Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Informatik
T.T.-Prof. Dr. Thomas Bläsius
`https://scale.iti.kit.edu`

Übungsblatt 10

Algorithmen I – Sommersemester 2022

Abgabe im ILIAS bis 06.07.2022, 14:00 Uhr

Bitte beschrifte Deine Abgabe gut sichtbar mit Deinem Namen und Deiner Matrikelnummer. Achte insbesondere bei handschriftlichen Abgaben auf Lesbarkeit und genügend Platz für Korrektur-Anmerkungen. Die Abgabe erfolgt über das Übungsmodul in der Gruppe Deines Tutoriums im ILIAS. Gib Deine Ausarbeitungen in *einer* PDF-Datei ab. Achte darauf, effiziente Algorithmen zu formulieren, also solche mit möglichst geringer asymptotischer Laufzeit!
Wenn du die Korrektheit eines Algorithmus begründen oder dessen Laufzeit analysieren sollst, tue dies getrennt von der Beschreibung des Algorithmus.
Wenn nicht anders spezifiziert oder aus dem Kontext ersichtlich, bezeichnen wir mit Graph einen einfachen ungerichteten Graphen.

Aufgabe 1 - Lauter Bäume (4 Punkte)

Entscheide für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist und begründe deine Antwort.

1. Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und seien $u, v \in V$. Angenommen, es gibt einen Pfad von u nach v in G. Dann liegt v in jedem an s gewurzeltem DFS-Baum von G im Teilbaum unter u. (1 Punkt)
2. Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und seien $u, v \in V$. Angenommen, es gibt einen Pfad von u nach v in G. Dann wird v von einer Tiefensuche auf G entdeckt, bevor u fertig abgearbeitet wurde. (1 Punkt)
3. Wir nennen einen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ *semi-zusammenhängend*, wenn für alle Paare von Knoten $u, v \in V$ gilt, dass u von v aus erreichbar ist oder v von u aus (oder beides). Es gibt gerichtete Graphen mit einer eindeutigen Quelle, die keine Kreise enthalten und *nicht* semi-zusammenhängend sind. (1 Punkt)
   Hinweis: Eine Quelle ist ein Knoten ohne eingehende Kanten.
4. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und $\{v, w\} \in E$ eine Kante von G. Dann ist v in jedem DFS-Baum von G Nachfahre oder Vorfahre von w. (1 Punkt)

Aufgabe 2 - Cut-Vertices (9 Punkte)

In einem Graph $G = (V, E)$ bezeichnen wir einen Knoten $v \in V$ als *cut-vertex*, wenn G durch das Löschen von v in mehrere Zusammenhangskomponenten zerfällt. In dieser Aufgabe überlegen wir uns, wie alle cut-vertices eines Graphen mittels DFS gefunden werden können.

1. Zeige, dass die Wurzel eines DFS-Baums genau dann ein cut-vertex von G ist, wenn sie mehr als ein Kind hat. (3 Punkte)

2. Zeige, dass ein Knoten v, der nicht die Wurzel des DFS-Baums ist, genau dann ein cut-vertex von G ist, wenn gilt: v hat ein Kind u im DFS-Baum, sodass es keine Rückkante aus dem Teilbaum unter u zu Vorfahren von v gibt. (2 Punkte)

3. Wie kann anhand der low-Werte im DFS-Baum entschieden werden, ob ein Knoten v, der nicht die Wurzel des DFS-Baums ist, ein cut-vertex ist? Begründe deine Antwort. (1 Punkt)

4. Gib einen Algorithmus an, der in $O(n + m)$ Zeit alle cut-vertices in G bestimmt. Begründe die Korrektheit deines Algorithmus und dass er das geforderte Laufzeitverhalten hat. (3 Punkte)

Aufgabe 3 - Handtuch nicht vergessen! (6 Punkte)

Die n Galaxien des Universums sind über m galaktische Hyperraum-Expressrouten verbunden, auf denen sich Reisende zwischen den Galaxien in beide Richtungen bewegen können. Die Reiseagentur von Ursa Minor Beta hat ein besonders gewieftes Preissystem entwickelt: jede*r Reisende kann kostenlos Fahrten unternehmen, die ihn oder sie weiter von seiner Heimatgalaxie weg bringen. Doch eine Reise, deren Endpunkt näher an der eigenen Heimatgalaxie liegt als ihr Startpunkt, ist exorbitant teuer.
Nachdem ihr Heimatplanet einer unglücklichen Infrastruktur-Maßnahme zum Opfer gefallen ist, beschließt Tricia McMillan, das Universum zu erkunden. Sie ist fest entschlossen, so viele Galaxien wie möglich zu sehen. Ihre Reise beginnt in ihrer Heimatgalaxie, zu der sie letztendlich auch wieder zurück möchte. Leider kann sie sich nur eine einzige Fahrt zu ihrer Heimatgalaxie hin leisten. Deswegen ist ihr Plan, ausschließlich Fahrten von ihrer Heimatgalaxie weg zu unternehmen, bis auf die letzte, die sie wieder zurück zu ihrem Startpunkt bringen soll. Tricia kennt den Abstand jeder Galaxie zu ihrer Heimatgalaxie und weiß außerdem, dass keine zwei Galaxien den gleichen Abstand zu ihrer Heimatgalaxie haben.

1. Beschreibe, wie das Verkehrsnetz zwischen den Galaxien als Graph modelliert werden kann. (1 Punkt)

2. Übersetze Tricias Problem in ein Problem auf deinem Graphen aus Teilaufgabe 1. (1 Punkt)

3. Beschreibe einen Algorithmus, der in $O(n+m)$ Zeit die maximale Anzahl an Galaxien berechnet, die Tricia besuchen kann. Du darfst hierbei annehmen, dass die Galaxien nach Abstand zur Heimatgalaxie sortiert vorliegen. Begründe die Korrektheit deines Algorithmus und warum er die geforderte Laufzeitbedingung einhält. (4 Punkte)
   Hinweis: Die Sortierung ist hilfreich.