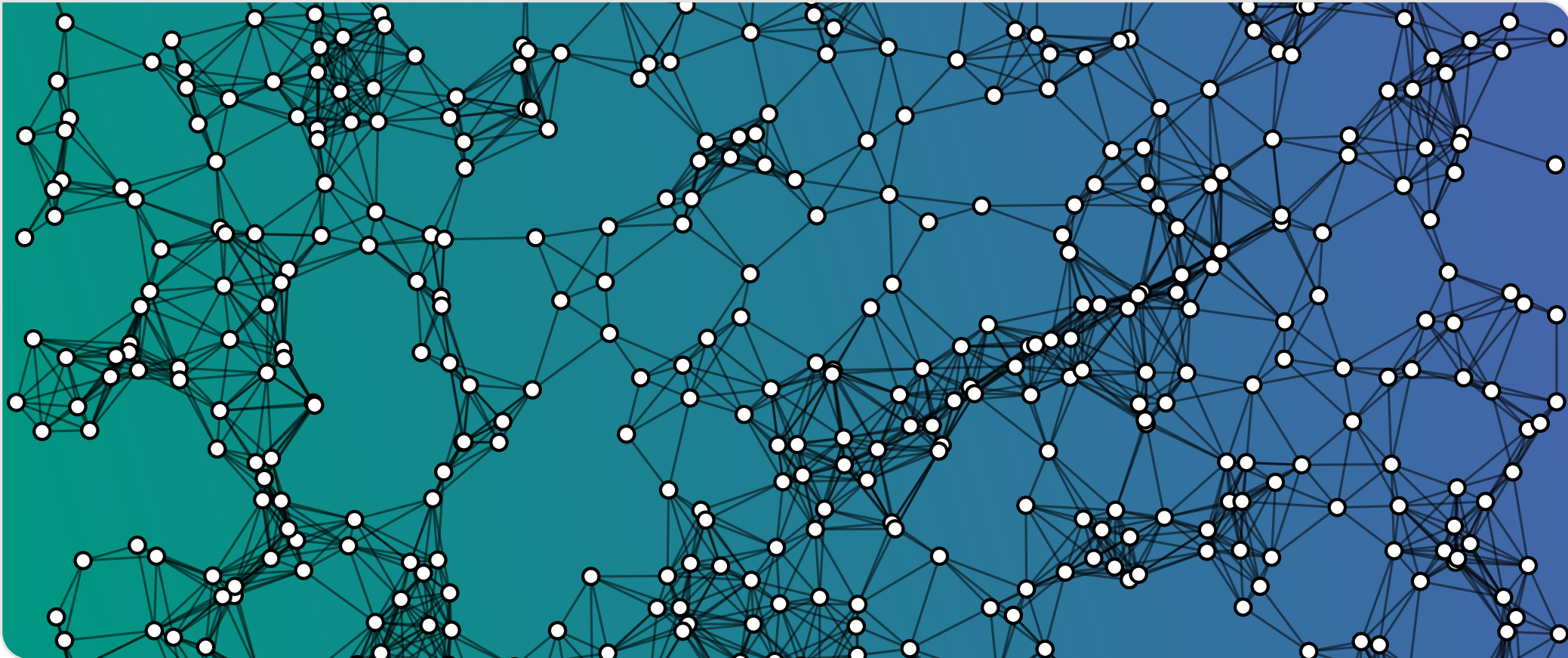


Parametrisierte Algorithmen

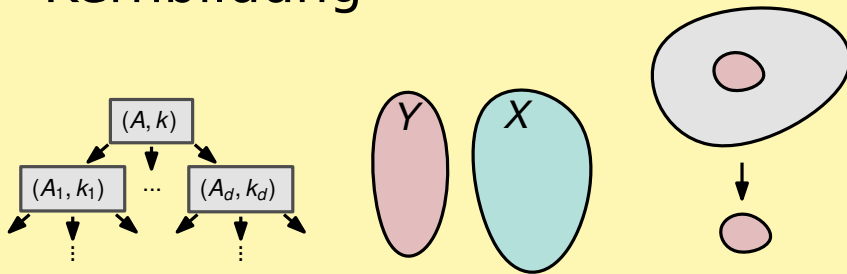
Kernbildung: Ähnliche Bäume



Inhalt

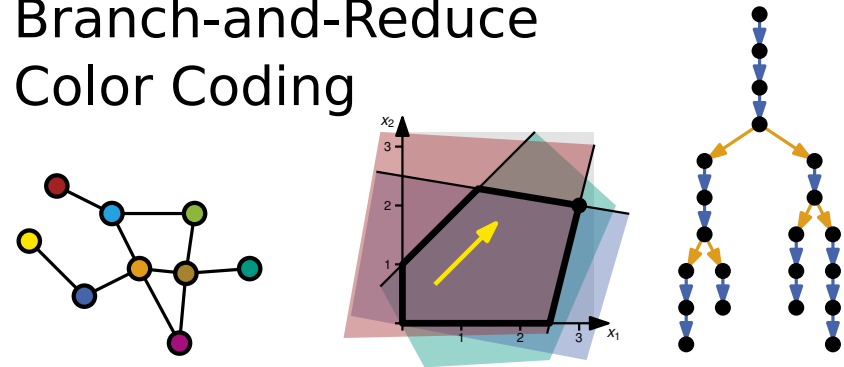
Basic Toolbox

- beschränkte Suchbäume
- iterative Kompression
- Kernbildung



Erweiterte Toolbox

- lineare Programme
- Branch-and-Reduce
- Color Coding



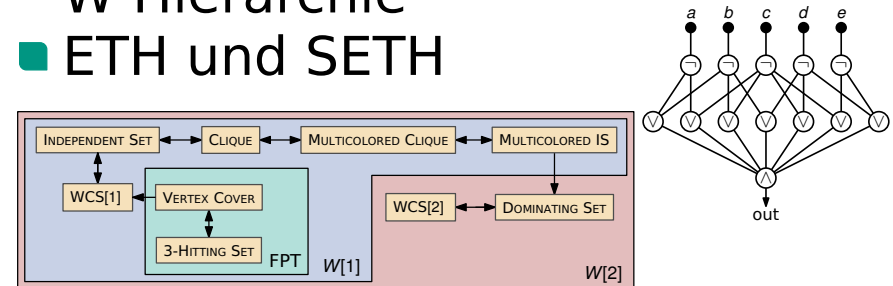
Baumweite

- dynamische Programme
- chordale & planare Graphen
- Courcelles Theorem

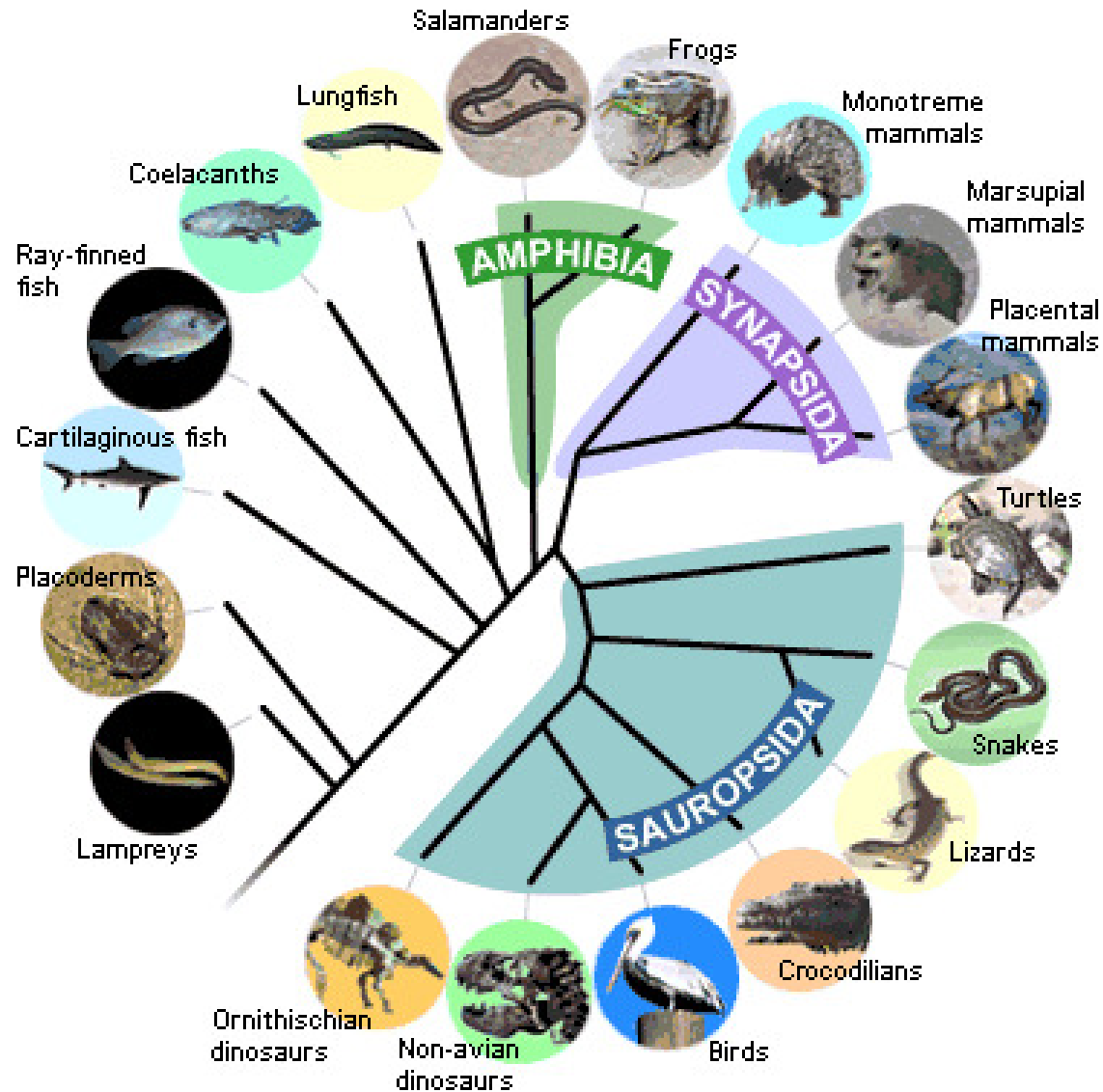


Untere Schranken

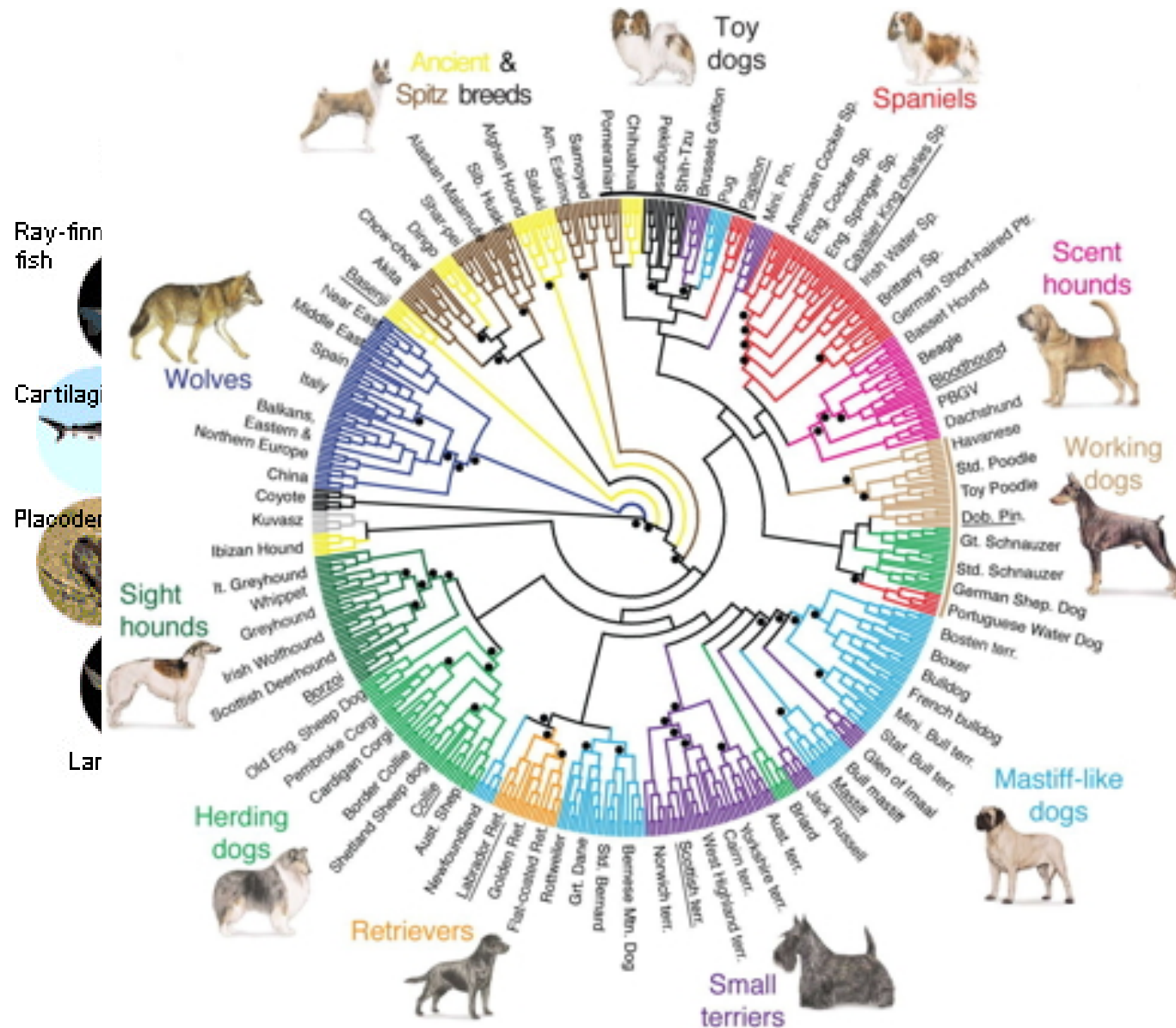
- parametrisierte Reduktionen
- boolesche Schaltkreise und die W-Hierarchie
- ETH und SETH



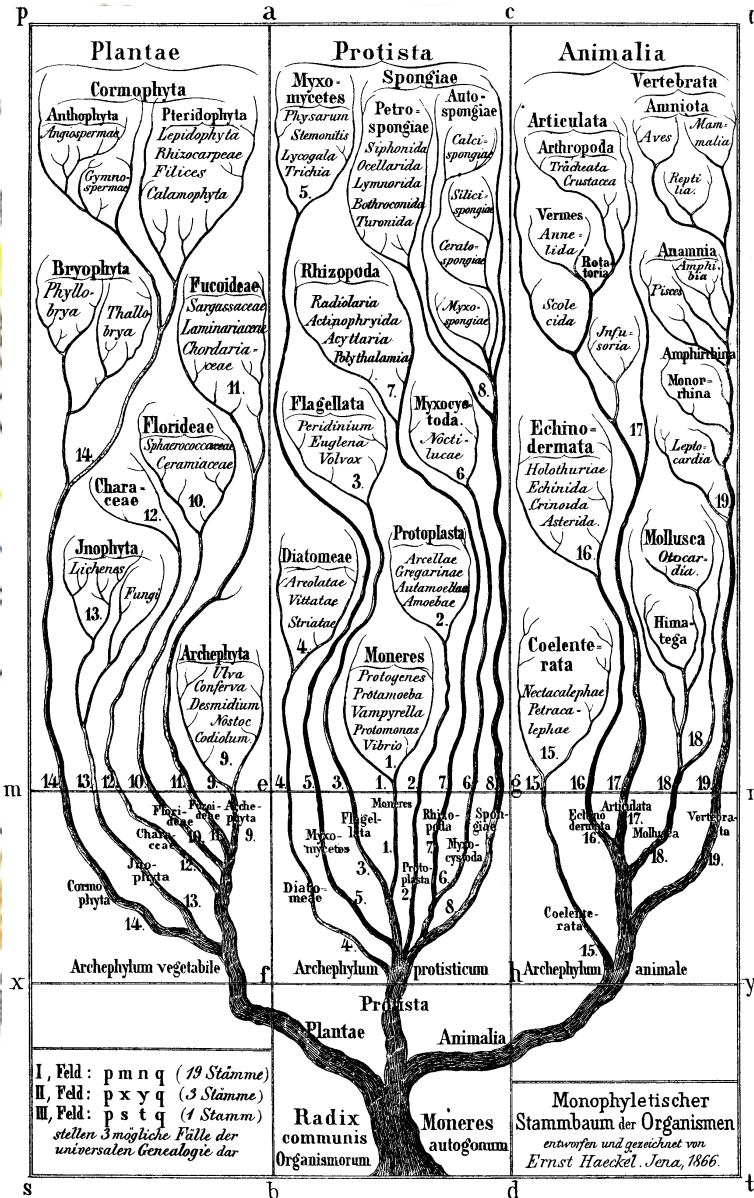
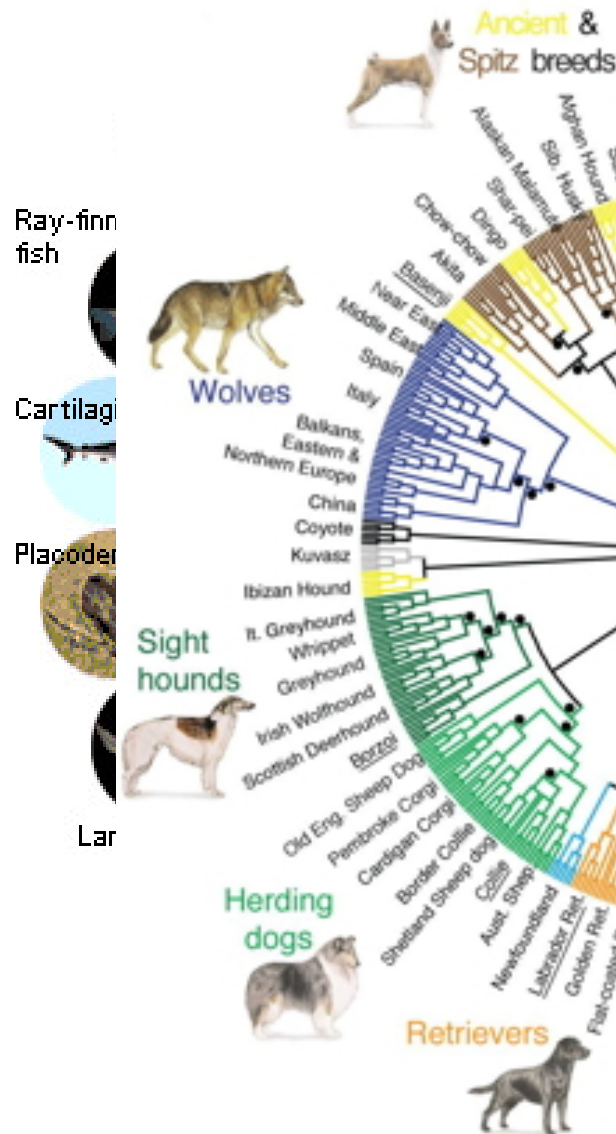
Phylogenetische Bäume



Phylogenetische Bäume

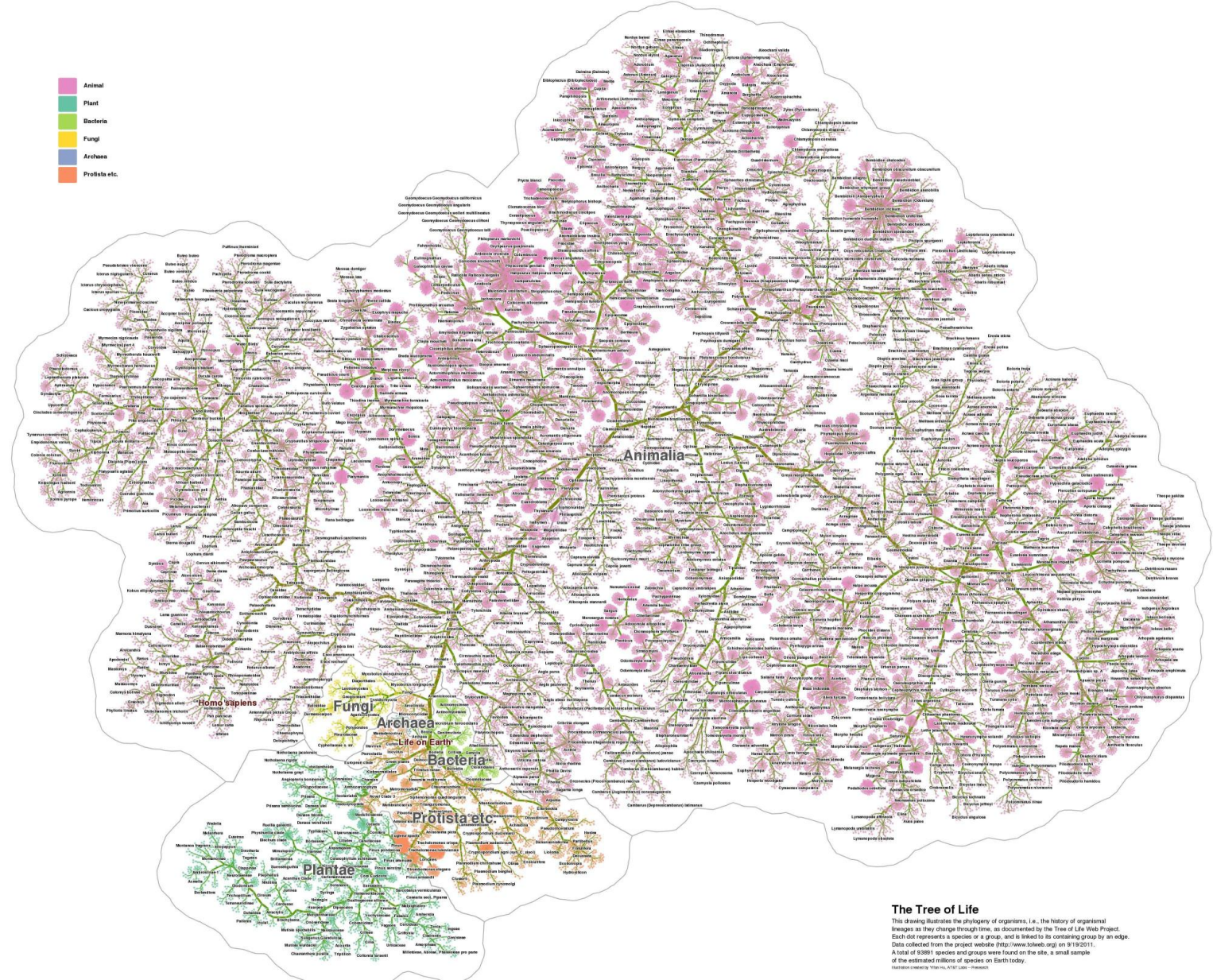


Phylogenetische Bäume



Phylogenetische Bäume

- Animal
- Plant
- Bacteria
- Fungi
- Archaea
- Protista etc.



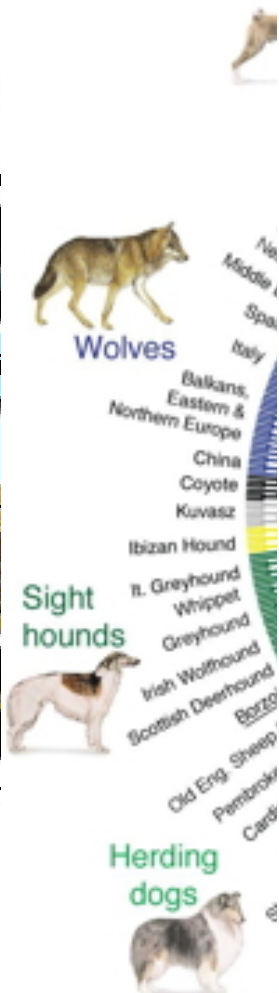
The Tree of Life
 This drawing illustrates the phylogeny of organisms, i.e., the history of organismal lineages as they change through time, as documented by the Tree of Life Web Project. Each dot represents a species or a group, and is linked to its containing group by an edge. Data collected from the project website (<http://www.tolweb.org/>) on 11/19/2011. A total of 93091 species and groups were found on the site, a small sample of the estimated millions of species on Earth today.
Illustration courtesy of ITIS/US, AT&T Labs - Research

Ray-finn fish

Cartilagi

Placoder

Lar



Wolves

Sight hounds

Herding dogs

Irish Wolfhound

Scottish Deerhound

Borzoi

Old Eng. Sheep

Pembroke

Cardi

Balkans, Eastern & Northern Europe

China

Coyote

Kuvasz

Ibizan Hound

Whippet

Greyhound

Phylogenetische Bäume



Phylogenetische Bäume

Definition

Ein **phylogenetischer Baum** ist ein ungewurzelter und vollständiger Binärbaum, sodass jedes Blatt ein eindeutiges Label (\equiv Spezies) hat.

Phylogenetische Bäume

Definition

Ein **phylogenetischer Baum** ist ein ungewurzelter und vollständiger Binärbaum, sodass jedes Blatt ein eindeutiges Label (\equiv Spezies) hat.

- werden oft automatisiert erstellt
- beispielsweise basierend auf DNA-Sequenzierung

Phylogenetische Bäume

Definition

Ein **phylogenetischer Baum** ist ein ungewurzelter und vollständiger Binärbaum, sodass jedes Blatt ein eindeutiges Label (\equiv Spezies) hat.

- werden oft automatisiert erstellt
- beispielsweise basierend auf DNA-Sequenzierung

Problem

- unterschiedliche Algorithmen liefern unterschiedliche Bäume

Phylogenetische Bäume

Definition

Ein **phylogenetischer Baum** ist ein ungewurzelter und vollständiger Binärbaum, sodass jedes Blatt ein eindeutiges Label (\equiv Spezies) hat.

- werden oft automatisiert erstellt
- beispielsweise basierend auf DNA-Sequenzierung

Problem

- unterschiedliche Algorithmen liefern unterschiedliche Bäume
- untersch. Daten (z.B. durch Messfehler) liefern untersch. Bäume

Phylogenetische Bäume

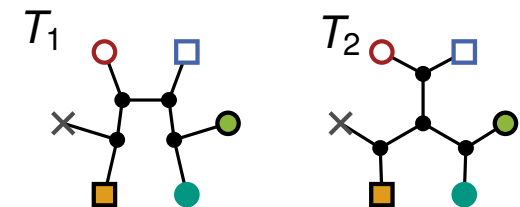
Definition

Ein **phylogenetischer Baum** ist ein ungewurzelter und vollständiger Binärbaum, sodass jedes Blatt ein eindeutiges Label (\equiv Spezies) hat.

- werden oft automatisiert erstellt
- beispielsweise basierend auf DNA-Sequenzierung

Problem

- unterschiedliche Algorithmen liefern unterschiedliche Bäume
- untersch. Daten (z.B. durch Messfehler) liefern untersch. Bäume
- Wie kann man unterschiedliche Bäume T_1 und T_2 auf der gleichen Blattmenge L miteinander vergleichen?



Phylogenetische Bäume

Definition

Ein **phylogenetischer Baum** ist ein ungewurzelter und vollständiger Binärbaum, sodass jedes Blatt ein eindeutiges Label (\equiv Spezies) hat.

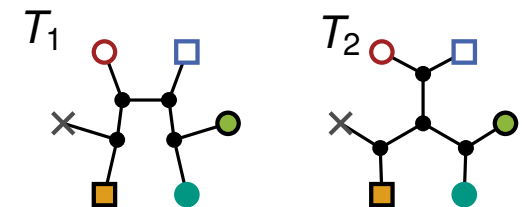
- werden oft automatisiert erstellt
- beispielsweise basierend auf DNA-Sequenzierung

Problem

- unterschiedliche Algorithmen liefern unterschiedliche Bäume
- untersch. Daten (z.B. durch Messfehler) liefern untersch. Bäume
- Wie kann man unterschiedliche Bäume T_1 und T_2 auf der gleichen Blattmenge L miteinander vergleichen?

Maximum Agreement Forest

- Wald F aus Binärbäumen mit Blattmenge L
- Bäume in F enthalten in T_1 und in T_2 (als Minor)



Phylogenetische Bäume

Definition

Ein **phylogenetischer Baum** ist ein ungewurzelter und vollständiger Binärbaum, sodass jedes Blatt ein eindeutiges Label (\equiv Spezies) hat.

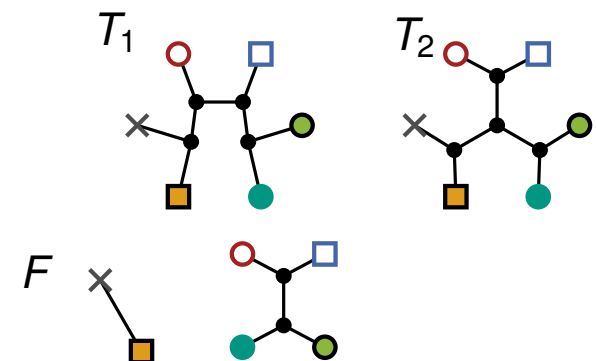
- werden oft automatisiert erstellt
- beispielsweise basierend auf DNA-Sequenzierung

Problem

- unterschiedliche Algorithmen liefern unterschiedliche Bäume
- untersch. Daten (z.B. durch Messfehler) liefern untersch. Bäume
- Wie kann man unterschiedliche Bäume T_1 und T_2 auf der gleichen Blattmenge L miteinander vergleichen?

Maximum Agreement Forest

- Wald F aus Binärbäumen mit Blattmenge L
- Bäume in F enthalten in T_1 und in T_2 (als Minor)



Phylogenetische Bäume

Definition

Ein **phylogenetischer Baum** ist ein ungewurzelter und vollständiger Binärbaum, sodass jedes Blatt ein eindeutiges Label (\equiv Spezies) hat.

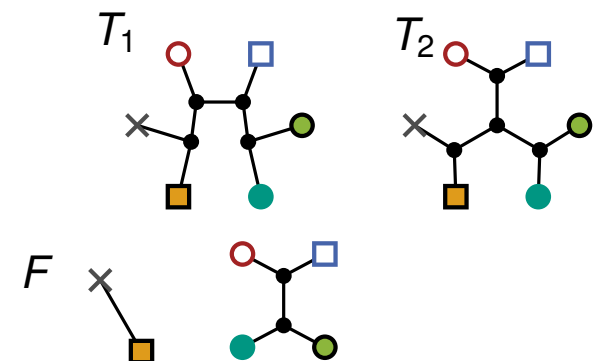
- werden oft automatisiert erstellt
- beispielsweise basierend auf DNA-Sequenzierung

Problem

- unterschiedliche Algorithmen liefern unterschiedliche Bäume
- untersch. Daten (z.B. durch Messfehler) liefern untersch. Bäume
- Wie kann man unterschiedliche Bäume T_1 und T_2 auf der gleichen Blattmenge L miteinander vergleichen?

Maximum Agreement Forest

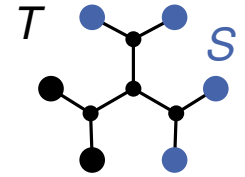
- Wald F aus Binärbäumen mit Blattmenge L
- Bäume in F enthalten in T_1 und in T_2 (als Minor)
- minimiere #Bäume in F



Notation

Blattinduzierte Teilbäume

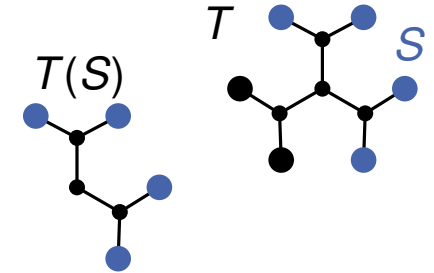
- sei T ein Baum mit Blättern $L(T)$ und sei $S \subseteq L(T)$



Notation

Blattinduzierte Teilbäume

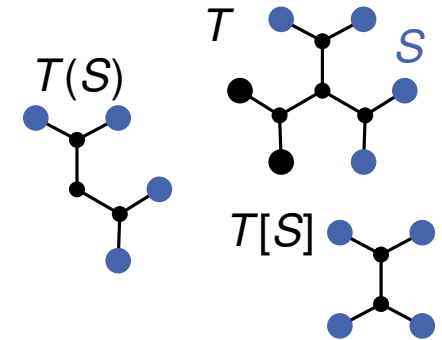
- sei T ein Baum mit Blättern $L(T)$ und sei $S \subseteq L(T)$
- $T(S) =$ minimaler Teilbaum von T , der S enthält



Notation

Blattinduzierte Teilbäume

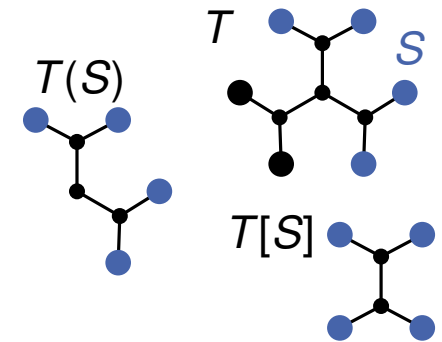
- sei T ein Baum mit Blättern $L(T)$ und sei $S \subseteq L(T)$
- $T(S)$ = minimaler Teilbaum von T , der S enthält
- kontrahiere alle Knoten mit Grad 2 in $T(S) \rightarrow T[S]$



Notation

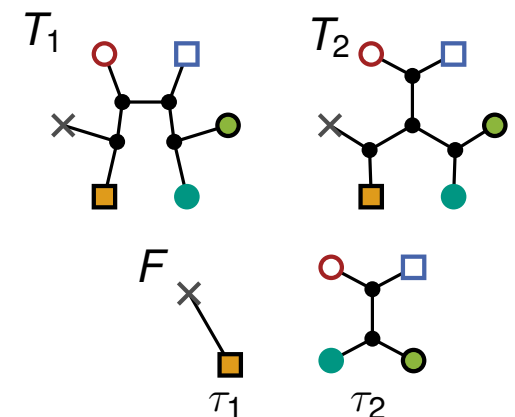
Blattinduzierte Teilbäume

- sei T ein Baum mit Blättern $L(T)$ und sei $S \subseteq L(T)$
- $T(S) =$ minimaler Teilbaum von T , der S enthält
- kontrahiere alle Knoten mit Grad 2 in $T(S) \rightarrow T[S]$



Agreement Forest

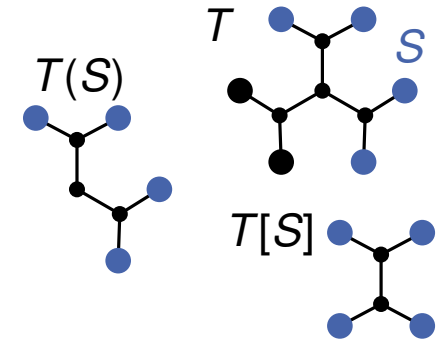
- sei F ein Wald bestehend aus den Bäumen τ_1, \dots, τ_k
- betrachte zwei Bäume T_1 und T_2 mit $L(T_1) = L(T_2) = L(F)$
- F ist *Agreement Forest* für T_1 und T_2 , wenn $T_1[L(\tau_i)] = T_2[L(\tau_i)] = \tau_i$ und die $T_1(L(\tau_i))$ (für $i \in \{1, \dots, k\}$), sowie die $T_2(L(\tau_i))$ sind disjunkt



Notation

Blattinduzierte Teilbäume

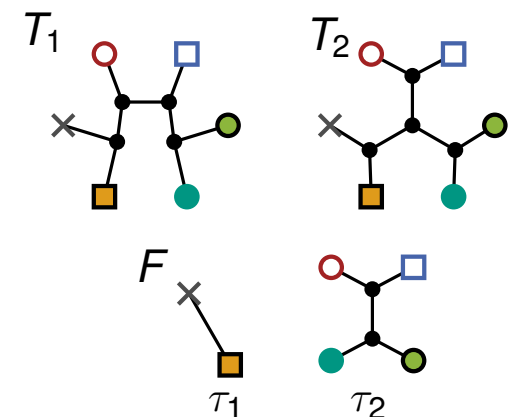
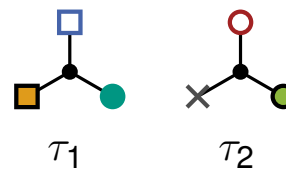
- sei T ein Baum mit Blättern $L(T)$ und sei $S \subseteq L(T)$
- $T(S) =$ minimaler Teilbaum von T , der S enthält
- kontrahiere alle Knoten mit Grad 2 in $T(S) \rightarrow T[S]$



Agreement Forest

- sei F ein Wald bestehend aus den Bäumen τ_1, \dots, τ_k
- betrachte zwei Bäume T_1 und T_2 mit $L(T_1) = L(T_2) = L(F)$
- F ist *Agreement Forest* für T_1 und T_2 , wenn $T_1[L(\tau_i)] = T_2[L(\tau_i)] = \tau_i$ und die $T_1(L(\tau_i))$ (für $i \in \{1, \dots, k\}$), sowie die $T_2(L(\tau_i))$ sind disjunkt

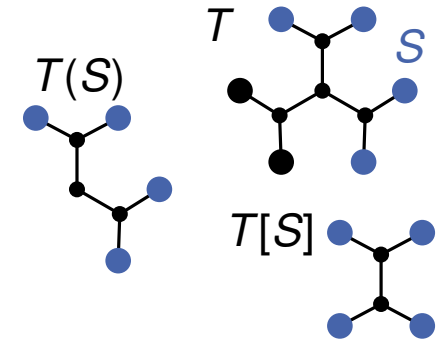
Disjunktheit verletzt:



Notation

Blattinduzierte Teilbäume

- sei T ein Baum mit Blättern $L(T)$ und sei $S \subseteq L(T)$
- $T(S) =$ minimaler Teilbaum von T , der S enthält
- kontrahiere alle Knoten mit Grad 2 in $T(S) \rightarrow T[S]$

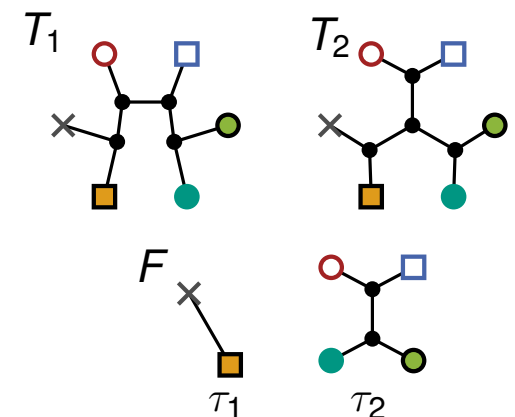


Agreement Forest

- sei F ein Wald bestehend aus den Bäumen τ_1, \dots, τ_k
- betrachte zwei Bäume T_1 und T_2 mit $L(T_1) = L(T_2) = L(F)$
- F ist *Agreement Forest* für T_1 und T_2 , wenn $T_1[L(\tau_i)] = T_2[L(\tau_i)] = \tau_i$ und die $T_1(L(\tau_i))$ (für $i \in \{1, \dots, k\}$), sowie die $T_2(L(\tau_i))$ sind disjunkt

Problem: MAXIMUM AGREEMENT FOREST

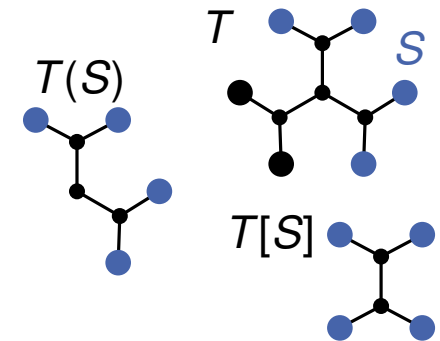
Gegeben sind T_1, T_2 und ein Parameter k . Gibt es einen Agreement Forest mit maximal k Bäumen?



Notation

Blattinduzierte Teilbäume

- sei T ein Baum mit Blättern $L(T)$ und sei $S \subseteq L(T)$
- $T(S) =$ minimaler Teilbaum von T , der S enthält
- kontrahiere alle Knoten mit Grad 2 in $T(S) \rightarrow T[S]$

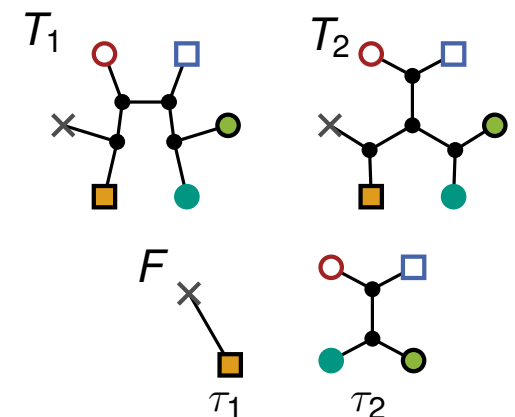


Agreement Forest

- sei F ein Wald bestehend aus den Bäumen τ_1, \dots, τ_k
- betrachte zwei Bäume T_1 und T_2 mit $L(T_1) = L(T_2) = L(F)$
- F ist *Agreement Forest* für T_1 und T_2 , wenn $T_1[L(\tau_i)] = T_2[L(\tau_i)] = \tau_i$ und die $T_1(L(\tau_i))$ (für $i \in \{1, \dots, k\}$), sowie die $T_2(L(\tau_i))$ sind disjunkt

Problem: MAXIMUM AGREEMENT FOREST

Gegeben sind T_1, T_2 und ein Parameter k . Gibt es einen Agreement Forest mit maximal k Bäumen?



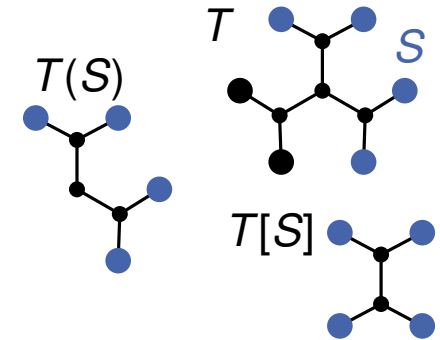
Ziel

- finde einen Kernbildungsalgorithmus

Notation

Blattinduzierte Teilbäume

- sei T ein Baum mit Blättern $L(T)$ und sei $S \subseteq L(T)$
- $T(S) =$ minimaler Teilbaum von T , der S enthält
- kontrahiere alle Knoten mit Grad 2 in $T(S) \rightarrow T[S]$

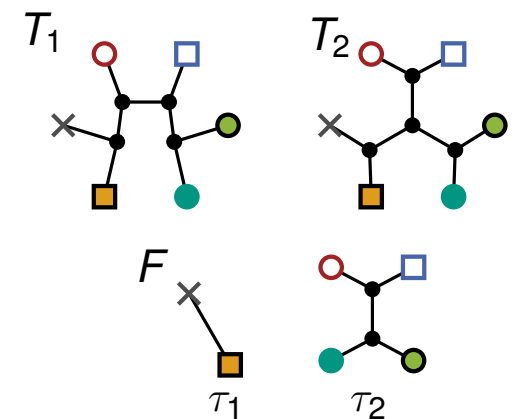


Agreement Forest

- sei F ein Wald bestehend aus den Bäumen τ_1, \dots, τ_k
- betrachte zwei Bäume T_1 und T_2 mit $L(T_1) = L(T_2) = L(F)$
- F ist *Agreement Forest* für T_1 und T_2 , wenn $T_1[L(\tau_i)] = T_2[L(\tau_i)] = \tau_i$ und die $T_1(L(\tau_i))$ (für $i \in \{1, \dots, k\}$), sowie die $T_2(L(\tau_i))$ sind disjunkt

Problem: MAXIMUM AGREEMENT FOREST

Gegeben sind T_1, T_2 und ein Parameter k . Gibt es einen Agreement Forest mit maximal k Bäumen?



Ziel

- finde einen Kernbildungsalgorithmus
- also polynomielle Reduktionsregeln
- Größe der resultierenden Bäume hängt nur von k ab

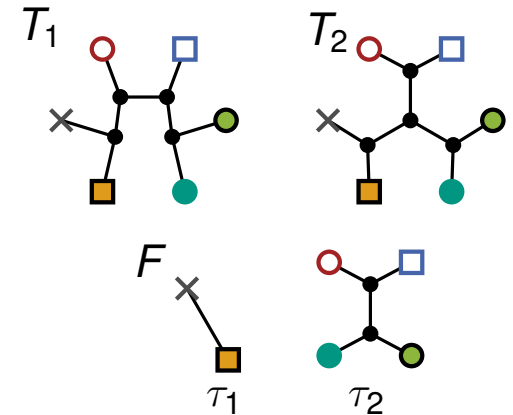
Grober Fahrplan

Problem: MAXIMUM AGREEMENT FOREST

Gegeben sind T_1 , T_2 und ein Parameter k . Gibt es einen Agreement Forest mit maximal k Bäumen?

Ziel

- finde einen Kernbildungsalgorithmus
- also polynomielle Reduktionsregeln
- Größe der resultierenden Bäume hängt nur von k ab



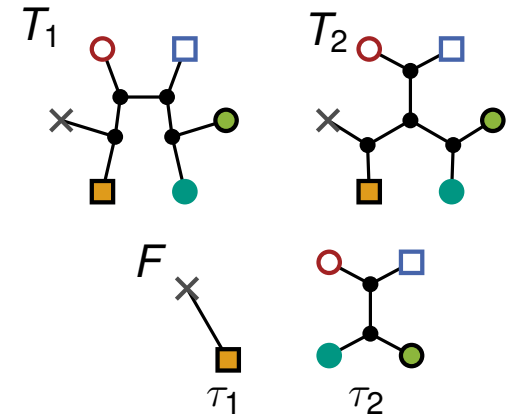
Grober Fahrplan

Problem: MAXIMUM AGREEMENT FOREST

Gegeben sind T_1 , T_2 und ein Parameter k . Gibt es einen Agreement Forest mit maximal k Bäumen?

Ziel

- finde einen Kernbildungsalgorithmus
- also polynomielle Reduktionsregeln
- Größe der resultierenden Bäume hängt nur von k ab



Vorschläge?

Grober Fahrplan

Problem: MAXIMUM AGREEMENT FOREST

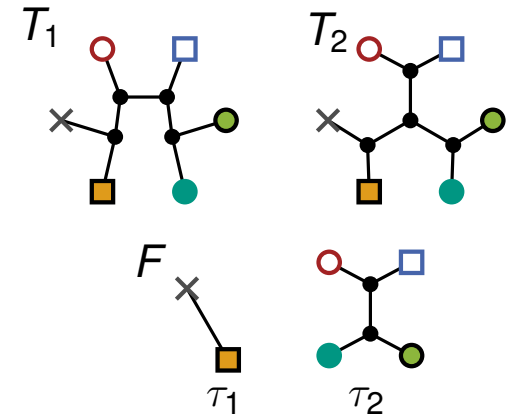
Gegeben sind T_1 , T_2 und ein Parameter k . Gibt es einen Agreement Forest mit maximal k Bäumen?

Ziel

- finde einen Kernbildungsalgorithmus
- also polynomielle Reduktionsregeln
- Größe der resultierenden Bäume hängt nur von k ab

Vorschläge?

Bevor wir losreduzieren: Was ist das Ziel?



Grober Fahrplan

Problem: MAXIMUM AGREEMENT FOREST

Gegeben sind T_1 , T_2 und ein Parameter k . Gibt es einen Agreement Forest mit maximal k Bäumen?

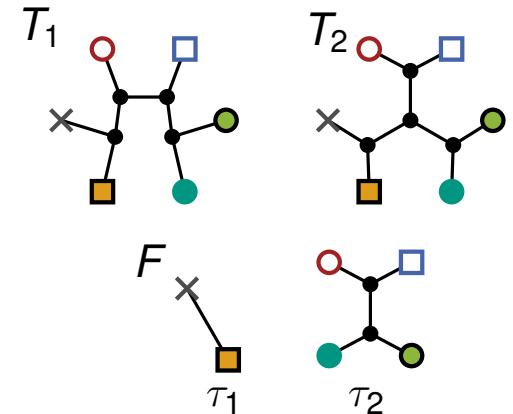
Ziel

- finde einen Kernbildungsalgorithmus
- also polynomielle Reduktionsregeln
- Größe der resultierenden Bäume hängt nur von k ab

Vorschläge?

Bevor wir losreduzieren: Was ist das Ziel?

- Größe der resultierenden Bäume hängt nur von k ab



Grober Fahrplan

Problem: MAXIMUM AGREEMENT FOREST

Gegeben sind T_1 , T_2 und ein Parameter k . Gibt es einen Agreement Forest mit maximal k Bäumen?

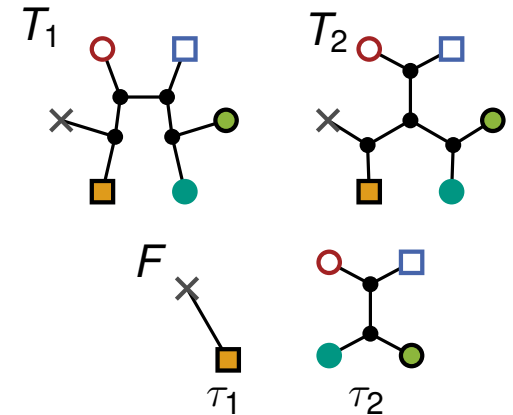
Ziel

- finde einen Kernbildungsalgorithmus
- also polynomielle Reduktionsregeln
- Größe der resultierenden Bäume hängt nur von k ab

Vorschläge?

Bevor wir losreduzieren: Was ist das Ziel?

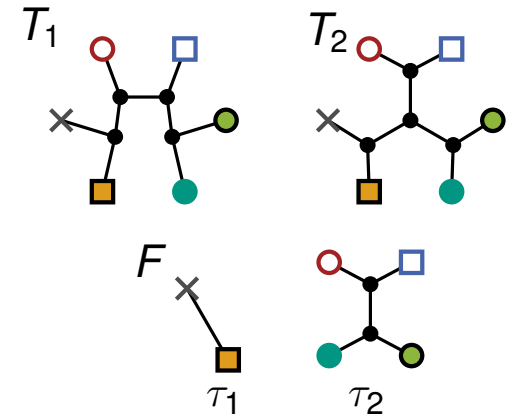
- Größe der resultierenden Bäume hängt nur von k ab
- etwas stärkere, aber konkretere Behauptung:



Grober Fahrplan

Problem: MAXIMUM AGREEMENT FOREST

Gegeben sind T_1 , T_2 und ein Parameter k . Gibt es einen Agreement Forest mit maximal k Bäumen?



Ziel

- finde einen Kernbildungsalgorithmus
- also polynomielle Reduktionsregeln
- Größe der resultierenden Bäume hängt nur von k ab

Vorschläge?

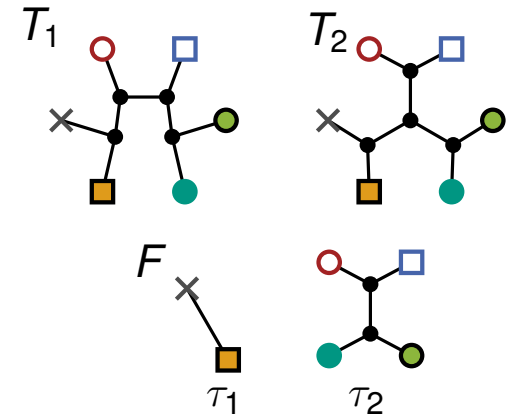
Bevor wir losreduzieren: Was ist das Ziel?

- Größe der resultierenden Bäume hängt nur von k ab
- etwas stärkere, aber konkretere Behauptung:
 - jeder Baum in einem Agreement Forest enthält nur wenige Blätter

Grober Fahrplan

Problem: MAXIMUM AGREEMENT FOREST

Gegeben sind T_1 , T_2 und ein Parameter k . Gibt es einen Agreement Forest mit maximal k Bäumen?



Ziel

- finde einen Kernbildungsalgorithmus
- also polynomielle Reduktionsregeln
- Größe der resultierenden Bäume hängt nur von k ab

Vorschläge?

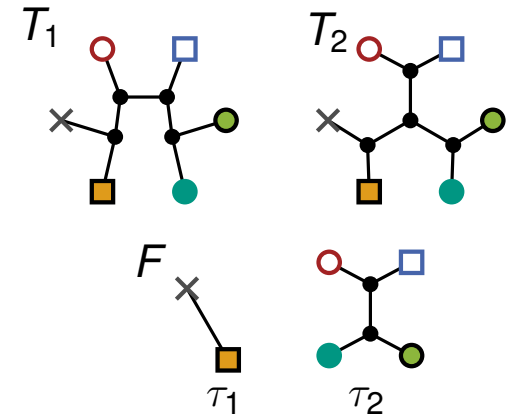
Bevor wir losreduzieren: Was ist das Ziel?

- Größe der resultierenden Bäume hängt nur von k ab
- etwas stärkere, aber konkretere Behauptung:
 - jeder Baum in einem Agreement Forest enthält nur wenige Blätter
 ⇒ insgesamt wenige Blätter ⇒ kleine Instanz

Grober Fahrplan

Problem: MAXIMUM AGREEMENT FOREST

Gegeben sind T_1 , T_2 und ein Parameter k . Gibt es einen Agreement Forest mit maximal k Bäumen?



Ziel

- finde einen Kernbildungsalgorithmus
- also polynomielle Reduktionsregeln
- Größe der resultierenden Bäume hängt nur von k ab

Vorschläge?

Bevor wir losreduzieren: Was ist das Ziel?

- Größe der resultierenden Bäume hängt nur von k ab
- etwas stärkere, aber konkretere Behauptung:
 - jeder Baum in einem Agreement Forest enthält nur wenige Blätter
 - ⇒ insgesamt wenige Blätter ⇒ kleine Instanz
- Welche Baumstrukturen widersprechen der Behauptung?
- Können wir diese mittels Reduktionsregeln loswerden?

Ungünstige Baumstruktur 1

Behauptung

Jeder Baum in einem Agreement Forest enthält nur wenige Blätter.

Gegenbeispiel

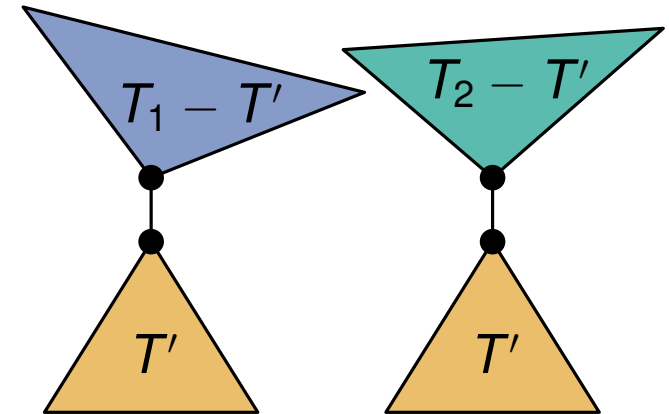
Ungünstige Baumstruktur 1

Behauptung

Jeder Baum in einem Agreement Forest enthält nur wenige Blätter.

Gegenbeispiel

- T_1 und T_2 können einen Teilbaum T' mit vielen Blättern gemeinsam haben
- im Agreement Forest kann man T' als einen der Bäume T_1, \dots, T_k wählen



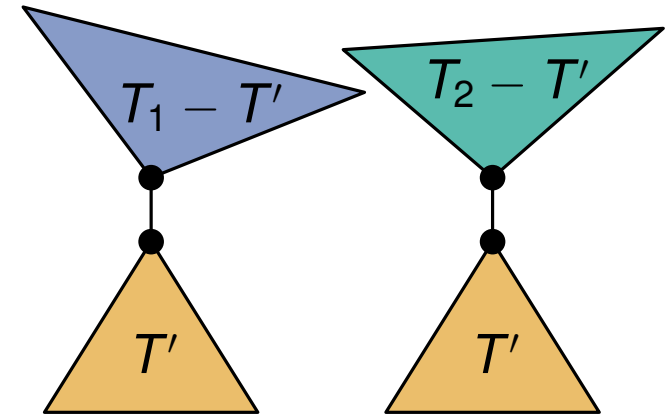
Ungünstige Baumstruktur 1

Behauptung

Jeder Baum in einem Agreement Forest enthält nur wenige Blätter.

Gegenbeispiel

- T_1 und T_2 können einen Teilbaum T' mit vielen Blättern gemeinsam haben
- im Agreement Forest kann man T' als einen der Bäume T_1, \dots, T_k wählen



Reduktionsregel 1

Ungünstige Baumstruktur 1

Behauptung

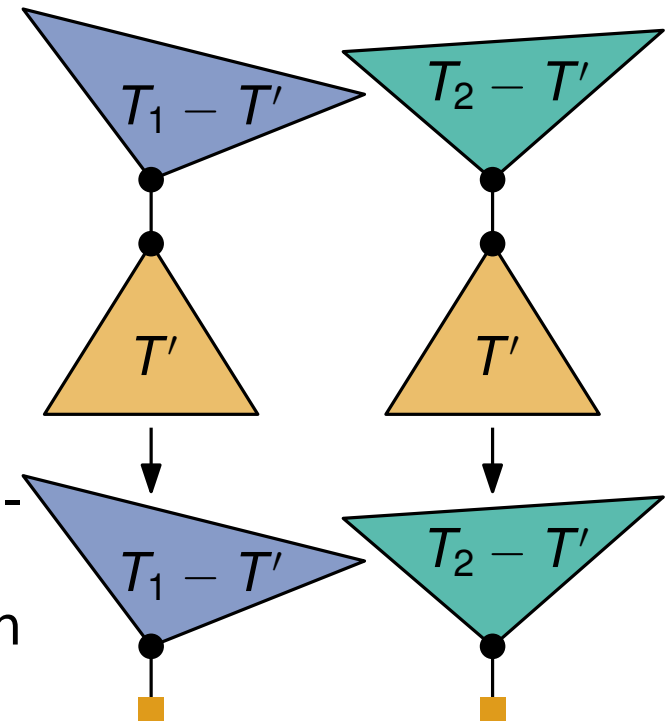
Jeder Baum in einem Agreement Forest enthält nur wenige Blätter.

Gegenbeispiel

- T_1 und T_2 können einen Teilbaum T' mit vielen Blättern gemeinsam haben
- im Agreement Forest kann man T' als einen der Bäume τ_1, \dots, τ_k wählen

Reduktionsregel 1

- finde Kanten in T_1 und T_2 , sodass diese den selben Baum T' abtrennen
- ersetze T' durch ein einzelnes Blatt mit neuem (gleichem) Label



Ungünstige Baumstruktur 1

Behauptung

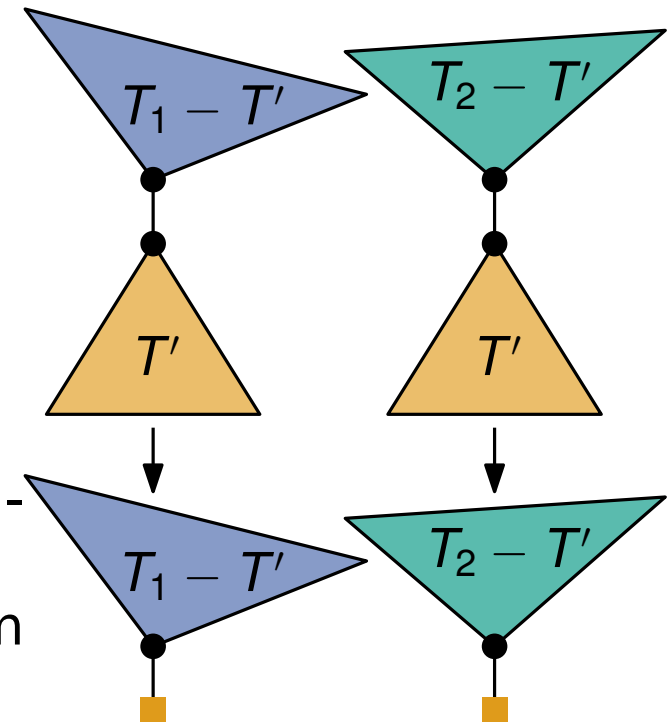
Jeder Baum in einem Agreement Forest enthält nur wenige Blätter.

Gegenbeispiel

- T_1 und T_2 können einen Teilbaum T' mit vielen Blättern gemeinsam haben
- im Agreement Forest kann man T' als einen der Bäume τ_1, \dots, τ_k wählen

Reduktionsregel 1

- finde Kanten in T_1 und T_2 , sodass diese den selben Baum T' abtrennen
- ersetze T' durch ein einzelnes Blatt mit neuem (gleichem) Label



Lemma

Reduktionsregel 1 ist sicher und in polynomieller Zeit ausführbar.

Beweis: nächste Folie

Reduktionsregel 1

Reduktionsregel 1

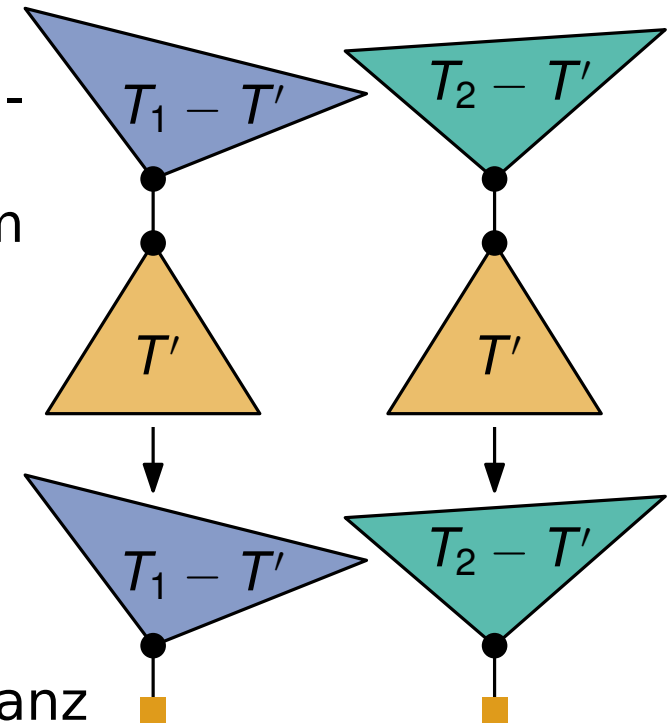
- finde Kanten in T_1 und T_2 , sodass diese den selben Baum T' abtrennen
- ersetze T' durch ein einzelnes Blatt mit neuem (gleichem) Label

Lemma

Reduktionsregel 1 ist sicher und in polynomieller Zeit ausführbar.

Beweis

- sei F' ein Agreement Forest der neuen Instanz und sei τ'_1 der Baum mit dem neuen Blatt in F'



Reduktionsregel 1

Reduktionsregel 1

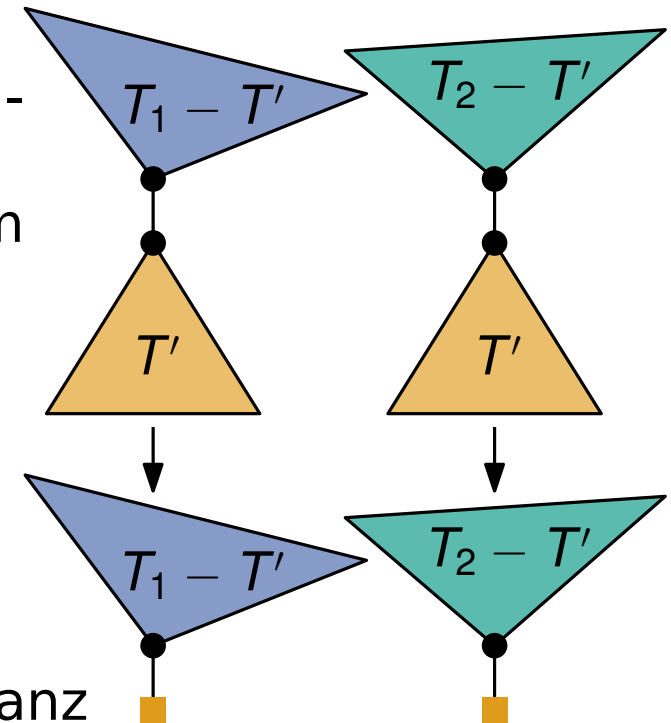
- finde Kanten in T_1 und T_2 , sodass diese den selben Baum T' abtrennen
- ersetze T' durch ein einzelnes Blatt mit neuem (gleichem) Label

Lemma

Reduktionsregel 1 ist sicher und in polynomialer Zeit ausführbar.

Beweis

- sei F' ein Agreement Forest der neuen Instanz und sei τ'_1 der Baum mit dem neuen Blatt in F'
- Ersetzung dieses Blattes in τ'_1 durch T' liefert Agreement Forest der gleichen Größe für T_1 und T_2



Reduktionsregel 1

Reduktionsregel 1

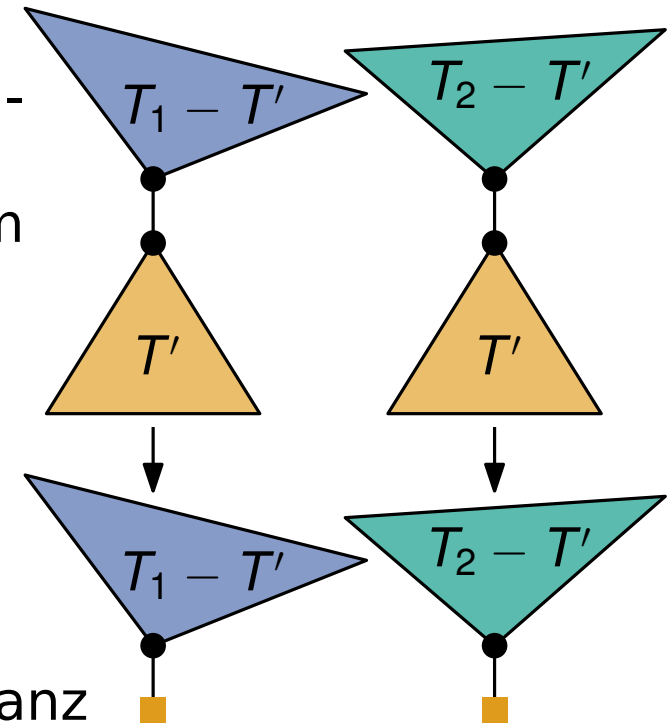
- finde Kanten in T_1 und T_2 , sodass diese den selben Baum T' abtrennen
- ersetze T' durch ein einzelnes Blatt mit neuem (gleichem) Label

Lemma

Reduktionsregel 1 ist sicher und in polynomieller Zeit ausführbar.

Beweis

- sei F' ein Agreement Forest der neuen Instanz und sei τ'_1 der Baum mit dem neuen Blatt in F'
- Ersetzung dieses Blattes in τ'_1 durch T' liefert Agreement Forest der gleichen Größe für T_1 und T_2
- andere Richtung: ähnlich



Reduktionsregel 1

Reduktionsregel 1

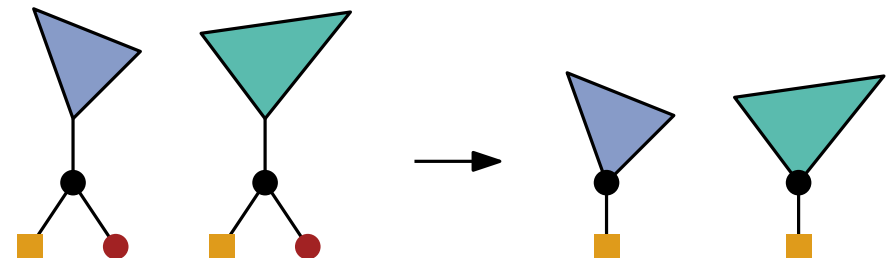
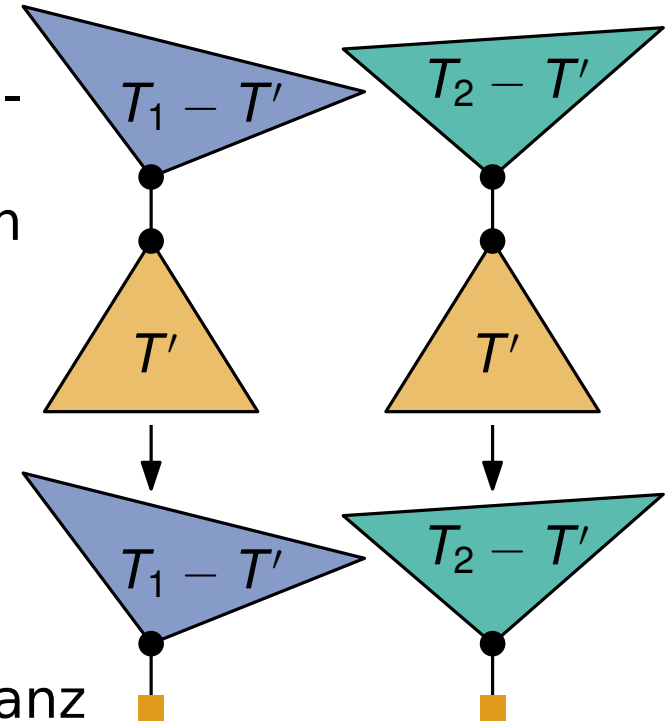
- finde Kanten in T_1 und T_2 , sodass diese den selben Baum T' abtrennen
- ersetze T' durch ein einzelnes Blatt mit neuem (gleichem) Label

Lemma

Reduktionsregel 1 ist sicher und in polynomieller Zeit ausführbar.

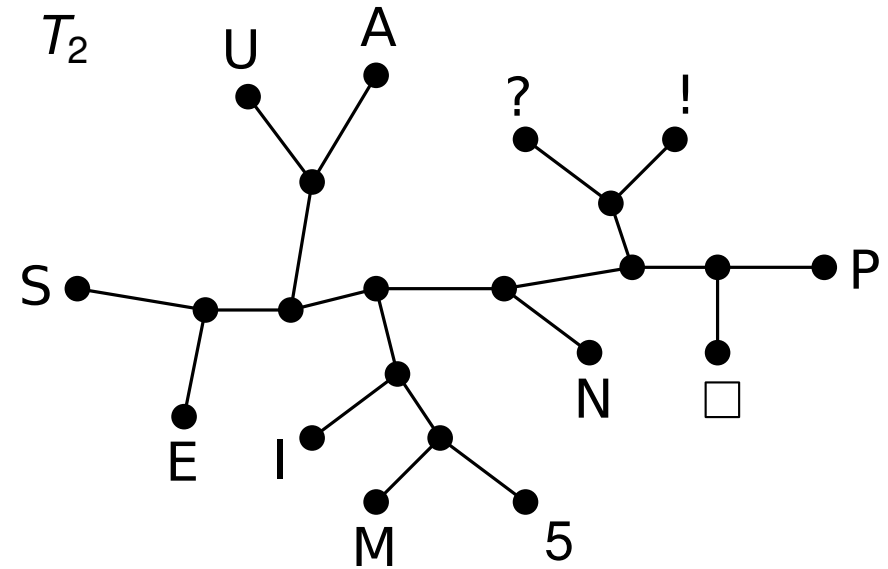
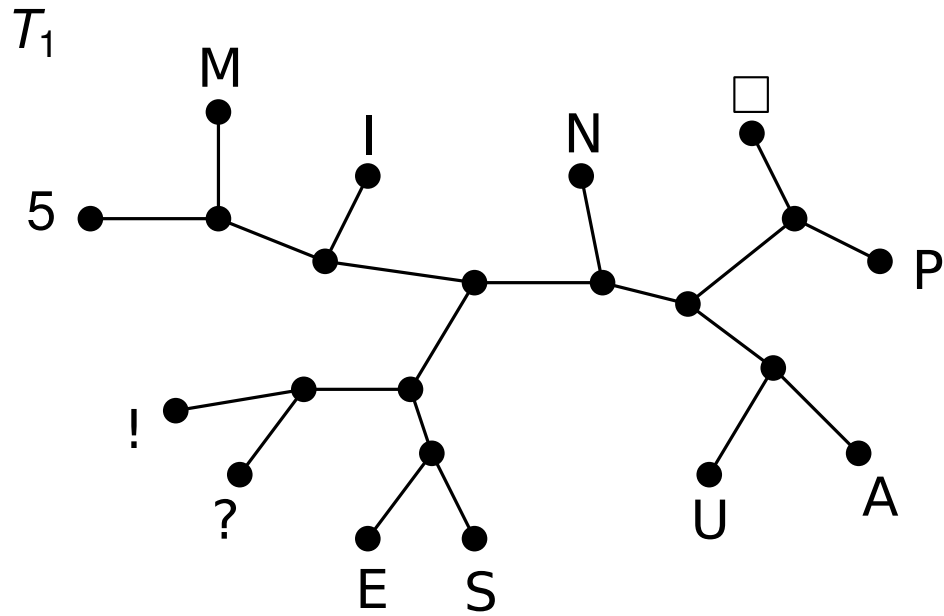
Beweis

- sei F' ein Agreement Forest der neuen Instanz und sei τ'_1 der Baum mit dem neuen Blatt in F'
- Ersetzung dieses Blattes in τ'_1 durch T' liefert Agreement Forest der gleichen Größe für T_1 und T_2
- andere Richtung: ähnlich
- Laufzeit: z.B. durch iterative Ersetzung von „Kirschen“



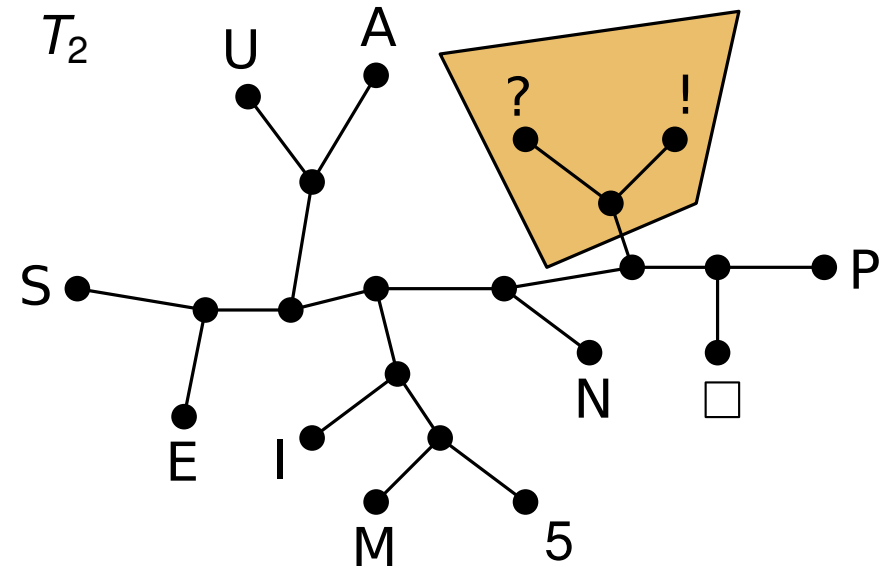
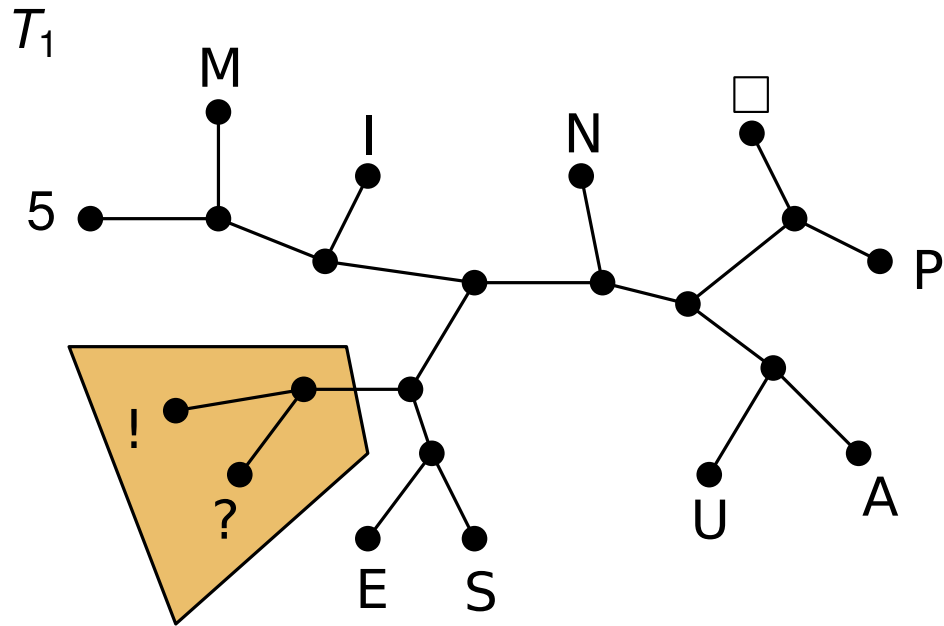
Beispiel

Löse diese **MAXIMUM AGREEMENT FOREST**-Instanz



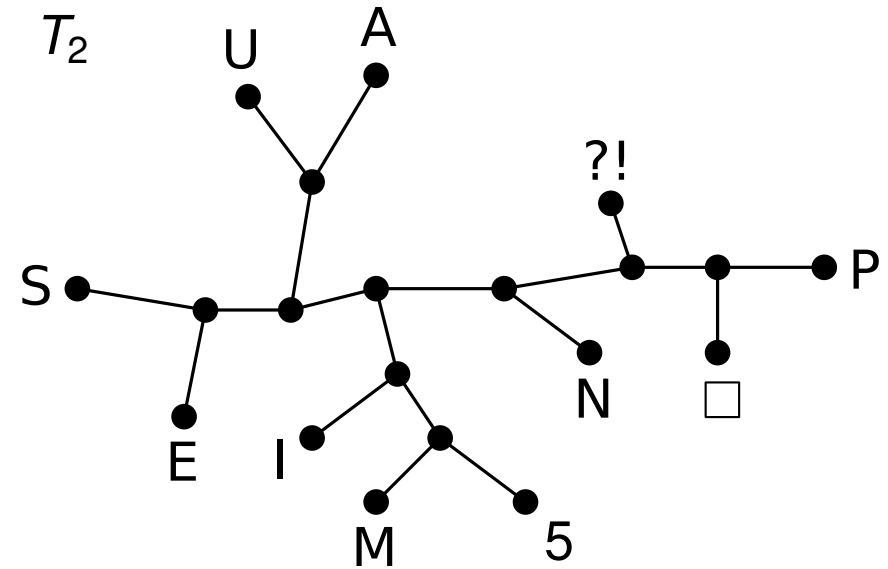
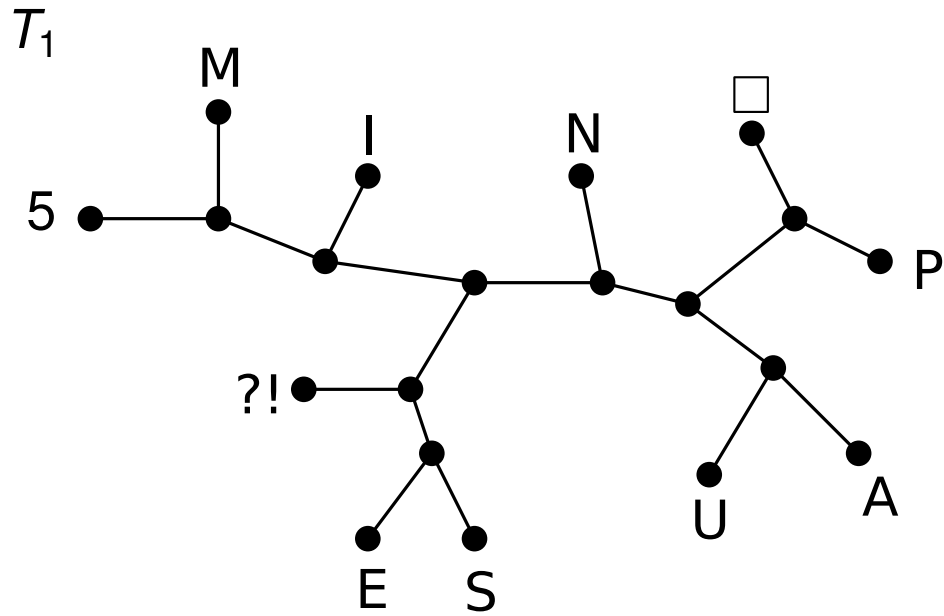
Beispiel

Löse diese **MAXIMUM AGREEMENT FOREST**-Instanz



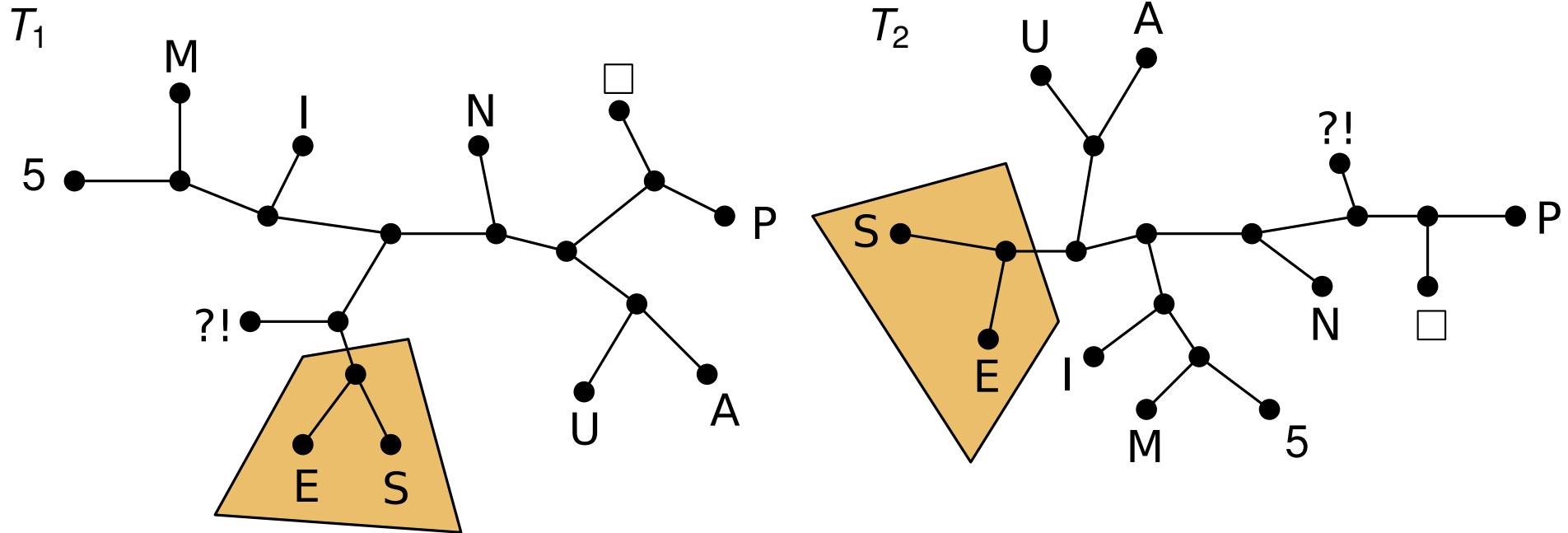
Beispiel

Löse diese **MAXIMUM AGREEMENT FOREST**-Instanz



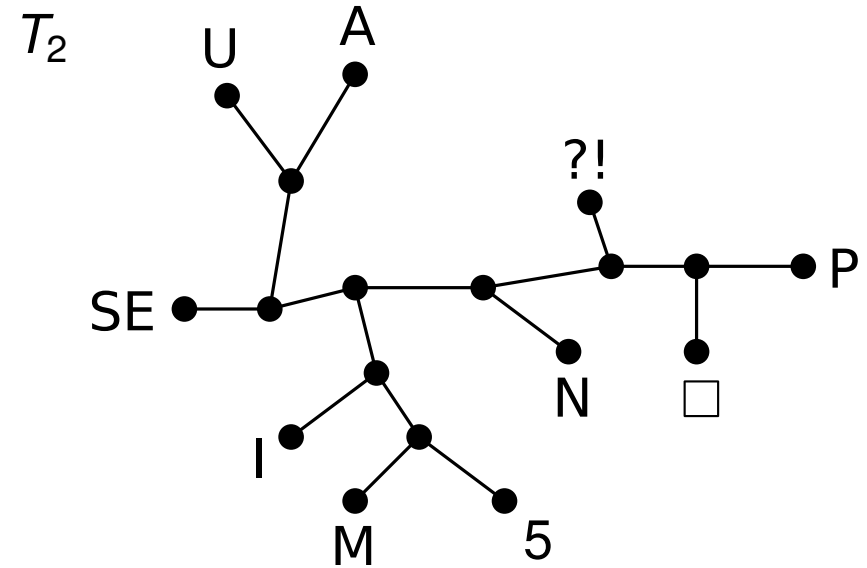
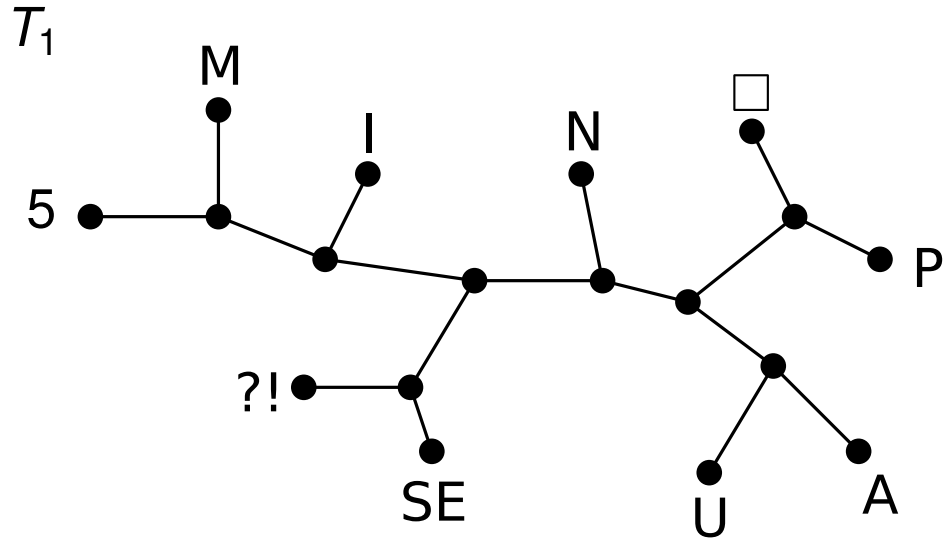
Beispiel

Löse diese **MAXIMUM AGREEMENT FOREST-Instanz**



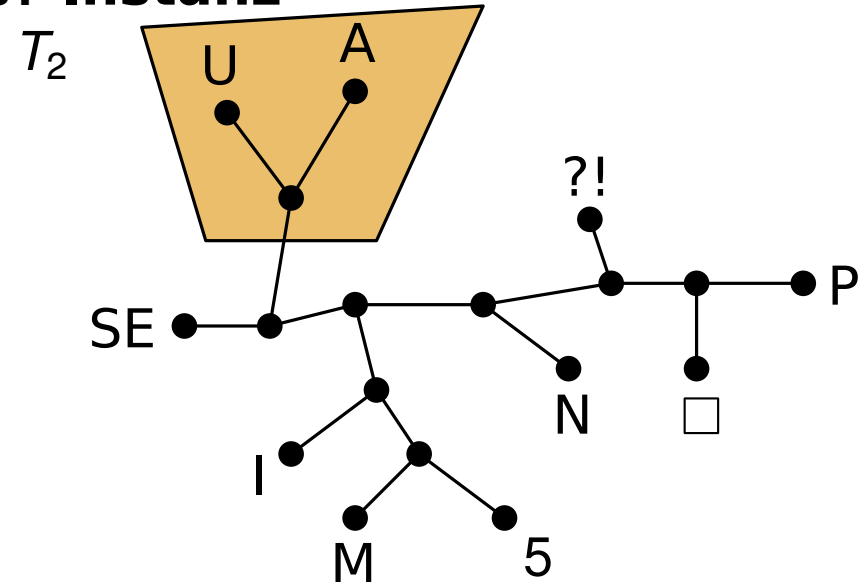
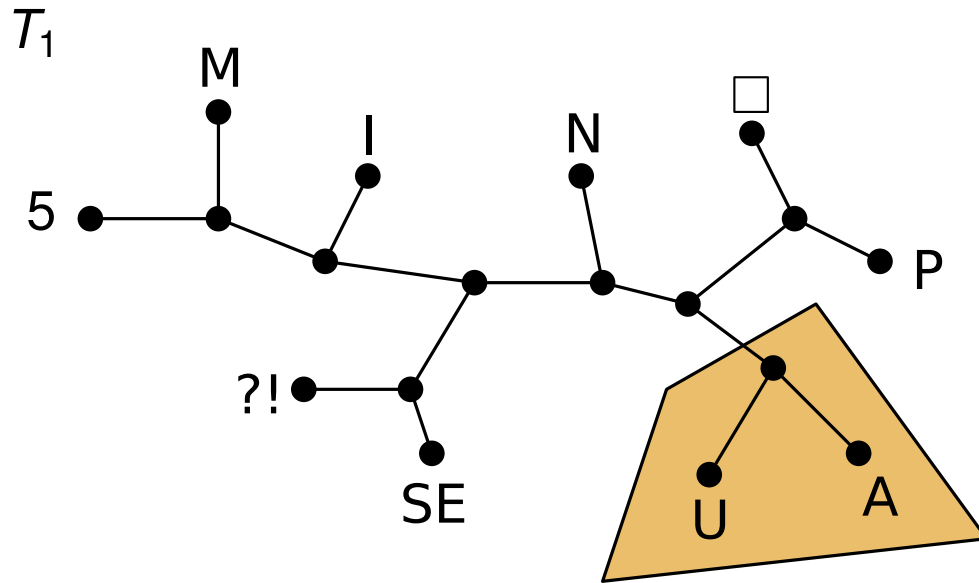
Beispiel

Löse diese **MAXIMUM AGREEMENT FOREST**-Instanz



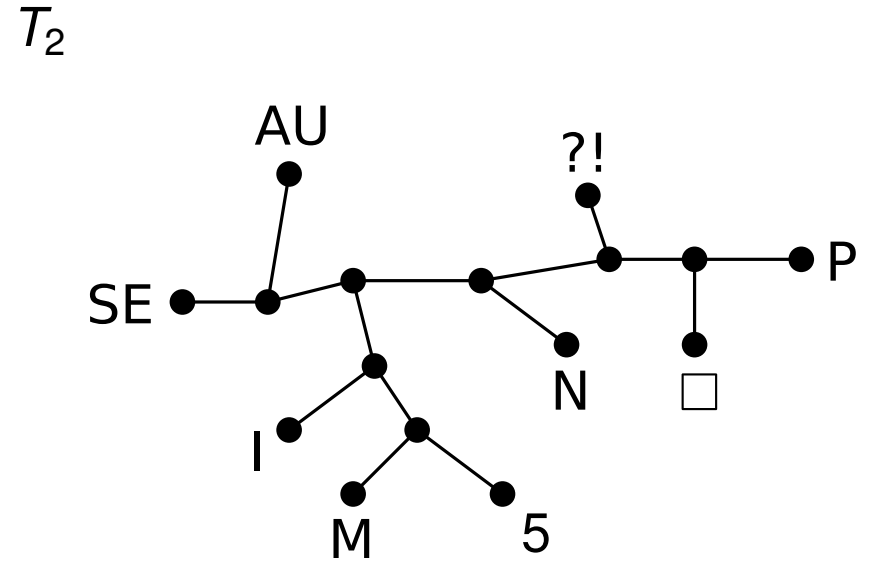
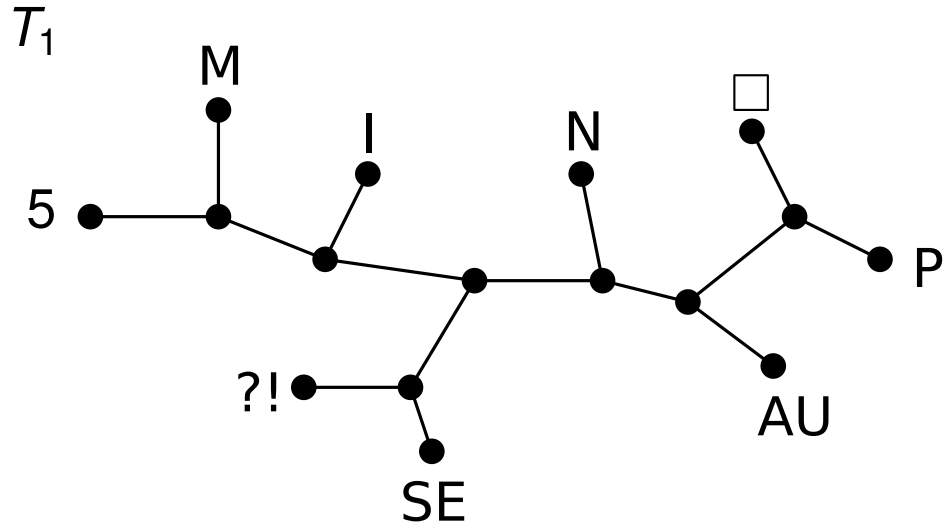
Beispiel

Löse diese **MAXIMUM AGREEMENT FOREST-Instanz**



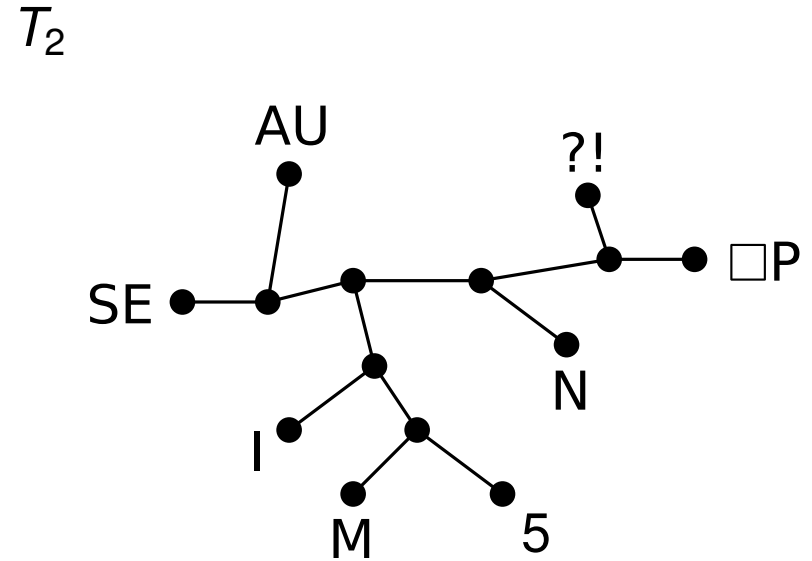
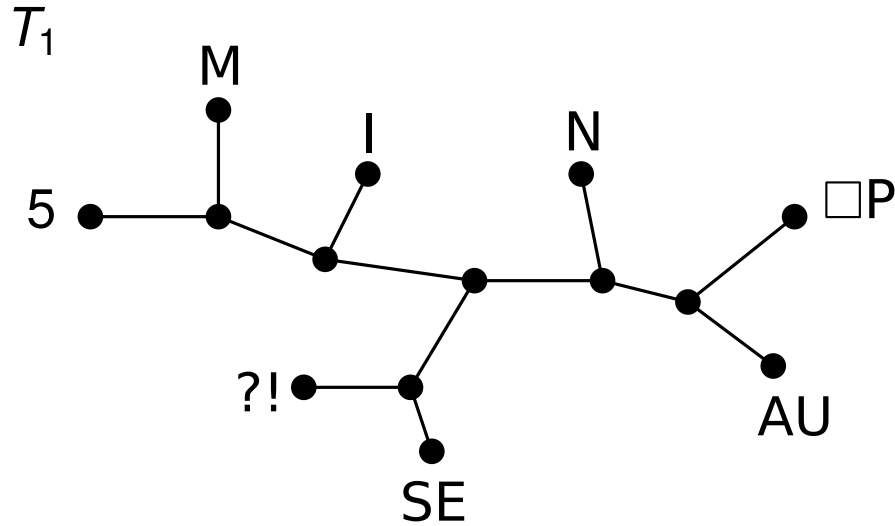
Beispiel

Löse diese **MAXIMUM AGREEMENT FOREST-Instanz**



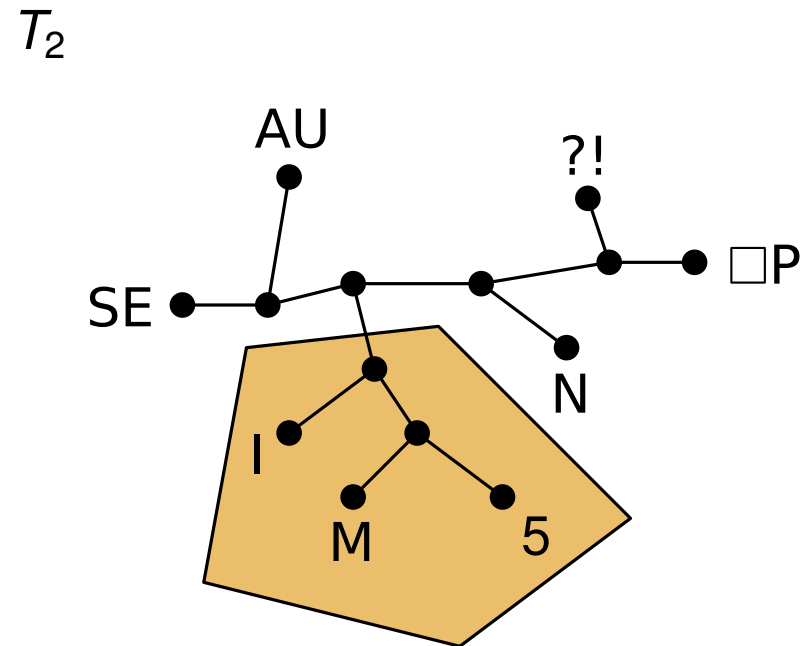
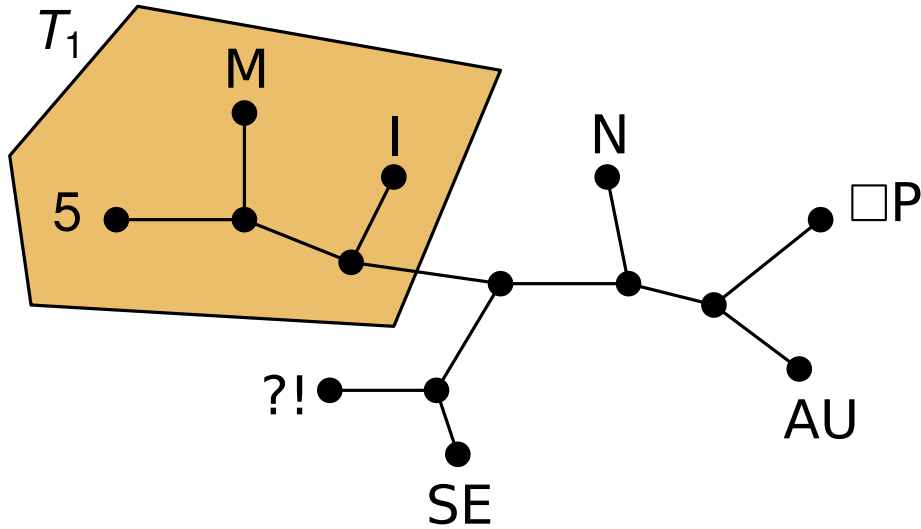
Beispiel

Löse diese **MAXIMUM AGREEMENT FOREST-Instanz**



Beispiel

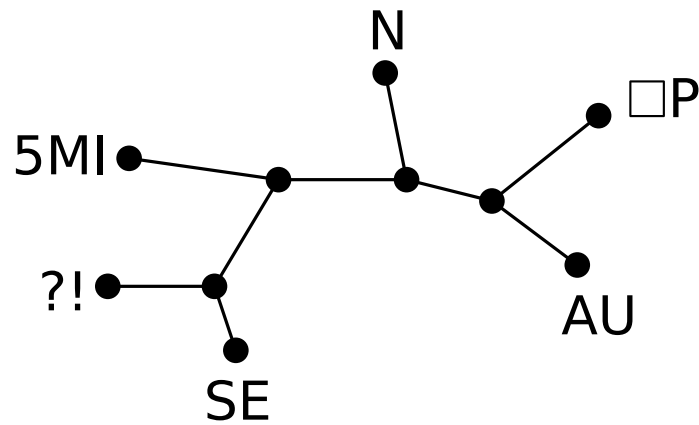
Löse diese **MAXIMUM AGREEMENT FOREST-Instanz**



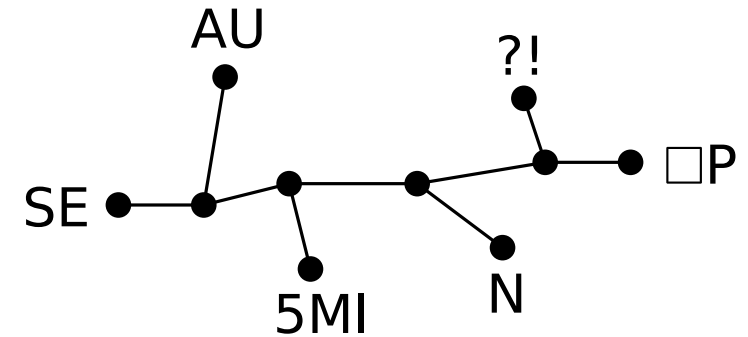
Beispiel

Löse diese **MAXIMUM AGREEMENT FOREST-Instanz**

T_1



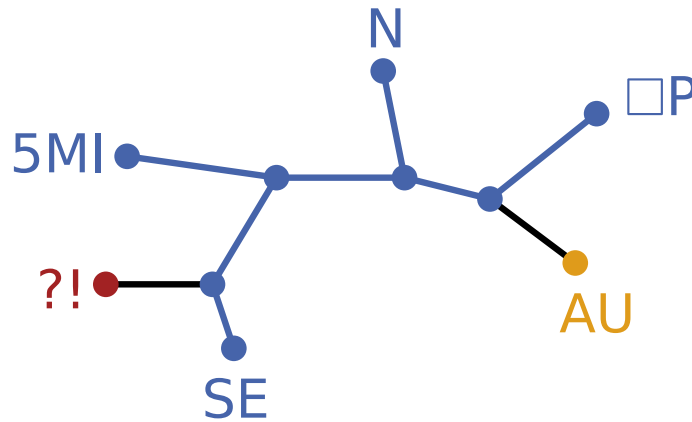
T_2



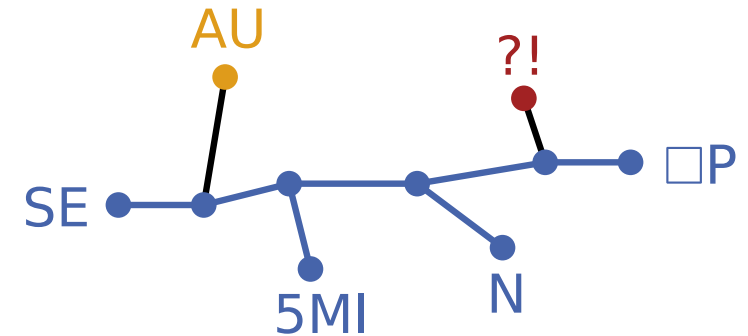
Beispiel

Löse diese **MAXIMUM AGREEMENT FOREST-Instanz**

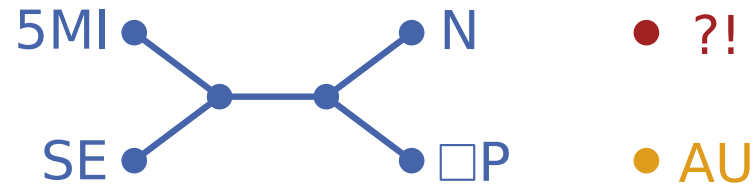
T_1



T_2



F



⇒ Lösung hat die Größe 3

Ungünstige Baumstruktur 2

Behauptung

Jeder Baum in einem Agreement Forest enthält nur wenige Blätter.

Gegenbeispiel

(trotz Anwendung der Reduktionsregel 1)

Ungünstige Baumstruktur 2

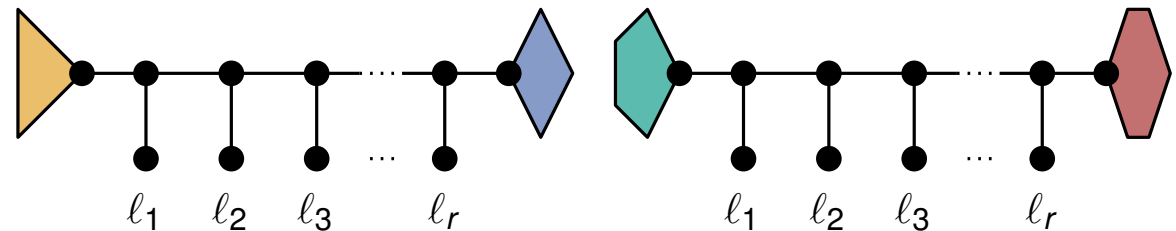
Behauptung

Jeder Baum in einem Agreement Forest enthält nur wenige Blätter.

Gegenbeispiel

- viele Blätter in geteiltem Teilbaum

(trotz Anwendung der Reduktionsregel 1)



Ungünstige Baumstruktur 2

Behauptung

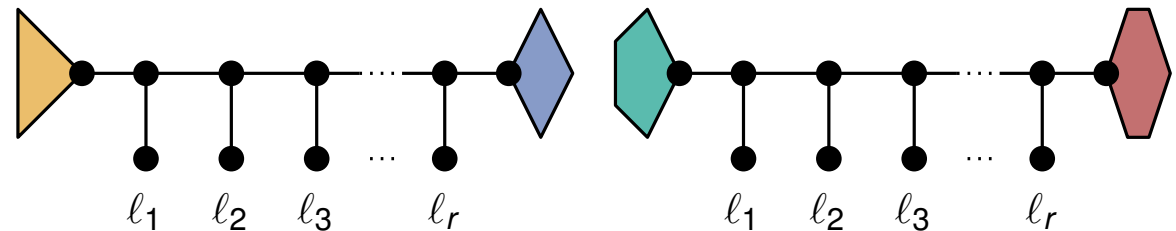
Jeder Baum in einem Agreement Forest enthält nur wenige Blätter.

Gegenbeispiel

- viele Blätter in geteiltem Teilbaum

Reduktionsregel 2

(trotz Anwendung der Reduktionsregel 1)



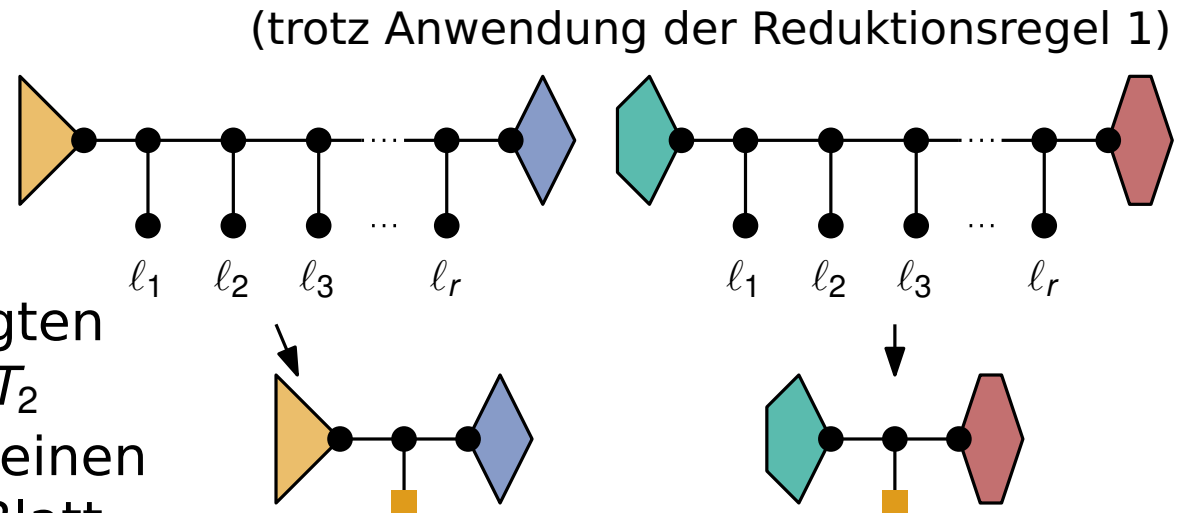
Ungünstige Baumstruktur 2

Behauptung

Jeder Baum in einem Agreement Forest enthält nur wenige Blätter.

Gegenbeispiel

- viele Blätter in geteiltem Teilbaum



Reduktionsregel 2

- finde Pfad mit angehängten Blättern l_1, \dots, l_r in T_1 und T_2
- ersetze den Pfad durch einen Knoten mit einem neuen Blatt

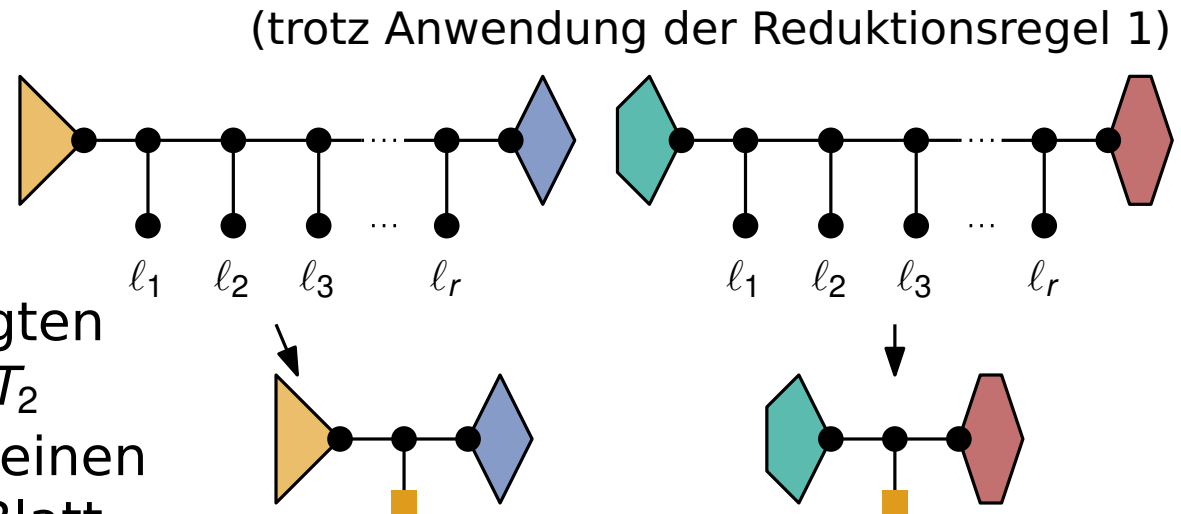
Ungünstige Baumstruktur 2

Behauptung

Jeder Baum in einem Agreement Forest enthält nur wenige Blätter.

Gegenbeispiel

- viele Blätter in geteiltem Teilbaum



Reduktionsregel 2

- finde Pfad mit angehängten Blättern l_1, \dots, l_r in T_1 und T_2
- ersetze den Pfad durch einen Knoten mit einem neuen Blatt

Ist diese Regel sicher?

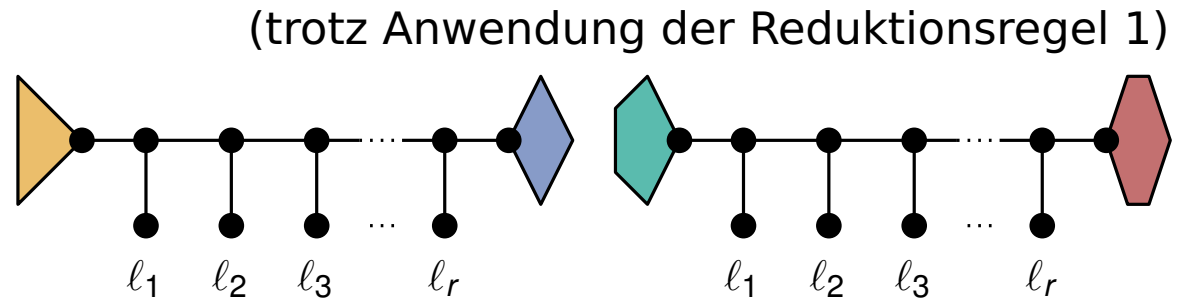
Ungünstige Baumstruktur 2

Behauptung

Jeder Baum in einem Agreement Forest enthält nur wenige Blätter.

Gegenbeispiel

- viele Blätter in geteiltem Teilbaum



Reduktionsregel 2

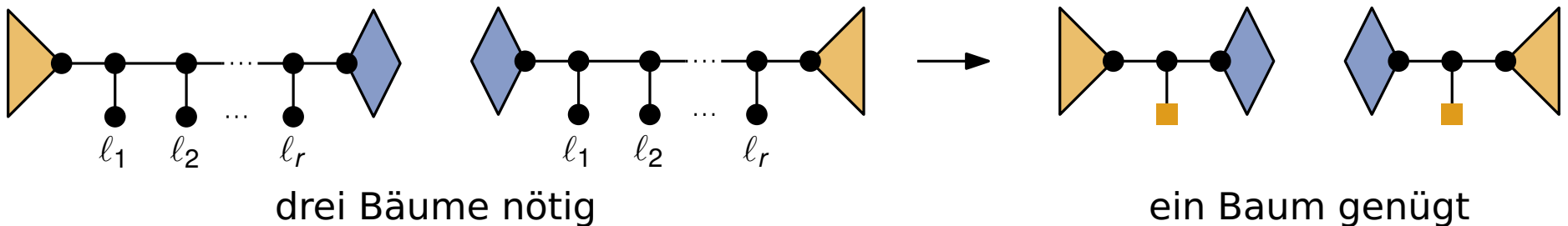
- finde Pfad mit angehängten Blättern l_1, \dots, l_r in T_1 und T_2
- ersetze den Pfad durch einen Knoten mit einem neuen Blatt



Ist diese Regel sicher?

Problem

- Anzahl notwendiger Bäume wird ggf. verringert



Ungünstige Baumstruktur 2

Behauptung

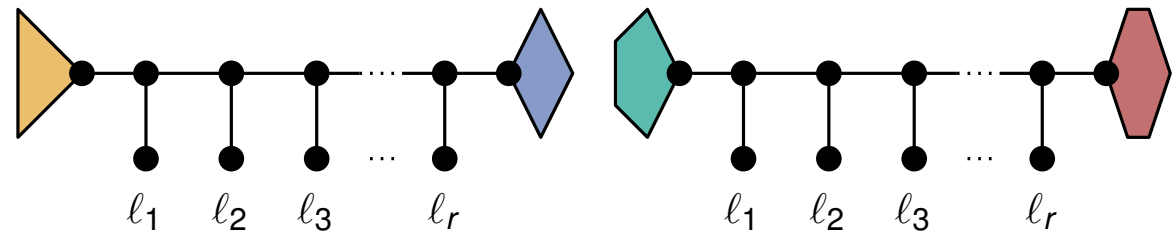
Jeder Baum in einem Agreement Forest enthält nur wenige Blätter.

Gegenbeispiel

- viele Blätter in geteiltem Teilbaum

Reduktionsregel 2

(trotz Anwendung der Reduktionsregel 1)



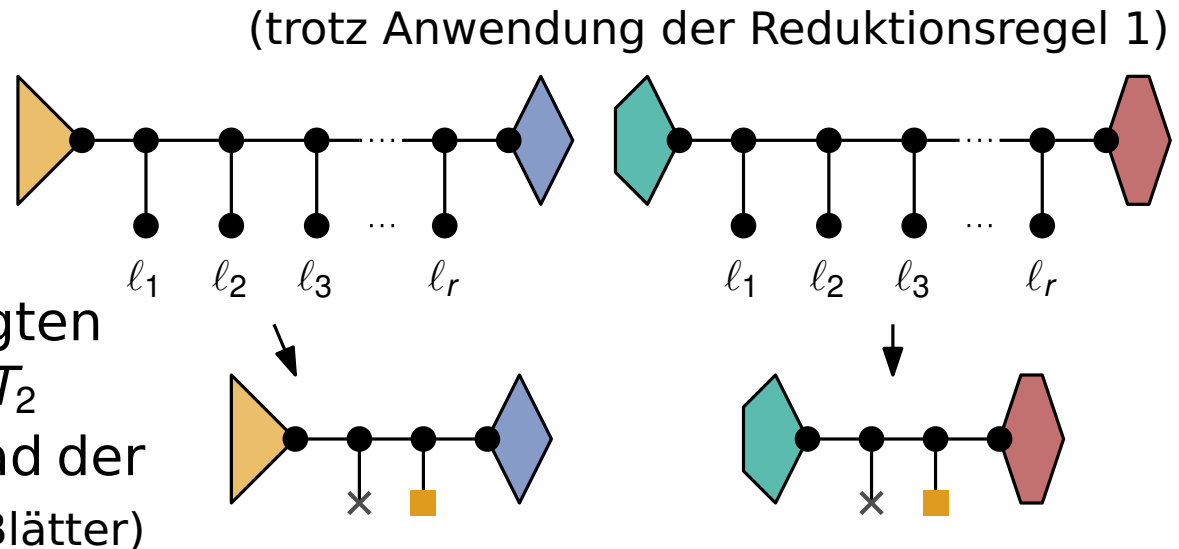
Ungünstige Baumstruktur 2

Behauptung

Jeder Baum in einem Agreement Forest enthält nur wenige Blätter.

Gegenbeispiel

- viele Blätter in geteiltem Teilbaum



Reduktionsregel 2

- finde Pfad mit angehängten Blättern l_1, \dots, l_r in T_1 und T_2
- ersetze ihn durch einen Pfad der Länge 2 (zwei neue Blätter)

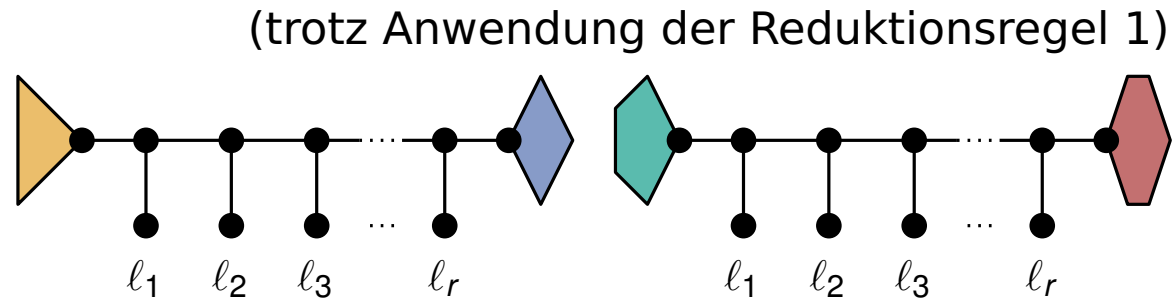
Ungünstige Baumstruktur 2

Behauptung

Jeder Baum in einem Agreement Forest enthält nur wenige Blätter.

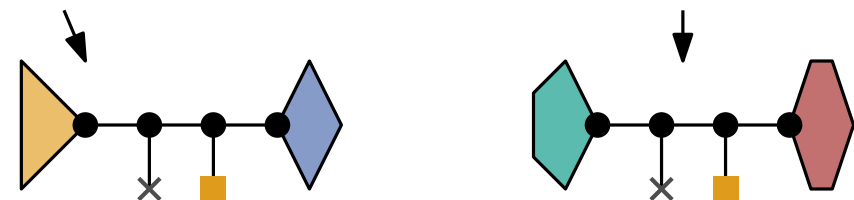
Gegenbeispiel

- viele Blätter in geteiltem Teilbaum



Reduktionsregel 2

- finde Pfad mit angehängten Blättern l_1, \dots, l_r in T_1 und T_2
- ersetze ihn durch einen Pfad der Länge 2 (zwei neue Blätter)



Ist diese Regel sicher?

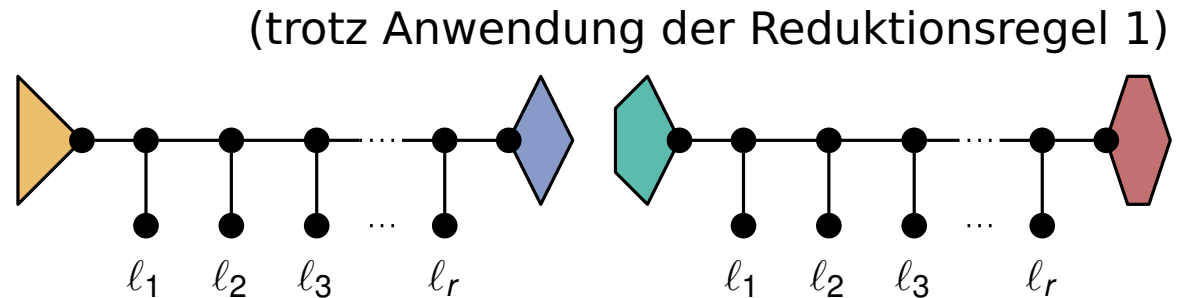
Ungünstige Baumstruktur 2

Behauptung

Jeder Baum in einem Agreement Forest enthält nur wenige Blätter.

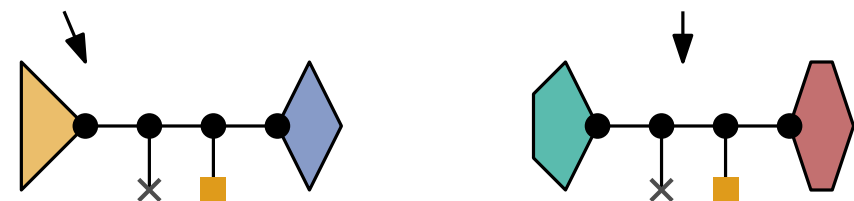
Gegenbeispiel

- viele Blätter in geteiltem Teilbaum



Reduktionsregel 2

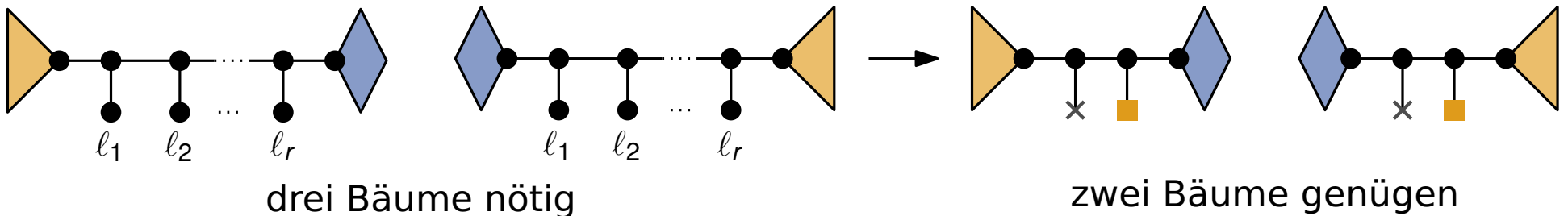
- finde Pfad mit angehängten Blättern l_1, \dots, l_r in T_1 und T_2
- ersetze ihn durch einen Pfad der Länge 2 (zwei neue Blätter)



Ist diese Regel sicher?

Problem

- Anzahl notwendiger Bäume wird ggf. verringert



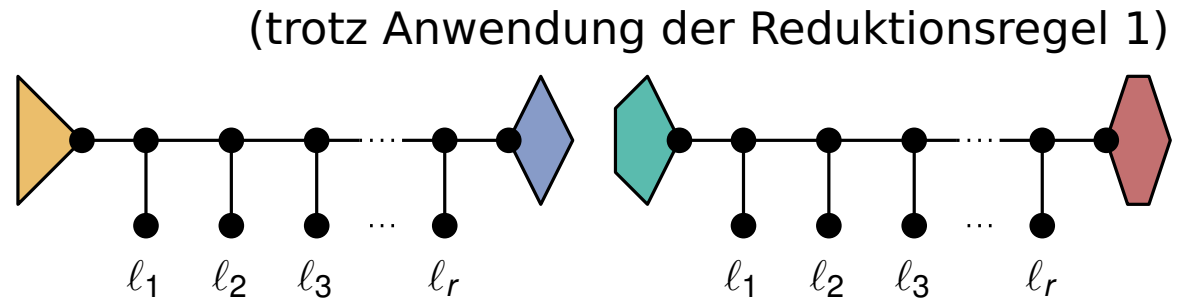
Ungünstige Baumstruktur 2

Behauptung

Jeder Baum in einem Agreement Forest enthält nur wenige Blätter.

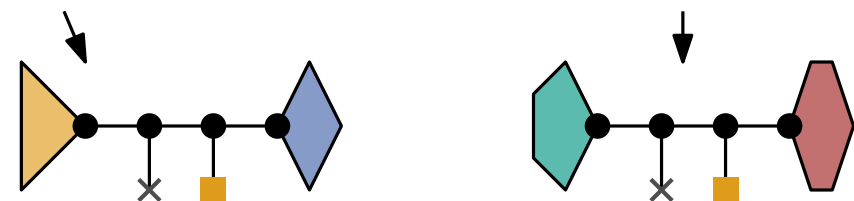
Gegenbeispiel

- viele Blätter in geteiltem Teilbaum



Reduktionsregel 2

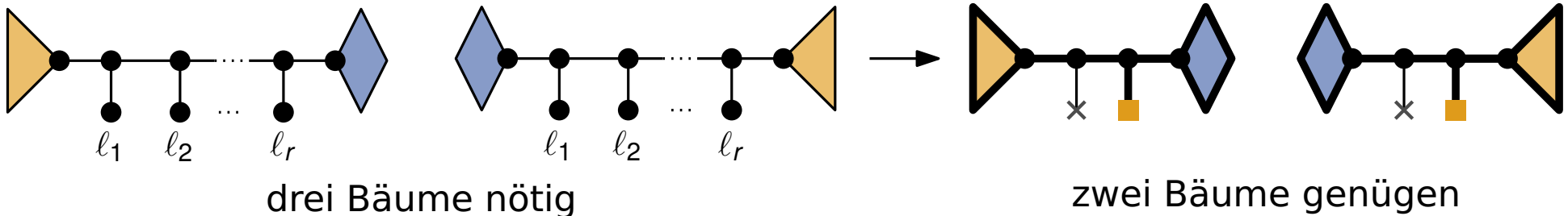
- finde Pfad mit angehängten Blättern l_1, \dots, l_r in T_1 und T_2
- ersetze ihn durch einen Pfad der Länge 2 (zwei neue Blätter)



Ist diese Regel sicher?

Problem

- Anzahl notwendiger Bäume wird ggf. verringert



Ungünstige Baumstruktur 2

Behauptung

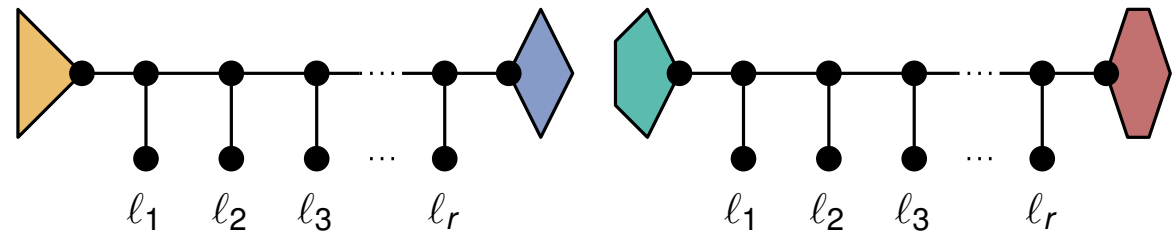
Jeder Baum in einem Agreement Forest enthält nur wenige Blätter.

Gegenbeispiel

- viele Blätter in geteiltem Teilbaum

Reduktionsregel 2

(trotz Anwendung der Reduktionsregel 1)



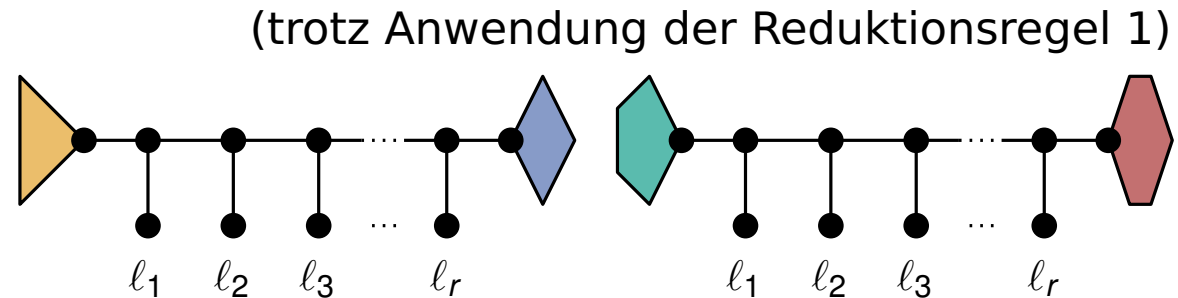
Ungünstige Baumstruktur 2

Behauptung

Jeder Baum in einem Agreement Forest enthält nur wenige Blätter.

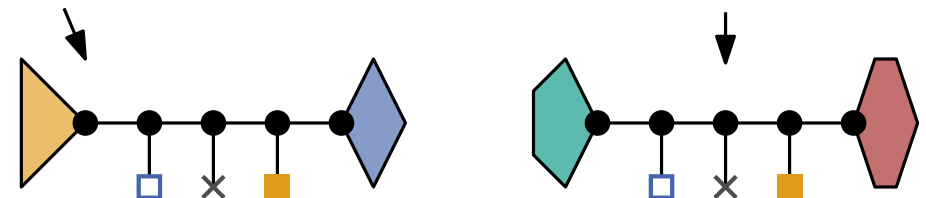
Gegenbeispiel

- viele Blätter in geteiltem Teilbaum



Reduktionsregel 2

- finde Pfad mit angehängten Blättern l_1, \dots, l_r in T_1 und T_2
- ersetze ihn durch einen Pfad der Länge 3 (drei neue Blätter)



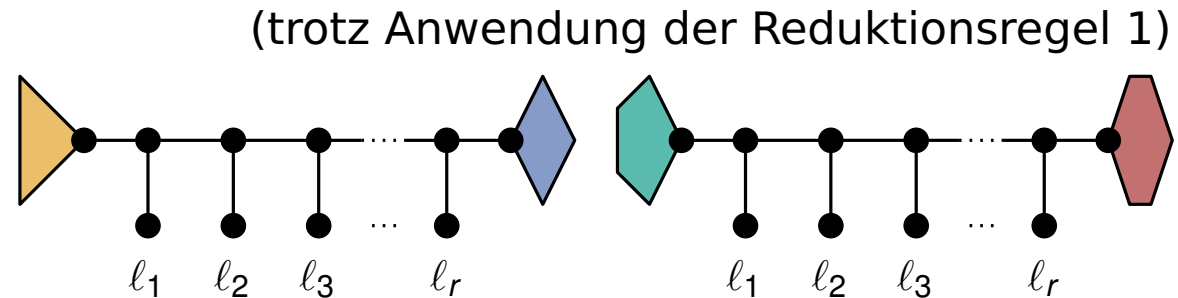
Ungünstige Baumstruktur 2

Behauptung

Jeder Baum in einem Agreement Forest enthält nur wenige Blätter.

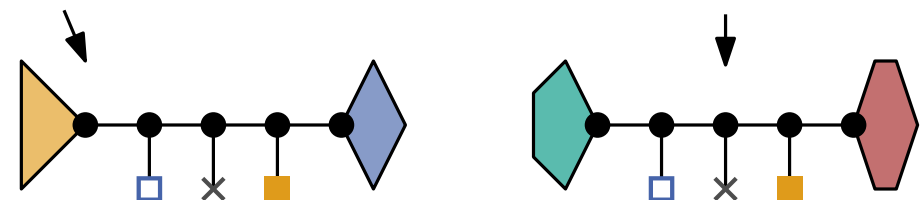
Gegenbeispiel

- viele Blätter in geteiltem Teilbaum



Reduktionsregel 2

- finde Pfad mit angehängten Blättern l_1, \dots, l_r in T_1 und T_2
- ersetze ihn durch einen Pfad der Länge 3 (drei neue Blätter)



Lemma

Reduktionsregel 2 ist sicher und in polynomieller Zeit ausführbar.

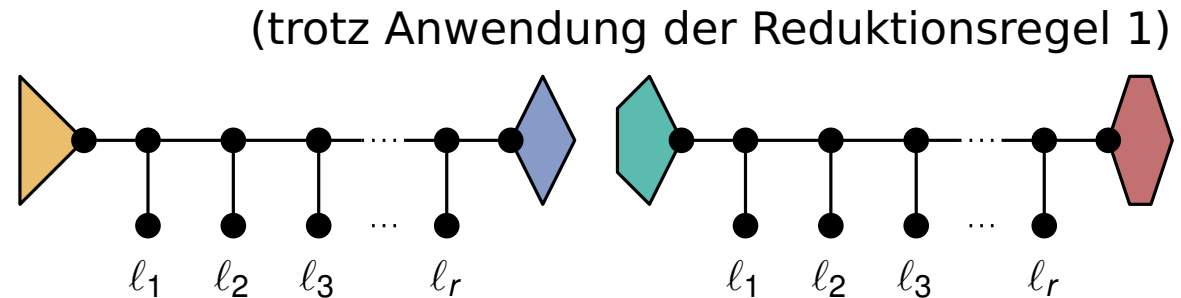
Ungünstige Baumstruktur 2

Behauptung

Jeder Baum in einem Agreement Forest enthält nur wenige Blätter.

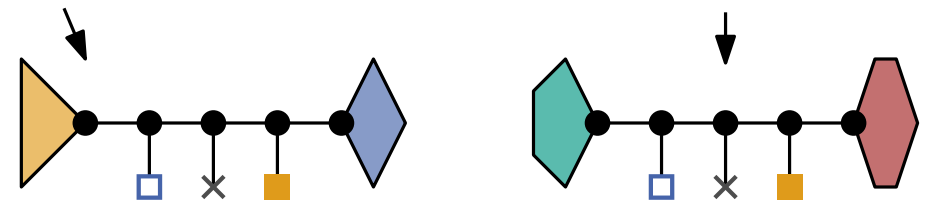
Gegenbeispiel

- viele Blätter in geteiltem Teilbaum



Reduktionsregel 2

- finde Pfad mit angehängten Blättern l_1, \dots, l_r in T_1 und T_2
- ersetze ihn durch einen Pfad der Länge 3 (drei neue Blätter)



Lemma

Reduktionsregel 2 ist sicher und in polynomieller Zeit ausführbar.

Beweis

- Fallunterscheidung (nicht hier, aber nicht schwer)

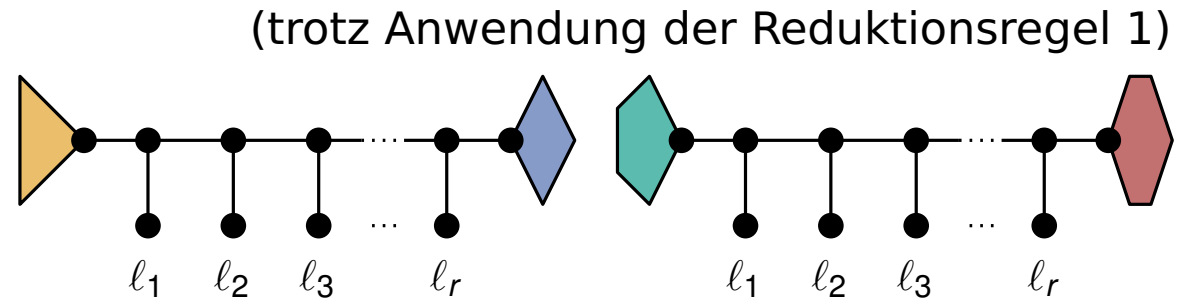
Ungünstige Baumstruktur 2

Behauptung

Jeder Baum in einem Agreement Forest enthält nur wenige Blätter.

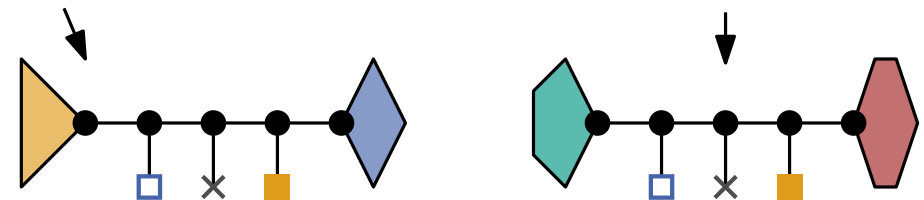
Gegenbeispiel

- viele Blätter in geteiltem Teilbaum



Reduktionsregel 2

- finde Pfad mit angehängten Blättern l_1, \dots, l_r in T_1 und T_2
- ersetze ihn durch einen Pfad der Länge 3 (drei neue Blätter)



Lemma

Reduktionsregel 2 ist sicher und in polynomieller Zeit ausführbar.

Beweis

- Fallunterscheidung (nicht hier, aber nicht schwer)
- polynomielle Laufzeit: z.B. durch iteratives Verkürzen von Pfaden der Länge 4

Ungünstige Baumstruktur 3

Behauptung

Jeder Baum in einem Agreement Forest enthält nur wenige Blätter.

Gegenbeispiel

(trotz Anwendung der Reduktionsregeln 1 und 2)

Ungünstige Baumstruktur 3

Behauptung

Jeder Baum in einem Agreement Forest enthält nur wenige Blätter.

Gegenbeispiel

- viele Blätter (a, b, c, \dots) in geteiltem Teilbaum

(trotz Anwendung der Reduktionsregeln 1 und 2)



Ungünstige Baumstruktur 3

Behauptung

Jeder Baum in einem Agreement Forest enthält nur wenige Blätter.

Gegenbeispiel

- viele Blätter (a, b, c, \dots) in geteiltem Teilbaum

(trotz Anwendung der Reduktionsregeln 1 und 2)



Ist das wirklich ein Problem?

Ungünstige Baumstruktur 3

Behauptung

Jeder Baum in einem Agreement Forest enthält amortisiert nur wenige Blätter.

Gegenbeispiel

- viele Blätter (a, b, c, \dots) in geteiltem Teilbaum

(trotz Anwendung der Reduktionsregeln 1 und 2)



Ist das wirklich ein Problem?

Amortisierte Sichtweise

- nach je drei Blättern kommen sich unterscheidende Teilbäume

Ungünstige Baumstruktur 3

Behauptung

Jeder Baum in einem Agreement Forest enthält amortisiert nur wenige Blätter.

Gegenbeispiel

- viele Blätter (a, b, c, \dots) in geteiltem Teilbaum

(trotz Anwendung der Reduktionsregeln 1 und 2)



Ist das wirklich ein Problem?

Amortisierte Sichtweise

- nach je drei Blättern kommen sich unterscheidende Teilbäume
- jeder dieser Teilbäume sorgt für (mindestens) einen eigenen Baum im Agreement Forest
(wenn a, b, c, d, \dots alle im gleichen Baum liegen)

Ungünstige Baumstruktur 3

Behauptung

Jeder Baum in einem Agreement Forest enthält amortisiert nur wenige Blätter.

Gegenbeispiel

- viele Blätter (a, b, c, \dots) in geteiltem Teilbaum

(trotz Anwendung der Reduktionsregeln 1 und 2)



Ist das wirklich ein Problem?

Amortisierte Sichtweise

- nach je drei Blättern kommen sich unterscheidende Teilbäume
- jeder dieser Teilbäume sorgt für (mindestens) einen eigenen Baum im Agreement Forest (wenn a, b, c, d, \dots alle im gleichen Baum liegen)
- wenige Bäume im Agreement Forest \Rightarrow insgesamt wenige Blätter

Ungünstige Baumstruktur 3

Behauptung

Jeder Baum in einem Agreement Forest enthält amortisiert nur wenige Blätter.

Gegenbeispiel

- viele Blätter (a, b, c, \dots) in geteiltem Teilbaum

(trotz Anwendung der Reduktionsregeln 1 und 2)



Ist das wirklich ein Problem?

Amortisierte Sichtweise

- nach je drei Blättern kommen sich unterscheidende Teilbäume
- jeder dieser Teilbäume sorgt für (mindestens) einen eigenen Baum im Agreement Forest (wenn a, b, c, d, \dots alle im gleichen Baum liegen)
- wenige Bäume im Agreement Forest \Rightarrow insgesamt wenige Blätter

Sicher, dass es keine anderen ungünstigen Strukturen geben kann?

Ungünstige Baumstruktur 3

Behauptung

Jeder Baum in einem Agreement Forest enthält amortisiert nur wenige Blätter.

Gegenbeispiel

- viele Blätter (a, b, c, \dots) in geteiltem Teilbaum

(trotz Anwendung der Reduktionsregeln 1 und 2)



Ist das wirklich ein Problem?

Amortisierte Sichtweise

- nach je drei Blättern kommen sich unterscheidende Teilbäume
- jeder dieser Teilbäume sorgt für (mindestens) einen eigenen Baum im Agreement Forest (wenn a, b, c, d, \dots alle im gleichen Baum liegen)
- wenige Bäume im Agreement Forest \Rightarrow insgesamt wenige Blätter

Sicher, dass es keine anderen ungünstigen Strukturen geben kann?

Lemma

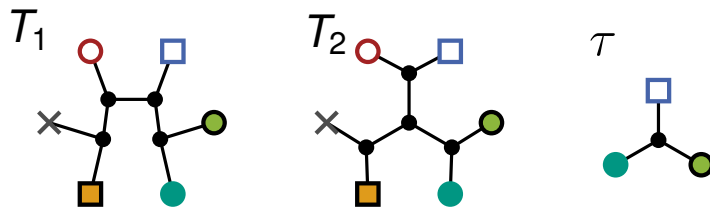
In einer lösbaren Instanz liefern die Reduktionsregeln 1 und 2 eine äquivalente Instanz mit maximal ck Blättern (für eine kleine Konstante c).

Grober Plan

Notation

- betrachte einen der Bäume τ in einem Agreement Forest F
- kontrahiere $T_1(L(\tau))$ in T_1 zu einem einzelnen Knoten
- bezeichne den Grad dieses Knotens mit $\deg_1(\tau)$ (analog: $\deg_2(\tau)$)

Beispiel



■ $\deg_1(\tau) = 1$

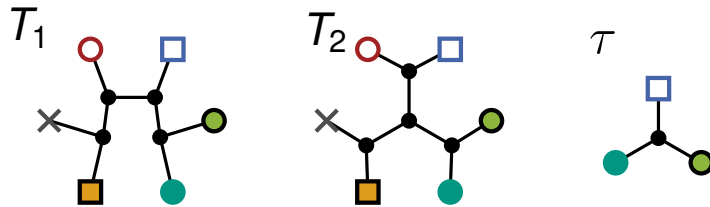
■ $\deg_2(\tau) = 2$

Grober Plan

Notation

- betrachte einen der Bäume τ in einem Agreement Forest F
- kontrahiere $T_1(L(\tau))$ in T_1 zu einem einzelnen Knoten
- bezeichne den Grad dieses Knotens mit $\deg_1(\tau)$ (analog: $\deg_2(\tau)$)

Beispiel



■ $\deg_1(\tau) = 1$

■ $\deg_2(\tau) = 2$

Amortisierte Sichtweise

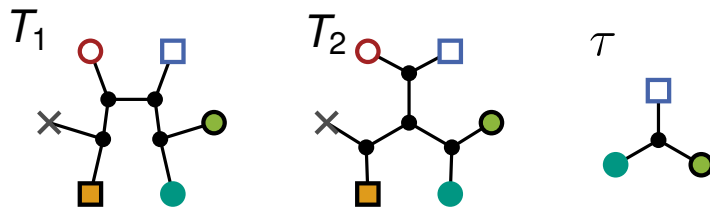
(wie eben, nur etwas formaler)

Grober Plan

Notation

- betrachte einen der Bäume τ in einem Agreement Forest F
- kontrahiere $T_1(L(\tau))$ in T_1 zu einem einzelnen Knoten
- bezeichne den Grad dieses Knotens mit $\deg_1(\tau)$ (analog: $\deg_2(\tau)$)

Beispiel



■ $\deg_1(\tau) = 1$

■ $\deg_2(\tau) = 2$

Amortisierte Sichtweise

(wie eben, nur etwas formaler)

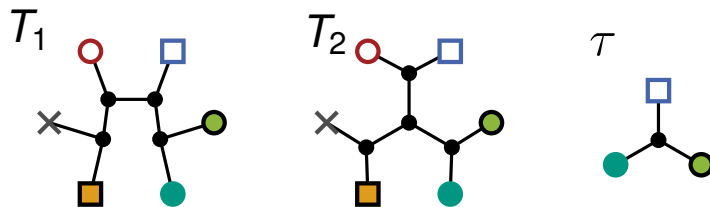
- τ zerlegt T_i in $\deg_i(\tau)$ viele Teilbäume (für $i \in \{1, 2\}$)

Grober Plan

Notation

- betrachte einen der Bäume τ in einem Agreement Forest F
- kontrahiere $T_1(L(\tau))$ in T_1 zu einem einzelnen Knoten
- bezeichne den Grad dieses Knotens mit $\deg_1(\tau)$ (analog: $\deg_2(\tau)$)

Beispiel



■ $\deg_1(\tau) = 1$

■ $\deg_2(\tau) = 2$

Amortisierte Sichtweise

(wie eben, nur etwas formaler)

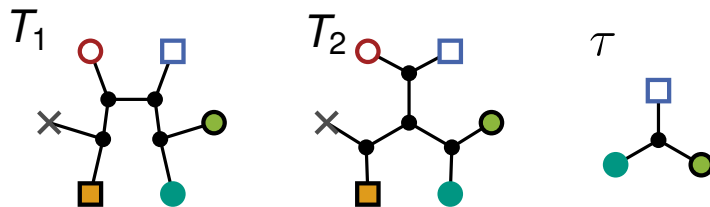
- τ zerlegt T_i in $\deg_i(\tau)$ viele Teilbäume (für $i \in \{1, 2\}$)
- also: viele Bäume τ mit großem Grad $\deg_i(\tau) \Rightarrow$ viele Bäume in F

Grober Plan

Notation

- betrachte einen der Bäume τ in einem Agreement Forest F
- kontrahiere $T_1(L(\tau))$ in T_1 zu einem einzelnen Knoten
- bezeichne den Grad dieses Knotens mit $\deg_1(\tau)$ (analog: $\deg_2(\tau)$)

Beispiel



- $\deg_1(\tau) = 1$
- $\deg_2(\tau) = 2$

Amortisierte Sichtweise

(wie eben, nur etwas formaler)

- τ zerlegt T_i in $\deg_i(\tau)$ viele Teilbäume (für $i \in \{1, 2\}$)
- also: viele Bäume τ mit großem Grad $\deg_i(\tau) \Rightarrow$ viele Bäume in F

Lemma

(große Grade \Rightarrow viele Bäume)

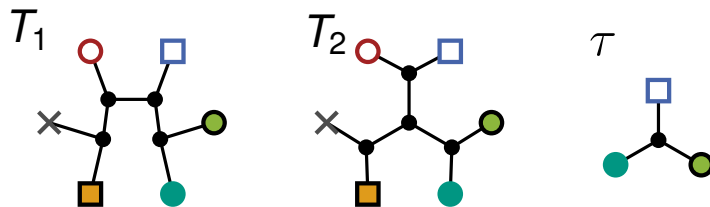
Wenn F aus k Bäumen besteht, dann gilt $\sum_{\tau \in F} \deg_i(\tau) \leq 2k - 2$.

Grober Plan

Notation

- betrachte einen der Bäume τ in einem Agreement Forest F
- kontrahiere $T_1(L(\tau))$ in T_1 zu einem einzelnen Knoten
- bezeichne den Grad dieses Knotens mit $\deg_1(\tau)$ (analog: $\deg_2(\tau)$)

Beispiel



- $\deg_1(\tau) = 1$
- $\deg_2(\tau) = 2$

Amortisierte Sichtweise

(wie eben, nur etwas formaler)

- τ zerlegt T_i in $\deg_i(\tau)$ viele Teilbäume (für $i \in \{1, 2\}$)
- also: viele Bäume τ mit großem Grad $\deg_i(\tau) \Rightarrow$ viele Bäume in F

Lemma

(große Grade \Rightarrow viele Bäume)

Wenn F aus k Bäumen besteht, dann gilt $\sum_{\tau \in F} \deg_i(\tau) \leq 2k - 2$.

Lemma

(kleine Grade \Rightarrow wenig Blätter)

Die Reduktionsregeln 1 und 2 sorgen dafür, dass jeder Baum $\tau \in F$ maximal $c(\deg_1(\tau) + \deg_2(\tau))$ Blätter enthält (für kleine Konstante c).

Summe der Grade

Lemma

(große Grade \Rightarrow viele Bäume)
Wenn F aus k Bäumen besteht, dann gilt $\sum_{\tau \in F} \deg_i(\tau) \leq 2k - 2$.

Beweis

Summe der Grade

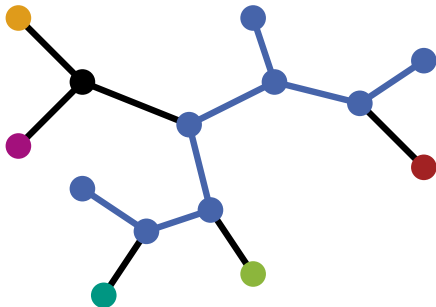
Lemma

(große Grade \Rightarrow viele Bäume)
 Wenn F aus k Bäumen besteht, dann gilt $\sum_{\tau \in F} \deg_i(\tau) \leq 2k - 2$.

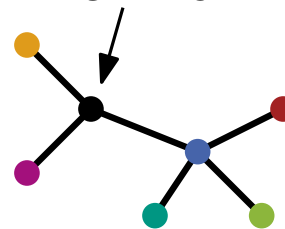
Beweis

- kontrahiere jedes $\tau \in F$ zu einem Knoten in $T_i \rightarrow$ neuer Baum T'_i
- jeder Knoten in T'_i gehört zu einem der k Bäume/ist *nicht kontrahiert*

T_i (Bäume aus F bunt)



T'_i nicht kontrahiert



Summe der Grade

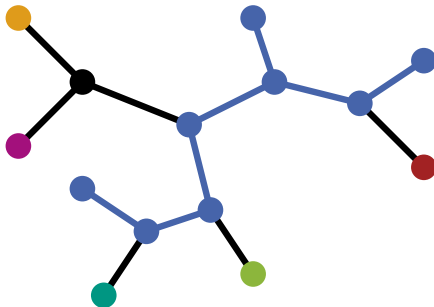
Lemma

(große Grade \Rightarrow viele Bäume)
 Wenn F aus k Bäumen besteht, dann gilt $\sum_{\tau \in F} \deg_i(\tau) \leq 2k - 2$.

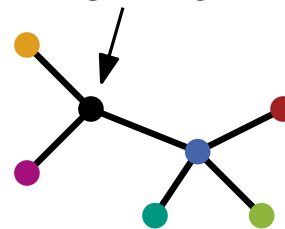
Beweis

- kontrahiere jedes $\tau \in F$ zu einem Knoten in $T_i \rightarrow$ neuer Baum T'_i
- jeder Knoten in T'_i gehört zu einem der k Bäume/ist *nicht kontrahiert*

T_i (Bäume aus F bunt)



T'_i nicht kontrahiert



- nicht kontrahierte Knoten haben Grad 3
- $n_3 =$ Anzahl dieser Knoten

Summe der Grade

Lemma

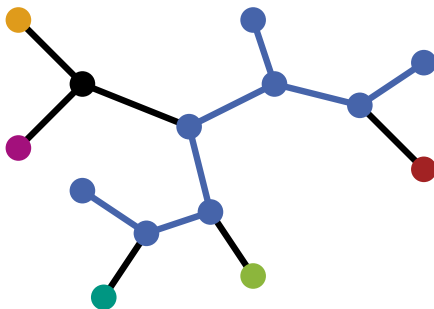
(große Grade \Rightarrow viele Bäume)

Wenn F aus k Bäumen besteht, dann gilt $\sum_{\tau \in F} \deg_i(\tau) \leq 2k - 2$.

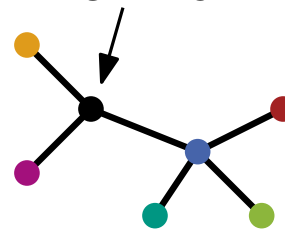
Beweis

- kontrahiere jedes $\tau \in F$ zu einem Knoten in $T_i \rightarrow$ neuer Baum T'_i
- jeder Knoten in T'_i gehört zu einem der k Bäume/ist *nicht kontrahiert*

T_i (Bäume aus F bunt)



T'_i nicht kontrahiert



- nicht kontrahierte Knoten haben Grad 3
- n_3 = Anzahl dieser Knoten
- m' = Anzahl Kanten in T'_i
- n' = Anzahl Knoten in T'_i

Summe der Grade

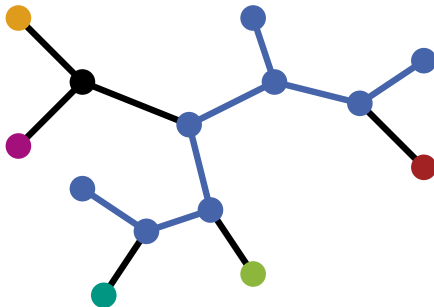
Lemma

(große Grade \Rightarrow viele Bäume)
 Wenn F aus k Bäumen besteht, dann gilt $\sum_{\tau \in F} \deg_i(\tau) \leq 2k - 2$.

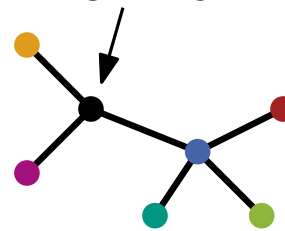
Beweis

- kontrahiere jedes $\tau \in F$ zu einem Knoten in $T_i \rightarrow$ neuer Baum T'_i
- jeder Knoten in T'_i gehört zu einem der k Bäume/ist *nicht kontrahiert*

T_i (Bäume aus F bunt)



T'_i nicht kontrahiert



- nicht kontrahierte Knoten haben Grad 3
- n_3 = Anzahl dieser Knoten
- m' = Anzahl Kanten in T'_i
- n' = Anzahl Knoten in T'_i

- es gilt (handshaking): $\sum_{\tau \in F} \deg_i(\tau) + 3n_3 = 2m'$

Summe der Grade

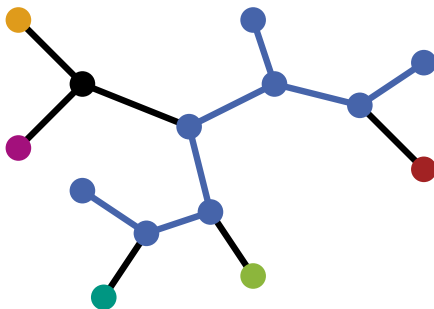
Lemma

(große Grade \Rightarrow viele Bäume)
 Wenn F aus k Bäumen besteht, dann gilt $\sum_{\tau \in F} \deg_i(\tau) \leq 2k - 2$.

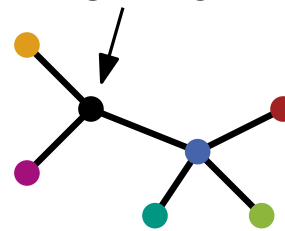
Beweis

- kontrahiere jedes $\tau \in F$ zu einem Knoten in $T_i \rightarrow$ neuer Baum T'_i
- jeder Knoten in T'_i gehört zu einem der k Bäume/ist *nicht kontrahiert*

T_i (Bäume aus F bunt)



T'_i nicht kontrahiert



- nicht kontrahierte Knoten haben Grad 3
- n_3 = Anzahl dieser Knoten
- m' = Anzahl Kanten in T'_i
- n' = Anzahl Knoten in T'_i

- es gilt (handshaking): $\sum_{\tau \in F} \deg_i(\tau) + 3n_3 = 2m'$
- außerdem (T'_i ist Baum): $n' = k + n_3 = m' + 1$

Summe der Grade

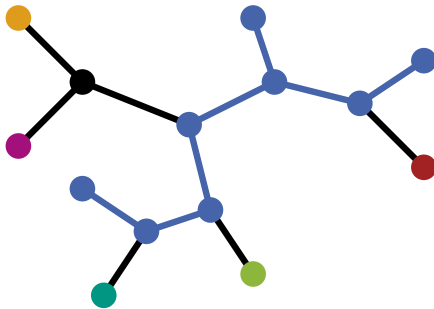
Lemma

(große Grade \Rightarrow viele Bäume)
 Wenn F aus k Bäumen besteht, dann gilt $\sum_{\tau \in F} \deg_i(\tau) \leq 2k - 2$.

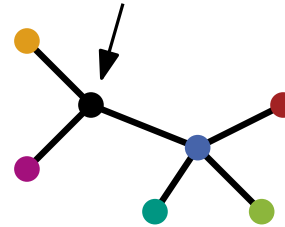
Beweis

- kontrahiere jedes $\tau \in F$ zu einem Knoten in $T_i \rightarrow$ neuer Baum T'_i
- jeder Knoten in T'_i gehört zu einem der k Bäume/ist *nicht kontrahiert*

T_i (Bäume aus F bunt)



T'_i nicht kontrahiert



- nicht kontrahierte Knoten haben Grad 3
- n_3 = Anzahl dieser Knoten
- m' = Anzahl Kanten in T'_i
- n' = Anzahl Knoten in T'_i

- es gilt (handshaking): $\sum_{\tau \in F} \deg_i(\tau) + 3n_3 = 2m'$

- außerdem (T'_i ist Baum): $n' = k + n_3 = m' + 1$

$$\Rightarrow \sum_{\tau \in F} \deg_i(\tau) = 2(k + n_3 - 1) - 3n_3 \leq 2k - 2$$

Wenige Blätter pro Baum

Lemma

(kleine Grade \Rightarrow wenig Blätter)

Die Reduktionsregeln 1 und 2 sorgen dafür, dass jeder Baum $\tau \in F$ maximal $c(\deg_1(\tau) + \deg_2(\tau))$ Blätter enthält (für kleine Konstante c).

Wenige Blätter pro Baum

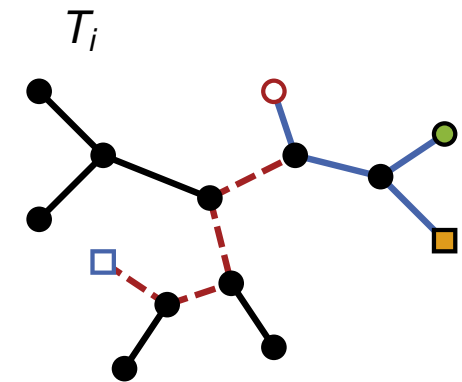
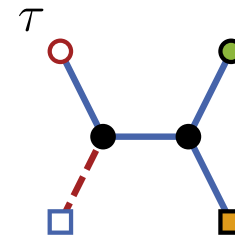
Lemma

(kleine Grade \Rightarrow wenig Blätter)

Die Reduktionsregeln 1 und 2 sorgen dafür, dass jeder Baum $\tau \in F$ maximal $c(\deg_1(\tau) + \deg_2(\tau))$ Blätter enthält (für kleine Konstante c).

Intuition

- betrachte wie τ in T_1 bzw. T_2 liegt
- Kanten von τ repräsentieren Kanten/Pfade



Wenige Blätter pro Baum

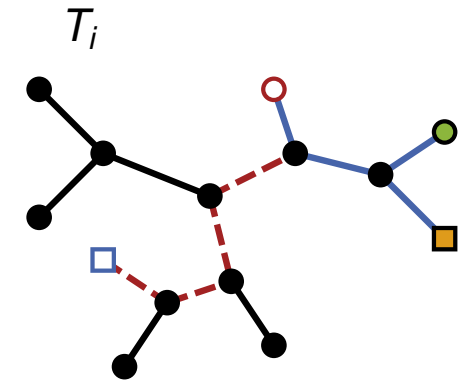
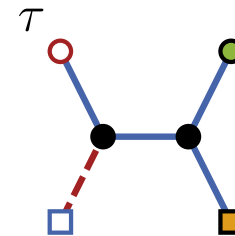
Lemma

(kleine Grade \Rightarrow wenig Blätter)

Die Reduktionsregeln 1 und 2 sorgen dafür, dass jeder Baum $\tau \in F$ maximal $c(\deg_1(\tau) + \deg_2(\tau))$ Blätter enthält (für kleine Konstante c).

Intuition

- betrachte wie τ in T_1 bzw. T_2 liegt
- Kanten von τ repräsentieren Kanten/Pfade
- großer Teilbaum ohne Pfade
 \Rightarrow Reduktionsregel anwendbar
- viele Pfade $\Rightarrow \deg_i(\tau)$ ist groß



Wenige Blätter pro Baum

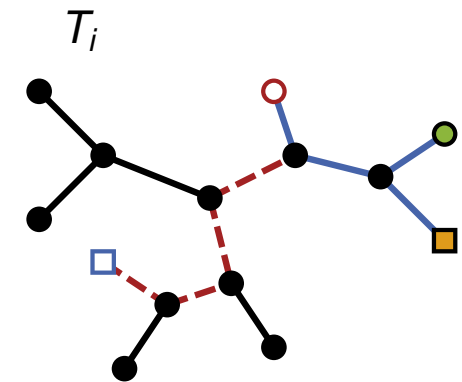
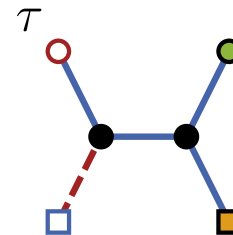
Lemma

(kleine Grade \Rightarrow wenig Blätter)

Die Reduktionsregeln 1 und 2 sorgen dafür, dass jeder Baum $\tau \in F$ maximal $c(\deg_1(\tau) + \deg_2(\tau))$ Blätter enthält (für kleine Konstante c).

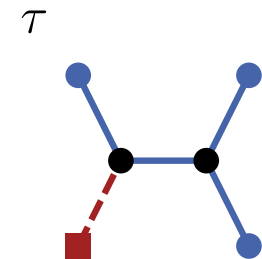
Intuition

- betrachte wie τ in T_1 bzw. T_2 liegt
- Kanten von τ repräsentieren Kanten/Pfade
- großer Teilbaum ohne Pfade \Rightarrow Reduktionsregel anwendbar
- viele Pfade $\Rightarrow \deg_i(\tau)$ ist groß



Beweisplan

- betrachte nur τ mit gefärbten Kanten und Blättern
 - blaue Kante: Kante in T_1 und T_2
 - rote Kante: Pfad in T_1 oder T_2
 - Blattfarbe: entsprechend inzidenter Kante



Wenige Blätter pro Baum

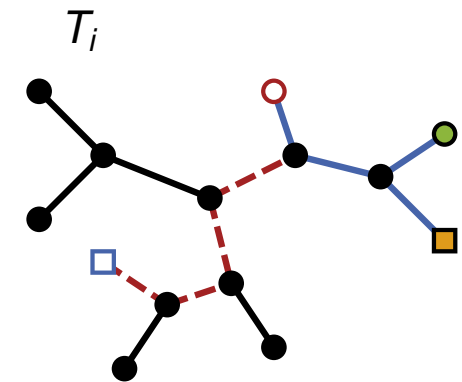
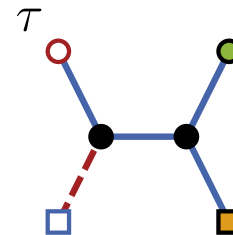
Lemma

(kleine Grade \Rightarrow wenig Blätter)

Die Reduktionsregeln 1 und 2 sorgen dafür, dass jeder Baum $\tau \in F$ maximal $c(\deg_1(\tau) + \deg_2(\tau))$ Blätter enthält (für kleine Konstante c).

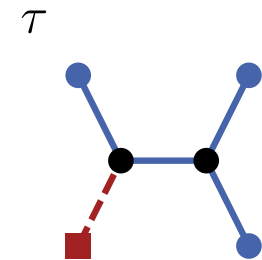
Intuition

- betrachte wie τ in T_1 bzw. T_2 liegt
- Kanten von τ repräsentieren Kanten/Pfade
- großer Teilbaum ohne Pfade \Rightarrow Reduktionsregel anwendbar
- viele Pfade $\Rightarrow \deg_i(\tau)$ ist groß



Beweisplan

- betrachte nur τ mit gefärbten Kanten und Blättern
 - blaue Kante: Kante in T_1 und T_2
 - rote Kante: Pfad in T_1 oder T_2
 - Blattfarbe: entsprechend inzidenter Kante
- Beobachte: $\# \text{rote Kanten} \leq \deg_1(\tau) + \deg_2(\tau)$



Wenige Blätter pro Baum

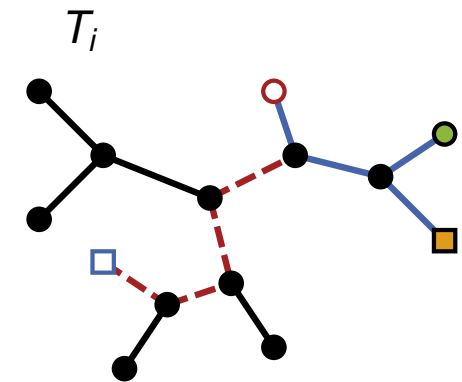
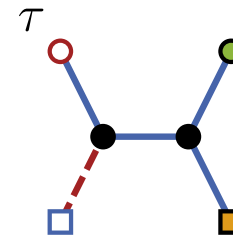
Lemma

(kleine Grade \Rightarrow wenig Blätter)

Die Reduktionsregeln 1 und 2 sorgen dafür, dass jeder Baum $\tau \in F$ maximal $c(\deg_1(\tau) + \deg_2(\tau))$ Blätter enthält (für kleine Konstante c).

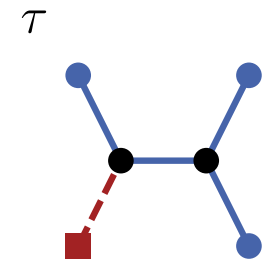
Intuition

- betrachte wie τ in T_1 bzw. T_2 liegt
- Kanten von τ repräsentieren Kanten/Pfade
- großer Teilbaum ohne Pfade \Rightarrow Reduktionsregel anwendbar
- viele Pfade $\Rightarrow \deg_i(\tau)$ ist groß



Beweisplan

- betrachte nur τ mit gefärbten Kanten und Blättern
 - blaue Kante: Kante in T_1 und T_2
 - rote Kante: Pfad in T_1 oder T_2
 - Blattfarbe: entsprechend inzidenter Kante
- Beobachte: $\#\text{rote Kanten} \leq \deg_1(\tau) + \deg_2(\tau)$
- Zeige: $\#\text{Blätter} \leq c \cdot \#\text{rote Kanten}$



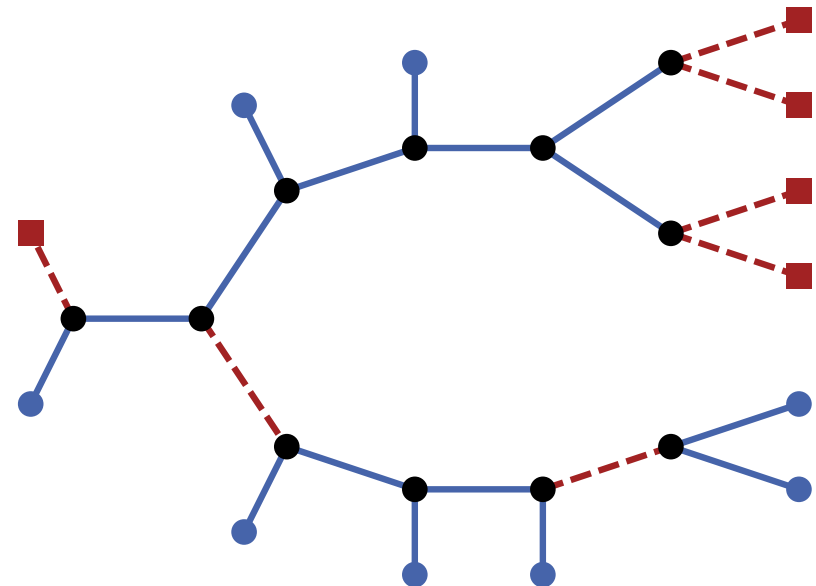
Wenige Blätter pro Baum

Lemma

(kleine Grade \Rightarrow wenig Blätter)

Die Reduktionsregeln 1 und 2 sorgen dafür, dass jeder Baum $\tau \in F$ maximal $c(\deg_1(\tau) + \deg_2(\tau))$ Blätter enthält (für kleine Konstante c).

Beweis



Wenige Blätter pro Baum

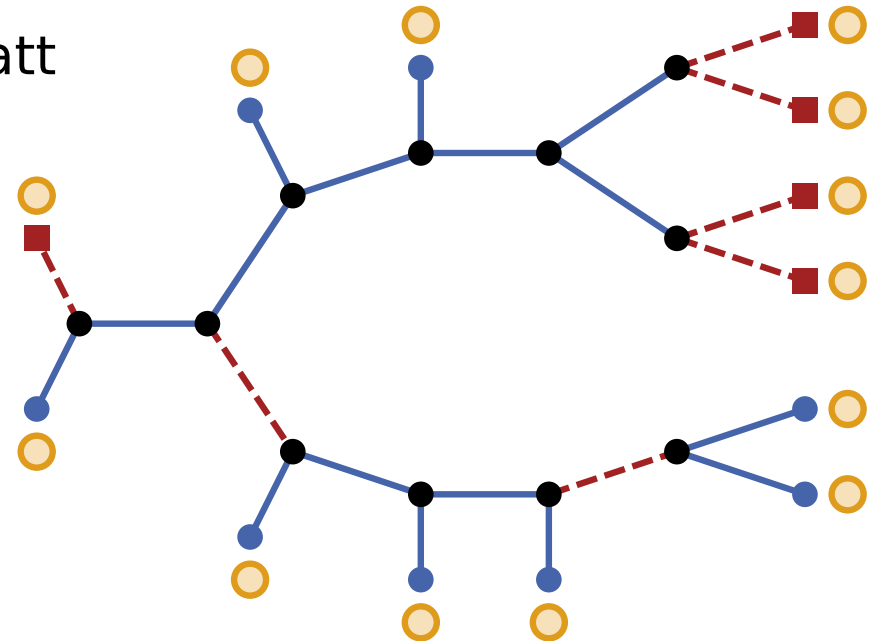
Lemma

(kleine Grade \Rightarrow wenig Blätter)

Die Reduktionsregeln 1 und 2 sorgen dafür, dass jeder Baum $\tau \in F$ maximal $c(\deg_1(\tau) + \deg_2(\tau))$ Blätter enthält (für kleine Konstante c).

Beweis

- starte mit einem Token bei jedem Blatt



Wenige Blätter pro Baum

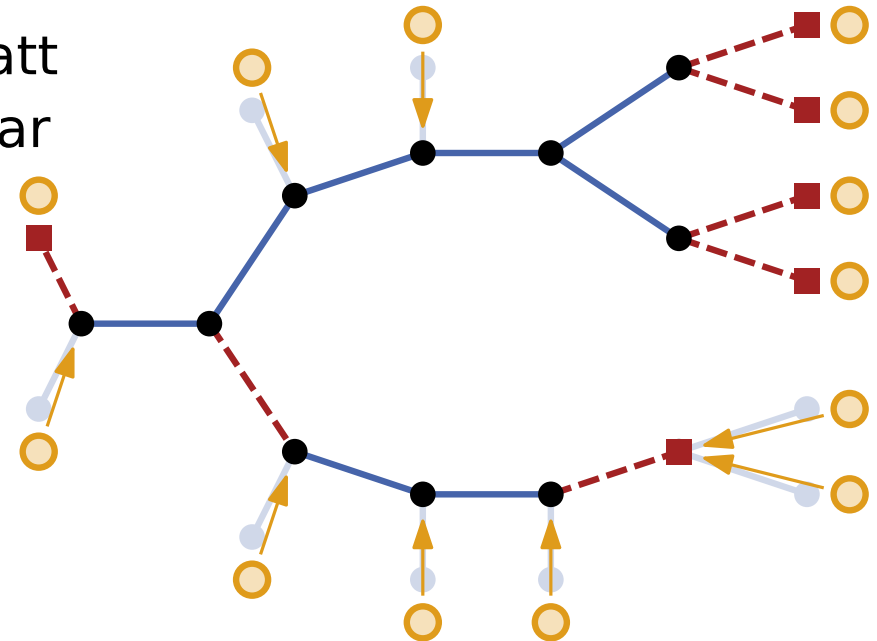
Lemma

(kleine Grade \Rightarrow wenig Blätter)

Die Reduktionsregeln 1 und 2 sorgen dafür, dass jeder Baum $\tau \in F$ maximal $c(\deg_1(\tau) + \deg_2(\tau))$ Blätter enthält (für kleine Konstante c).

Beweis

- starte mit einem Token bei jedem Blatt
- lösche blaue Blätter; Token \rightarrow Nachbar



Wenige Blätter pro Baum

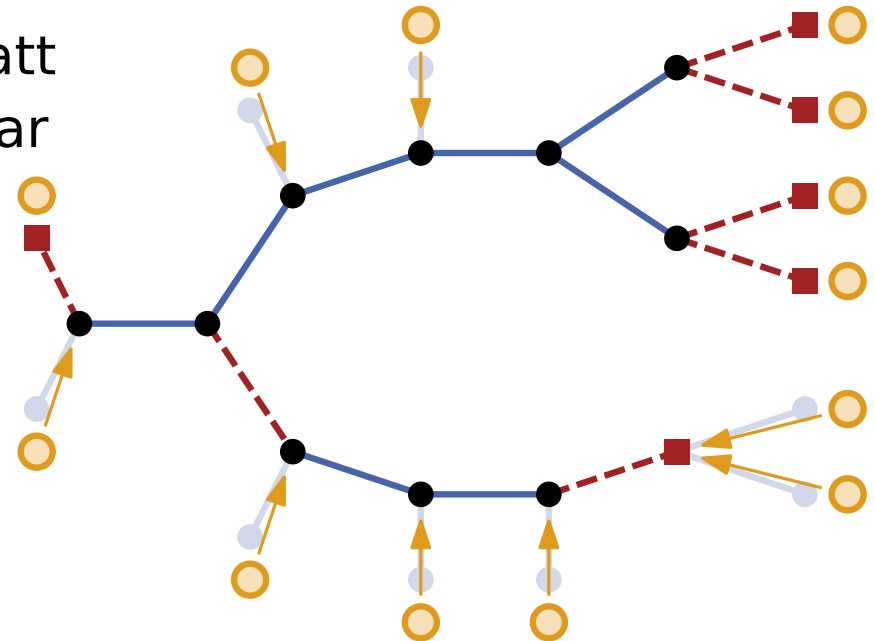
Lemma

(kleine Grade \Rightarrow wenig Blätter)

Die Reduktionsregeln 1 und 2 sorgen dafür, dass jeder Baum $\tau \in F$ maximal $c(\deg_1(\tau) + \deg_2(\tau))$ Blätter enthält (für kleine Konstante c).

Beweis

- starte mit einem Token bei jedem Blatt
- lösche blaue Blätter; Token \rightarrow Nachbar
 - keine neuen blauen Blätter



Warum?

Wenige Blätter pro Baum

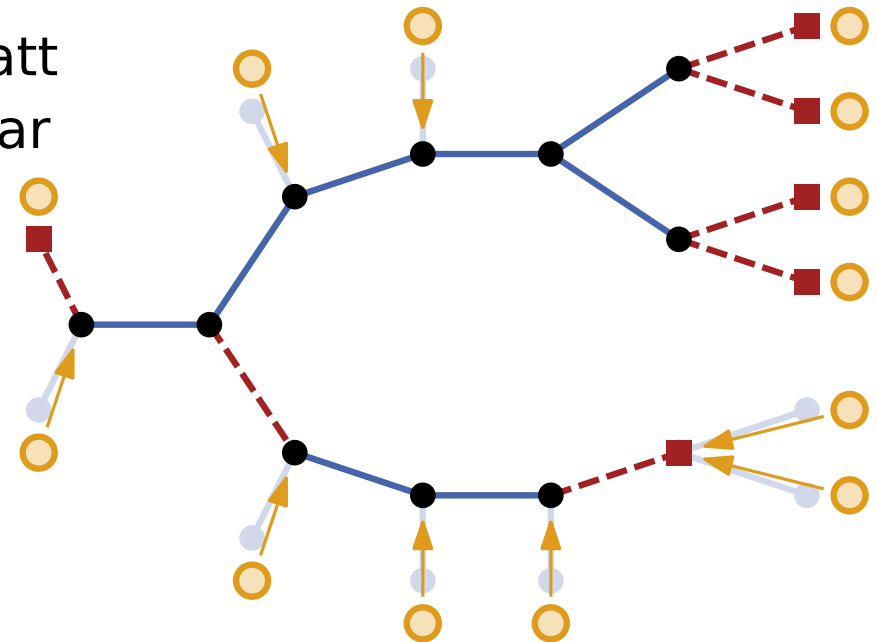
Lemma

(kleine Grade \Rightarrow wenig Blätter)

Die Reduktionsregeln 1 und 2 sorgen dafür, dass jeder Baum $\tau \in F$ maximal $c(\deg_1(\tau) + \deg_2(\tau))$ Blätter enthält (für kleine Konstante c).

Beweis

- starte mit einem Token bei jedem Blatt
- lösche blaue Blätter; Token \rightarrow Nachbar
 - keine neuen blauen Blätter
 - ≤ 2 Token pro rotes Blatt



Warum?

Wenige Blätter pro Baum

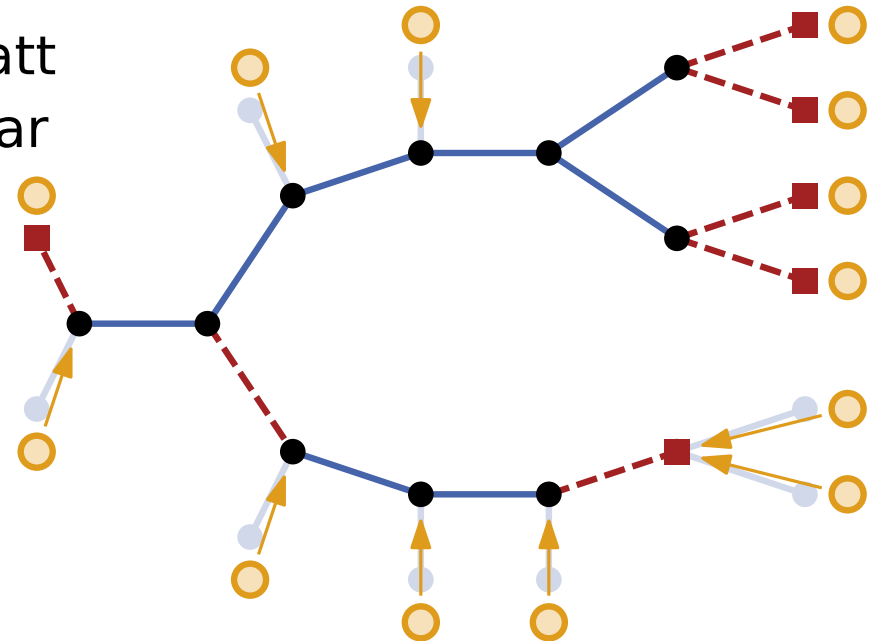
Lemma

(kleine Grade \Rightarrow wenig Blätter)

Die Reduktionsregeln 1 und 2 sorgen dafür, dass jeder Baum $\tau \in F$ maximal $c(\deg_1(\tau) + \deg_2(\tau))$ Blätter enthält (für kleine Konstante c).

Beweis

- starte mit einem Token bei jedem Blatt
- lösche blaue Blätter; Token \rightarrow Nachbar
 - keine neuen blauen Blätter
 - ≤ 2 Token pro rotes Blatt
 - ≤ 1 Token pro Grad-2 Knoten



Warum?

Wenige Blätter pro Baum

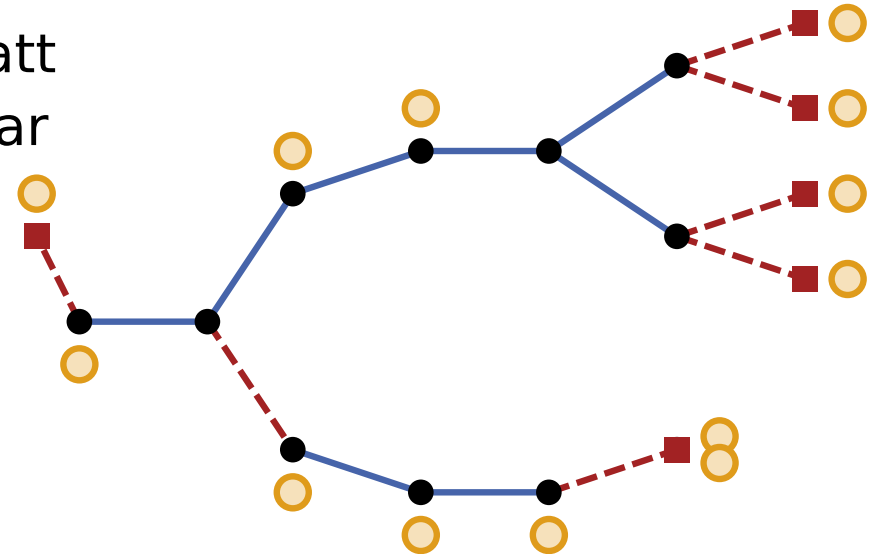
Lemma

(kleine Grade \Rightarrow wenig Blätter)

Die Reduktionsregeln 1 und 2 sorgen dafür, dass jeder Baum $\tau \in \mathcal{F}$ maximal $c(\deg_1(\tau) + \deg_2(\tau))$ Blätter enthält (für kleine Konstante c).

Beweis

- starte mit einem Token bei jedem Blatt
- lösche blaue Blätter; Token \rightarrow Nachbar
 - keine neuen blauen Blätter
 - ≤ 2 Token pro rotes Blatt
 - ≤ 1 Token pro Grad-2 Knoten



Wenige Blätter pro Baum

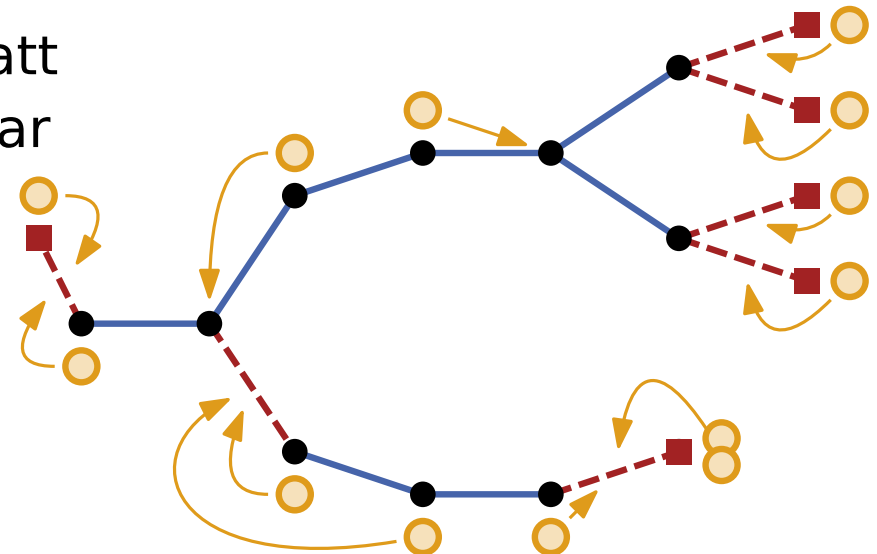
Lemma

(kleine Grade \Rightarrow wenig Blätter)

Die Reduktionsregeln 1 und 2 sorgen dafür, dass jeder Baum $\tau \in F$ maximal $c(\deg_1(\tau) + \deg_2(\tau))$ Blätter enthält (für kleine Konstante c).

Beweis

- starte mit einem Token bei jedem Blatt
- lösche blaue Blätter; Token \rightarrow Nachbar
 - keine neuen blauen Blätter
 - ~~≤ 2 Token pro rotes Blatt~~
 - ~~≤ 1 Token pro Grad-2 Knoten~~
- schiebe alle Token zu: nächstem [Grad-3 Knoten oder rote Kante]



Wenige Blätter pro Baum

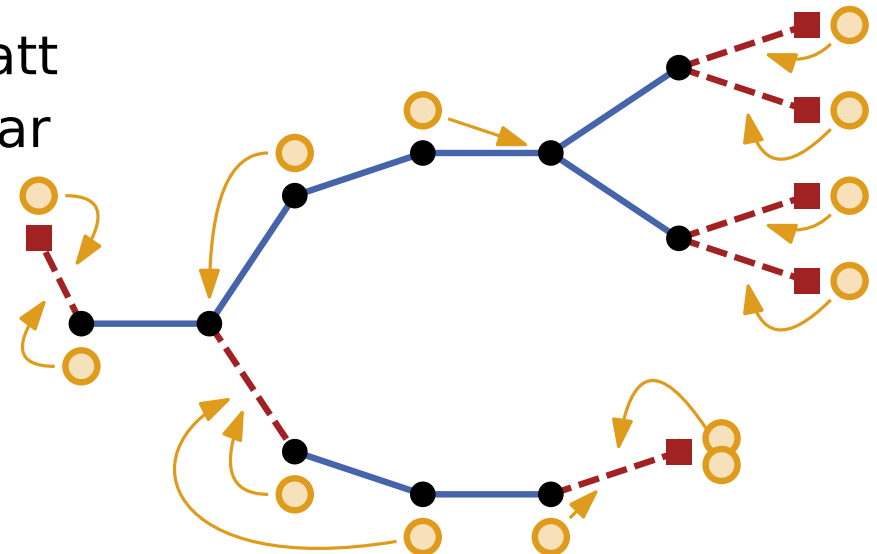
Lemma

(kleine Grade \Rightarrow wenig Blätter)

Die Reduktionsregeln 1 und 2 sorgen dafür, dass jeder Baum $\tau \in F$ maximal $c(\deg_1(\tau) + \deg_2(\tau))$ Blätter enthält (für kleine Konstante c).

Beweis

- starte mit einem Token bei jedem Blatt
- lösche blaue Blätter; Token \rightarrow Nachbar
 - keine neuen blauen Blätter
 - ~~≤ 2 Token pro rotes Blatt~~
 - ~~≤ 1 Token pro Grad-2 Knoten~~
- schiebe alle Token zu: nächstem [Grad-3 Knoten oder rote Kante]
 - ≤ 6 Token pro Grad-3 Knoten
 - ≤ 4 Token pro rote Kante



Warum?

Wenige Blätter pro Baum

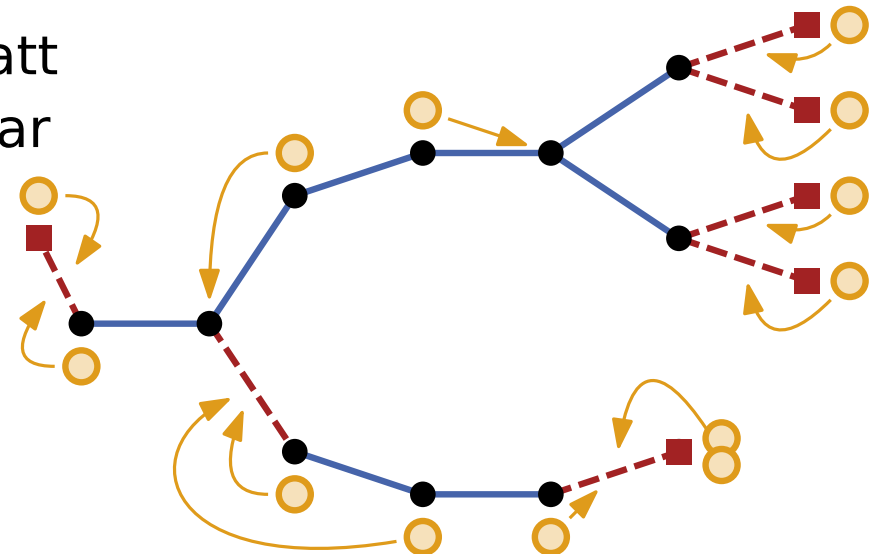
Lemma

(kleine Grade \Rightarrow wenig Blätter)

Die Reduktionsregeln 1 und 2 sorgen dafür, dass jeder Baum $\tau \in F$ maximal $c(\deg_1(\tau) + \deg_2(\tau))$ Blätter enthält (für kleine Konstante c).

Beweis

- starte mit einem Token bei jedem Blatt
- lösche blaue Blätter; Token \rightarrow Nachbar
 - keine neuen blauen Blätter
 - ~~■ ≤ 2 Token pro rotes Blatt~~
 - ~~■ ≤ 1 Token pro Grad-2 Knoten~~
- schiebe alle Token zu: nächstem [Grad-3 Knoten oder rote Kante]
 - ≤ 6 Token pro Grad-3 Knoten
 - ≤ 4 Token pro rote Kante
- #Blätter = #Token $\leq 6n_3 + 4m_r$



n_3 : #Grad-3 Knoten n_1 : #Blätter m_r : #rote Kanten

Wenige Blätter pro Baum

Lemma

(kleine Grade \Rightarrow wenig Blätter)

Die Reduktionsregeln 1 und 2 sorgen dafür, dass jeder Baum $\tau \in F$ maximal $c(\deg_1(\tau) + \deg_2(\tau))$ Blätter enthält (für kleine Konstante c).

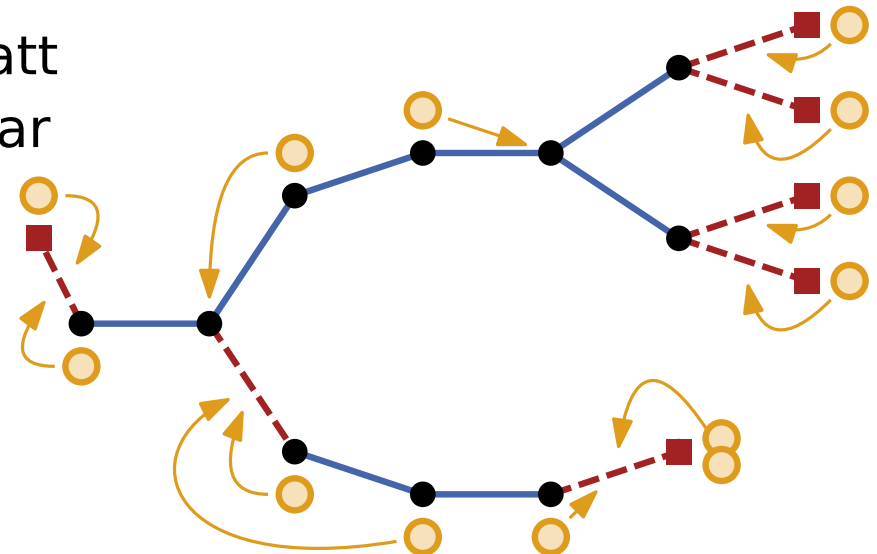
Beweis

- starte mit einem Token bei jedem Blatt
- lösche blaue Blätter; Token \rightarrow Nachbar
 - keine neuen blauen Blätter
 - ~~≤ 2 Token pro rotes Blatt~~
 - ~~≤ 1 Token pro Grad-2 Knoten~~
- schiebe alle Token zu: nächstem [Grad-3 Knoten oder rote Kante]
 - ≤ 6 Token pro Grad-3 Knoten
 - ≤ 4 Token pro rote Kante
- #Blätter = #Token $\leq 6n_3 + 4m_r \leq 6n_1 + 4m_r$

$$n_3 = n_1 - 2$$

(siehe Übungsblatt)

n_3 : #Grad-3 Knoten n_1 : #Blätter m_r : #rote Kanten



Wenige Blätter pro Baum

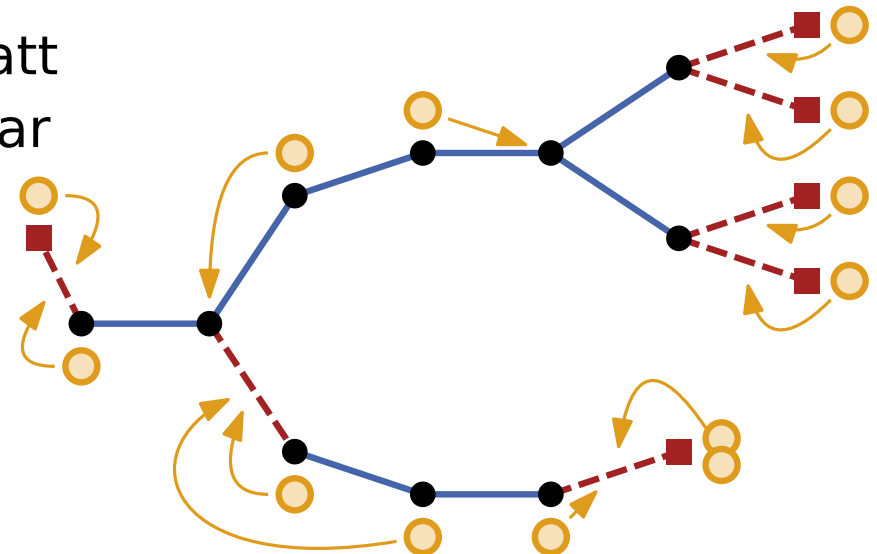
Lemma

(kleine Grade \Rightarrow wenig Blätter)

Die Reduktionsregeln 1 und 2 sorgen dafür, dass jeder Baum $\tau \in F$ maximal $c(\deg_1(\tau) + \deg_2(\tau))$ Blätter enthält (für kleine Konstante c).

Beweis

- starte mit einem Token bei jedem Blatt
- lösche blaue Blätter; Token \rightarrow Nachbar
 - keine neuen blauen Blätter
 - ~~≤ 2 Token pro rotes Blatt~~
 - ~~≤ 1 Token pro Grad-2 Knoten~~
- schiebe alle Token zu: nächstem [Grad-3 Knoten oder rote Kante]
 - ≤ 6 Token pro Grad-3 Knoten
 - ≤ 4 Token pro rote Kante



■ #Blätter = #Token $\leq 6n_3 + 4m_r \leq 6n_1 + 4m_r \leq 10m_r$

$n_3 = n_1 - 2$
(siehe Übungsblatt)

nur rote Blätter

n_3 : #Grad-3 Knoten n_1 : #Blätter m_r : #rote Kanten

Wenige Blätter pro Baum

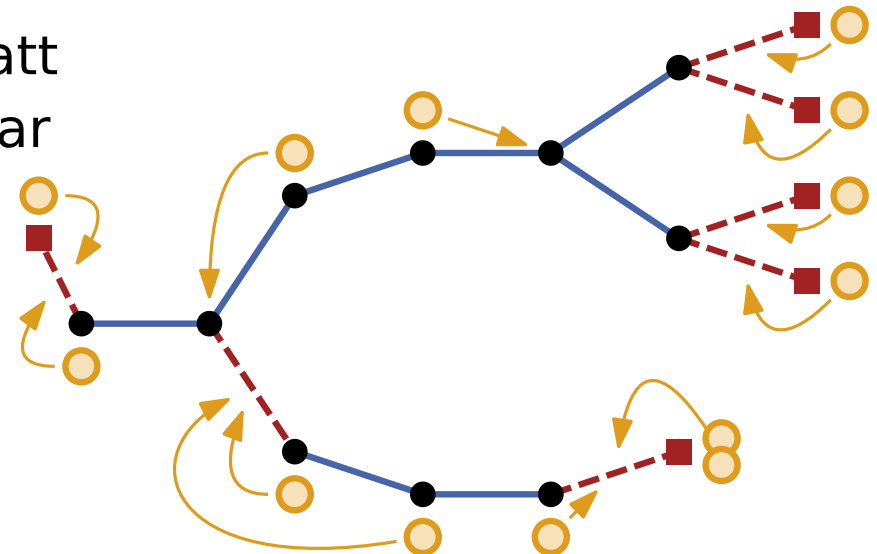
Lemma

(kleine Grade \Rightarrow wenig Blätter)

Die Reduktionsregeln 1 und 2 sorgen dafür, dass jeder Baum $\tau \in F$ maximal $c(\deg_1(\tau) + \deg_2(\tau))$ Blätter enthält (für kleine Konstante c).

Beweis

- starte mit einem Token bei jedem Blatt
- lösche blaue Blätter; Token \rightarrow Nachbar
 - keine neuen blauen Blätter
 - ~~≤ 2 Token pro rotes Blatt~~
 - ~~≤ 1 Token pro Grad-2 Knoten~~
- schiebe alle Token zu: nächstem [Grad-3 Knoten oder rote Kante]
 - ≤ 6 Token pro Grad-3 Knoten
 - ≤ 4 Token pro rote Kante



$$\# \text{Blätter} = \# \text{Token} \leq 6n_3 + 4m_r \leq 6n_1 + 4m_r \leq 10m_r \leq 10(\deg_1(\tau) + \deg_2(\tau))$$

$$n_3 = n_1 - 2$$

(siehe Übungsblatt)

nur rote Blätter

n_3 : #Grad-3 Knoten n_1 : #Blätter m_r : #rote Kanten

Zusammenfassung

Problem: MAXIMUM AGREEMENT FOREST

Gegeben sind T_1 , T_2 und ein Parameter k . Gibt es einen Agreement Forest mit maximal k Bäumen?

Theorem

MAXIMUM AGREEMENT FOREST hat einen Kern mit $O(k)$ vielen Blättern, der in polynomieller Zeit berechnet werden kann.

Zusammenfassung

Problem: MAXIMUM AGREEMENT FOREST

Gegeben sind T_1 , T_2 und ein Parameter k . Gibt es einen Agreement Forest mit maximal k Bäumen?

Theorem

MAXIMUM AGREEMENT FOREST hat einen Kern mit $O(k)$ vielen Blättern, der in polynomieller Zeit berechnet werden kann.

Methodik

- ein konkreteres Ziel als „ich will einen kleinen Kern“ kann helfen
(z.B.: ich will, dass jeder Baum in F nur wenige Blätter enthält)

Zusammenfassung

Problem: MAXIMUM AGREEMENT FOREST

Gegeben sind T_1 , T_2 und ein Parameter k . Gibt es einen Agreement Forest mit maximal k Bäumen?

Theorem

MAXIMUM AGREEMENT FOREST hat einen Kern mit $O(k)$ vielen Blättern, der in polynomieller Zeit berechnet werden kann.

Methodik

- ein konkreteres Ziel als „ich will einen kleinen Kern“ kann helfen
(z.B.: ich will, dass jeder Baum in F nur wenige Blätter enthält)
- Gegenbeispiele verraten, was wegreduziert werden muss

Zusammenfassung

Problem: MAXIMUM AGREEMENT FOREST

Gegeben sind T_1 , T_2 und ein Parameter k . Gibt es einen Agreement Forest mit maximal k Bäumen?

Theorem

MAXIMUM AGREEMENT FOREST hat einen Kern mit $O(k)$ vielen Blättern, der in polynomieller Zeit berechnet werden kann.

Methodik

- ein konkreteres Ziel als „ich will einen kleinen Kern“ kann helfen
(z.B.: ich will, dass jeder Baum in F nur wenige Blätter enthält)
- Gegenbeispiele verraten, was wegreduziert werden muss
- ggf. lohnt es, das Ziel später etwas aufzuweichen
(z.B.: amortisiert über alle Bäume in F statt für jeden einzelnen)

Zusammenfassung

Problem: MAXIMUM AGREEMENT FOREST

Gegeben sind T_1 , T_2 und ein Parameter k . Gibt es einen Agreement Forest mit maximal k Bäumen?

Theorem

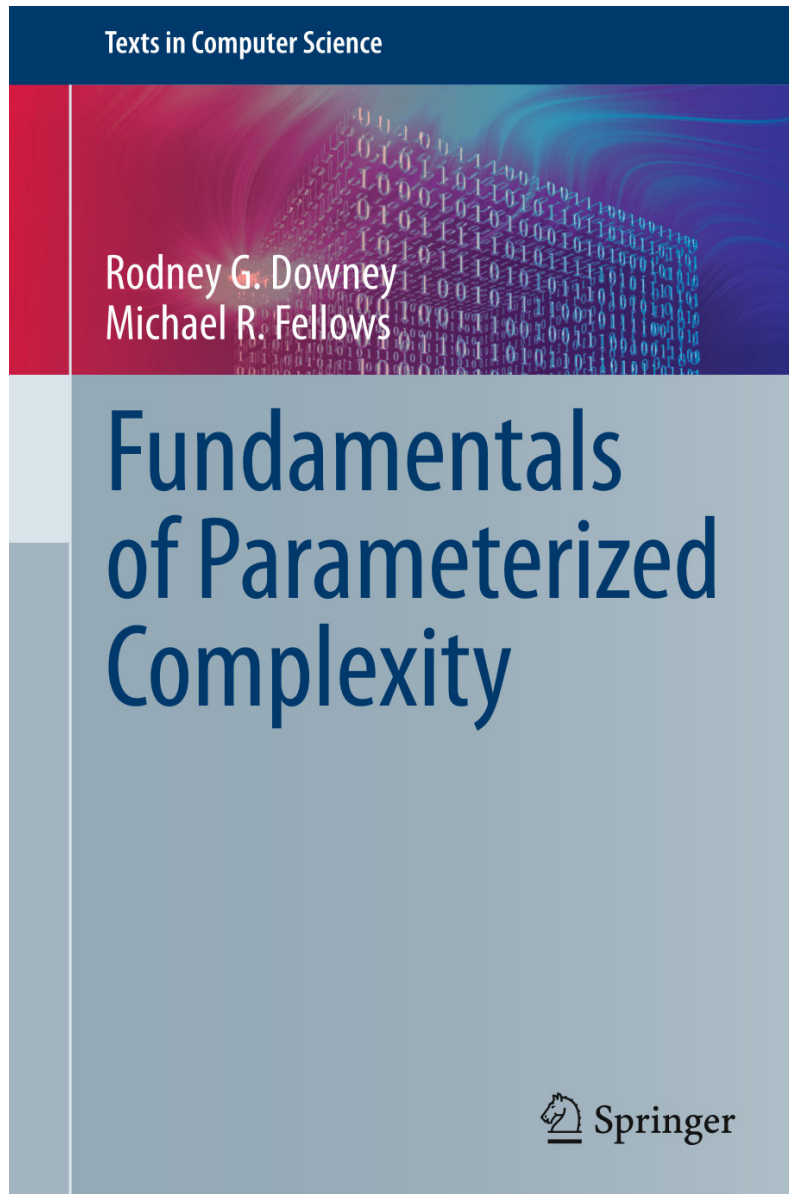
MAXIMUM AGREEMENT FOREST hat einen Kern mit $O(k)$ vielen Blättern, der in polynomieller Zeit berechnet werden kann.

Methodik

- ein konkreteres Ziel als „ich will einen kleinen Kern“ kann helfen
(z.B.: ich will, dass jeder Baum in F nur wenige Blätter enthält)
- Gegenbeispiele verraten, was wegreduziert werden muss
- ggf. lohnt es, das Ziel später etwas aufzuweichen
(z.B.: amortisiert über alle Bäume in F statt für jeden einzelnen)

Nicht gesehen heute

- konkrete Laufzeit für Kernbildung
- konkrete Laufzeit für anschließendes Brute-Force im Kern
 $O(4^k \cdot k^5)$ ist möglich



Anmerkungen

- Kapitel 4.10 handelt von dem eben betrachteten Thema
- enthält Links zur Originalliteratur
- aus dem Uninetz kostenlos abrufbar

link.springer.com/book/10.1007/978-1-4471-5559-1