Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Informatik
T.T.-Prof. Dr. Thomas Bläsius
https://scale.iti.kit.edu

Übungsblatt 05

Algorithmen I - Sommersemester 2022

Abgabe im ILIAS bis 25.05.2022, 14:00 Uhr

Bitte beschrifte Deine Abgabe gut sichtbar mit Deinem Namen und Deiner Matrikelnummer. Achte insbesondere bei handschriftlichen Abgaben auf Lesbarkeit und genügend Platz für Korrektur-Anmerkungen. Die Abgabe erfolgt über das Übungsmodul in der Gruppe Deines Tutoriums im ILIAS. Gib Deine Ausarbeitungen in *einer* PDF-Datei ab.
Achte darauf, effiziente Algorithmen zu formulieren, also solche mit möglichst geringer asymptotischer Laufzeit!

Aufgabe 1 - RadixSort (3 Punkte)

Gib Pseudocode für den RADIXSORT Algorithmus aus Vorlesung 6 an, um n Zahlen aus dem Intervall $[0, n^c)$ in Linearzeit zu sortieren. Nutze dabei die folgende Signatur:

RADIXSORT(A: [$\mathbb{N}$; n], c: $\mathbb{N}$) : [$\mathbb{N}$; n]

Hinweis: Dir steht die Methode BUCKETSORT aus der sechsten Vorlesung zur Verfügung und du darfst beispielsweise über $A[i]$.key Keys für die Elemente in A setzen.

Aufgabe 2 - Dr. Meta ermittelt (5 Punkte)

Noch immer fahndet Dr. Meta entschlossen nach dem Verräter in den eigenen Reihen. Mit deiner Hilfe konnte er mehrere verdächtige Personen unter seinen Handlangern ausmachen. Doch alle von ihnen behaupten, zu der Zeit, zu der in das Labor eingebrochen wurde, bei der Arbeit gewesen zu sein. Dabei sollen sie sogar von anderen Handlangern gesehen worden sein. Dr. Meta entschließt sich also, die angeblichen Zeugen zu befragen. Leider hat er sich dafür kein System überlegt, sondern notiert sich bei jeder Befragung nur, welcher Verdächtige gesehen wurde. Damit hat er nur eine Sammlung von n Verweisen auf je eine verdächtigte Person. Natürlich ist Dr. Meta nicht so naiv, einer einzigen Zeugenaussage zu vertrauen. Er betrachtet eine Person erst als entlastet, wenn k andere

Handlanger für ihn oder sie bürgen. Doch auf welche der Verdächtigten trifft das zu? Du hast dich bisher als äußert kompetent in der Unterstützung von Dr. Meta erwiesen. Beweise dein Können erneut!
In dieser Aufgabe darfst du davon ausgehen, mithilfe einer universellen Familie von Hashfunktionen Hashmaps verwenden zu können, die erwartet konstante Zugriffszeiten haben.

1. Beschreibe einen Algorithmus, der für eine Zahl k und ein Array A mit n Einträgen in erwartet $O(n)$ Zeit entscheidet, ob es einen Eintrag $e \in A$ gibt, der mehr als k mal in A vorkommt. Begründe die Korrektheit deines Algorithmus und warum er das geforderte Laufzeitverhalten hat. (2 Punkte)

2. Beschreibe einen Algorithmus, der für eine Zahl k und ein Array A, welches n ganze Zahlen enthält, in erwartet $O(n)$ Zeit entscheidet, ob es Indizes i, j gibt, sodass $A[i] + A[j] = k$. Begründe die Korrektheit deines Algorithmus und warum er das geforderte Laufzeitverhalten hat. (3 Punkte)

Aufgabe 3 - Schlechte Hashfunktionen (5 Punkte)

Sei $M \in \mathbb{N}$, $U = \{0, 1, \ldots, M-1\}$ ein Universum an Schlüsseln und $m \ll M$ die Größe einer Hashtabelle. Gib für jede der folgenden „Hashfunktionen" an, wieso sie keine geeignete Hashfunktion ist.

1. $h : x \mapsto (2x + 1) \mod m$ für gerades m
2. $h : x \mapsto \lfloor \frac{x}{m} \rfloor \mod m$
3. $h : x \mapsto (x \mod m) + \lfloor \frac{m}{x+1} \rfloor$
4. $h : x \mapsto (x + \textsc{random}(1, m-1)) \mod m$
   wobei $\textsc{random}$ bei jedem Aufruf eine zufällige Zahl ausgibt, die uniform zwischen 1 und $m - 1$ gewählt wird.
5. $h : x \mapsto \lfloor \frac{M}{x+1} \rfloor \mod m$

Aufgabe 4 - Familien von Hashfunktionen (6 Punkte)

Sei $M \in \mathbb{N}$, $U = \{0, 1, \ldots, M-1\}$ ein Universum an Schlüsseln und $m \ll M$ die Größe einer Hashtabelle.

1. Wir sagen eine Menge $\mathcal{H}$ von Hashfunktionen ist eine *fast universelle* Familie, wenn für alle $k_1, k_2 \in U$ mit $k_1 \neq k_2$ und ein zufälliges $h \in \mathcal{H}$ gilt, dass $\Pr[h(k_1) = h(k_2)] \leq 2/m$. Gegeben sei eine Hashtabelle auf Basis einer Hashfunktion aus einer fast universellen Familie. Nimm an, dass darin n Elemente eingefügt wurden und zeige, dass die erwartete Größe eines Buckets immer noch konstant ist, wenn $m \in \Theta(n)$. (2 Punkte)

2. Sei $\mathcal{H} = \{h : x \mapsto (42x + a) \mod m \mid a \in U\}$. Zeige, dass $\mathcal{H}$ keine universelle Familie ist. (2 Punkte)

3. Sei $\mathcal{H} = \{h : x \mapsto (a \cdot x^2) \mod m \mid a \in U\}$. Zeige, dass $\mathcal{H}$ keine universelle Familie ist. (2 Punkte)