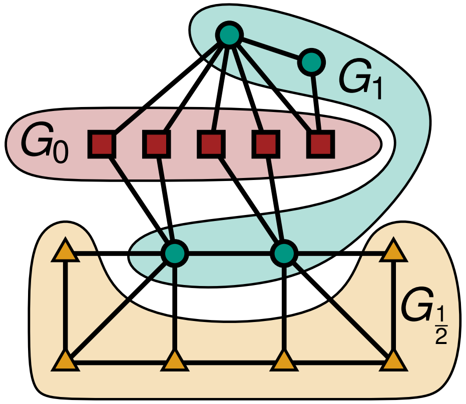
- für eine Kante uv, betrachte die Instanzen $G - u$ und $G - v$
- verkleinere k um $\frac{1}{2}$ (in beiden Instanzen)

Lemma
Die LP-Lösung, die alles auf $\frac{1}{2}$ setzt ist die einzige Lösung genau dann, wenn $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$.

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

Branch-and-Reduce

Reduktionsregel



- wenn die LP-Relaxierung eine Lösung hat, bei der nicht $|V_{\frac{1}{2}}| = n$, dann reduziere auf $G_{\frac{1}{2}}$
- Parameter bleibt unverändert

Verzweigungsregel

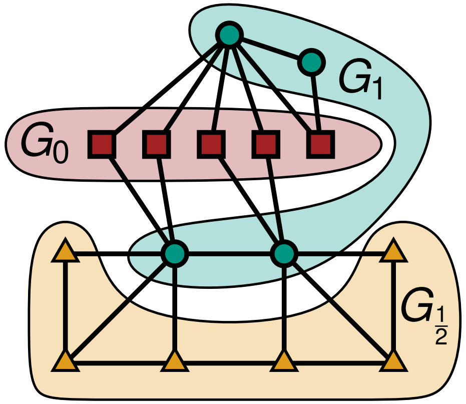
- für eine Kante uv, betrachte die Instanzen $G - u$ und $G - v$
- verkleinere k um $\frac{1}{2}$ (in beiden Instanzen)

Laufzeit

Lemma
Die LP-Lösung, die alles auf $\frac{1}{2}$ setzt ist die einzige Lösung genau dann, wenn $\ell_{\text{LP}}(G - v) = \ell_{\text{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$.

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\text{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

Branch-and-Reduce



Reduktionsregel

- wenn die LP-Relaxierung eine Lösung hat, bei der nicht $|V_{\frac{1}{2}}| = n$, dann reduziere auf $G_{\frac{1}{2}}$
- Parameter bleibt unverändert

Verzweigungsregel

- für eine Kante uv, betrachte die Instanzen $G - u$ und $G - v$
- verkleinere k um $\frac{1}{2}$ (in beiden Instanzen)

Laufzeit

- Verzweigungsbaum hat maximal $2k$ Level
- und damit maximal $2^{2k} = 4^k$ Blätter

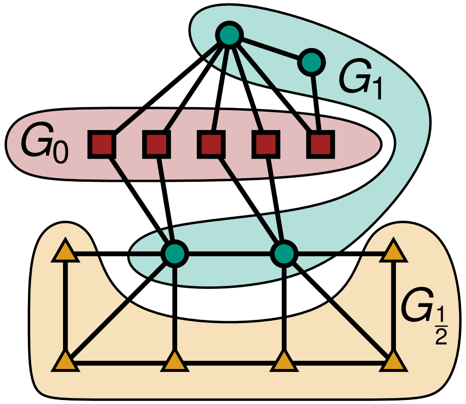
Lemma
Die LP-Lösung, die alles auf $\frac{1}{2}$ setzt ist die einzige Lösung genau dann, wenn $\ell_{\text{LP}}(G - v) = \ell_{\text{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$.

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\text{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

Branch-and-Reduce

Reduktionsregel

- wenn die LP-Relaxierung eine Lösung hat, bei der nicht $|V_{\frac{1}{2}}| = n$, dann reduziere auf $G_{\frac{1}{2}}$
- Parameter bleibt unverändert



Verzweigungsregel

- für eine Kante uv, betrachte die Instanzen $G - u$ und $G - v$
- verkleinere k um $\frac{1}{2}$ (in beiden Instanzen)

Laufzeit

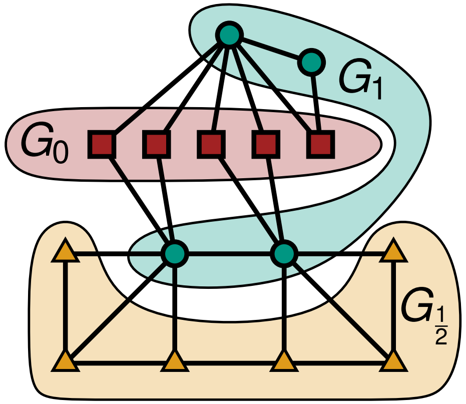
- Verzweigungsbaum hat maximal $2k$ Level
- und damit maximal $2^{2k} = 4^k$ Blätter
- Reduktionsregel: polynomiell

Wie?

Lemma
Die LP-Lösung, die alles auf $\frac{1}{2}$ setzt ist die einzige Lösung genau dann, wenn $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$.

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

Branch-and-Reduce



Reduktionsregel

- wenn die LP-Relaxierung eine Lösung hat, bei der nicht $|V_{\frac{1}{2}}| = n$, dann reduziere auf $G_{\frac{1}{2}}$
- Parameter bleibt unverändert

Verzweigungsregel

- für eine Kante uv, betrachte die Instanzen $G - u$ und $G - v$
- verkleinere k um $\frac{1}{2}$ (in beiden Instanzen)

Laufzeit

- Verzweigungsbaum hat maximal $2k$ Level
- und damit maximal $2^{2k} = 4^k$ Blätter
- Reduktionsregel: polynomiell

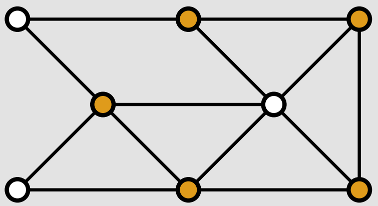
Wie? → Nutze das Lemma!

Lemma
Die LP-Lösung, die alles auf $\frac{1}{2}$ setzt ist die einzige Lösung genau dann, wenn $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$.

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

Zusammenfassung

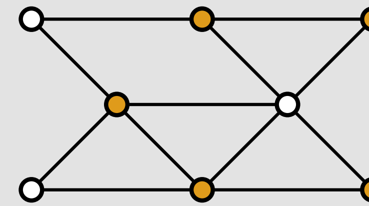
Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



Theorem
Für Vertex Cover above LP gibt es einen FPT-Algo mit Laufzeit $4^k \cdot n^{O(1)}$.

Zusammenfassung

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\text{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



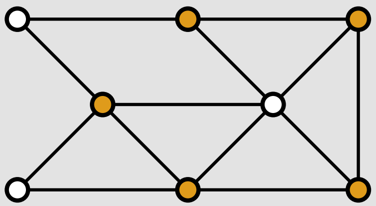
Theorem
Für Vertex Cover above LP gibt es einen FPT-Algo mit Laufzeit $4^k \cdot n^{O(1)}$.

Wie sieht das duale Programm des Vertex Cover LPs aus?

Was können wir daraus schlussfolgern?

Zusammenfassung

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



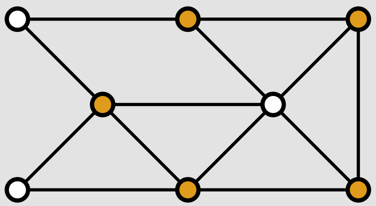
Theorem
Für Vertex Cover above LP gibt es einen FPT-Algo mit Laufzeit $4^k \cdot n^{O(1)}$.

Matching als untere Schranken

- die Größe $\ell_{\mathrm{M}}(G)$ eines maximalen Matchings in G ist untere Schranke

Zusammenfassung

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\text{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



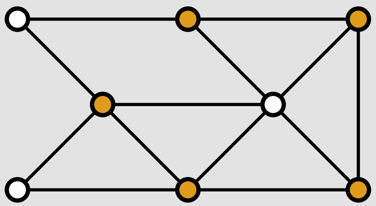
Theorem
Für Vertex Cover above LP gibt es einen FPT-Algo mit Laufzeit $4^k \cdot n^{O(1)}$.

Matching als untere Schranken

- die Größe $\ell_{\text{M}}(G)$ eines maximalen Matchings in G ist untere Schranke
- beachte: $\ell_{\text{M}}(G) \leq \ell_{\text{LP}}(G)$ (Dualität der linearen Programme)

Zusammenfassung

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



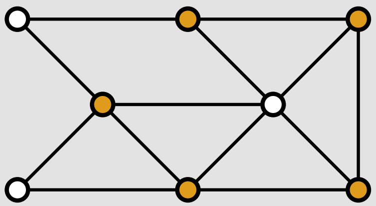
Theorem
Für Vertex Cover above LP gibt es einen FPT-Algo mit Laufzeit $4^k \cdot n^{O(1)}$.

Matching als untere Schranken

- die Größe $\ell_{\mathrm{M}}(G)$ eines maximalen Matchings in G ist untere Schranke
- beachte: $\ell_{\mathrm{M}}(G) \leq \ell_{\mathrm{LP}}(G)$ (Dualität der linearen Programme)
- Algo von heute zeigt auch FPT für Vertex Cover above Matching

Zusammenfassung

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



Theorem
Für Vertex Cover above LP gibt es einen FPT-Algo mit Laufzeit $4^k \cdot n^{O(1)}$.

Matching als untere Schranken

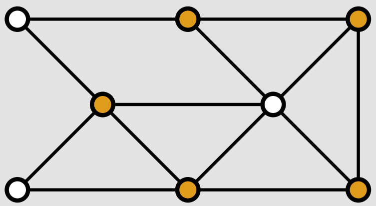
- die Größe $\ell_{\mathrm{M}}(G)$ eines maximalen Matchings in G ist untere Schranke
- beachte: $\ell_{\mathrm{M}}(G) \leq \ell_{\mathrm{LP}}(G)$ (Dualität der linearen Programme)
- Algo von heute zeigt auch FPT für Vertex Cover above Matching

Bessere untere Schranke

- $2\ell_{\mathrm{LP}}(G) - \ell_{\mathrm{M}}(G)$ ist ebenfalls eine untere Schranke

Zusammenfassung

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



Theorem
Für Vertex Cover above LP gibt es einen FPT-Algo mit Laufzeit $4^k \cdot n^{O(1)}$.

Matching als untere Schranken

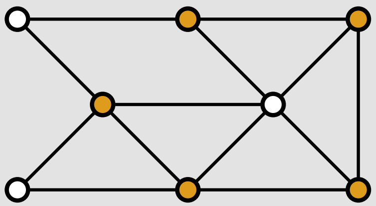
- die Größe $\ell_{\mathrm{M}}(G)$ eines maximalen Matchings in G ist untere Schranke
- beachte: $\ell_{\mathrm{M}}(G) \leq \ell_{\mathrm{LP}}(G)$ (Dualität der linearen Programme)
- Algo von heute zeigt auch FPT für Vertex Cover above Matching

Bessere untere Schranke

- $2\ell_{\mathrm{LP}}(G) - \ell_{\mathrm{M}}(G)$ ist ebenfalls eine untere Schranke
- die Schranke ist stärker als $\ell_{\mathrm{LP}}(G)$

Zusammenfassung

Problem: VERTEX COVER ABOVE LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



Theorem
Für VERTEX COVER ABOVE LP gibt es einen FPT-Algo mit Laufzeit $4^k \cdot n^{O(1)}$.

Matching als untere Schranken

- die Größe $\ell_{\mathrm{M}}(G)$ eines maximalen Matchings in G ist untere Schranke
- beachte: $\ell_{\mathrm{M}}(G) \leq \ell_{\mathrm{LP}}(G)$ (Dualität der linearen Programme)
- Algo von heute zeigt auch FPT für VERTEX COVER ABOVE MATCHING

Bessere untere Schranke

- $2\ell_{\mathrm{LP}}(G) - \ell_{\mathrm{M}}(G)$ ist ebenfalls eine untere Schranke
- die Schranke ist stärker als $\ell_{\mathrm{LP}}(G)$
- VERTEX COVER ABOVE $2\ell_{\mathrm{LP}}(G) - \ell_{\mathrm{M}}(G)$ ist FPT

Literaturhinweise

Karlsruher Institut für Technologie

Raising The Bar For Vertex Cover: Fixed-parameter Tractability Above A Higher Guarantee

- Shivam Garg, Geevarghese Philip [2016]
- eben genanntes Ergebnis für Vertex Cover above $2\ell_{\mathrm{LP}}(G) - \ell_{\mathrm{M}}(G)$
- enthält viele weitere Referenzen zum Thema

doi.org/10.1137/1.9781611974331.ch80

Branch-and-Reduce Exponential/FPT Algorithms in Practice: A Case Study of Vertex Cover

- Takuya Akiba, Yoichi Iwata [2016]
- Branch-and-Reduce für Vertex Cover in der Praxis

doi.org/10.1016/j.tcs.2015.09.023

WeGotYouCovered: The Winning Solver from the PACE 2019 Challenge, Vertex Cover Track

- Demian Hespe, Sebastian Lamm, Christian Schulz, Darren Strash [2020]
- schneller Algo für Vertex Cover in der Praxis

doi.org/10.1137/1.9781611976229.1