

Das Cops-and-Robber Spiel

Wir betrachten ein Spiel für zwei Spieler auf einem Graphen. Ein Spieler spielt den Räuber und der andere Spieler spielt k Polizisten. Ziel der Polizisten ist den Räuber zu fangen, indem ein Polizist auf dem Knoten steht, auf dem sich der Räuber aufhält.

Problemstellung

Für einen gegebenen Graphen, wie groß muss k sein, sodass die Polizisten eine Gewinnstrategie haben?

Die Regeln

Jeder Polizist besetzt zu jedem Zeitpunkt entweder einen Knoten oder er sitzt in einem Helikopter (ist aus Sicht des Graphen also gerade nicht vorhanden). Ein Polizist im Helikopter kann natürlich auf einem beliebigen Knoten des Graphen landen (die Bewegung der Polizisten ist also nicht an die Graphstruktur gebunden). Der Räuber steht zu jedem Zeitpunkt auf einem Knoten und kann sich nur entlang Kanten bewegen; das aber beliebig schnell. Außerdem sieht der Räuber, wenn ein Polizist auf einem Knoten landen möchte und kann dann weglaufen. Er kann aber durch keinen Knoten laufen, auf dem ein Polizist steht.

Im Folgenden wird das noch etwas formalisiert.

Spielaufbau

Zu Beginn des Spiels platziert der Polizei-Spieler die k Polizisten auf Knoten des Graphen. Danach wählt der Räuber einen Knoten als Startposition.

Spielablauf

Es wiederholen sich die folgenden drei Schritte, bis der Räuber gefangen wurde:

1. Der Polizei-Spieler wählt einen Polizisten aus, entfernt ihn von seinem aktuellen Knoten und kündigt eine neue Position für diesen Polizisten an. (Der Polizist steigt in den Hubschrauber und fliegt ein neues Ziel an, ist aber noch nicht gelandet.)
2. Der Räuber wähle eine neue Position. Diese muss von der aktuellen Position über einen Pfad erreichbar sein, der keine Polizisten enthält. Der Räuber darf auch stehen bleiben.
3. Der in Schritt 1 entfernte Polizist wird auf den in Schritt 1 angekündigten Knoten gesetzt.

Zusammenhang zur Baumweite

Ziel ist es die folgende Aussage zu zeigen: Die k Polizisten haben eine Gewinnstrategie genau dann, wenn der Graph eine Baumzerlegung der Weite $k - 1$ hat (also maximal k Knoten pro Bag).

Anders ausgedrückt: Man braucht $tw(k)$ Polizisten um den Räuber zu fangen.

Baumzerlegung $\Rightarrow$ wenige Cops

Betrachte eine schöne Baumzerlegung der Weite $k - 1$. Sei x zunächst die Wurzel mit Bag X . Wir starten, indem die Polizisten auf den Knoten in X platziert werden. Außerdem merken wir uns x als den aktuellen Knoten der Baumzerlegung.

In jedem Schritt laufen wir jetzt zu einem der Kinder des aktuellen Knotens x , platzieren die Polizisten entsprechend und argumentieren, dass der Räuber immer auf einem Knoten sitzt, der ausschließlich in Bags von Nachfolgern von x vorkommt (Invariante). Dadurch wird der in einem immer kleiner werdenden Teils der Baumzerlegung eingesperrt. Spätestens in einem Blatt ist der Räuber dann gefangen.

Wir erhalten die folgenden drei Fälle für die verschiedenen Knotentypen:

- **join:** Seien y und z die beiden Kinder von x mit Bags $Y = Z = X$. Sei $v \notin X$ der Knoten auf dem der Räuber sitzt. Da der von v induzierte Teilbaum in der Baumzerlegung zusammenhängend ist, kommt v entweder nur in Bags unter y oder unter z vor. O.B.d.A nehmen wir an, dass v unter y vorkommt. Dann setzten wir $x := y$ als neuen aktuellen Knoten mit Bag $X := Y$ und iterieren. Die Invariante ist damit erhalten.
- **introduce:** Sei y das Kind von x mit Bag $Y = X \setminus \{u\}$. Dann können wir einfach y als neuen aktuellen Knoten wählen, denn es sind schon alle Knoten in Y durch Polizisten besetzt und der Knoten v auf dem der Räuber sitzt kann weiterhin nur in Nachfolgern von y vorkommen.
- **forget:** Sei y das Kind von x mit Bag $Y = X \cup \{u\}$. Dann enthält X höchstens $k - 1$ Knoten (da sonst Y zu groß wäre). Damit gibt es mindestens einen Polizisten, der gerade auf einem Knoten nicht in X sitzt. Für diesen kündigen wir an, dass er sich zu dem neuen Knoten u bewegt. Der Räuber muss dann von u weg (falls er da ist), er muss aber weiterhin in Bags von Nachfolgern von x vorkommen, da der Separator X zu jedem Zeitpunkt besetzt bleibt. Damit muss die neue Position des Räubers auch ausschließlich in Nachfolgern von y vorkommen und wir können y als neuen aktuellen Knoten wählen.

Wenige Cops $\Rightarrow$ Baumzerlegung

Diese Richtung ist schwieriger und wird nur skizziert.

Angenommen es gibt eine Gewinnstrategie für k Polizisten. Man kann zeigen (nicht trivial), dass man annehmen kann, dass die Gewinnstrategie in folgendem Sinne monoton ist. Für jeden Spielverlauf, betrachte zu jedem Zeitpunkt die Knotenmenge, die der Räuber erreichen kann. Diese Folge von Knotenmengen ist dann monoton schrumpfend (Knoten, die dem Räuber einmal nicht zur Verfügung stehen werden nie wieder zur Verfügung stehen).

Mit dieser Eigenschaft kann man jetzt eine Baumzerlegung aus der Strategie der Polizisten bauen. Die Startpositionen bilden die Wurzelbag. Die Kinder werden nun rekursiv erzeugt. Wenn der Letzte Zug der Polizisten den für den Räuber erreichbaren Bereich zerteilt hat, so gibt es mehrere rekursive Aufrufe mit mehreren Kindern. Sonst gibt es nur ein Kind. Die Verschiedenen rekursiven Aufrufe werden dann quasi die Polizisten-Strategie für verschiedene Entscheidungen des Räubers aus. Die von den Polizisten besetzten Positionen bilden immer die Bags der zugehörigen Knoten.

Um zu zeigen, dass da eine Baumzerlegung rauskommt, kann man zunächst beobachten, dass jeder Knoten mal von einem Polizisten besucht werden muss, da der Räuber sich sonst dort verstecken kann. Außerdem wird jede Kante in einem Bag mal gesehen, da sich der Räuber sonst auf dem Paar von Knoten verstecken kann. Dass die Bags jedes Knotens einen zusammenhängenden Teilbaum induzieren folgt aus der Monotonie (es macht nie Sinn, dass ein Knoten während einer Ausführung mehrfach besetzt und wieder freigegeben wird).