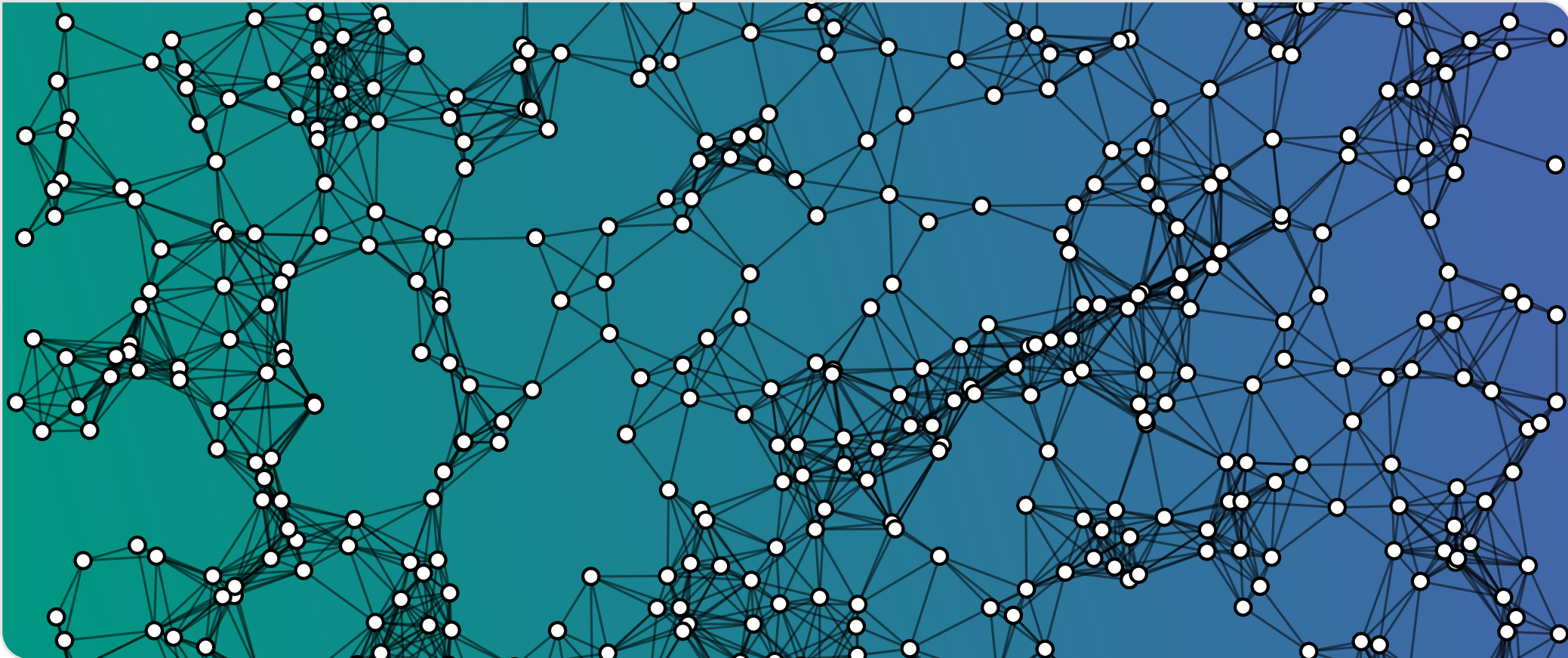


Parametrisierte Algorithmen

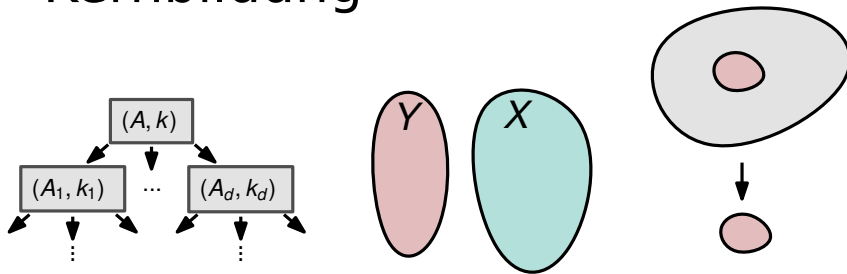
ILP-Relaxierung und Kernbildung



Inhalt

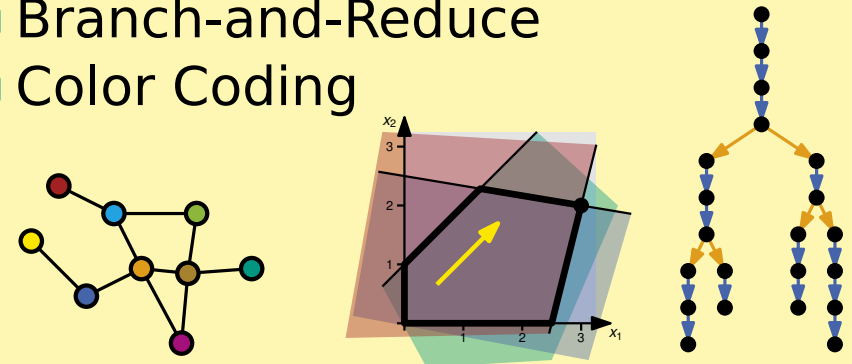
Basic Toolbox

- beschränkte Suchbäume
- iterative Kompression
- Kernbildung



Erweiterte Toolbox

- lineare Programme
- Branch-and-Reduce
- Color Coding



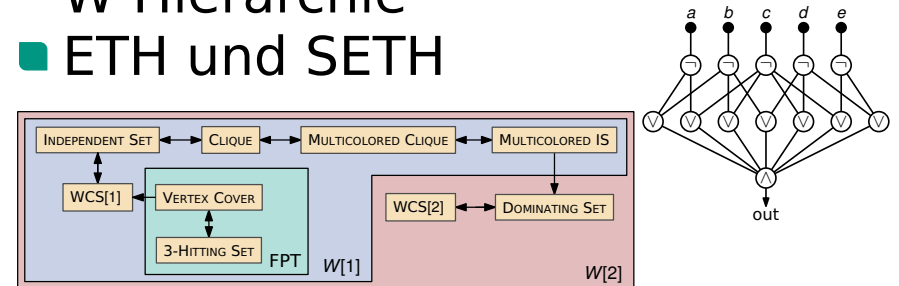
Baumweite

- dynamische Programme
- chordale & planare Graphen
- Courcelles Theorem



Untere Schranken

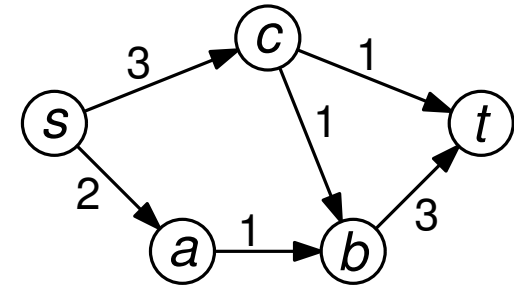
- parametrisierte Reduktionen
- boolesche Schaltkreise und die W-Hierarchie
- ETH und SETH



LP-Modellierung Beispiel: Fluss

Fluss in einem Netzwerk

- maximiere Fluss von s nach t
- beachte Kantenkapazitäten
- einkommender = ausgehender Fluss



Formulierung als LP

- x_{uv} repräsentiert den Fluss auf der Kante uv

max.: $x_{sa} + x_{sc}$

sodass: $0 \leq x_{sa} \leq 2$ $x_{sa} - x_{ab} = 0$

$0 \leq x_{sc} \leq 3$ $x_{sc} - x_{cb} - x_{ct} = 0$

$0 \leq x_{ab} \leq 1$ $x_{ab} + x_{cb} - x_{bt} = 0$

$0 \leq x_{bt} \leq 3$

$0 \leq x_{cb} \leq 1$

$0 \leq x_{ct} \leq 1$

Kapazitäten

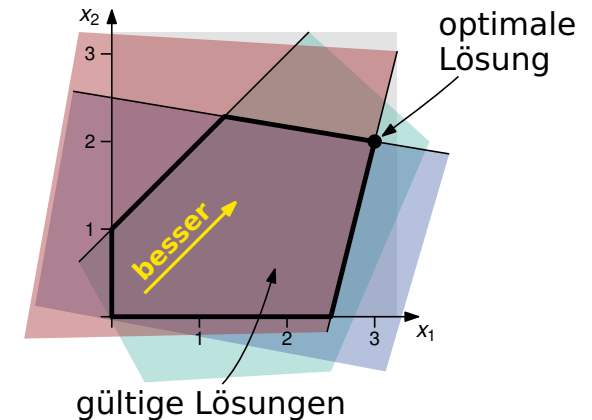
Flusserhaltung

ILP für ganzzahlige Flüsse?

Optimale Lösungen von LPs

Lösungen auf dem Rand des Polytops

- Ungleichung liefert n -dimensionalen Halbraum
- Schnitt dieser Halbräume = Polytop
- optimale Lösung ist ein Eckpunkt des Polytops



In Matrixschreibweise

$$\text{maximiere } (1 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ sodass } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

- Teilmatrizen der Größe $n \times n$ liefern einzelnen Punkt
(wenn man \leq als $=$ auffasst und die Zeilen linear unabhängig sind)

- Bsp.: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} \\ \frac{16}{7} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Definition

Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ist **total unimodular**, wenn die inverse Matrix jeder invertierbaren quadratischen Teilmatrix ganzzahlig ist.

Ganzzahlige Lösungen

Definition

Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ist **total unimodular**, wenn die inverse Matrix jeder invertierbaren quadratischen Teilmatrix ganzzahlig ist.

Theorem

Gegeben ein lineares Programm der Form

$$\text{maximiere } c^T x \text{ mit } Ax \leq b$$

mit $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ total unimodular und $b \in \mathbb{Z}^m$. Wenn das LP eine optimale Lösung hat, dann hat es auch eine ganzzahlige optimale Lösung.

Beweisidee

- es gibt einen Eckpunkt x^* des Polytops, der optimale Lösung ist
- dieser ist bestimmt durch $B \cdot x^* = b$ für eine $n \times n$ Teilmatrix B von A
- B^{-1} ist ganzzahlig $\Rightarrow x^* = B^{-1}b$ ist ganzzahlig

Total unimodular: äquivalente Definition

- Jede quadratische Submatrix hat Determinante -1 , 0 oder 1

Nachweis für totale Unimodularität

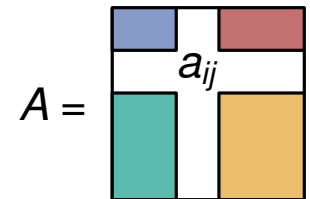
Echte LPs mit total unimodularen Matrizen

- LP zur Berechnung maximaler Flüsse in Netzwerken
- ILP zur Berechnung minimaler Vertex Cover in bipartiten Graphen

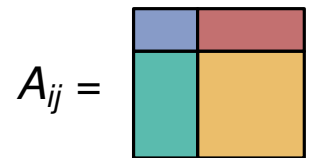
Nützliche Tools zur Berechnung der Determinante

- Erinnerung: A ist total unimodular, wenn jede quadratische Teilmatrix Determinante -1 , 0 oder 1 hat
- Laplacescher Entwicklungssatz:

Entwicklung nach i -ter Zeile: $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}$



Entwicklung nach j -ter Spalte: $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}$

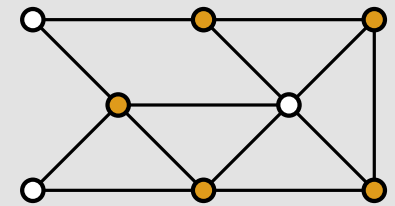


- Determinante $0 \Leftrightarrow$ Matrix nicht invertierbar \Leftrightarrow Spalten-/Zeilenvektoren sind linear abhängig

Beste Kernbildung für VERTEX COVER

Problem: VERTEX COVER

Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k .
 Gibt es ein Vertex Cover der Größe k ?
 (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



Bisher gesehen

- wähle Knoten, die „offensichtlich“ gewählt werden müssen
- wenn „offensichtlich“ unlösbar, reduziere zu kleiner NEIN-Instanz

Theorem

VERTEX COVER hat einen Kern mit $O(k^2)$ Knoten und $O(k^2)$ Kanten. Er kann in $O(m)$ Zeit berechnet werden.

Heute

- Kernbildung mithilfe der LP-Relaxierung des VERTEX COVER-ILPs
- liefert Kern der Größe $2k$

Grober Plan

Lemma

Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Beweis: gleich

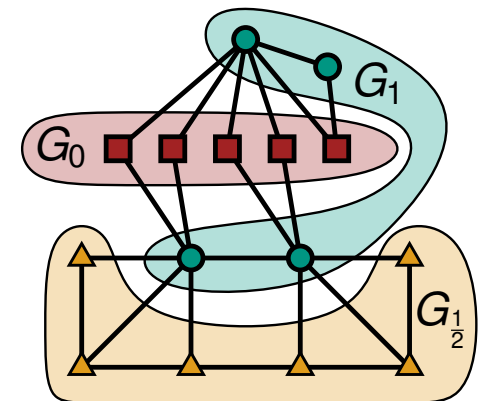
$$\text{minimiere: } \sum_{v \in V} x_v$$

$$\text{sodass: } 0 \leq x_v \leq 1 \text{ für } v \in V$$

$$x_u + x_v \geq 1 \text{ für } uv \in E$$

Teilgraphen

- Lösung zerlegt G in drei Teilgraphen $G_0, G_1, G_{\frac{1}{2}}$
- G_1 zusammen mit optimaler Lösung in $G_{\frac{1}{2}}$ liefert optimale Lösung in G
- $\Rightarrow G_{\frac{1}{2}}$ ist der Problemerkern



Fast ganzzahlige Lösungen

Lemma

Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Beweis

- Ziel: passe optimale Lösung schrittweise an, bis $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

Zwei neue Lösungen

- $\varepsilon = \min_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{ |x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1| \}$

- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Behauptungen

1. $(x'_v)_{v \in V}, (x''_v)_{v \in V}$ sind Lösungen
2. $\sum_{v \in V} x_v = \sum_{v \in V} x'_v = \sum_{v \in V} x''_v$
3. $(x'_v)_{v \in V}$ oder $(x''_v)_{v \in V}$ enthält weniger Variablen, die nicht in $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ sind als $(x_v)_{v \in V}$

⇒ nach maximal n Schritten erhält man die gewünschte Lösung

Fast ganzzahlige Lösungen

Lemma

Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung 1: $(x'_v)_{v \in V}, (x''_v)_{v \in V}$ sind Lösungen

- Zu zeigen: $0 \leq x'_v, x''_v \leq 1$ für alle $v \in V$ und $x'_v + x'_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
klar, da ε klein genug $x''_v + x''_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
- betrachte $\{u, v\} \in E$ und sei $x_u \leq x_v$

Fallunterscheidung nach x_u

- $x_u = 0 \Rightarrow x_v = 1 \Rightarrow x'_v = 1$ und $x''_v = 1$
- $x_u \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x'_u, x'_v \geq \frac{1}{2}$ und $x''_u, x''_v \geq \frac{1}{2}$
- $0 < x_u < \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_v = 1 \Rightarrow x'_v = 1 \text{ und } x''_v = 1 \\ \text{oder } \frac{1}{2} < x_v < 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow x'_u + x'_v = x_u + \varepsilon + x_v - \varepsilon = x_u + x_v \geq 1$$

$$\Rightarrow x''_u + x''_v = x_u - \varepsilon + x_v + \varepsilon = x_u + x_v \geq 1$$

Zwei neue Lösungen

$$\varepsilon = \min_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{ |x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1| \}$$

$$x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$$

$$x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$$

Fast ganzzahlige Lösungen

Lemma

Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung 2: $\sum_{v \in V} x_v = \sum_{v \in V} x'_v = \sum_{v \in V} x''_v$

- für alle $v \in V$ gilt:

$$x_v = \frac{1}{2} (x'_v + x''_v)$$

- und damit auch:

$$\sum_{v \in V} x_v = \frac{1}{2} \left(\sum_{v \in V} x'_v + \sum_{v \in V} x''_v \right)$$

- aus der Optimalität der Lösung $(x_v)_{v \in V}$ folgt:

$$\sum_{v \in V} x_v = \sum_{v \in V} x'_v = \sum_{v \in V} x''_v$$

Zwei neue Lösungen

- $\varepsilon = \min_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{ |x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1| \}$

- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Fast ganzzahlige Lösungen

Lemma

Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung 3: $(x'_v)_{v \in V}$ oder $(x''_v)_{v \in V}$ enthält weniger Variablen, die nicht in $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ sind als $(x_v)_{v \in V}$

- $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\} \Rightarrow x'_v, x''_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$
 → es geht also keine Variable verloren
- Wahl von $\varepsilon \Rightarrow$ mindestens eine Variable kommt hinzu

Zwei neue Lösungen

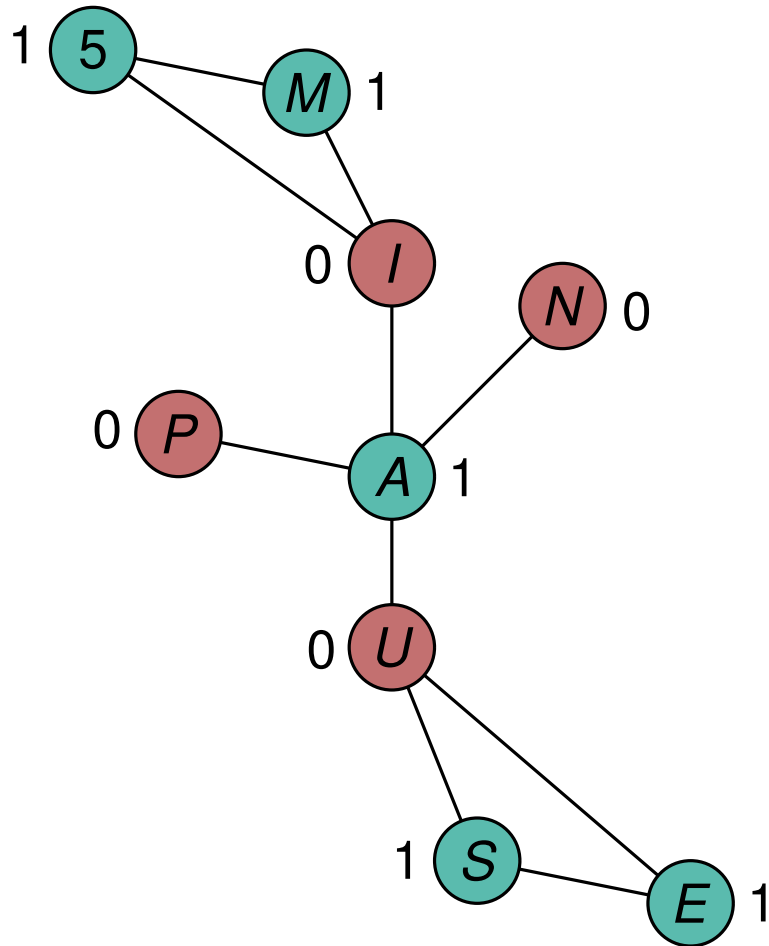
- $\varepsilon = \min_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$

- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

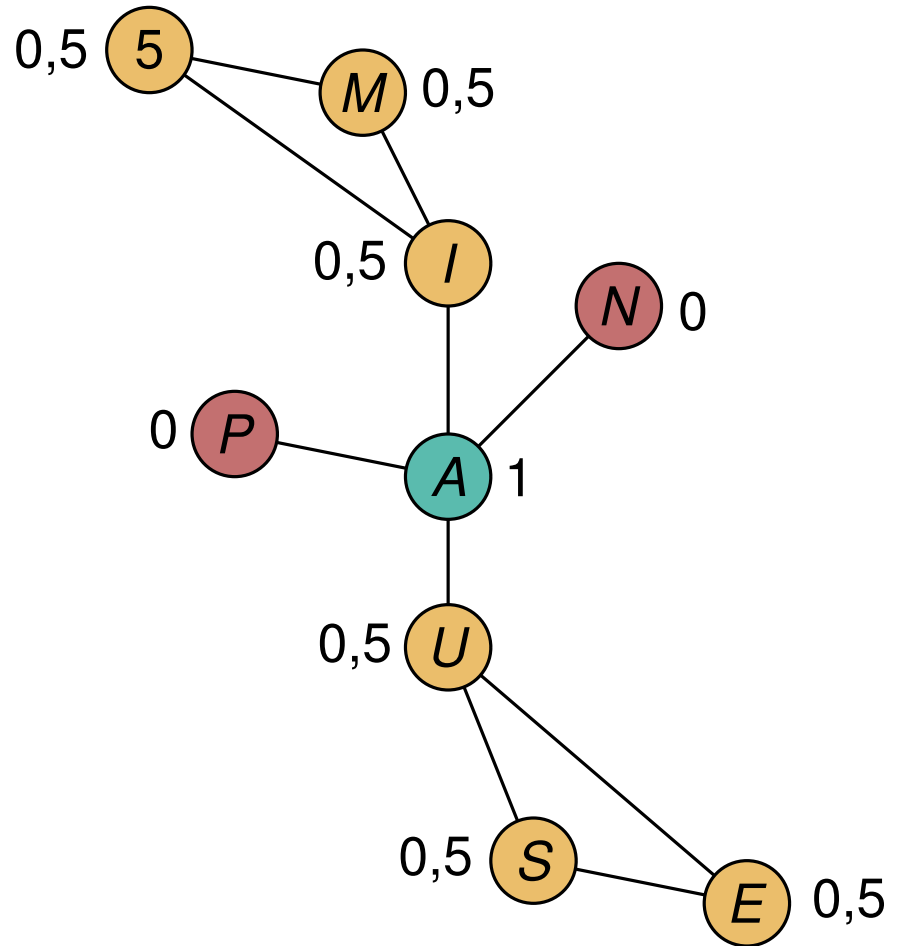
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

ILP vs. LP

Finde optimale Lösungen für das ILP und die LP-Relaxierung



ganzzahlige Lösung: 5

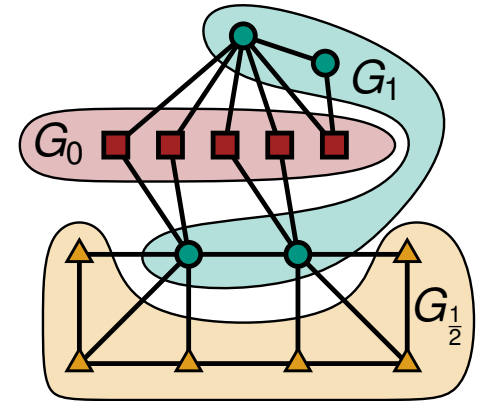


nicht-ganzzahlige Lösung: 4

LP-Lösung \rightarrow Vertex Cover

Drei Teilgraphen

- betrachte LP-Lösung $(x_v)_{v \in V}$ mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$
- $V_r = \{v \in V \mid x_v = r\}$ für $r \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ und $G_r = G[V_r]$



Lemma

Sei $S_{\frac{1}{2}}$ ein Vertex Cover von $G_{\frac{1}{2}}$. Dann ist $S_{\frac{1}{2}} \cup V_1$ ein Vertex Cover von G .

Beweis: betrachte Kante $\{u, v\}$

- **Fall 1:** $u \in V_1$ oder $v \in V_1 \Rightarrow \{u, v\}$ wird abgedeckt
- **Fall 2:** $u, v \in V_{\frac{1}{2}} \Rightarrow u \in S_{\frac{1}{2}}$ oder $v \in S_{\frac{1}{2}} \Rightarrow \{u, v\}$ wird abgedeckt
- weitere Fälle gibt es nicht, da sonst $x_u + x_v < 1$

Lemma

Sei $S_{\frac{1}{2}}$ ein minimales Vertex Cover von $G_{\frac{1}{2}}$ und sei S^* ein minimales Vertex Cover in G . Dann gilt $|S_{\frac{1}{2}}| + |V_1| \leq |S^*|$.

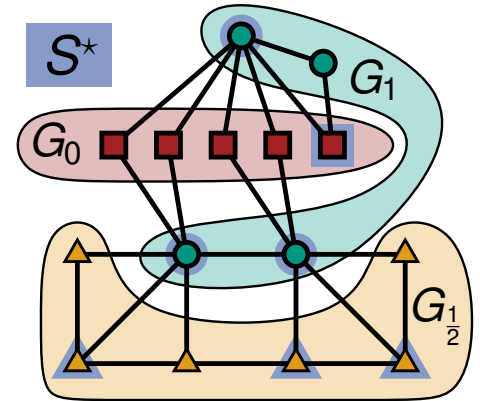
Minimalität

Lemma

Sei $S_{\frac{1}{2}}$ ein minimales VC von $G_{\frac{1}{2}}$ und sei S^* ein minimales VC in G . Dann gilt $|S_{\frac{1}{2}}| + |V_1| \leq |S^*|$.

Beweis

- betrachte $S^* = S_{\frac{1}{2}}^* \cup S_0^* \cup S_1^*$
- $S_{\frac{1}{2}}^*$ ist VC in $G_{\frac{1}{2}} \Rightarrow |S_{\frac{1}{2}}| \leq |S_{\frac{1}{2}}^*|$
- noch zu zeigen: $|V_1| \leq |S_0^*| + |S_1^*| \Leftrightarrow |V_1 \setminus S_1^*| \leq |S_0^*|$
- zeige: andernfalls gibt es bessere Lösung für das LP



Neue Lösung fürs LP

Es folgt:

$$x'_v = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } v \in V_1 \setminus S_1^* \quad \bullet \\ & \text{oder } v \in S_0^* \quad \blacksquare \\ x_v & \text{sonst} \quad \bullet \quad \blacktriangle \quad \blacktriangle \quad \blacksquare \end{cases}$$

$$\sum_{v \in V} x'_v = \sum_{v \in V} x_v - \frac{|V_1 \setminus S_1^*|}{2} + \frac{|S_0^*|}{2}$$

\Rightarrow

$$|V_1 \setminus S_1^*| \leq |S_0^*|$$

$(x_v)_{v \in V}$ ist optimal

Warum ist das eine Lösung?

Kernbildung

Reduktionsregel

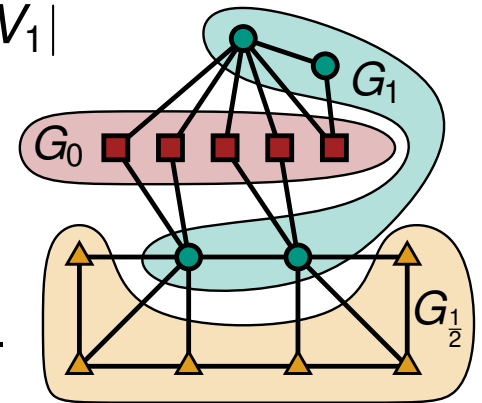
- löse die LP-Relaxierung $\rightarrow (x_v)_{v \in V}$
- falls $\sum_{v \in V} x_v > k \Rightarrow$ NEIN-Instanz
- sonst wähle V_1 , lösche $V_0 \cup V_1$ und verringere k um $|V_1|$

minimiere: $\sum_{v \in V} x_v$
 sodass: $0 \leq x_v \leq 1$ für $v \in V$
 $x_u + x_v \geq 1$ für $uv \in E$

Lemma: Die Reduktionsregel ist sicher.

Beweis

- optimale Lösung des ILPs ist nicht kleiner als optimale Lösung der Relaxierung
- falls $\sum_{v \in V} x_v > k$, so gibt es keine VC der Größe k
- es gibt ein minimales VC, das V_1 enthält und V_0 nicht enthält, denn:



Lemma

Sei $S_{\frac{1}{2}}$ ein VC von $G_{\frac{1}{2}}$. Dann ist $S_{\frac{1}{2}} \cup V_1$ ein VC von G .

Lemma

Sei $S_{\frac{1}{2}}$ ein minimales VC von $G_{\frac{1}{2}}$ und sei S^* ein minimales VC in G . Dann gilt $|S_{\frac{1}{2}}| + |V_1| \leq |S^*|$.

Kernbildung

Reduktionsregel

- löse die LP-Relaxierung $\rightarrow (x_v)_{v \in V}$
- falls $\sum_{v \in V} x_v > k \Rightarrow$ NEIN-Instanz
- sonst wähle V_1 , lösche $V_0 \cup V_1$ und verringere k um $|V_1|$

minimiere: $\sum_{v \in V} x_v$
 sodass: $0 \leq x_v \leq 1$ für $v \in V$
 $x_u + x_v \geq 1$ für $uv \in E$

Lemma: Die Reduktionsregel ist sicher.

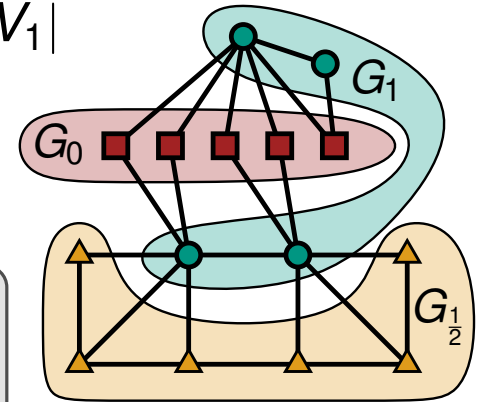
Theorem

Für VERTEX COVER kann ein Kern mit maximal $2k$ Knoten in $O(??)$ Zeit berechnet werden.

Beweis

- wir können annehmen, dass $\sum_{v \in V} x_v \leq k$ (sonst: triviale Nein-Instanz)
- $\Rightarrow \frac{1}{2}|V_{\frac{1}{2}}| \leq \sum_{v \in V} x_v \leq k \Rightarrow |V_{\frac{1}{2}}| \leq 2k$

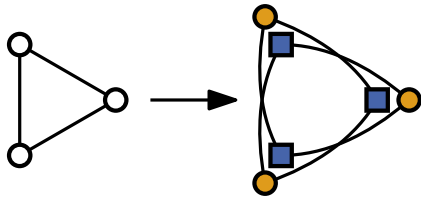
Laufzeit: dominiert durch lösen des LPs



Verbesserte Laufzeit

Konstruktion eines Hilfsgraphen

- spalte jeden Knoten v auf in v_g (gelb) und v_b (blau)
- übernehme Kanten aber nur zwischen gelb und blau
- resultierender bipartiter Graph: H mit Knotenmenge $V_g \cup V_b$



$$\begin{aligned} \text{minimiere: } & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{sodass: } & 0 \leq x_v \leq 1 \text{ für } v \in V \\ & x_u + x_v \geq 1 \text{ für } uv \in E \end{aligned}$$

Behauptung

- VC S in H liefert Lösung fürs LP mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ und umgekehrt, sodass

$$\frac{1}{2}|S| = \sum_{v \in V} x_v$$

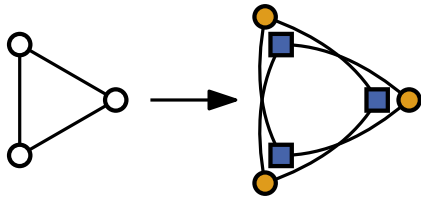
VC \rightarrow LP-Lösung

- für VC S in H : setze $x_v = \frac{1}{2}|\{v_g, v_b\} \cap S|$ für alle $v \in V$
- klar: $\frac{1}{2}|S| = \sum_{v \in V} x_v$
- außerdem: $\{u, v\} \in E$ impliziert $|\{u_g, u_b, v_g, v_b\} \cap S| \geq 2 \Rightarrow x_u + x_v \geq 1$

Verbesserte Laufzeit

Konstruktion eines Hilfsgraphen

- spalte jeden Knoten v auf in v_g (gelb) und v_b (blau)
- übernehme Kanten aber nur zwischen gelb und blau
- resultierender bipartiter Graph: H mit Knotenmenge $V_g \cup V_b$



$$\begin{aligned} \text{minimiere: } & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{sodass: } & 0 \leq x_v \leq 1 \text{ für } v \in V \\ & x_u + x_v \geq 1 \text{ für } uv \in E \end{aligned}$$

Behauptung

- VC S in H liefert Lösung fürs LP mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ und umgekehrt, sodass

$$\frac{1}{2}|S| = \sum_{v \in V} x_v$$

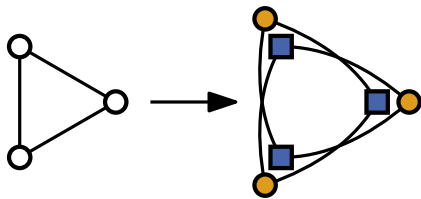
LP-Lösung \rightarrow VC

- für LP-Lösung $(x_v)_{v \in V}$ definiere S : $v_g \in S \Leftrightarrow x_v \geq \frac{1}{2}$ und $v_b \in S \Leftrightarrow x_v = 1$
- klar: $\frac{1}{2}|S| = \sum_{v \in V} x_v$
- außerdem: $x_u + x_v \geq 1$ sorgt dafür, dass jede Kante abgedeckt wird

Verbesserte Laufzeit

Konstruktion eines Hilfsgraphen

- spalte jeden Knoten v auf in v_g (gelb) und v_b (blau)
- übernehme Kanten aber nur zwischen gelb und blau
- resultierender bipartiter Graph: H mit Knotenmenge $V_g \cup V_b$



$$\begin{aligned} \text{minimiere: } & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{sodass: } & 0 \leq x_v \leq 1 \text{ für } v \in V \\ & x_u + x_v \geq 1 \text{ für } uv \in E \end{aligned}$$

Behauptung

- VC S in H liefert Lösung fürs LP mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ und umgekehrt, sodass

$$\frac{1}{2}|S| = \sum_{v \in V} x_v$$

Lemma

Das LP kann gelöst werden, indem man ein VC in einem bipartiten Graphen ausrechnet. Dies geht in $O(m\sqrt{n})$.

Laufzeit: siehe Übung

Zusammenfassung

Unimodularität

- ILPs sind effizient lösbar für total unimodulare Matrizen
- Nachweis von Unimodularität mit Determinanten-Entwicklungssatz

Kernbildung mittels LP

- ILP für VERTEX COVER ist halbwegs gutartig
- nutze Lösung der LP-Relaxierung zur Kernbildung
- löse LP-Relaxierung mittels VERTEX COVER in bipartiten Graphen

Theorem

Für VERTEX COVER kann ein Kern mit maximal $2k$ Knoten in $O(m\sqrt{n})$ Zeit berechnet werden.