

Übungsblatt 06

Algorithmen I – Sommersemester 2022

Abgabe im ILIAS bis 01.06.2022, 14:00 Uhr

Bitte beschrifte Deine Abgabe gut sichtbar mit Deinem Namen und Deiner Matrikelnummer. Achte insbesondere bei handschriftlichen Abgaben auf Lesbarkeit und genügend Platz für Korrektur-Anmerkungen. Die Abgabe erfolgt über das Übungsmodul in der Gruppe Deines Tutoriums im ILIAS. Gib Deine Ausarbeitungen in *einer* PDF-Datei ab. Achte darauf, effiziente Algorithmen zu formulieren, also solche mit möglichst geringer asymptotischer Laufzeit!

Aufgabe 1 - Ich bin Groot! (8 Punkte)

In der Vorlesung wurde definiert, dass ein Baum ein zusammenhängender und kreisfreier Graph ist. Tatsächlich haben Bäume noch weitere spannende Eigenschaften, von denen wir einige in dieser Aufgabe kennenlernen.

Wir beschränken uns dabei auf Graphen mit mindestens einem Knoten.

1. Zeige, dass jeder Baum mindestens ein Blatt, also einen Knoten mit Grad höchstens 1, enthält. (2 Punkte)
2. Sei T ein Graph mit n Knoten. Angenommen, T hat zwei der folgenden Eigenschaften
 - a) T ist zusammenhängend,
 - b) T ist kreisfrei,
 - c) T hat $n - 1$ Kanten,

Zeige, dass T dann auch die dritte Eigenschaft hat. (6 Punkte)

Aufgabe 2 - BFS (12 Punkte)

Die Breitensuche (BFS) ist ein mächtiges Werkzeug zum Explorieren eines Graphen. In der Vorlesung wurde Pseudocode vorgestellt, um mittels einer BFS die Knoten eines Graphen einzufärben (siehe Vorlesung 8, Folie 8, *Pseudocode (Endergebnis) BFS(...)*). Im Folgenden sollen Adaptionen der BFS entwickelt werden, die ihre asymptotische Laufzeit nicht verändern.

Hinweis: Du darfst annehmen, dass die n Knoten in einem Graphen durch die Zahlen $0, \dots, n-1$ repräsentiert werden. Achte darauf in welcher Aufgabe Pseudocode gefordert ist und wo Algorithmen textuell beschrieben werden sollen.

1. Gib aufbauend auf den `BFS(...)` Pseudocode einen Algorithmus im Pseudocode an, der einen ungerichteten und ungewichteten Graphen G zusammen mit einem Knoten s erhält und eine Datenstruktur ausgibt, aus der man für jeden Knoten t in Zeit $O(1)$ die Distanz $\text{dist}(s, t)$ in G ablesen kann. Beschreibe welche Datenstruktur du wählst und welcher Wert in einem gegebenen Eintrag gespeichert wird.
(3 Punkte)
2. Anstatt der Distanz zwischen zwei Knoten s und t soll nun ein kürzester Pfad zwischen ihnen bestimmt werden. Beschreibe einen Algorithmus, der einen gerichteten und ungewichteten Graph G zusammen mit zwei Knoten s und t erhält und aufbauend auf eine BFS einen kürzesten Pfad von s nach t bestimmt. Beschreibe dafür zuerst, welche Hilfsdatenstruktur du dazu wählst und welcher Wert in einem gegebenen Eintrag gespeichert wird. Beschreibe einen weiteren Algorithmus der im Nachhinein in $O(n)$ den kürzesten Pfad aus deiner Hilfsdatenstruktur rekonstruiert.
(4 Punkte)
3. Wir wollen nun untersuchen, ob ein Graph G *bipartit* ist. Das ist genau dann der Fall, wenn man seine Knotenmenge in zwei Teilmengen zerlegen kann, sodass zwischen den Knoten innerhalb einer Menge keine Kanten verlaufen. Aufbauend auf den `BFS(...)` Pseudocode, gib einen Algorithmus im Pseudocode an, der einen ungerichteten und ungewichteten Graphen G erhält und ausgibt, ob G bipartit ist. Begründe die Korrektheit deines Algorithmus.
Hinweis: Können benachbarte Knoten in der gleichen Partition sein? Beachte, dass sich hier die Eingabe des Algorithmus von dem im `BFS(...)` Pseudocode unterscheidet.
(5 Punkte)



Wahlen der Verfassten Studierendenschaft

Du möchtest gerne mitbestimmen, wer uns Studierende gegenüber dem KIT vertritt?

Vom **30. Mai bis 03. Juni** wird gewählt!

Dabei geht es um den **Fachschaftsvorstand**, der die Studierenden gegenüber der Fakultät vertritt und die Fachschaftsarbeit koordiniert, und um das

Studierendenparlament, welches das KIT-weite legislative Gremium der VS ist.

Gewählt werden kann den ganzen Tag über bei den Wahlurnen, insbesondere im Mathebau-Atrium, vor dem Infobau und in der Mensa. Außerdem gibt es dort **Kekse!**