Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Informatik
T.T.-Prof. Dr. Thomas Bläsius
https://scale.iti.kit.edu

Übungsblatt 02

Algorithmen I - Sommersemester 2022

Abgabe im ILIAS bis 04.05.2022, 14:00 Uhr

Bitte beschrifte Deine Abgabe gut sichtbar mit Deinem Namen und Deiner Matrikelnummer. Achte insbesondere bei handschriftlichen Abgaben auf Lesbarkeit und genügend Platz für Korrektur-Anmerkungen. Die Abgabe erfolgt über das Übungsmodul in der Gruppe Deines Tutoriums im ILIAS. Gib Deine Ausarbeitungen im PDF-Format ab.

Aufgabe 1 - Rekurrenzen aufstellen (7 Punkte)

Gegeben seien die beiden Algorithmen algOne und algTwo.
Achtung: Wir fordern für diese Aufgabe, dass für den initialen Aufruf von algOne der zweite Eingabeparameter stets größer ist als der erste.

```
algOne(x: ℕ, y: ℕ): ℕ
    if x = 0 ∨ x = y then
        return 1
    end
    return algOne(x - 1, y - 1) + algOne(x, y - 1)
```

```
algTwo(x: ℕ, y: ℕ): ℕ
    if x ≥ y then
        return x
    end
    total : ℕ = algTwo(x, ⌊(y+3x)/4⌋)
    total += algTwo(⌈(y+3x)/4⌉, ⌊(y+x)/2⌋)
    total += algTwo(⌈(y+x)/2⌉, ⌊(3y+x)/4⌋)
    return total
```

1. Wir haben Laufzeiten und Rekurrenzen in Abhängigkeit von Problemgrößen kennengelernt. Beschreibe für beide Algorithmen, was ihre Problemgröße ist. (2 Punkte)

2. Stelle nun für beide Algorithmen die Rekurrenzgleichung auf. (2 Punkte)

3. Ist das Mastertheorem für die Rekurrenzgleichung von algOne anwendbar? Begründe deine Antwort kurz. (1 Punkt)

4. Bestimme eine eine möglichst enge asymptotische obere Schranke für die Laufzeit von algOne. (1 Punkt)

5. Bestimme eine eine möglichst enge asymptotische obere Schranke für die Laufzeit von algTwo. (1 Punkt)

Aufgabe 2 - Rekurrenzen Lösen (6 Punkte)

In Vorlesung 2 haben wir das Mastertheorem zum Lösen von Rekurrenzen kennen gelernt. Besonders interessant ist hier die Herleitung, bei der die Kosten des Rekursionsbaums in jeder Ebene betrachtet wurden.

Verwende daher zum Lösen der folgenden Rekurrenzen die gleiche Technik und überlege analog zu Folie 13

- Wie viele Knoten sind auf Lage i?
- Wie groß ist das n auf Lage i?
- Wie viel Zeit kostet ein Knoten in Lage i?

um somit die Gesamtkosten für Lage i und hieraus die Gesamtkosten abzuleiten.

1.
$$T_1(n) = \begin{cases} 1 & \mid n = 1 \\ 4 \cdot T_1(\frac{n}{2}) + \sqrt{3n} + 1 & \mid \text{sonst} \end{cases}$$

2.
$$T_2(n) = \begin{cases} 1 & \mid n = 1 \\ 14 \cdot T_2(\frac{n}{4}) + T_1(n) & \mid \text{sonst} \end{cases}$$

3.
$$T_3(n) = \begin{cases} 1 & \mid n = 1 \\ 4 \cdot T_3(\frac{n}{2}) + n^2 & \mid \text{sonst} \end{cases}$$

4.
$$T_4(n) = \begin{cases} 1 & \mid n = 1 \\ 4 \cdot T_4(\frac{n}{3}) + n^2 \log n & \mid \text{sonst} \end{cases}$$

Hinweis: Für $0 \leq c < 1$ gilt sowohl $0 < \sum_{i=0}^{\infty} c^i < \infty$ als auch $0 < \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot c^i < \infty$.

Aufgabe 3 - Dr. Meta sieht alles (6 Punkte)

Das Böse schläft nie. Auch der gewiefte und wissbegierige Superbösewicht Dr. Meta hat seine Augen überall. Das gilt insbesondere für sein eigenes geheimes Labor, welches er streng überwacht. Dazu hat er Sicherheitskameras über das gesamte Labor verteilt. Jede Kamera hat eine eindeutige Koordinate $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. Jede Koordinate hat dabei genau vier Nachbarn. Zwei Koordinaten (x, y) und (x', y') sind benachbart, wenn

$|x - x'|+|y - y'| = 1$ gilt.
Dr. Metas Vorsicht ist begründet: In den letzten Wochen wurden immer wieder verdächtige Spuren gefunden, die nur von einem Eindringling stammen können. Um zu verstehen, wie dieser entkommen konnte, will Dr. Meta herausfinden, wo sein Weg endete. Dazu will er die Spuren entlang benachbarter Koordinaten verfolgen.
Natürlich kann Dr. Meta als vielbeschäftigter Schurke diese Aufgabe nicht übernehmen und gibt sie an dich weiter. Es liegt also an dir, den Eindringling dingfest zu machen!
Dazu steht die Hilfsmethode

TRACEOBSERVED(x: $\mathbb{N}$, y : $\mathbb{N}$): Bool

bereit. Diese gibt zurück, ob von der Kamera an der übergebenen Koordinate Spuren aufgenommen wurden. Falls an der übergebenen Koordinate keine Sicherheitskamera angebracht wurde, gibt sie den Wert `false` zurück.
Der Eindringling war sehr geschickt und scheint darauf geachtet zu haben, das Labor so schnell wie möglich zu durchqueren. Du darfst deswegen davon ausgehen, dass der Eindringling auf seinem Weg keine Koordinate mehr als ein Mal besucht hat und sich in der Nachbarschaft jeder Koordinate höchstens zwei Spuren befinden.
Hinweis: In der Nachbarschaft der Koordinaten, die den Beginn und das Ende eines Weges bezeichnen, befindet sich jeweils nur eine Koordinate mit Spuren.

1. Angenommen, der Weg führt von Koordinate (x, y) zur benachbarten Koordinate (x', y'). Wie findet man von (x', y') aus die korrekte nächste Koordinate? (2 Punkte)

2. Beschreibe, wie die Koordinate bestimmt werden kann, an der der Weg endet, der an einer gegebenen Koordinate (x, y) beginnt. (1 Punkt)

3. Formuliere nun einen rekursiven Algorithmus in Pseudocode, der das gleiche Problem löst. Beschreibe kurz, welchen Nutzen die Eingabeparameter deines Algorithmus haben. (1 Punkt)

4. Sei wieder eine Koordinate (x, y) gegeben, an der ein Weg beginnt. Wie muss dein Algorithmus aus 3. initial aufgerufen werden, um diesen Weg zu verfolgen?

5. Wie muss dein Algorithmus aus 3. abgeändert werden, um ihn zu einem iterativen Algorithmus umzuwandeln? (1 Punkt)

6. Gib eine Abschätzung für die Laufzeit deines Algorithmus im O-Kalkül an, mit der Dr. Meta im schlimmsten Fall rechnen muss. Die Laufzeit soll dabei in Abhängigkeit von der Anzahl an Koordinaten, an denen sich Spuren befinden, betrachtet werden. Unterscheiden sich die iterative und die rekursive Umsetzung bezüglich ihrer asymptotischen Laufzeit? (1 Punkt)

Sommereulenfest

Es ist soweit, am 14. Juli findet endlich wieder das Eulenfest statt. Dafür braucht die Fachschaft eure Hilfe. Das Eulenfest ist eine große Party auf dem Campus, die traditionell von Ersties für Ersties organisiert wird. Wenn du also Lust hast selbst mal ein Fest zu organisieren, schau einfach vorbei am Dienstag den **03. Mai um 19:30 Uhr** beim ersten **Eulenfestorgatreffen**.