Aufgabe 1: Lösungsvorschlag Mysteriöse Meteoriten **5 Punkte**

Wir suchen einen Algorithmus welcher als Eingabe den gemeinsamer Radius r von Kreisen mit Mittelpunkten $p_1, \dots, p_n$ erhält und eine zusammenhängende Fläche mit minimalem Umfang, welche alle Kreise enthält, ausgibt.

Die Idee für den Algorithmus ist, die konvexe Hülle der Kreise zu berechnen. Im Folgenden beschreiben wir, wie der Algorithmus umgesetzt werden kann, zeigen dessen Korrektheit und argumentieren, wieso die konvexe Hülle der Kreise die zusammenhängende Fläche mit minimalem Umfang ist.

Der Algorithmus geht wie folgt vor:

- Berechne die konvexe Hülle H der Mittelpunkte $p_1, \dots, p_n$ mittels Graham Scan
- Iteriere über die Knoten von H und wandle so H in die konvexe Hülle H' der Kreise um:
  - Pro Kante (h_1, h_2) von (im Uhrzeigersinn) aufeinanderfolgenden Eckpunkten von H verschiebe diese Kante um r nach außen (d.h. orthogonal zu (h_1,h_2) nach links)
  - Pro Eckpunkt h mit vorhergehendem Eckpunkt h' und nachfolgendem Eckpunkt h'' auf H füge außerdem den fehlenden Kreisbogen in H' ein (siehe Abbildung 1). Der Kreisbogen kann z.B. durch Mittelpunkt und Anfangs- sowie Endpunkt gespeichert werden.

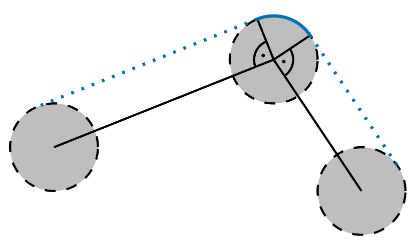

Abbildung 1: Kreisbogen in H' (blau) an einer Ecke von H.

Die Laufzeit des Algorithmus ist in $\mathcal{O}(n \log n)$, da sie vom Graham Scan dominiert wird und anschließend einmal in Linearzeit über die konvexe Hülle iteriert.

Zur Korrektheit: H' ist offensichtlich konvex, da die Strecken tangential in die Kreisbögen übergehen und diese ebenfalls konvex sind. Da H' außerdem inklusionsminimal ist (sowohl die Kreisbögen als auch die Strecken zwischen den Kreisbögen müssen enthalten sein) berechnet der Algorithmus also tatsächlich die konvexe Hülle der Kreise.

Es bleibt zu klären, wieso die konvexe Hülle der Kreise tatsächlich die zusammenhängende Fläche mit minimalem Umfang ist. Sei A diese Fläche. Wir zeigen nun, dass A die konvexe Hülle sein muss. Zuerst einmal stellen wir fest, dass A keine Löcher enthalten kann, da das Weglassen von Löchern immer noch alle Kreise abdeckt, aber den Umfang / Rand verlängert. Wäre A nicht konvex, dann gäbe es einen Abschnitt an dem der Rand von A weiter innen verläuft als die konvexe Hülle von A. Wenn man zwischen den Endpunkten des Abschnittes (die also noch auf der konvexen Hülle von A liegen) eine gerade Strecke zieht und den Abschnitt durch diese ersetzt, findet man eine Fläche mit kleinerem Umfang, welche A enthält. Die gerade Strecke ist kürzer als der Abschnitt, da die Dreiecksungleichung gilt, d.h. für beliebige Punkte a, b, c gilt $\mathrm{dist}(a,c) \leq \mathrm{dist}(a,b) + \mathrm{dist}(b,c)$ (wobei $\mathrm{dist}(x, y)$ für den Abstand zweier Punkte x und y steht). Analog lassen sich auch Abschnitt abkürzen an denen A irgendwo über H hinaus läuft (in diesem Fall muss es eine Kante der konvexen Hülle geben, die man zu einer Geraden erweitern kann welche von A zwei mal gekreuzt wird; man kann den außen liegenden Abschnitt zwischen den Kreuzungen abkürzen).

Wie kommt man drauf?

Zuerst habe ich die Aufgabenstellung formalisiert, d.h. klar gemacht was gegeben ist und was gesucht wird. Im nächsten Schritt war intuitiv recht schnell klar, dass die konvexe Hülle der Krater / Kreise gesucht ist. Nun musste nur noch ein Algorithmus formuliert werden und bewiesen werden, dass dieser das richtige tut. Ich habe mich dazu entschieden den Algorithmus als modulare Erweiterung des Graham Scan zu formulieren, da es einfacher und formal sauberer ist einen vorhandenen Algorithmus aufzurufen und dessen Ausgabe zu modifizieren als einen „komplett neuen" Algorithmus zu beschreiben (dessen Korrektheit erstmal komplett unbewiesen wäre).

Die Anschließenden Beweise habe ich für mehr Modularität aufgeteilt in „Algorithmus berechnet H' korrekt" und „man will H' berechnen". Beim zweiten Teil des Korrektheitsbeweises ist es nicht einfach den passenden Detailgrad / das passende Abstraktionsniveau zu erreichen und streng genommen ist die Argumentation mit Dreiecksungleichung auch ein wenig unsauber.