

Algorithmen 1

Teile und Herrsche Karatsubas Algorithmus und Master-Theorem



Multiplikation: Idee → Code

Wie geht das nochmal?

$$\begin{array}{r}
 \overbrace{5\ 6\ 7\ 8}^a \cdot \overbrace{1\ 2\ 3\ 4}^b \\
 \underline{5\ 6\ 7\ 8} \\
 1\ 1\ 3\ 5\ 6 \\
 1\ 7\ 0\ 3\ 4 \\
 + \quad 2\ 2\ 7\ 1\ 2 \\
 \hline
 7\ 0\ 0\ 6\ 6\ 5\ 2
 \end{array}$$

- berechne $a \cdot b_i$ für jede Ziffer b_i von $b = (b_{n-1} \dots b_0)$
- verschiebe Ergebnis um i Stellen nach links
- addiere Ergebnisse

Hohe Abstraktionsebene

- leicht zu verstehen
- schwer zu implementieren

Multiplikation: Idee → Code

Wie geht das nochmal?

$$\begin{array}{r}
 \overbrace{5\ 6\ 7\ 8}^a \cdot \overbrace{1\ 2\ 3\ 4}^b \\
 \underline{5\ 6\ 7\ 8} \\
 \underline{1\ 1\ 3\ 5\ 6} \\
 \underline{1\ 7\ 0\ 3\ 4} \\
 + \underline{2\ 2\ 7\ 1\ 2} \\
 \hline
 7\ 0\ 0\ 6\ 6\ 5\ 2
 \end{array}$$

- berechne $a \cdot b_i$ für jede Ziffer b_i von $b = (b_{n-1} \dots b_0)$
- verschiebe Ergebnis um i Stellen nach links
- addiere Ergebnisse

Hohe Abstraktionsebene

- leicht zu verstehen
- schwer zu implementieren

Konkretisierung mittels Pseudocode

mult(a, b)

total := 0

for i from 0 to $n - 1$ **do**

 prod := $a \cdot b_i \cdot 10^i$

 total := total + prod

return total

Multiplikation: Idee → Code

Wie geht das nochmal?

$$\begin{array}{r}
 \overbrace{5\ 6\ 7\ 8}^a \cdot \overbrace{1\ 2\ 3\ 4}^b \\
 \underline{5\ 6\ 7\ 8} \\
 \underline{1\ 1\ 3\ 5\ 6} \\
 \underline{1\ 7\ 0\ 3\ 4} \\
 + \underline{2\ 2\ 7\ 1\ 2} \\
 \hline
 7\ 0\ 0\ 6\ 6\ 5\ 2
 \end{array}$$

- berechne $a \cdot b_i$ für jede Ziffer b_i von $b = (b_{n-1} \dots b_0)$
- verschiebe Ergebnis um i Stellen nach links
- addiere Ergebnisse

Hohe Abstraktionsebene

- leicht zu verstehen
- schwer zu implementieren

Konkretisierung mittels Pseudocode

mult(a, b)

total := 0

for i from 0 to $n - 1$ **do**

 prod := $a \cdot b_i \cdot 10^i$

 total := total + prod

return total

relativ mächtige Operationen
→ relative hohe Abstraktionsebene

Multiplikation: Idee → Code

Wie geht das nochmal?

$$\begin{array}{r}
 \overbrace{5\ 6\ 7\ 8}^a \cdot \overbrace{1\ 2\ 3\ 4}^b \\
 \underline{5\ 6\ 7\ 8} \\
 \underline{1\ 1\ 3\ 5\ 6} \\
 \underline{1\ 7\ 0\ 3\ 4} \\
 + \underline{2\ 2\ 7\ 1\ 2} \\
 \hline
 7\ 0\ 0\ 6\ 6\ 5\ 2
 \end{array}$$

- berechne $a \cdot b_i$ für jede Ziffer b_i von $b = (b_{n-1} \dots b_0)$
- verschiebe Ergebnis um i Stellen nach links
- addiere Ergebnisse

Hohe Abstraktionsebene

- leicht zu verstehen
- schwer zu implementieren

Konkretisierung mittels Pseudocode

mult(a, b)

```

total := 0
for  $i$  from 0 to  $n - 1$  do
    prod :=  $a \cdot b_i \cdot 10^i$ 
    total := total + prod
return total
  
```

$a \cdot b_i$

```

carry := 0 // carry (Übertrag)
for  $j$  from 0 to  $n - 1$  do
    ( $carry, c_j$ ) :=  $a_j \cdot b_i + carry$  //  $c_j$ : result digit
 $c_n := carry$ 
return ( $c_n, \dots, c_0$ )
  
```

Multiplikation: Idee → Code

Wie geht das nochmal?

$$\begin{array}{r}
 \overbrace{5\ 6\ 7\ 8}^a \cdot \overbrace{1\ 2\ 3\ 4}^b \\
 \underline{5\ 6\ 7\ 8} \\
 \underline{1\ 1\ 3\ 5\ 6} \\
 \underline{1\ 7\ 0\ 3\ 4} \\
 + \underline{2\ 2\ 7\ 1\ 2} \\
 \hline
 7\ 0\ 0\ 6\ 6\ 5\ 2
 \end{array}$$

- berechne $a \cdot b_i$ für jede Ziffer b_i von $b = (b_{n-1} \dots b_0)$
- verschiebe Ergebnis um i Stellen nach links
- addiere Ergebnisse

Hohe Abstraktionsebene

- leicht zu verstehen
- schwer zu implementieren

Konkretisierung mittels Pseudocode

mult(a, b)

```

total := 0
for  $i$  from 0 to  $n - 1$  do
    prod :=  $a \cdot b_i \cdot 10^i$ 
    total := total + prod
return total
  
```

$a \cdot b_i$

```

carry := 0 //  $O(1)$ 
for  $j$  from 0 to  $n - 1$  do //  $O(n)$ 
    ( $carry, c_j$ ) :=  $a_j \cdot b_i + carry$  //  $O(1)$ 
 $c_n := carry$  //  $O(1)$ 
return ( $c_n, \dots, c_0$ ) //  $O(n)$ 
  
```

Multiplikation: Idee → Code

Wie geht das nochmal?

$$\begin{array}{r}
 \overbrace{5\ 6\ 7\ 8}^a \cdot \overbrace{1\ 2\ 3\ 4}^b \\
 \underline{5\ 6\ 7\ 8} \\
 \underline{1\ 1\ 3\ 5\ 6} \\
 \underline{1\ 7\ 0\ 3\ 4} \\
 + \underline{2\ 2\ 7\ 1\ 2} \\
 \hline
 7\ 0\ 0\ 6\ 6\ 5\ 2
 \end{array}$$

- berechne $a \cdot b_i$ für jede Ziffer b_i von $b = (b_{n-1} \dots b_0)$
- verschiebe Ergebnis um i Stellen nach links
- addiere Ergebnisse

Hohe Abstraktionsebene

- leicht zu verstehen
- schwer zu implementieren

Konkretisierung mittels Pseudocode

```

mult( $a, b$ )                                     //  $O(n^2)$ 
|
| total := 0                                       //  $O(1)$ 
| for  $i$  from 0 to  $n - 1$  do                       //  $O(n^2)$ 
| |
| | prod :=  $a \cdot b_i \cdot 10^i$                  //  $O(n)$ 
| | total := total + prod                          //  $O(n)$ 
| return total                                    //  $O(n)$ 

```

```

 $a \cdot b_i$                                        //  $O(n)$ 
|
| carry := 0                                       //  $O(1)$ 
| for  $j$  from 0 to  $n - 1$  do                       //  $O(n)$ 
| |
| | ( $carry, c_j$ ) :=  $a_j \cdot b_i + carry$          //  $O(1)$ 
|  $c_n := carry$                                     //  $O(1)$ 
| return ( $c_n, \dots, c_0$ )                       //  $O(n)$ 

```

Einschub: Pseudocode

Nutzen

- interpoliert zwischen hoher und niedriger Abstraktionsebene
- viele mächtige Operationen → hohe Abstraktionsebene → Ideenvermittlung
- nur primitive Operationen → tiefe Abstraktionsebene → tatsächliche Implementierung
- kann helfen von der high-level Idee zu einer Implementierung zu kommen
- kann bei der Analyse (Laufzeit und Korrektheit) helfen

Einschub: Pseudocode

Nutzen

- interpoliert zwischen hoher und niedriger Abstraktionsebene
- viele mächtige Operationen → hohe Abstraktionsebene → Ideenvermittlung
- nur primitive Operationen → tiefe Abstraktionsebene → tatsächliche Implementierung
- kann helfen von der high-level Idee zu einer Implementierung zu kommen
- kann bei der Analyse (Laufzeit und Korrektheit) helfen

Regeln

- in der Vorlesung: Syntax wird immer on-the-fly miterklärt
- flexibler als bei richtiger Programmiersprache (z.B. mathematische Formeln)
- man kann auch etwas kreativ sein, sollte es aber konsistent halten
- Hauptziele:
 - gut lesbar (für Menschen)
 - richtige Abstraktionsebene

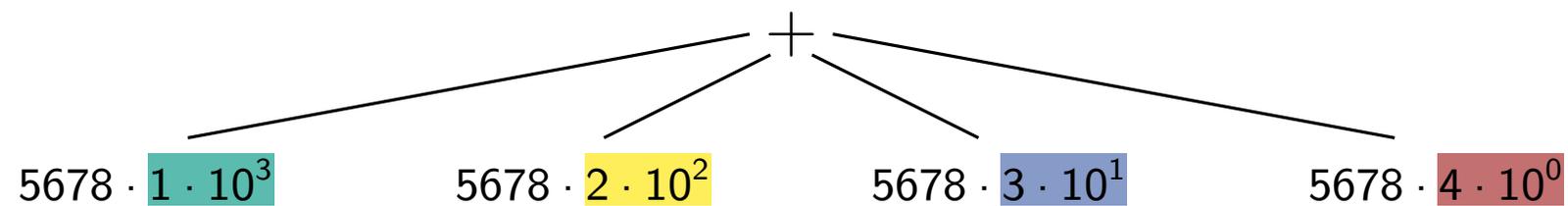
Teile und Herrsche

Schriftliche Multiplikation

$$5678 \cdot 1234 = 5678 \cdot (1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0)$$

Teile und Herrsche

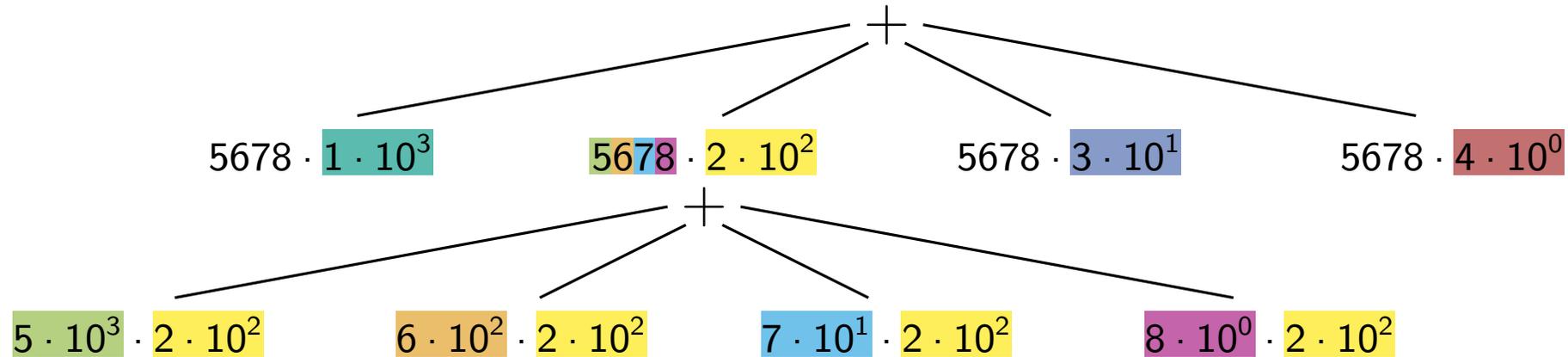
Schriftliche Multiplikation

$$5678 \cdot 1234 = 5678 \cdot (1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0)$$

$$5678 \cdot 1 \cdot 10^3 \quad 5678 \cdot 2 \cdot 10^2 \quad 5678 \cdot 3 \cdot 10^1 \quad 5678 \cdot 4 \cdot 10^0$$

Teile und Herrsche

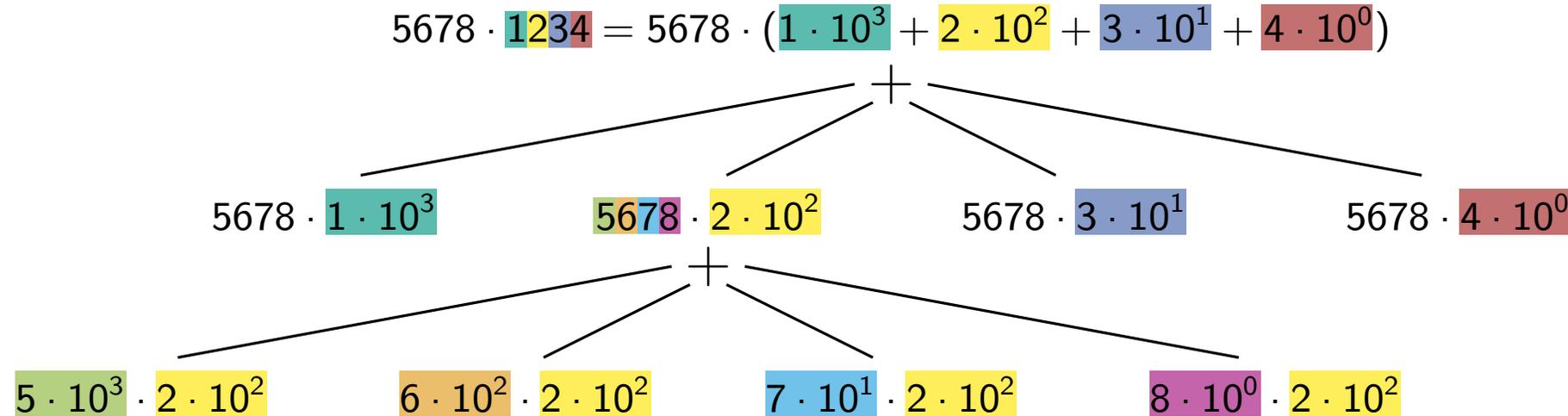
Schriftliche Multiplikation

$$5678 \cdot 1234 = 5678 \cdot (1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0)$$



Teile und Herrsche

Schriftliche Multiplikation

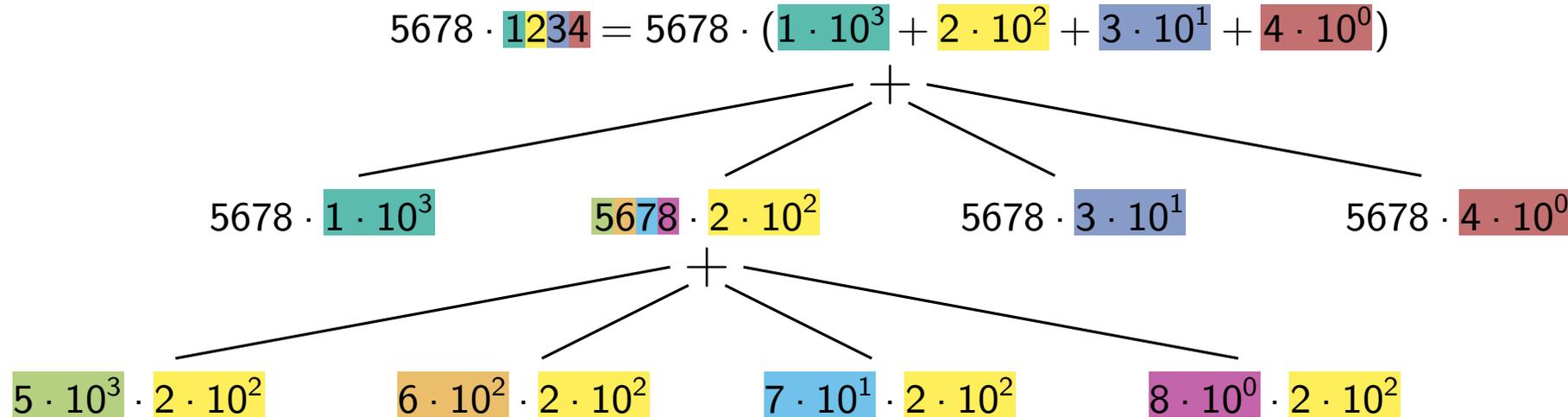


Idee im Kern

- spalte schwieriges Problem in mehrere leichtere Probleme
- wiederhole das, bis die Instanz trivial ist

Teile und Herrsche

Schriftliche Multiplikation



Idee im Kern

- spalte schwieriges Problem in mehrere leichtere Probleme
- wiederhole das, bis die Instanz trivial ist
- hier: Problem selbst wird substantziell leichter (Zahl \rightarrow Ziffer)
- allgemein: Problem bleibt gleich, aber Instanz wird leichter (z.B. kleineres n)

Teile und Herrsche

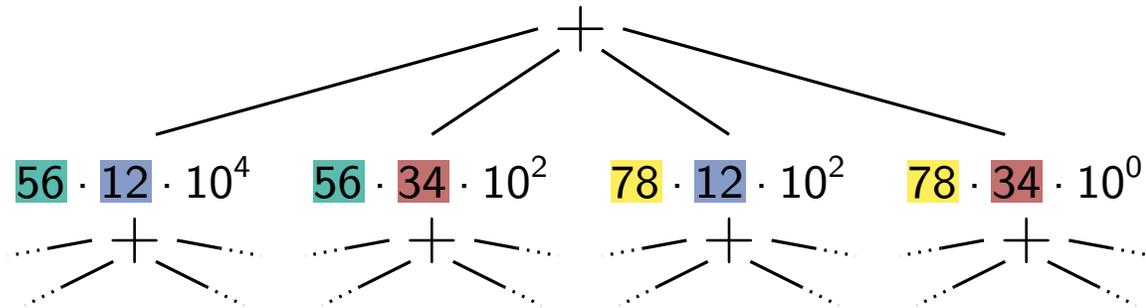
Multiplikation mit anderer Zerlegung

$$5678 \cdot 1234 = (56 \cdot 10^2 + 78) \cdot (12 \cdot 10^2 + 34)$$

Teile und Herrsche

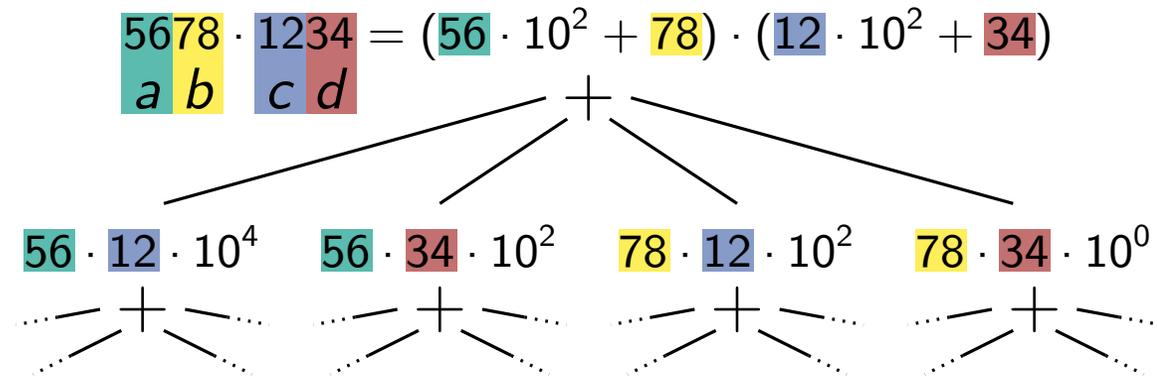
Multiplikation mit anderer Zerlegung

$$5678 \cdot 1234 = (56 \cdot 10^2 + 78) \cdot (12 \cdot 10^2 + 34)$$



Teile und Herrsche

Multiplikation mit anderer Zerlegung



mult(x, y)

// assumption: $n = |x| = |y| = 2^k$ for $k \in \mathbb{N}$

if $n = 1$ **return** $x \cdot y$

a, b := first and second half of x

c, d := first and second half of y

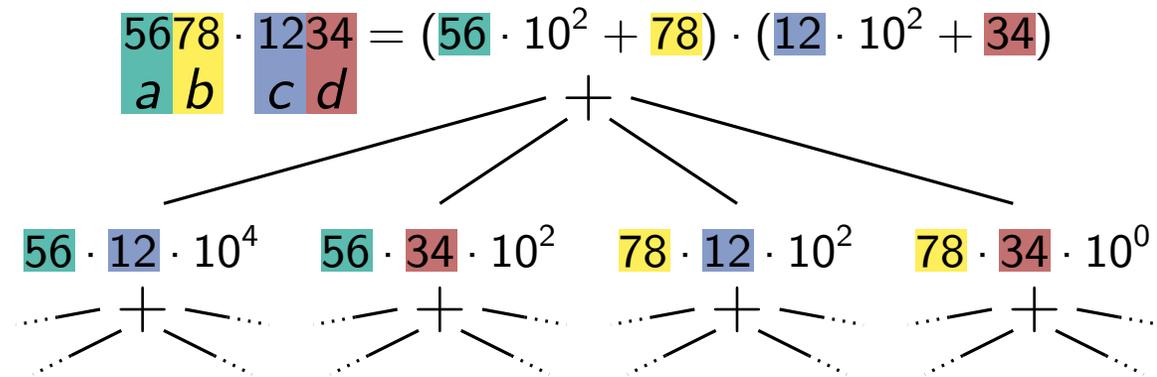
return **mult**(a, c) $\cdot 10^n$ + **mult**(b, d)

+ (**mult**(a, d) + **mult**(c, b)) $\cdot 10^{n/2}$



Teile und Herrsche

Multiplikation mit anderer Zerlegung



mult(x, y)

// assumption: $n = |x| = |y| = 2^k$ for $k \in \mathbb{N}$

if $n = 1$ **return** $x \cdot y$

a, b := first and second half of x

c, d := first and second half of y

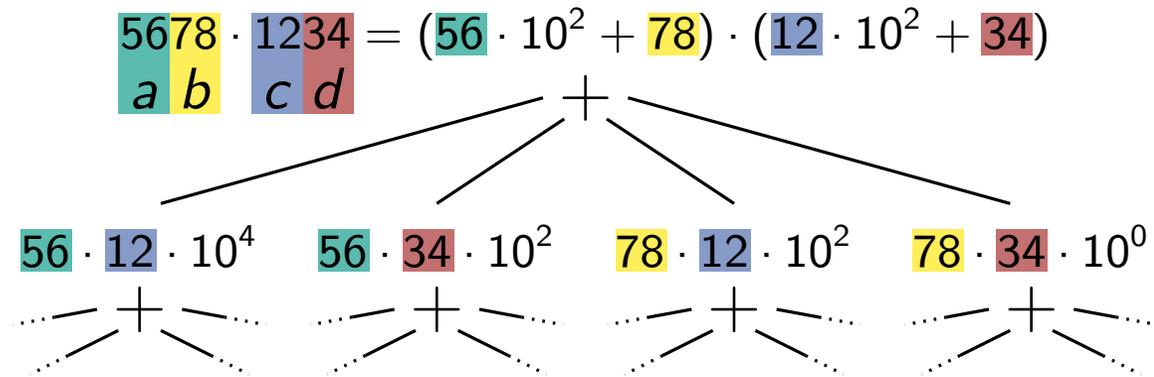
return **mult**(a, c) $\cdot 10^n$ + **mult**(b, d)

+ (**mult**(a, d) + **mult**(c, b)) $\cdot 10^{n/2}$

Wie groß ist der Rekursionsbaum?

Teile und Herrsche

Multiplikation mit anderer Zerlegung



Größe des Rekursionsbaums

- jeder Knoten hat 4 Kinder \rightarrow Lage i hat 4^i Knoten

`mult(x, y)`

// assumption: $n = |x| = |y| = 2^k$ for $k \in \mathbb{N}$

if $n = 1$ **return** $x \cdot y$

$\boxed{a}, \boxed{b} :=$ first and second half of x

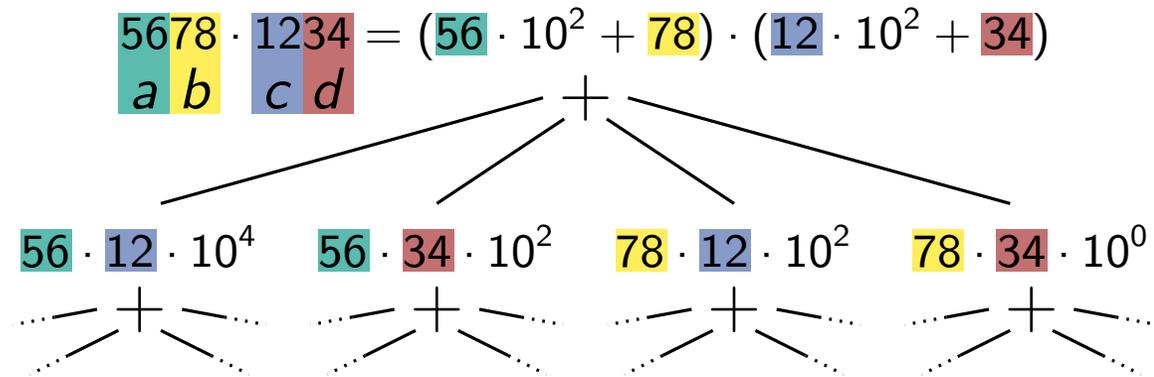
$\boxed{c}, \boxed{d} :=$ first and second half of y

return `mult`(\boxed{a}, \boxed{c}) $\cdot 10^n$ + `mult`(\boxed{b}, \boxed{d})

+ (`mult`(\boxed{a}, \boxed{d}) + `mult`(\boxed{c}, \boxed{b})) $\cdot 10^{n/2}$

Teile und Herrsche

Multiplikation mit anderer Zerlegung



Größe des Rekursionsbaums

- jeder Knoten hat 4 Kinder \rightarrow Lage i hat 4^i Knoten
- n wird mit jeder Lage halbiert $\rightarrow \log_2(n)$ Lagen

`mult(x, y)`

// assumption: $n = |x| = |y| = 2^k$ for $k \in \mathbb{N}$

if $n = 1$ **return** $x \cdot y$

a, b := first and second half of x

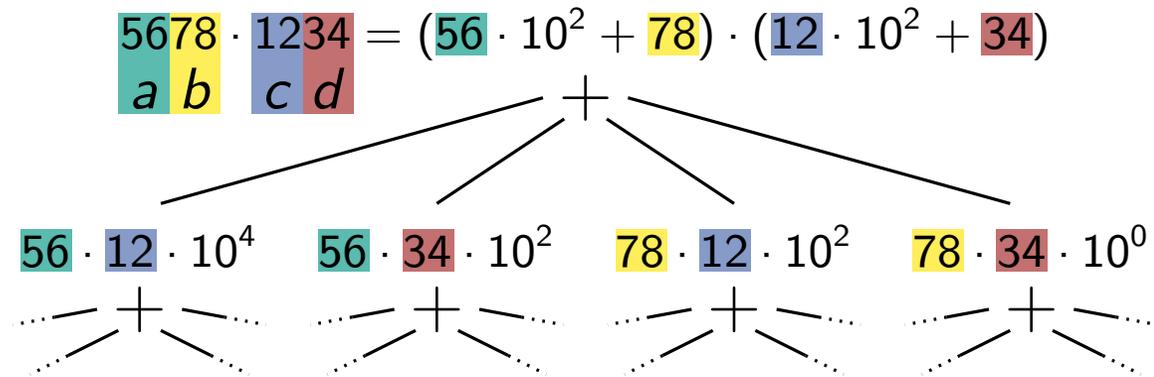
c, d := first and second half of y

return `mult(a, c)` $\cdot 10^n$ + `mult(b, d)`

+ (`mult(a, d)` + `mult(c, b)`) $\cdot 10^{n/2}$

Teile und Herrsche

Multiplikation mit anderer Zerlegung



Größe des Rekursionsbaums

- jeder Knoten hat 4 Kinder \rightarrow Lage i hat 4^i Knoten
- n wird mit jeder Lage halbiert $\rightarrow \log_2(n)$ Lagen
- Knoten insgesamt: $\sum_{i=0}^{\log_2(n)} 4^i \in \Theta(4^{\log_2(n)}) = \Theta(n^2)$

mult(x, y)

// assumption: $n = |x| = |y| = 2^k$ for $k \in \mathbb{N}$

if $n = 1$ **return** $x \cdot y$

$a, b :=$ first and second half of x

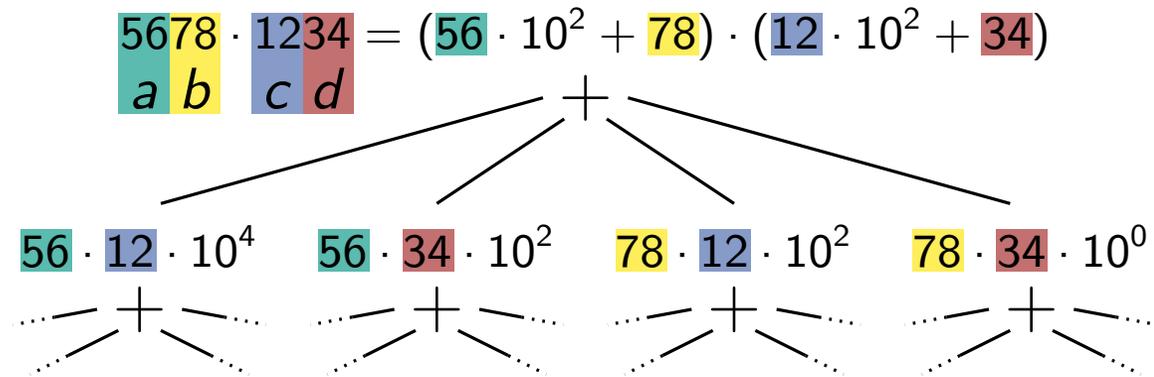
$c, d :=$ first and second half of y

return **mult**(a, c) $\cdot 10^n$ + **mult**(b, d)

+ (**mult**(a, d) + **mult**(c, b)) $\cdot 10^{n/2}$

Teile und Herrsche

Multiplikation mit anderer Zerlegung



Größe des Rekursionsbaums

- jeder Knoten hat 4 Kinder \rightarrow Lage i hat 4^i Knoten
- n wird mit jeder Lage halbiert $\rightarrow \log_2(n)$ Lagen

- Knoten insgesamt: $\sum_{i=0}^{\log_2(n)} 4^i \in \Theta(4^{\log_2(n)}) = \Theta(n^2)$

- Achtung: das heißt noch nicht, dass die Laufzeit auch $\Theta(n^2)$ ist (stimmt in diesem Fall aber)

mult(x, y)

// assumption: $n = |x| = |y| = 2^k$ for $k \in \mathbb{N}$

if $n = 1$ **return** $x \cdot y$

$a, b :=$ first and second half of x

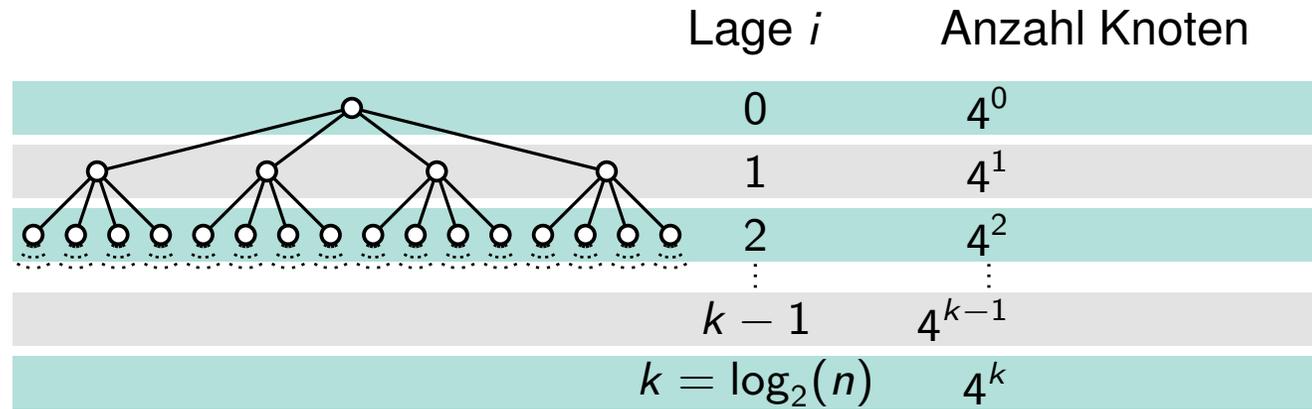
$c, d :=$ first and second half of y

return **mult**(a, c) $\cdot 10^n$ + **mult**(b, d)

+ (**mult**(a, d) + **mult**(c, b)) $\cdot 10^{n/2}$

Einschub: Exponentielle Summen & geometrische Reihen

Exponentiell wachsende Lagen

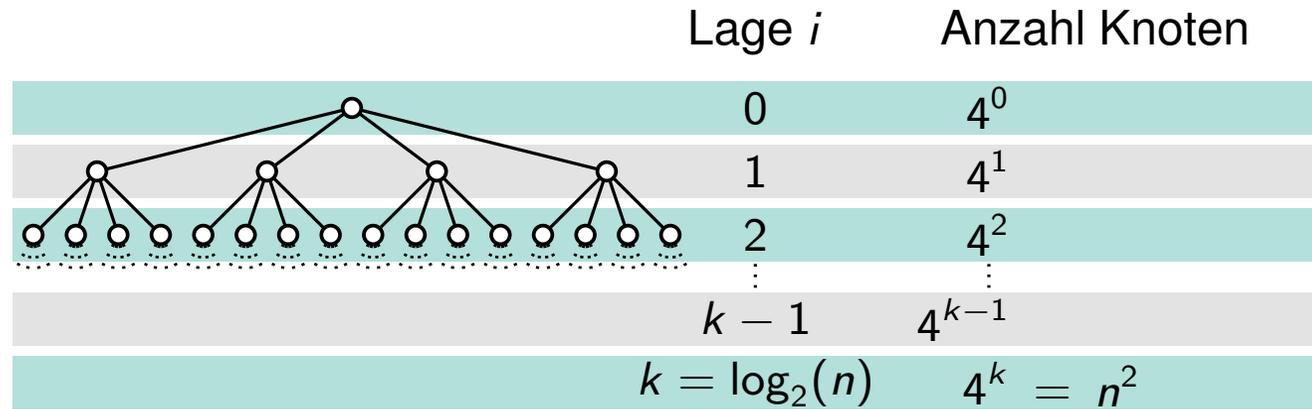


Summe der Knoten

$$\sum_{i=0}^k 4^i$$

Einschub: Exponentielle Summen & geometrische Reihen

Exponentiell wachsende Lagen

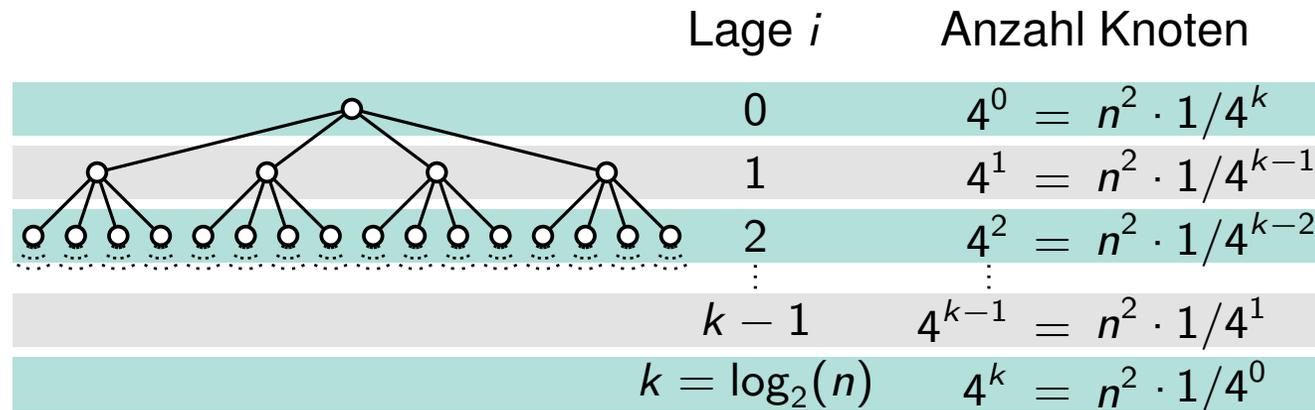


Summe der Knoten

$$\sum_{i=0}^k 4^i$$

Einschub: Exponentielle Summen & geometrische Reihen

Exponentiell wachsende Lagen



Summe der Knoten

klein \rightarrow groß

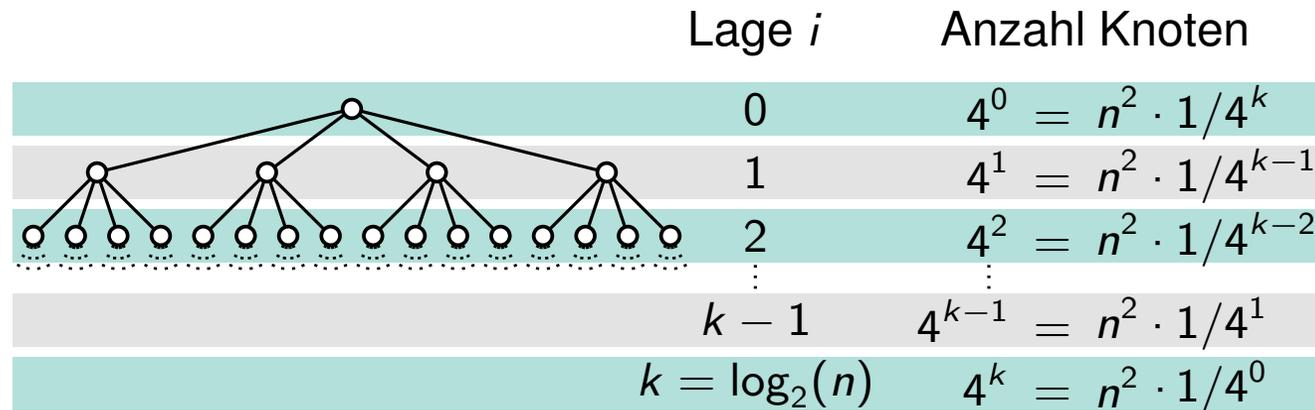
$$\sum_{i=0}^k 4^i$$

groß \rightarrow klein

$$\sum_{i=0}^k n^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^i$$

Einschub: Exponentielle Summen & geometrische Reihen

Exponentiell wachsende Lagen



Summe der Knoten

klein \rightarrow groß

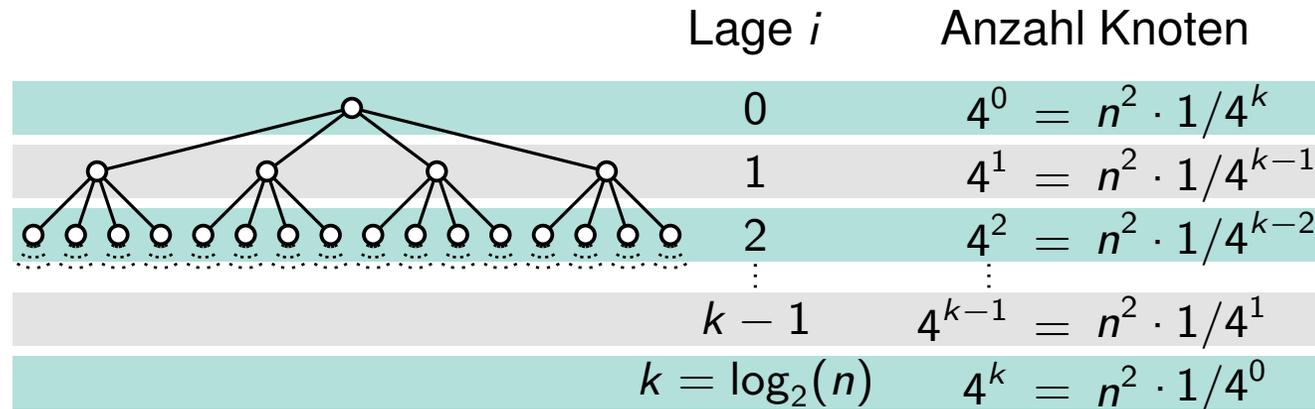
$$\sum_{i=0}^k 4^i$$

groß \rightarrow klein

$$\sum_{i=0}^k n^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^i = n^2 \cdot \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{4}\right)^i$$

Einschub: Exponentielle Summen & geometrische Reihen

Exponentiell wachsende Lagen



Summe der Knoten

klein \rightarrow groß

$$\sum_{i=0}^k 4^i$$

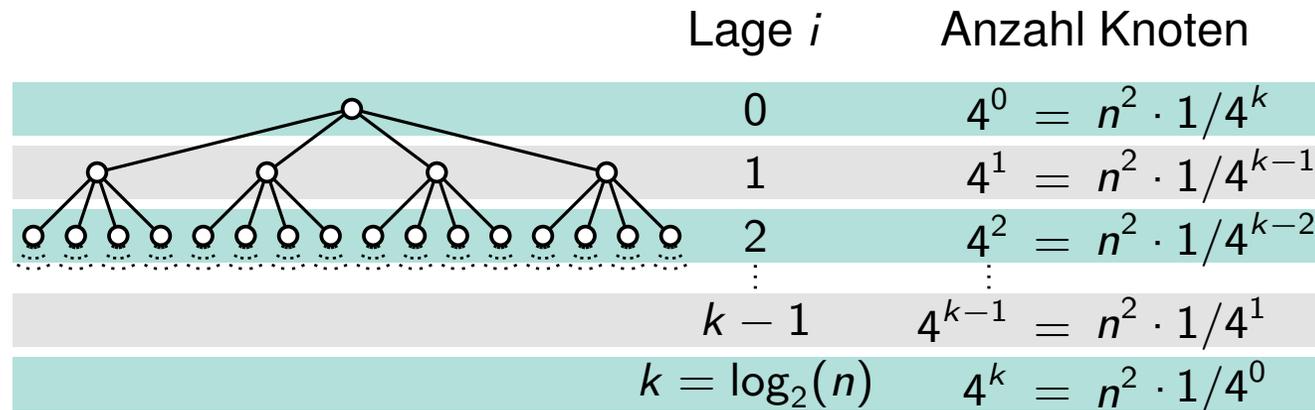
groß \rightarrow klein

$$\sum_{i=0}^k n^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^i = n^2 \cdot \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{4}\right)^i$$

geometrische Summe $\in \Theta(1)$

Einschub: Exponentielle Summen & geometrische Reihen

Exponentiell wachsende Lagen



Summe der Knoten

klein \rightarrow groß

$$\sum_{i=0}^k 4^i$$

groß \rightarrow klein

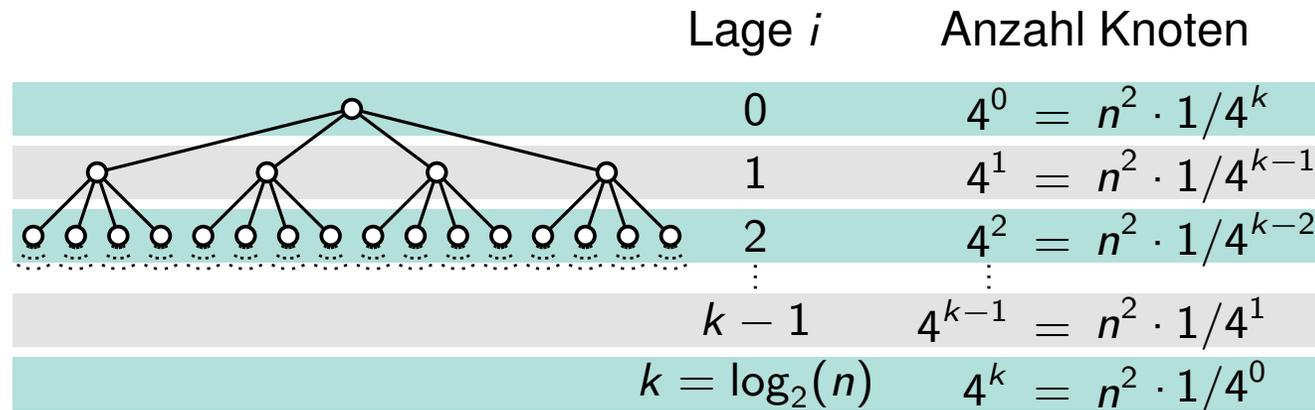
$$\sum_{i=0}^k n^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^i = n^2 \cdot \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{4}\right)^i$$

geometrische Summe $\in \Theta(1)$

$$\in \Theta(n^2)$$

Einschub: Exponentielle Summen & geometrische Reihen

Exponentiell wachsende Lagen



Summe der Knoten

klein \rightarrow groß

$$\sum_{i=0}^k 4^i$$

groß \rightarrow klein

$$\sum_{i=0}^k n^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^i = n^2 \cdot \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{4}\right)^i$$

geometrische Summe $\in \Theta(1)$

$$\in \Theta(n^2)$$

Mentaler Shortcut: Summen, die exponentiell schrumpfen/wachsen

- $\sum_i c^i$ wird asymptotisch vom größten Summanden dominiert

- also: $\sum_{i=a}^b c^i \in \Theta(c^a + c^b)$

($c \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ konstant)
 ($a, b > 0$ können von n abhängen)

Ziel: weniger rekursive Aufrufe

Bisher

- $xy = (a \cdot 10^{n/2} + b) \cdot (c \cdot 10^{n/2} + d)$
 $= ac \cdot 10^n + (ad + bc) \cdot 10^{n/2} + bd$
- vier rekursive Multiplikationen

mult(x, y)

// assumption: $n = |x| = |y| = 2^k$ for $k \in \mathbb{N}$

if $n = 1$ return $x \cdot y$

a, b := first and second half of x

c, d := first and second half of y

return $\text{mult}(a, c) \cdot 10^n + \text{mult}(b, d)$

$+ (\text{mult}(a, d) + \text{mult}(c, b)) \cdot 10^{n/2}$

Ziel: weniger rekursive Aufrufe

Bisher

- $xy = (a \cdot 10^{n/2} + b) \cdot (c \cdot 10^{n/2} + d)$
 $= ac \cdot 10^n + (ad + bc) \cdot 10^{n/2} + bd$
- vier rekursive Multiplikationen

Idee zur Verbesserung

- ignoriere zunächst die 10er-Potenzen
- $(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$

mult(x, y)

// assumption: $n = |x| = |y| = 2^k$ for $k \in \mathbb{N}$

if $n = 1$ return $x \cdot y$

a, b := first and second half of x

c, d := first and second half of y

return $\text{mult}(a, c) \cdot 10^n + \text{mult}(b, d)$

+ $(\text{mult}(a, d) + \text{mult}(c, b)) \cdot 10^{n/2}$

Ziel: weniger rekursive Aufrufe

Bisher

- $xy = (a \cdot 10^{n/2} + b) \cdot (c \cdot 10^{n/2} + d)$
 $= ac \cdot 10^n + (ad + bc) \cdot 10^{n/2} + bd$
- vier rekursive Multiplikationen

Idee zur Verbesserung

- ignoriere zunächst die 10er-Potenzen
- $(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$
- wenn wir $(a + b) \cdot (c + d)$, ac und bd kennen, können wir daraus $ad + bc$ erhalten

mult(x, y)

// assumption: $n = |x| = |y| = 2^k$ for $k \in \mathbb{N}$

if $n = 1$ return $x \cdot y$

a, b := first and second half of x

c, d := first and second half of y

return $\text{mult}(a, c) \cdot 10^n + \text{mult}(b, d)$

$+ (\text{mult}(a, d) + \text{mult}(c, b)) \cdot 10^{n/2}$

Ziel: weniger rekursive Aufrufe

Bisher

- $xy = (a \cdot 10^{n/2} + b) \cdot (c \cdot 10^{n/2} + d)$
 $= ac \cdot 10^n + (ad + bc) \cdot 10^{n/2} + bd$
- vier rekursive Multiplikationen

Idee zur Verbesserung

- ignoriere zunächst die 10er-Potenzen
- $(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$
- wenn wir $(a + b) \cdot (c + d)$, ac und bd kennen, können wir daraus $ad + bc$ erhalten
- berechne $(a + b) \cdot (c + d)$, ac und bd
- berechne dann $(ad + bc) = (a + b) \cdot (c + d) - ac - bd$

mult(x, y)

// assumption: $n = |x| = |y| = 2^k$ for $k \in \mathbb{N}$

if $n = 1$ return $x \cdot y$

a, b := first and second half of x

c, d := first and second half of y

return $\text{mult}(a, c) \cdot 10^n + \text{mult}(b, d)$

$+ (\text{mult}(a, d) + \text{mult}(c, b)) \cdot 10^{n/2}$

Ziel: weniger rekursive Aufrufe

Bisher

- $xy = (a \cdot 10^{n/2} + b) \cdot (c \cdot 10^{n/2} + d)$
 $= ac \cdot 10^n + (ad + bc) \cdot 10^{n/2} + bd$
- vier rekursive Multiplikationen

Idee zur Verbesserung

- ignoriere zunächst die 10er-Potenzen
- $(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$
- wenn wir $(a + b) \cdot (c + d)$, ac und bd kennen, können wir daraus $ad + bc$ erhalten
- berechne $(a + b) \cdot (c + d)$, ac und bd
- berechne dann $(ad + bc) = (a + b) \cdot (c + d) - ac - bd$
- nur drei rekursive Multiplikationen
- dafür etwas mehr Additionen

mult(x, y)

// assumption: $n = |x| = |y| = 2^k$ for $k \in \mathbb{N}$

if $n = 1$ return $x \cdot y$

a, b := first and second half of x

c, d := first and second half of y

return $\text{mult}(a, c) \cdot 10^n + \text{mult}(b, d)$

$+ (\text{mult}(a, d) + \text{mult}(c, b)) \cdot 10^{n/2}$

Karatsubas Algorithmus

mult(x, y)

// assumption: $n = |x| = |y| = 2^k$ for $k \in \mathbb{N}$

if $n = 1$ **return** $x \cdot y$

a, b := first and second half of x

c, d := first and second half of y

ac := **mult**(a, c)

bd := **mult**(b, d)

sum := **mult**(($a + b$), ($c + d$)) - ac - bd

return $ac \cdot 10^n + \text{sum} \cdot 10^{n/2} + bd$

Erinnerung

- $xy = ac \cdot 10^n + (ad + bc) \cdot 10^{n/2} + bd$
- $(ad + bc) = (a + b) \cdot (c + d) - ac - bd$



Karatsubas Algorithmus

mult(x, y)

// assumption: $n = |x| = |y| = 2^k$ for $k \in \mathbb{N}$

if $n = 1$ **return** $x \cdot y$

a, b := first and second half of x

c, d := first and second half of y

ac := **mult**(a, c)

bd := **mult**(b, d)

sum := **mult**(($a + b$), ($c + d$)) - ac - bd

return $ac \cdot 10^n + \text{sum} \cdot 10^{n/2} + bd$

Erinnerung

- $xy = ac \cdot 10^n + (ad + bc) \cdot 10^{n/2} + bd$
- $(ad + bc) = (a + b) \cdot (c + d) - ac - bd$

Wie groß ist der Rekursionsbaum?

Karatsubas Algorithmus

mult(x, y)

// assumption: $n = |x| = |y| = 2^k$ for $k \in \mathbb{N}$

if $n = 1$ **return** $x \cdot y$

a, b := first and second half of x

c, d := first and second half of y

ac := **mult**(a, c)

bd := **mult**(b, d)

sum := **mult**(($a + b$), ($c + d$)) - ac - bd

return $ac \cdot 10^n + \text{sum} \cdot 10^{n/2} + bd$

Erinnerung

- $xy = ac \cdot 10^n + (ad + bc) \cdot 10^{n/2} + bd$
- $(ad + bc) = (a + b) \cdot (c + d) - ac - bd$

Anzahl Knoten im Rekursionsbaum

- 3 Kinder $\rightarrow 3^i$ Knoten auf Lage i
- n wird immer halbiert $\rightarrow \log_2(n)$ Lagen
- $\sum_{i=0}^{\log_2(n)} 3^i \in \Theta\left(3^{\log_2(n)}\right)$

Karatsubas Algorithmus

mult(x, y)

// assumption: $n = |x| = |y| = 2^k$ for $k \in \mathbb{N}$

if $n = 1$ **return** $x \cdot y$

a, b := first and second half of x

c, d := first and second half of y

ac := **mult**(a, c)

bd := **mult**(b, d)

sum := **mult**(($a + b$), ($c + d$)) - ac - bd

return $ac \cdot 10^n + \text{sum} \cdot 10^{n/2} + bd$

Erinnerung

- $xy = ac \cdot 10^n + (ad + bc) \cdot 10^{n/2} + bd$
- $(ad + bc) = (a + b) \cdot (c + d) - ac - bd$

Anzahl Knoten im Rekursionsbaum

- 3 Kinder $\rightarrow 3^i$ Knoten auf Lage i
- n wird immer halbiert $\rightarrow \log_2(n)$ Lagen

$$\sum_{i=0}^{\log_2(n)} 3^i \in \Theta \left(3^{\log_2(n)} \right) = \Theta \left(n^{\log_2(3)} \right) \subseteq O \left(n^{1,585} \right)$$

Nebenrechnung

$$3^{\log_2(n)} = 2^{\log_2(3) \cdot \log_2(n)} = n^{\log_2(3)}$$

Karatsubas Algorithmus

mult(x, y)

// assumption: $n = |x| = |y| = 2^k$ for $k \in \mathbb{N}$

if $n = 1$ **return** $x \cdot y$

a, b := first and second half of x

c, d := first and second half of y

ac := **mult**(a, c)

bd := **mult**(b, d)

sum := **mult**(($a + b$), ($c + d$)) - ac - bd

return $ac \cdot 10^n + \text{sum} \cdot 10^{n/2} + bd$

Erinnerung

- $xy = ac \cdot 10^n + (ad + bc) \cdot 10^{n/2} + bd$
- $(ad + bc) = (a + b) \cdot (c + d) - ac - bd$

Anzahl Knoten im Rekursionsbaum

- 3 Kinder $\rightarrow 3^i$ Knoten auf Lage i
- n wird immer halbiert $\rightarrow \log_2(n)$ Lagen

- $$\sum_{i=0}^{\log_2(n)} 3^i \in \Theta \left(3^{\log_2(n)} \right) = \Theta \left(n^{\log_2(3)} \right)$$

$$\subseteq O \left(n^{1,585} \right)$$

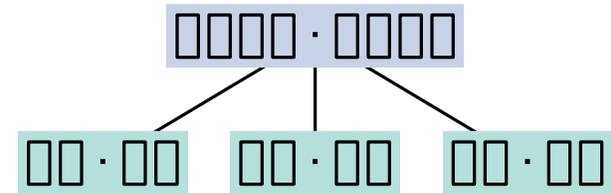
Offene Fragen

- Wie viel Arbeit macht man in jedem Knoten? Sind die zusätzlichen Additionen schlimm?
- Können wir annehmen, dass n eine Zweierpotenz ist? Könnte nicht $|a + b| > \frac{n}{2}$ sein?

Karatsubas Algorithmus – Laufzeitanalyse

Arbeit pro Knoten

- linear in der Größe der Zahlen
- also: $\Theta\left(n \cdot \frac{1}{2^i}\right)$ für einen Knoten auf Lage i



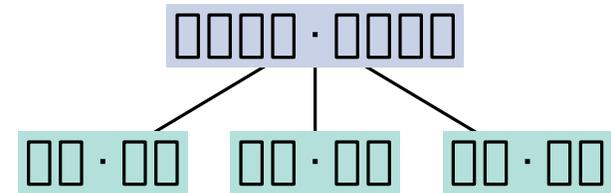
Karatsubas Algorithmus – Laufzeitanalyse

Arbeit pro Knoten

- linear in der Größe der Zahlen
- also: $\Theta\left(n \cdot \frac{1}{2^i}\right)$ für einen Knoten auf Lage i

Arbeit pro Lage

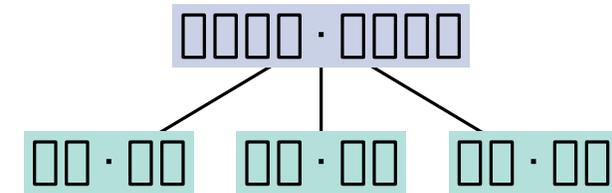
- 3^i Knoten auf Lage i
- Gesamtarbeit für Lage i : $3^i \cdot \Theta\left(n \cdot \frac{1}{2^i}\right) = \Theta\left(n \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^i\right)$



Karatsubas Algorithmus – Laufzeitanalyse

Arbeit pro Knoten

- linear in der Größe der Zahlen
- also: $\Theta\left(n \cdot \frac{1}{2^i}\right)$ für einen Knoten auf Lage i



Arbeit pro Lage

- 3^i Knoten auf Lage i
- Gesamtarbeit für Lage i : $3^i \cdot \Theta\left(n \cdot \frac{1}{2^i}\right) = \Theta\left(n \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^i\right)$

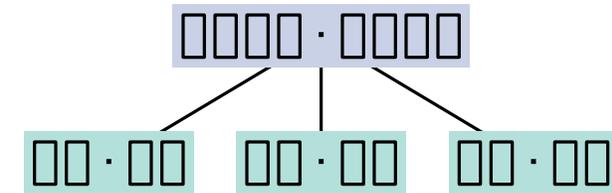
Arbeit insgesamt

- exponentielle Summe \rightarrow dominiert durch letzte Lage $i = \log_2(n)$
- also: $\Theta\left(n \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2(n)}\right) = \Theta\left(n \cdot \left(\frac{n^{\log_2(3)}}{n}\right)\right) = \Theta\left(n^{\log_2(3)}\right)$

Karatsubas Algorithmus – Laufzeitanalyse

Arbeit pro Knoten

- linear in der Größe der Zahlen
- also: $\Theta\left(n \cdot \frac{1}{2^i}\right)$ für einen Knoten auf Lage i



Arbeit pro Lage

- 3^i Knoten auf Lage i
- Gesamtarbeit für Lage i : $3^i \cdot \Theta\left(n \cdot \frac{1}{2^i}\right) = \Theta\left(n \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^i\right)$

Arbeit insgesamt

- exponentielle Summe \rightarrow dominiert durch letzte Lage $i = \log_2(n)$
- also: $\Theta\left(n \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2(n)}\right) = \Theta\left(n \cdot \left(\frac{n^{\log_2(3)}}{n}\right)\right) = \Theta\left(n^{\log_2(3)}\right)$
- Sanity Check: letzte Lage hat $n^{\log_2(3)}$ Knoten und konstanten Aufwand pro Knoten

Rundungsfehler?

Annahme: $n = |x| = |y|$ ist Zweierpotenz

- Problem: $a + b$ hat ggf. $\frac{n}{2} + 1$ Ziffern
- also: keine Zweierpotenz mehr im rekursiven Aufruf

mult(x, y)

...

$a, b :=$ first, second half of x

...

sum := **mult**(($a + b$), (...)) ...

Rundungsfehler?

Annahme: $n = |x| = |y|$ ist Zweierpotenz

- Problem: $a + b$ hat ggf. $\frac{n}{2} + 1$ Ziffern
- also: keine Zweierpotenz mehr im rekursiven Aufruf

Umgang mit ungeradem n

- n ungerade $\Rightarrow |a| = \lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$
- damit hat $a + b$ bis zu $\frac{n}{2} + \frac{3}{2}$ Ziffern

`mult`(x, y)

...

$a, b :=$ first, second half of x

...

sum := `mult`(($a + b$), (...)) ...

Rundungsfehler?

Annahme: $n = |x| = |y|$ ist Zweierpotenz

- Problem: $a + b$ hat ggf. $\frac{n}{2} + 1$ Ziffern
- also: keine Zweierpotenz mehr im rekursiven Aufruf

Umgang mit ungeradem n

- n ungerade $\Rightarrow |a| = \lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$
- damit hat $a + b$ bis zu $\frac{n}{2} + \frac{3}{2}$ Ziffern

Was ändert sich bei der Analyse?

- $n_i = \# \text{Ziffern auf Lage } i \text{ (} n_0 = n \text{)}$
- bisher: $n_i = \frac{n}{2^i}$

mult(x, y)

...

$a, b :=$ first, second half of x

...

sum := mult($(a + b), (\dots)$) ...

Rundungsfehler?

Annahme: $n = |x| = |y|$ ist Zweierpotenz

- Problem: $a + b$ hat ggf. $\frac{n}{2} + 1$ Ziffern
- also: keine Zweierpotenz mehr im rekursiven Aufruf

Umgang mit ungeradem n

- n ungerade $\Rightarrow |a| = \lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$
- damit hat $a + b$ bis zu $\frac{n}{2} + \frac{3}{2}$ Ziffern

Was ändert sich bei der Analyse?

- $n_i = \# \text{Ziffern auf Lage } i \text{ (} n_0 = n \text{)}$
- bisher: $n_i = \frac{n}{2^i}$
- jetzt: $n_{i+1} \leq \frac{n_i}{2} + \frac{3}{2}$

mult(x, y)

...

$a, b :=$ first, second half of x

...

sum := **mult**(($a + b$), (...)) ...

Rundungsfehler?

Annahme: $n = |x| = |y|$ ist Zweierpotenz

- Problem: $a + b$ hat ggf. $\frac{n}{2} + 1$ Ziffern
- also: keine Zweierpotenz mehr im rekursiven Aufruf

Umgang mit ungeradem n

- n ungerade $\Rightarrow |a| = \lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$
- damit hat $a + b$ bis zu $\frac{n}{2} + \frac{3}{2}$ Ziffern

Was ändert sich bei der Analyse?

- $n_i = \# \text{Ziffern auf Lage } i \text{ (} n_0 = n \text{)}$
- bisher: $n_i = \frac{n}{2^i}$
- jetzt: $n_{i+1} \leq \frac{n_i}{2} + \frac{3}{2}$

mult(x, y)

...

$a, b :=$ first, second half of x

...

sum := **mult**(($a + b$), (...)) ...

Nebenrechnung

$$n_0 = n$$

$$n_1 = \frac{n}{2} + \frac{3}{2} \quad \leftarrow \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$

$$n_2 = \frac{n}{2^2} + \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2} \quad \leftarrow \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$

$$n_3 = \frac{n}{2^3} + \frac{3}{2^3} + \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2} \quad \leftarrow \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$

$$n_i = \frac{n}{2^i} + 3 \cdot \sum_{j=1}^i \frac{1}{2^j} \leq \frac{n}{2^i} + 3$$

Rundungsfehler?

Annahme: $n = |x| = |y|$ ist Zweierpotenz

- Problem: $a + b$ hat ggf. $\frac{n}{2} + 1$ Ziffern
- also: keine Zweierpotenz mehr im rekursiven Aufruf

Umgang mit ungeradem n

- n ungerade $\Rightarrow |a| = \lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$
- damit hat $a + b$ bis zu $\frac{n}{2} + \frac{3}{2}$ Ziffern

Was ändert sich bei der Analyse?

- $n_i = \# \text{Ziffern auf Lage } i \text{ (} n_0 = n \text{)}$
- bisher: $n_i = \frac{n}{2^i}$
- jetzt: $n_{i+1} \leq \frac{n_i}{2} + \frac{3}{2} \leq \frac{n}{2^{i+1}} + 3$

mult(x, y)

...

$a, b :=$ first, second half of x

...

sum := **mult**(($a + b$), (...)) ...

Nebenrechnung

$$n_0 = n$$

$$n_1 = \frac{n}{2} + \frac{3}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \end{array} \right\}$$

$$n_2 = \frac{n}{2^2} + \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \end{array} \right\}$$

$$n_3 = \frac{n}{2^3} + \frac{3}{2^3} + \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \end{array} \right\}$$

$$n_i = \frac{n}{2^i} + 3 \cdot \sum_{j=1}^i \frac{1}{2^j} \leq \frac{n}{2^i} + 3$$

Rundungsfehler?

Annahme: $n = |x| = |y|$ ist Zweierpotenz

- Problem: $a + b$ hat ggf. $\frac{n}{2} + 1$ Ziffern
- also: keine Zweierpotenz mehr im rekursiven Aufruf

Umgang mit ungeradem n

- n ungerade $\Rightarrow |a| = \lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$
- damit hat $a + b$ bis zu $\frac{n}{2} + \frac{3}{2}$ Ziffern

Was ändert sich bei der Analyse?

- $n_i = \# \text{Ziffern auf Lage } i \text{ (} n_0 = n \text{)}$
- bisher: $n_i = \frac{n}{2^i}$
- jetzt: $n_{i+1} \leq \frac{n_i}{2} + \frac{3}{2} \leq \frac{n}{2^{i+1}} + 3$
- kein asymptotischer Unterschied \rightarrow Laufzeit $\Theta(n^{\log_2(3)})$

mult(x, y)

...

$a, b :=$ first, second half of x

...

sum := **mult**(($a + b$), (...)) ...

Nebenrechnung

$$n_0 = n$$

$$n_1 = \frac{n}{2} + \frac{3}{2} \quad \leftarrow \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$

$$n_2 = \frac{n}{2^2} + \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2} \quad \leftarrow \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$

$$n_3 = \frac{n}{2^3} + \frac{3}{2^3} + \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2} \quad \leftarrow \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$

$$n_i = \frac{n}{2^i} + 3 \cdot \sum_{j=1}^i \frac{1}{2^j} \leq \frac{n}{2^i} + 3$$

Rundungsfehler?

Annahme: $n = |x| = |y|$ ist Zweierpotenz

- Problem: $a + b$ hat ggf. $\frac{n}{2} + 1$ Ziffern
- also: keine Zweierpotenz mehr im rekursiven Aufruf

Umgang mit ungeradem n

- n ungerade $\Rightarrow |a| = \lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$
- damit hat $a + b$ bis zu $\frac{n}{2} + \frac{3}{2}$ Ziffern

Was ändert sich bei der Analyse?

- $n_i = \# \text{Ziffern auf Lage } i \text{ (} n_0 = n \text{)}$
- bisher: $n_i = \frac{n}{2^i}$
- jetzt: $n_{i+1} \leq \frac{n_i}{2} + \frac{3}{2} \leq \frac{n}{2^{i+1}} + 3$
- kein asymptotischer Unterschied \rightarrow Laufzeit $\Theta(n^{\log_2(3)})$

Achtung: Abbruch der Rekursion müsste man hier nochmal genauer anschauen.
 Möglichkeit 1: Zeige, dass es für konstant viele Ziffern nach konstanter Zeit terminiert.
 Möglichkeit 2: Brich die Rekursion nicht erst bei $n = 1$, sondern etwas früher ab.

mult(x, y)

...

$a, b :=$ first, second half of x

...

sum := mult($(a + b), (\dots)$) ...

Nebenrechnung

$$n_0 = n$$

$$n_1 = \frac{n}{2} + \frac{3}{2} \quad \leftarrow \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$

$$n_2 = \frac{n}{2^2} + \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2} \quad \leftarrow \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$

$$n_3 = \frac{n}{2^3} + \frac{3}{2^3} + \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2} \quad \leftarrow \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$

$$n_i = \frac{n}{2^i} + 3 \cdot \sum_{j=1}^i \frac{1}{2^j} \leq \frac{n}{2^i} + 3$$

Karatsubas Algorithmus

Theorem

Karatsubas Algo. multipliziert zwei n -Ziffern Zahlen in $\Theta(n^{\log_2(3)}) \subseteq O(n^{1,585})$ Zeit.

Analyse via Rekursionsbaum

- Wie viele Knoten sind auf Lage i ?
- Wie groß ist das n auf Lage i ?
- Wie viel Zeit kostet ein Knoten in Lage i ?

mult(x, y)

if $n = 1$ **return** $x \cdot y$

$a, b :=$ first and second half of x

$c, d :=$ first and second half of y

$ac :=$ **mult**(a, c)

$bd :=$ **mult**(b, d)

$sum :=$ **mult**(($a + b$), ($c + d$)) $- ac - bd$

return $ac \cdot 10^n + sum \cdot 10^{n/2} + bd$

Karatsubas Algorithmus

Theorem

Karatsubas Algo. multipliziert zwei n -Ziffern Zahlen in $\Theta(n^{\log_2(3)}) \subseteq O(n^{1,585})$ Zeit.

Analyse via Rekursionsbaum

- Wie viele Knoten sind auf Lage i ?
- Wie groß ist das n auf Lage i ?
- Wie viel Zeit kostet ein Knoten in Lage i ?



Warum ist das so viel Arbeit?

Muss ich das für jeden rekursiven Algorithmus so analysieren?

Kann man da nicht irgendwie abkürzen?

mult(x, y)

if $n = 1$ **return** $x \cdot y$

$a, b :=$ first and second half of x

$c, d :=$ first and second half of y

$ac :=$ **mult**(a, c)

$bd :=$ **mult**(b, d)

$sum :=$ **mult**(($a + b$), ($c + d$)) $- ac - bd$

return $ac \cdot 10^n + sum \cdot 10^{n/2} + bd$

Rekurrenzen

Laufzeit als Formel

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{wenn } n = 1, \\ 3 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) & \text{wenn } n > 1. \end{cases}$$

mult(x, y)

if $n = 1$ **return** $x \cdot y$

$a, b :=$ first and second half of x

$c, d :=$ first and second half of y

$ac :=$ **mult**(a, c)

$bd :=$ **mult**(b, d)

$sum :=$ **mult**(($a + b$), ($c + d$)) $- ac - bd$

return $ac \cdot 10^n + sum \cdot 10^{n/2} + bd$

Rekurrenzen

Laufzeit als Formel

Laufzeit für Basisfall → Kosten in den Blättern

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{wenn } n = 1, \\ 3 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) & \text{wenn } n > 1. \end{cases}$$

mult(x, y)

if $n = 1$ **return** $x \cdot y$

$a, b :=$ first and second half of x

$c, d :=$ first and second half of y

$ac :=$ **mult**(a, c)

$bd :=$ **mult**(b, d)

$sum :=$ **mult**(($a + b$), ($c + d$)) $- ac - bd$

return $ac \cdot 10^n + sum \cdot 10^{n/2} + bd$

Rekurrenzen

Laufzeit als Formel

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{wenn } n = 1, \\ 3 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) & \text{wenn } n > 1. \end{cases}$$

Laufzeit für Basisfall → Kosten in den Blättern

Anzahl rekursiver Aufrufe
→ Anzahl Kinder im Baum

mult(x, y)

if $n = 1$ **return** $x \cdot y$

$a, b :=$ first and second half of x

$c, d :=$ first and second half of y

$ac :=$ **mult**(a, c)

$bd :=$ **mult**(b, d)

$sum :=$ **mult**(($a + b$), ($c + d$)) $- ac - bd$

return $ac \cdot 10^n + sum \cdot 10^{n/2} + bd$

Rekurrenzen

Laufzeit als Formel

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{wenn } n = 1, \\ 3 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) & \text{wenn } n > 1. \end{cases}$$

Laufzeit für Basisfall → Kosten in den Blättern

Anzahl rekursiver Aufrufe
→ Anzahl Kinder im Baum

neue Instanzgrößen
→ Änderung von n zwischen Lagern

`mult`(x, y)

if $n = 1$ **return** $x \cdot y$

$a, b :=$ first and second half of x

$c, d :=$ first and second half of y

$ac :=$ `mult`(a, c)

$bd :=$ `mult`(b, d)

$sum :=$ `mult`(($a + b$), ($c + d$)) $- ac - bd$

return $ac \cdot 10^n + sum \cdot 10^{n/2} + bd$

Rekurrenzen

Laufzeit als Formel

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{wenn } n = 1, \\ 3 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) & \text{wenn } n > 1. \end{cases}$$

Laufzeit für Basisfall → Kosten in den Blättern

Anzahl rekursiver Aufrufe
→ Anzahl Kinder im Baum

Laufzeit für den Aufruf selbst
→ Kosten für einen Knoten

neue Instanzgrößen
→ Änderung von n zwischen Lagern

`mult(x, y)`

if $n = 1$ **return** $x \cdot y$

$a, b :=$ first and second half of x

$c, d :=$ first and second half of y

$ac :=$ **mult**(a, c)

$bd :=$ **mult**(b, d)

$sum :=$ **mult**(($a + b$), ($c + d$)) $- ac - bd$

return $ac \cdot 10^n + sum \cdot 10^{n/2} + bd$

Rekurrenzen

Laufzeit als Formel

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{wenn } n = 1, \\ 3 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) & \text{wenn } n > 1. \end{cases}$$

Anzahl rekursiver Aufrufe
→ Anzahl Kinder im Baum

Laufzeit für den Aufruf selbst
→ Kosten für einen Knoten

neue Instanzgrößen
→ Änderung von n zwischen Lagen

$$\Rightarrow T(n) \in \Theta\left(n^{\log_2(3)}\right)$$

`mult`(x, y)

if $n = 1$ **return** $x \cdot y$

$a, b :=$ first and second half of x

$c, d :=$ first and second half of y

$ac :=$ `mult`(a, c)

$bd :=$ `mult`(b, d)

$sum :=$ `mult`(($a + b$), ($c + d$)) $- ac - bd$

return $ac \cdot 10^n + sum \cdot 10^{n/2} + bd$

Rekurrenzen

Laufzeit als Formel

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{wenn } n = 1, \\ 3 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) & \text{wenn } n > 1. \end{cases}$$

Anzahl rekursiver Aufrufe
→ Anzahl Kinder im Baum

Laufzeit für den Aufruf selbst
→ Kosten für einen Knoten

neue Instanzgrößen

→ Änderung von n zwischen Lagern

$$\Rightarrow T(n) \in \Theta\left(n^{\log_2(3)}\right)$$

Können wir das verallgemeinern?

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{wenn } n = 1, \\ a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta(n^c) & \text{wenn } n > 1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow T(n) \in \Theta(??)$$

mult(x, y)

if $n = 1$ **return** $x \cdot y$

$a, b :=$ first and second half of x

$c, d :=$ first and second half of y

$ac :=$ **mult**(a, c)

$bd :=$ **mult**(b, d)

$sum :=$ **mult**(($a + b$), ($c + d$)) $- ac - bd$

return $ac \cdot 10^n + sum \cdot 10^{n/2} + bd$

Rekurrenzen

Laufzeit als Formel

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{wenn } n = 1, \\ 3 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) & \text{wenn } n > 1. \end{cases}$$

Anzahl rekursiver Aufrufe
→ Anzahl Kinder im Baum

Laufzeit für den Aufruf selbst
→ Kosten für einen Knoten

neue Instanzgrößen

→ Änderung von n zwischen Lagern

$$\Rightarrow T(n) \in \Theta\left(n^{\log_2(3)}\right)$$

Können wir das verallgemeinern?

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{wenn } n = 1, \\ a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta(n^c) & \text{wenn } n > 1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow T(n) \in \Theta(??)$$

mult(x, y)

if $n = 1$ **return** $x \cdot y$

$a, b :=$ first and second half of x

$c, d :=$ first and second half of y

$ac :=$ **mult**(a, c)

$bd :=$ **mult**(b, d)

$sum :=$ **mult**(($a + b$), ($c + d$)) $- ac - bd$

return $ac \cdot 10^n + sum \cdot 10^{n/2} + bd$

Analyse via Rekursionsbaum

- Wie viele Knoten sind auf Lage i ?
- Wie groß ist das n auf Lage i ?
- Wie viel Zeit kostet ein Knoten in Lage i ?



Lösen allgemeiner Rekurrenzen

Können wir das verallgemeinern?

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{wenn } n = 1, \\ a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta(n^c) & \text{wenn } n > 1. \end{cases}$$

Analyse via Rekursionsbaum

- Wie viele Knoten sind auf Lage i ?
- Wie groß ist das n auf Lage i ?
- Wie viel Zeit kostet ein Knoten in Lage i ?

Lösen allgemeiner Rekurrenzen

Können wir das verallgemeinern?

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{wenn } n = 1, \\ a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta(n^c) & \text{wenn } n > 1. \end{cases}$$

Situation für Lage i

- #Knoten: a^i
- Instanzgröße: $\frac{n}{b^i}$
- Kosten pro Knoten: $\frac{n^c}{b^{ci}}$

Analyse via Rekursionsbaum

- Wie viele Knoten sind auf Lage i ?
- Wie groß ist das n auf Lage i ?
- Wie viel Zeit kostet ein Knoten in Lage i ?

Lösen allgemeiner Rekurrenzen

Können wir das verallgemeinern?

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{wenn } n = 1, \\ a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta(n^c) & \text{wenn } n > 1. \end{cases}$$

Analyse via Rekursionsbaum

- Wie viele Knoten sind auf Lage i ?
- Wie groß ist das n auf Lage i ?
- Wie viel Zeit kostet ein Knoten in Lage i ?

Situation für Lage i

- #Knoten: a^i
- Instanzgröße: $\frac{n}{b^i}$
- Kosten pro Knoten: $\frac{n^c}{b^{ci}}$

Gesamtkosten für Lage i

$$a^i \cdot \frac{n^c}{b^{ci}} = \left(\frac{a}{b^c}\right)^i \cdot n^c$$

Lösen allgemeiner Rekurrenzen

Können wir das verallgemeinern?

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{wenn } n = 1, \\ a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta(n^c) & \text{wenn } n > 1. \end{cases}$$

Analyse via Rekursionsbaum

- Wie viele Knoten sind auf Lage i ?
- Wie groß ist das n auf Lage i ?
- Wie viel Zeit kostet ein Knoten in Lage i ?

Situation für Lage i

- #Knoten: a^i
- Instanzgröße: $\frac{n}{b^i}$
- Kosten pro Knoten: $\frac{n^c}{b^{ci}}$

Gesamtkosten für Lage i Gesamtkosten für den Baum

$$a^i \cdot \frac{n^c}{b^{ci}} = \left(\frac{a}{b^c}\right)^i \cdot n^c$$

$$\sum_i \left(\frac{a}{b^c}\right)^i \cdot n^c$$

Lösen allgemeiner Rekurrenzen

Können wir das verallgemeinern?

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{wenn } n = 1, \\ a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta(n^c) & \text{wenn } n > 1. \end{cases}$$

Analyse via Rekursionsbaum

- Wie viele Knoten sind auf Lage i ?
- Wie groß ist das n auf Lage i ?
- Wie viel Zeit kostet ein Knoten in Lage i ?

Situation für Lage i

- #Knoten: a^i
- Instanzgröße: $\frac{n}{b^i}$
- Kosten pro Knoten: $\frac{n^c}{b^{ci}}$

Gesamtkosten für Lage i Gesamtkosten für den Baum

$$a^i \cdot \frac{n^c}{b^{ci}} = \left(\frac{a}{b^c}\right)^i \cdot n^c$$

$$\sum_i \left(\frac{a}{b^c}\right)^i \cdot n^c$$

exponentielle Summe

→ dominiert von größtem Summanden

(außer wenn $a/b^c = 1$)

Lösen allgemeiner Rekurrenzen

Können wir das verallgemeinern?

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{wenn } n = 1, \\ a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta(n^c) & \text{wenn } n > 1. \end{cases}$$

Analyse via Rekursionsbaum

- Wie viele Knoten sind auf Lage i ?
- Wie groß ist das n auf Lage i ?
- Wie viel Zeit kostet ein Knoten in Lage i ?

Situation für Lage i

- #Knoten: a^i
- Instanzgröße: $\frac{n}{b^i}$
- Kosten pro Knoten: $\frac{n^c}{b^{ci}}$

Gesamtkosten für Lage i Gesamtkosten für den Baum

$$a^i \cdot \frac{n^c}{b^{ci}} = \left(\frac{a}{b^c}\right)^i \cdot n^c$$

Anzahl Lagen

$$\log_b(n)$$

$$\sum_i \left(\frac{a}{b^c}\right)^i \cdot n^c$$

exponentielle Summe

→ dominiert von größtem Summanden

(außer wenn $a/b^c = 1$)

Lösen allgemeiner Rekurrenzen

Können wir das verallgemeinern?

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{wenn } n = 1, \\ a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta(n^c) & \text{wenn } n > 1. \end{cases}$$

Analyse via Rekursionsbaum

- Wie viele Knoten sind auf Lage i ?
- Wie groß ist das n auf Lage i ?
- Wie viel Zeit kostet ein Knoten in Lage i ?

Situation für Lage i

- #Knoten: a^i
- Instanzgröße: $\frac{n}{b^i}$
- Kosten pro Knoten: $\frac{n^c}{b^{ci}}$

Gesamtkosten für Lage i Gesamtkosten für den Baum

$$a^i \cdot \frac{n^c}{b^{ci}} = \left(\frac{a}{b^c}\right)^i \cdot n^c$$

Anzahl Lagen

$$\log_b(n)$$

$$\sum_i \left(\frac{a}{b^c}\right)^i \cdot n^c$$

exponentielle Summe
 → dominiert von größtem Summanden
 (außer wenn $a/b^c = 1$)

$$a < b^c$$

$$a = b^c$$

$$a > b^c$$

Lösen allgemeiner Rekurrenzen

Können wir das verallgemeinern?

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{wenn } n = 1, \\ a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta(n^c) & \text{wenn } n > 1. \end{cases}$$

Analyse via Rekursionsbaum

- Wie viele Knoten sind auf Lage i ?
- Wie groß ist das n auf Lage i ?
- Wie viel Zeit kostet ein Knoten in Lage i ?

Situation für Lage i

- #Knoten: a^i
- Instanzgröße: $\frac{n}{b^i}$
- Kosten pro Knoten: $\frac{n^c}{b^{ci}}$

Gesamtkosten für Lage i Gesamtkosten für den Baum

$$a^i \cdot \frac{n^c}{b^{ci}} = \left(\frac{a}{b^c}\right)^i \cdot n^c$$

Anzahl Lagen

$$\log_b(n)$$

$$\sum_i \left(\frac{a}{b^c}\right)^i \cdot n^c$$

exponentielle Summe
 → dominiert von größtem Summanden
 (außer wenn $a/b^c = 1$)

$$a < b^c$$

$$T(n) \in \Theta(n^c)$$

(Kosten der Wurzel dominiert)

$$a = b^c$$

$$a > b^c$$

Lösen allgemeiner Rekurrenzen

Können wir das verallgemeinern?

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{wenn } n = 1, \\ a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta(n^c) & \text{wenn } n > 1. \end{cases}$$

Analyse via Rekursionsbaum

- Wie viele Knoten sind auf Lage i ?
- Wie groß ist das n auf Lage i ?
- Wie viel Zeit kostet ein Knoten in Lage i ?

Situation für Lage i

- #Knoten: a^i
- Instanzgröße: $\frac{n}{b^i}$
- Kosten pro Knoten: $\frac{n^c}{b^{ci}}$

Gesamtkosten für Lage i Gesamtkosten für den Baum

$$a^i \cdot \frac{n^c}{b^{ci}} = \left(\frac{a}{b^c}\right)^i \cdot n^c$$

$$\sum_i \left(\frac{a}{b^c}\right)^i \cdot n^c$$

Anzahl Lagen

$$\log_b(n)$$

exponentielle Summe
 → dominiert von größtem Summanden
 (außer wenn $a/b^c = 1$)

$$a < b^c$$

$$T(n) \in \Theta(n^c)$$

(Kosten der Wurzel dominiert)

$$a = b^c$$

$$T(n) \in \Theta(n^c \log n)$$

(Kosten auf jeder der $\log_b(n)$ Lagen gleich)

$$a > b^c$$

Lösen allgemeiner Rekurrenzen

Können wir das verallgemeinern?

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{wenn } n = 1, \\ a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta(n^c) & \text{wenn } n > 1. \end{cases}$$

Analyse via Rekursionsbaum

- Wie viele Knoten sind auf Lage i ?
- Wie groß ist das n auf Lage i ?
- Wie viel Zeit kostet ein Knoten in Lage i ?

Situation für Lage i

- #Knoten: a^i
- Instanzgröße: $\frac{n}{b^i}$
- Kosten pro Knoten: $\frac{n^c}{b^{ci}}$

Gesamtkosten für Lage i Gesamtkosten für den Baum

$$a^i \cdot \frac{n^c}{b^{ci}} = \left(\frac{a}{b^c}\right)^i \cdot n^c$$

$$\sum_i \left(\frac{a}{b^c}\right)^i \cdot n^c$$

Anzahl Lagen

$$\log_b(n)$$

exponentielle Summe
 → dominiert von größtem Summanden
 (außer wenn $a/b^c = 1$)

$$a < b^c$$

$$T(n) \in \Theta(n^c)$$

(Kosten der Wurzel dominiert)

$$a = b^c$$

$$T(n) \in \Theta(n^c \log n)$$

(Kosten auf jeder der $\log_b(n)$ Lagen gleich)

$$a > b^c$$

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b(a)})$$

(Kosten der $n^{\log_b(a)}$ Blätter dominiert)

Master-Theorem

Theorem

Sei $T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ mit $f(n) \in \Theta(n^c)$ und $T(1) \in \Theta(1)$. Dann gilt

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^c) & \text{wenn } a < b^c, \\ \Theta(n^c \log n) & \text{wenn } a = b^c, \\ \Theta(n^{\log_b(a)}) & \text{wenn } a > b^c. \end{cases}$$

Master-Theorem

Theorem

Sei $T(n) = a \cdot T(\frac{n}{b}) + f(n)$ mit $f(n) \in \Theta(n^c)$ und $T(1) \in \Theta(1)$. Dann gilt

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^c) & \text{wenn } a < b^c, \\ \Theta(n^c \log n) & \text{wenn } a = b^c, \\ \Theta(n^{\log_b(a)}) & \text{wenn } a > b^c. \end{cases}$$

Ein Name, viele Theoreme

- es gibt viele Varianten des Master-Theorems
- Einschränkung $f(n) \in \Theta(n^c)$ kann man aufweichen
- asymmetrische Verzweigung: z.B. $T(n) = T(\frac{n}{2}) + 2T(\frac{n}{4})$
- Runden auf ganze Zahlen

aktuelles Papier zum Thema:

William Kuszmaul, Charles E. Leiserson

Floors and Ceilings in Divide-and-Conquer Recurrences

Symposium on Simplicity in Algorithms (SOSA 2021)

Zusammenfassung

Karatsubas Algorithmus

- algorithmische Technik: Teile und Herrsche
- Multiplikation zweier n -Ziffern Zahlen in $\Theta(n^{\log_2(3)}) \subseteq O(n^{1,585})$ Zeit

[Karatsuba; 1962]

Zusammenfassung

Karatsubas Algorithmus

[Karatsuba; 1962]

- algorithmische Technik: Teile und Herrsche
- Multiplikation zweier n -Ziffern Zahlen in $\Theta(n^{\log_2(3)}) \subseteq O(n^{1,585})$ Zeit
- noch schneller:
 - $\Theta(n^{\log_3(5)}) \subseteq O(n^{1,465})$
 - $O(n \cdot \log n \cdot \log \log n)$
 - $O(n \cdot \log n \cdot 2^{O(\log^* n)})$

[Toom, Cook; 1963–1966]

[Schönhage, Strassen; 1971]

[Fürer; 2007]

Zusammenfassung

Karatsubas Algorithmus

[Karatsuba; 1962]

- algorithmische Technik: Teile und Herrsche
- Multiplikation zweier n -Ziffern Zahlen in $\Theta(n^{\log_2(3)}) \subseteq O(n^{1,585})$ Zeit
- noch schneller:
 - $\Theta(n^{\log_3(5)}) \subseteq O(n^{1,465})$
 - $O(n \cdot \log n \cdot \log \log n)$
 - $O(n \cdot \log n \cdot 2^{O(\log^* n)})$

[Toom, Cook; 1963–1966]

[Schönhage, Strassen; 1971]

[Fürer; 2007]

Auflösung von Rekurrenzen

- Analyse des Rekursionsbaums + exponentielle Summen \rightarrow Master-Theorem
- Master-Theorem funktioniert nicht immer (z.B. $T(n) = 2T(n - 1)$)
 - weitere Techniken: branching vector, vollständige Induktion
 - nützlich: WolframAlpha

 **WolframAlpha** computational intelligence

$T(n) = 3 * T(n / 2) + n$ =

Asymptotic bound

$T(n) \in \Theta\left(n^{\log(3)/\log(2)}\right)_{n \rightarrow \infty}$

Zusammenfassung

Karatsubas Algorithmus

[Karatsuba; 1962]

- algorithmische Technik: Teile und Herrsche
- Multiplikation zweier n -Ziffern Zahlen in $\Theta(n^{\log_2(3)}) \subseteq O(n^{1,585})$ Zeit
- noch schneller:
 - $\Theta(n^{\log_3(5)}) \subseteq O(n^{1,465})$
 - $O(n \cdot \log n \cdot \log \log n)$
 - $O(n \cdot \log n \cdot 2^{O(\log^* n)})$

[Toom, Cook; 1963–1966]

[Schönhage, Strassen; 1971]

[Fürer; 2007]

Auflösung von Rekurrenzen

- Analyse des Rekursionsbaums + exponentielle Summen \rightarrow Master-Theorem
- Master-Theorem funktioniert nicht immer (z.B. $T(n) = 2T(n - 1)$)
 - weitere Techniken: branching vector, vollständige Induktion
 - nützlich: WolframAlpha



$T(n) = 3 * T(n / 2) + n$ =

Asymptotic bound

$T(n) \in \Theta\left(n^{\log(3)/\log(2)}\right)_{n \rightarrow \infty}$

Pseudocode