Karlsruher Institut für Technologie

# Algorithmische Geometrie

## Geometrische Graphen – euklidisch und hyperbolisch

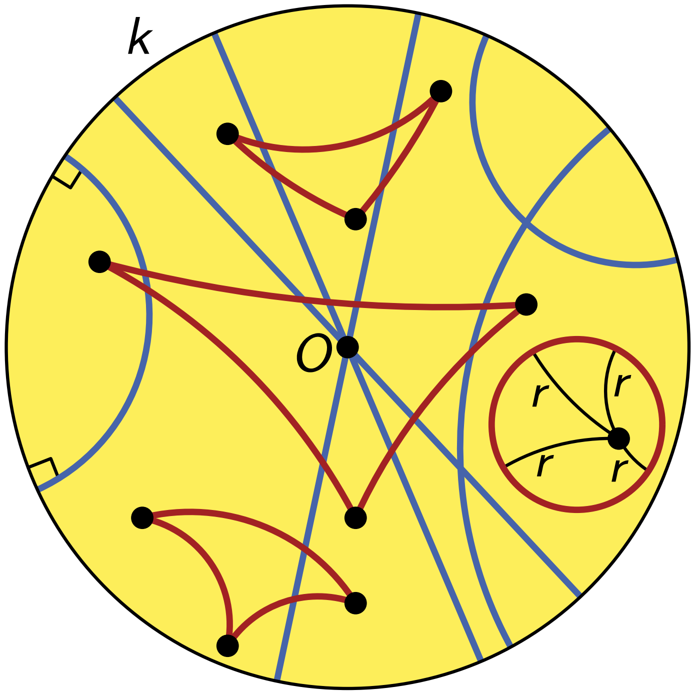
# Wiederholung: Poincaré Disk

**Punkte**

- betrachte einen (euklidischen) Kreis $k$ mit Radius 1 um den Punkt $O$
- sei $\mathcal{P}$ die Menge der Punkte im Inneren des Kreises

**Geraden**

- sei $\mathcal{G}$ die Vereinigung von:
  - Menge der offenen Strecken durch $O$ mit Endpunkten auf $k$
  - Menge der offenen Kreisbögen in $k$, die senkrecht auf $k$ stehen



# Wiederholung: Poincaré Disk

## Punkte

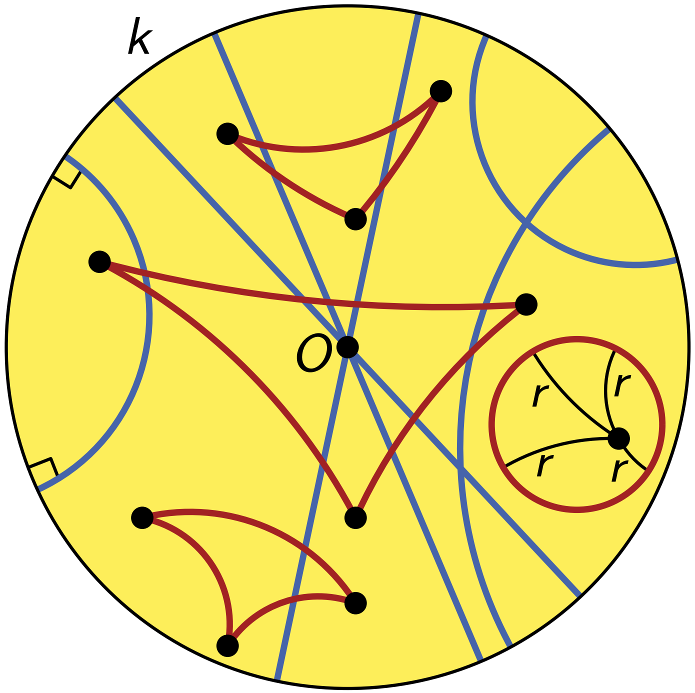
- betrachte einen (euklidischen) Kreis $k$ mit Radius 1 um den Punkt $O$
- sei $\mathcal{P}$ die Menge der Punkte im Inneren des Kreises

## Geraden

- sei $\mathcal{G}$ die Vereinigung von:
  - Menge der offenen Strecken durch $O$ mit Endpunkten auf $k$
  - Menge der offenen Kreisbögen in $k$, die senkrecht auf $k$ stehen

## Beobachtung

- nah an $O$: sehr ähnlich zum Euklidischen
- um die Besonderheiten der hyperbolischen Ebene zu nutzen müssen wir weit von $O$ weg



# Wiederholung: Poincaré Disk

**Punkte**

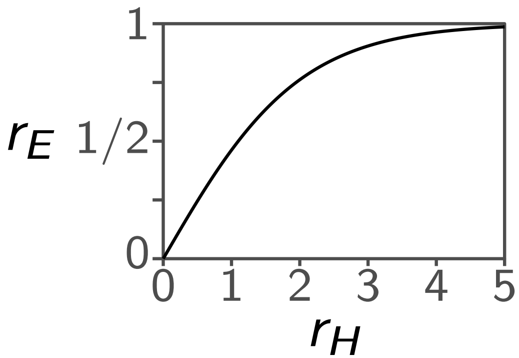
- betrachte einen (euklidischen) Kreis $k$ mit Radius 1 um den Punkt $O$
- sei $\mathcal{P}$ die Menge der Punkte im Inneren des Kreises

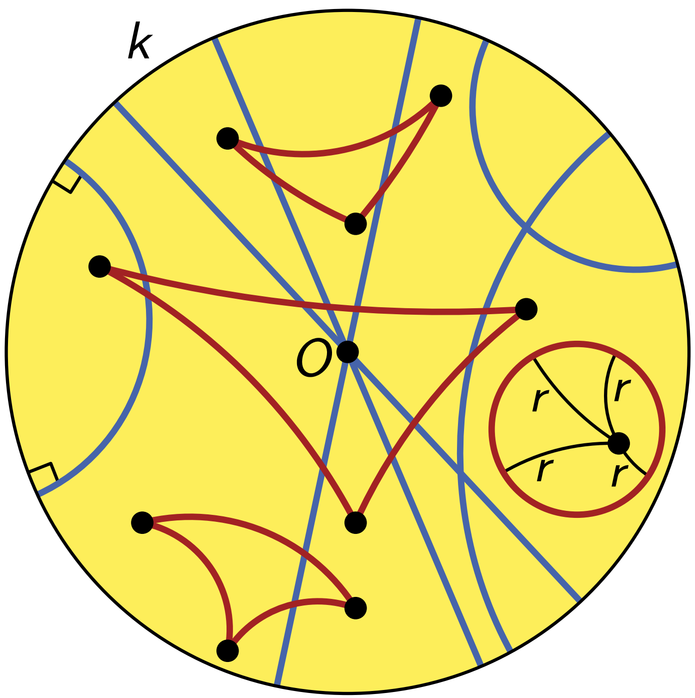
**Geraden**

- sei $\mathcal{G}$ die Vereinigung von:
  - Menge der offenen Strecken durch $O$ mit Endpunkten auf $k$
  - Menge der offenen Kreisbögen in $k$, die senkrecht auf $k$ stehen

**Beobachtung**

- nah an $O$: sehr ähnlich zum Euklidischen
- um die Besonderheiten der hyperbolischen Ebene zu nutzen müssen wir weit von $O$ weg
- Problem: wir sind dann sehr schnell sehr nah am Rand von $k$
- unterschiedliche Radien optisch dann nicht mehr unterscheidbar



# (Native) Polarkoordinaten

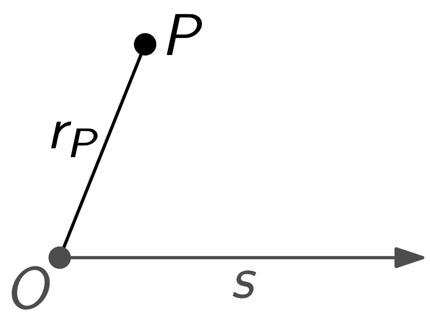
## Polarkoordinaten

- Referenz: Ursprung $O$, Strahl $s$ mit Anfangspunkt $O$

# (Native) Polarkoordinaten

## Polarkoordinaten

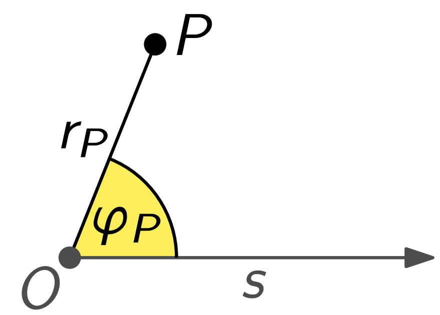
- Referenz: Ursprung $O$, Strahl $s$ mit Anfangspunkt $O$
- **Radius** $r_P$ von $P$: $d(O, P)$



# (Native) Polarkoordinaten

## Polarkoordinaten

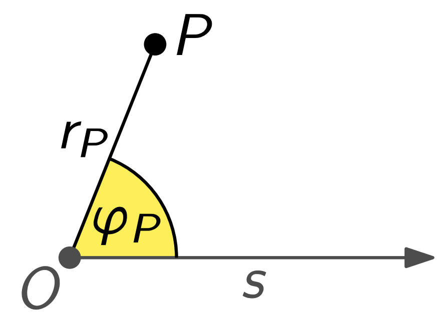
- Referenz: Ursprung $O$, Strahl $s$ mit Anfangspunkt $O$
- **Radius** $r_P$ von $P$: $d(O, P)$
- **Winkel** $\varphi_P$ von $P$: Winkel zwischen $s$ und $OP+$



# (Native) Polarkoordinaten

## Polarkoordinaten

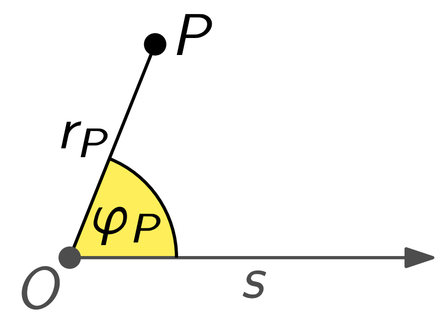
- Referenz: Ursprung $O$, Strahl $s$ mit Anfangspunkt $O$
- **Radius** $r_P$ von $P$: $d(O, P)$
- **Winkel** $\varphi_P$ von $P$: Winkel zwischen $s$ und $OP+$
- $(r_P, \varphi_P)$ sind die **Polarkoordinaten** von $P$



# (Native) Polarkoordinaten

## Polarkoordinaten

- Referenz: Ursprung $O$, Strahl $s$ mit Anfangspunkt $O$
- **Radius** $r_P$ von $P$: $d(O, P)$
- **Winkel** $\varphi_P$ von $P$: Winkel zwischen $s$ und $OP+$
- $(r_P, \varphi_P)$ sind die **Polarkoordinaten** von $P$



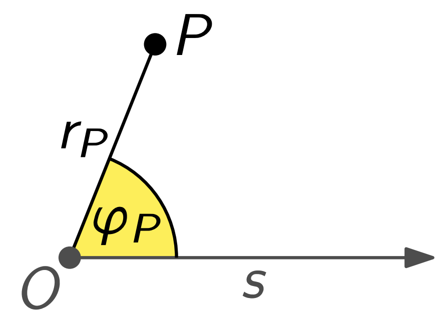

## Native Polarkoordinaten

- $d$ ist die hyperbolische Distanz

# (Native) Polarkoordinaten

## Polarkoordinaten

- Referenz: Ursprung $O$, Strahl $s$ mit Anfangspunkt $O$
- **Radius** $r_P$ von $P$: $d(O, P)$
- **Winkel** $\varphi_P$ von $P$: Winkel zwischen $s$ und $OP+$
- $(r_P, \varphi_P)$ sind die **Polarkoordinaten** von $P$



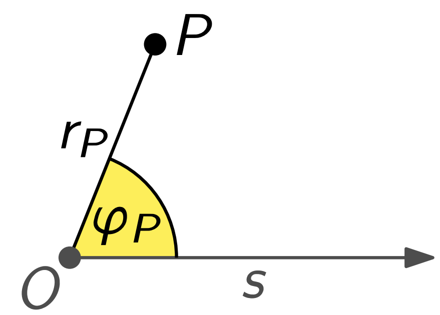

## Native Polarkoordinaten

- $d$ ist die hyperbolische Distanz
- insbesondere ist $d$ **nicht** die euklidische Distanz in der Poincaré Disk

# (Native) Polarkoordinaten

**Polarkoordinaten**

- Referenz: Ursprung $O$, Strahl $s$ mit Anfangspunkt $O$
- **Radius** $r_P$ von $P$: $d(O, P)$
- **Winkel** $\varphi_P$ von $P$: Winkel zwischen $s$ und $OP+$
- $(r_P, \varphi_P)$ sind die **Polarkoordinaten** von $P$




**Native Polarkoordinaten**

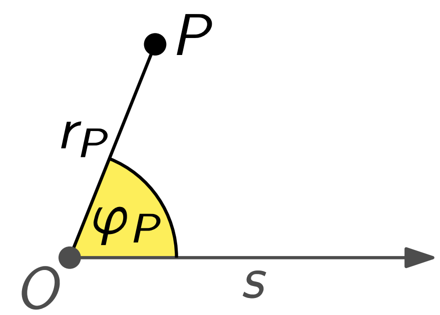
- $d$ ist die hyperbolische Distanz
- insbesondere ist $d$ **nicht** die euklidische Distanz in der Poincaré Disk

**Distanz zwischen Punkten in Polarkoordinaten**

- betrachte zwei Punkte (in nativen Polarkoordinaten)
  $A = (r_A, \varphi_A)$ und $B = (r_B, \varphi_B)$

# (Native) Polarkoordinaten

## Polarkoordinaten

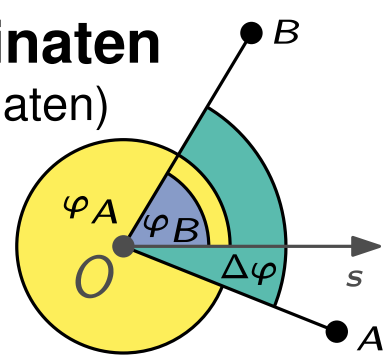



- Referenz: Ursprung $O$, Strahl $s$ mit Anfangspunkt $O$
- **Radius** $r_P$ von $P$: $d(O, P)$
- **Winkel** $\varphi_P$ von $P$: Winkel zwischen $s$ und $OP+$
- $(r_P, \varphi_P)$ sind die **Polarkoordinaten** von $P$

## Native Polarkoordinaten

- $d$ ist die hyperbolische Distanz
- insbesondere ist $d$ **nicht** die euklidische Distanz in der Poincaré Disk

## Distanz zwischen Punkten in Polarkoordinaten

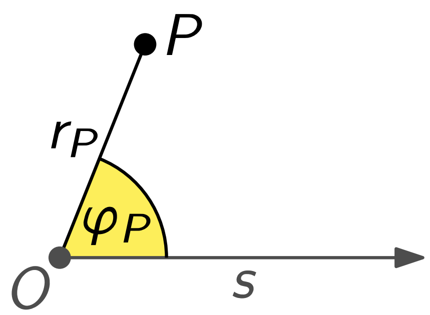



- betrachte zwei Punkte (in nativen Polarkoordinaten)
  $A = (r_A, \varphi_A)$ und $B = (r_B, \varphi_B)$
- sei $\Delta\varphi$ ihre Winkeldistanz:
  $\Delta\varphi = \min\{|\varphi_A - \varphi_B|, 2\pi - |\varphi_A - \varphi_B|\}$

# (Native) Polarkoordinaten

## Polarkoordinaten

- Referenz: Ursprung $O$, Strahl $s$ mit Anfangspunkt $O$
- **Radius** $r_P$ von $P$: $d(O, P)$
- **Winkel** $\varphi_P$ von $P$: Winkel zwischen $s$ und $OP+$
- $(r_P, \varphi_P)$ sind die **Polarkoordinaten** von $P$

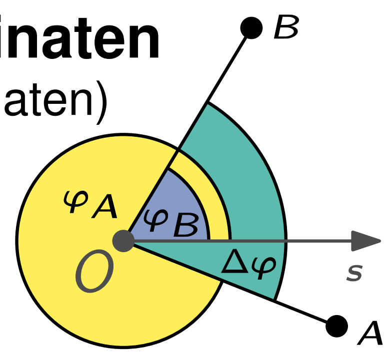



## Native Polarkoordinaten

- $d$ ist die hyperbolische Distanz
- insbesondere ist $d$ **nicht** die euklidische Distanz in der Poincaré Disk

## Distanz zwischen Punkten in Polarkoordinaten

- betrachte zwei Punkte (in nativen Polarkoordinaten)
  $A = (r_A, \varphi_A)$ und $B = (r_B, \varphi_B)$
- sei $\Delta\varphi$ ihre Winkeldistanz:
  $\Delta\varphi = \min\{|\varphi_A - \varphi_B|, 2\pi - |\varphi_A - \varphi_B|\}$
- dann: $d(A, B) = \operatorname{arcosh}\left[\cosh(r_A)\cosh(r_B) - \sinh(r_A)\sinh(r_B)\cos(\Delta\varphi)\right]$



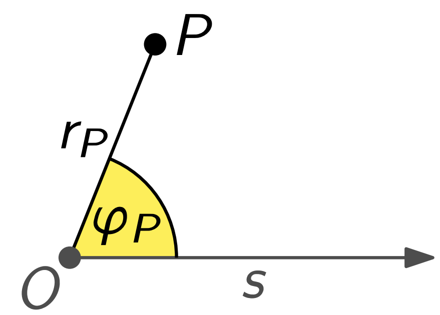

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

# (Native) Polarkoordinaten

## Polarkoordinaten

- Referenz: Ursprung $O$, Strahl $s$ mit Anfangspunkt $O$
- **Radius** $r_P$ von $P$: $d(O, P)$
- **Winkel** $\varphi_P$ von $P$: Winkel zwischen $s$ und $OP+$
- $(r_P, \varphi_P)$ sind die **Polarkoordinaten** von $P$

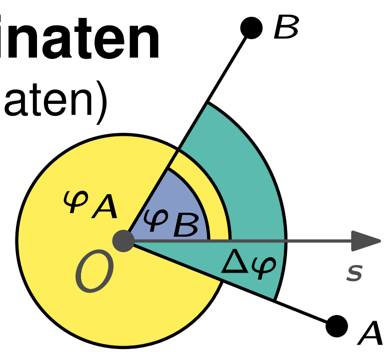



## Native Polarkoordinaten

- $d$ ist die hyperbolische Distanz
- insbesondere ist $d$ **nicht** die euklidische Distanz in der Poincaré Disk

## Distanz zwischen Punkten in Polarkoordinaten

- betrachte zwei Punkte (in nativen Polarkoordinaten) $A = (r_A, \varphi_A)$ und $B = (r_B, \varphi_B)$
- sei $\Delta\varphi$ ihre Winkeldistanz: $\Delta\varphi = \min\{|\varphi_A - \varphi_B|, 2\pi - |\varphi_A - \varphi_B|\}$




$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

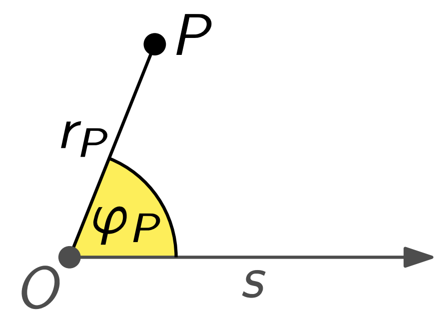
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- dann: $d(A, B) = \operatorname{arcosh}\left[\cosh(r_A)\cosh(r_B) - \sinh(r_A)\sinh(r_B)\cos(\Delta\varphi)\right]$

$$\approx \log\left[2 \cdot \left(e^{r_A}/2 \cdot e^{r_B}/2 - e^{r_A}/2 \cdot e^{r_B}/2 \cdot \cos(\Delta\varphi)\right)\right]$$

# (Native) Polarkoordinaten

## Polarkoordinaten

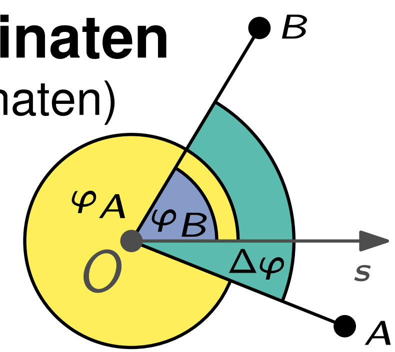



- Referenz: Ursprung $O$, Strahl $s$ mit Anfangspunkt $O$
- **Radius** $r_P$ von $P$: $d(O, P)$
- **Winkel** $\varphi_P$ von $P$: Winkel zwischen $s$ und $OP+$
- $(r_P, \varphi_P)$ sind die **Polarkoordinaten** von $P$

## Native Polarkoordinaten

- $d$ ist die hyperbolische Distanz
- insbesondere ist $d$ **nicht** die euklidische Distanz in der Poincaré Disk

## Distanz zwischen Punkten in Polarkoordinaten




$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

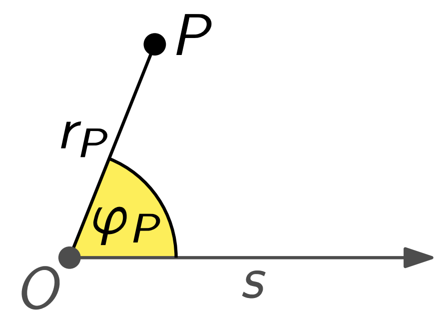
- betrachte zwei Punkte (in nativen Polarkoordinaten) $A = (r_A, \varphi_A)$ und $B = (r_B, \varphi_B)$
- sei $\Delta\varphi$ ihre Winkeldistanz: $\Delta\varphi = \min\{|\varphi_A - \varphi_B|, 2\pi - |\varphi_A - \varphi_B|\}$
- dann: $d(A, B) = \operatorname{arcosh}\left[\cosh(r_A)\cosh(r_B) - \sinh(r_A)\sinh(r_B)\cos(\Delta\varphi)\right]$

$$\approx \log\left[2 \cdot (e^{r_A}/2 \cdot e^{r_B}/2 - e^{r_A}/2 \cdot e^{r_B}/2 \cdot \cos(\Delta\varphi))\right]$$

$$= \log\left[e^{r_A + r_B} \cdot (1 - \cos(\Delta\varphi))/2\right]$$

# (Native) Polarkoordinaten

## Polarkoordinaten

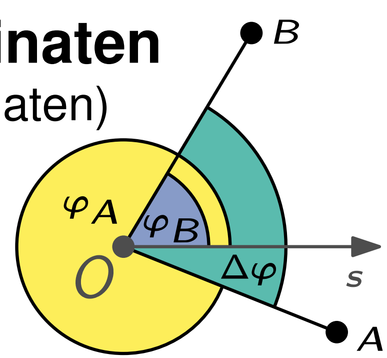



- Referenz: Ursprung $O$, Strahl $s$ mit Anfangspunkt $O$
- **Radius** $r_P$ von $P$: $d(O, P)$
- **Winkel** $\varphi_P$ von $P$: Winkel zwischen $s$ und $OP+$
- $(r_P, \varphi_P)$ sind die **Polarkoordinaten** von $P$

## Native Polarkoordinaten

- $d$ ist die hyperbolische Distanz
- insbesondere ist $d$ **nicht** die euklidische Distanz in der Poincaré Disk

## Distanz zwischen Punkten in Polarkoordinaten




$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- betrachte zwei Punkte (in nativen Polarkoordinaten)
  $A = (r_A, \varphi_A)$ und $B = (r_B, \varphi_B)$
- sei $\Delta\varphi$ ihre Winkeldistanz:
  $\Delta\varphi = \min\{|\varphi_A - \varphi_B|, 2\pi - |\varphi_A - \varphi_B|\}$
- dann: $d(A, B) = \operatorname{arcosh}\left[\cosh(r_A)\cosh(r_B) - \sinh(r_A)\sinh(r_B)\cos(\Delta\varphi)\right]$

$$\approx \log\left[2 \cdot (e^{r_A}/2 \cdot e^{r_B}/2 - e^{r_A}/2 \cdot e^{r_B}/2 \cdot \cos(\Delta\varphi))\right]$$

$$= \log\left[e^{r_A + r_B} \cdot (1 - \cos(\Delta\varphi))/2\right] = r_A + r_B - \log\left[\frac{2}{1 - \cos(\Delta\varphi)}\right]$$

# Das native Modell

**Natives Modell**

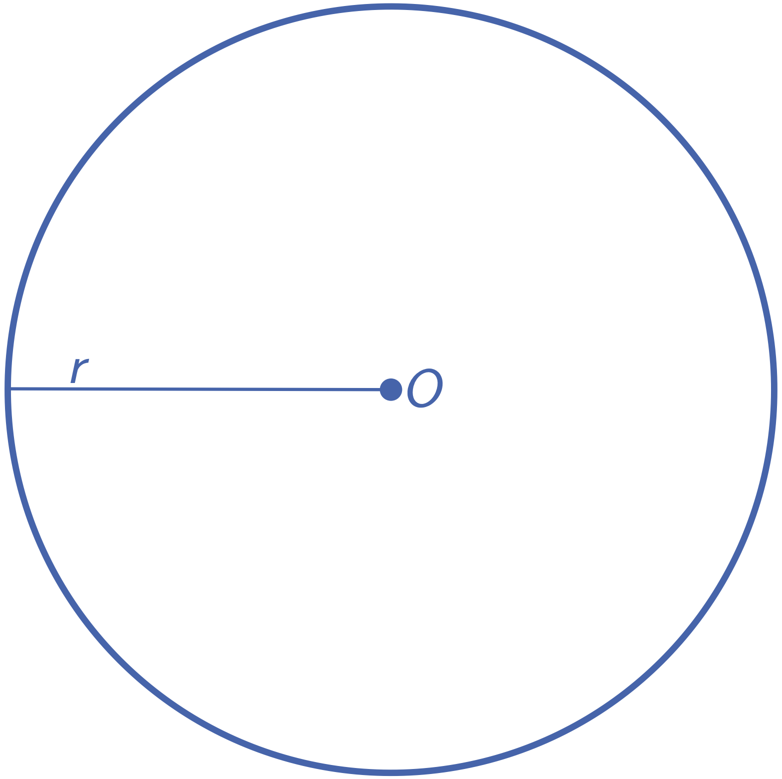
- nutze nativen Polarkoordinaten für jeden Punkt der hyperbolischen Ebene
- tu so, als wären das ganz normale euklidische Polarkoordinaten

$$d(A, B) \approx r_A + r_B - \log\left[\frac{2}{1-\cos(\Delta\varphi)}\right]$$

# Das native Modell

## Natives Modell

- nutze nativen Polarkoordinaten für jeden Punkt der hyperbolischen Ebene
- tu so, als wären das ganz normale euklidische Polarkoordinaten
  - Kreise um den Ursprung sind Kreise

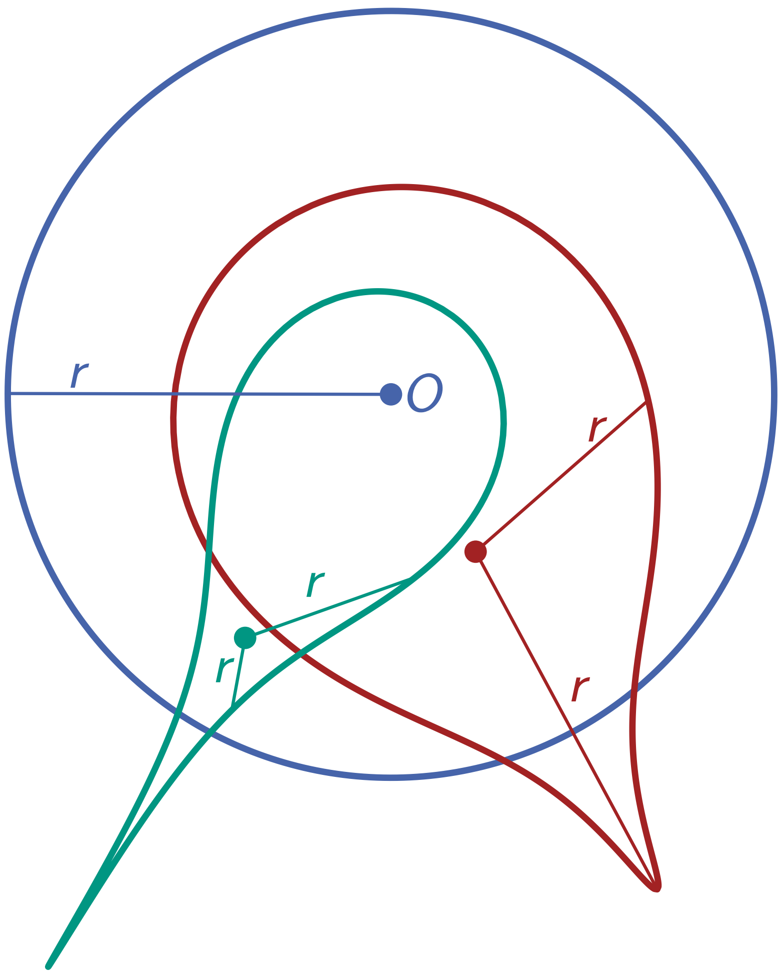



$$d(A, B) \approx r_A + r_B - \log\left[\frac{2}{1-\cos(\Delta\varphi)}\right]$$

# Das native Modell

## Natives Modell

- nutze nativen Polarkoordinaten für jeden Punkt der hyperbolischen Ebene
- tu so, als wären das ganz normale euklidische Polarkoordinaten



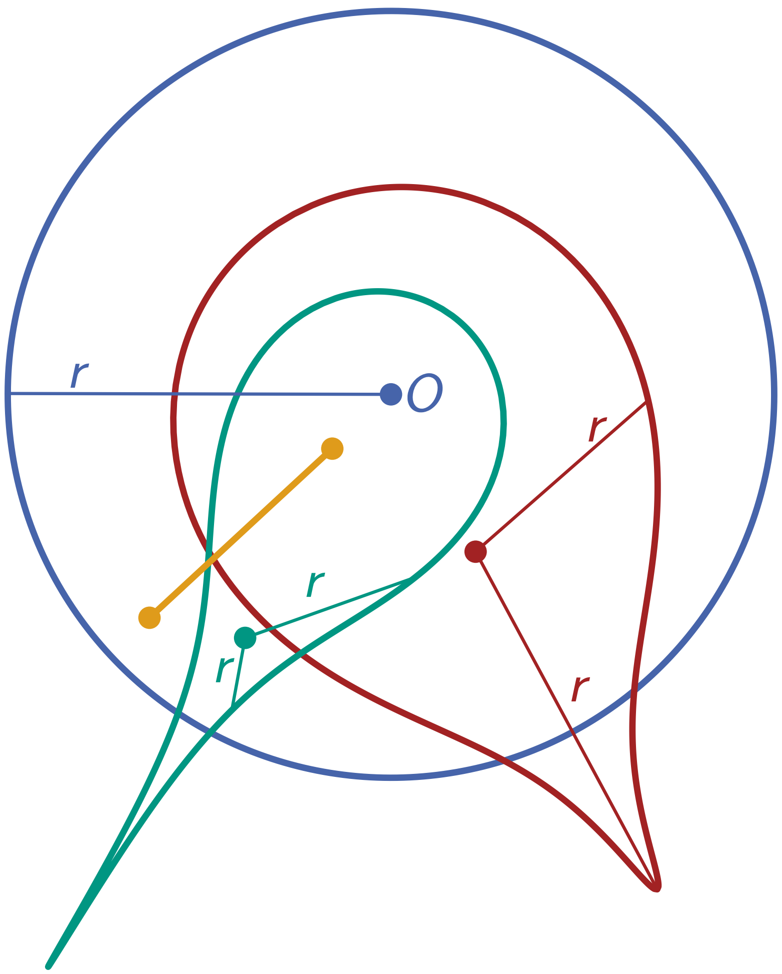

- Kreise um den Ursprung sind Kreise
- Kreise mit anderen Mittelpunkten sehen Tränenförmig aus

$$d(A, B) \approx r_A + r_B - \log\left[\frac{2}{1-\cos(\Delta\varphi)}\right]$$

# Das native Modell

## Natives Modell

- nutze nativen Polarkoordinaten für jeden Punkt der hyperbolischen Ebene
- tu so, als wären das ganz normale euklidische Polarkoordinaten



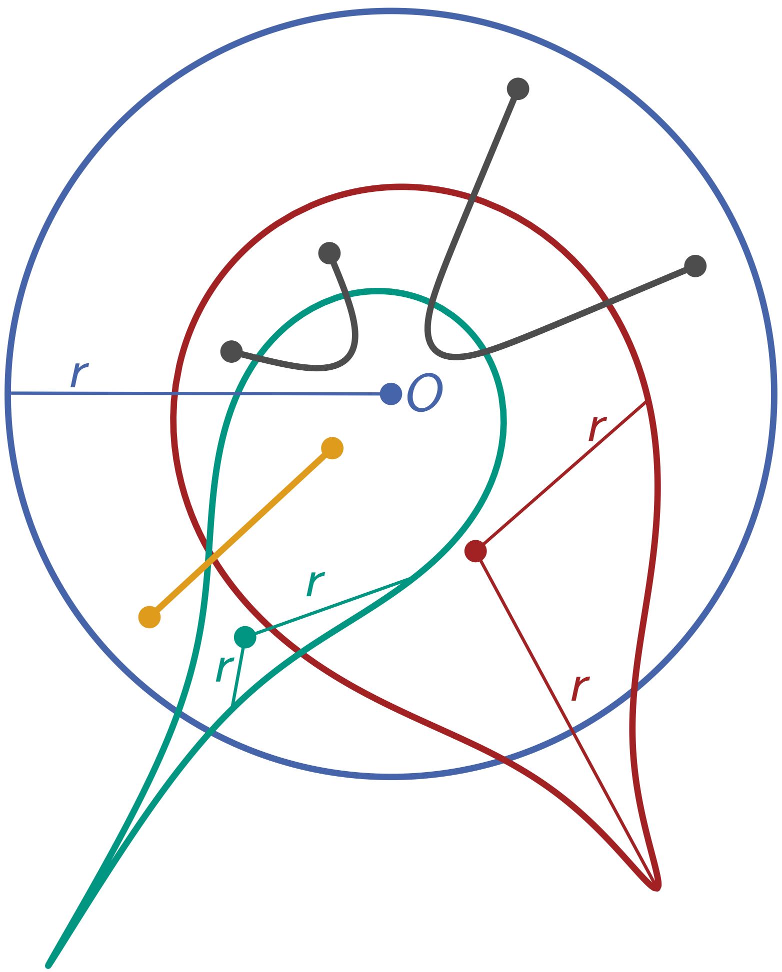

- Kreise um den Ursprung sind Kreise
- Kreise mit anderen Mittelpunkten sehen Tränenförmig aus
- Strecken auf Ursprungsger. sind Strecken
- ihre zu sehende Länge ist die korrekte hyperbolische Länge

$$d(A, B) \approx r_A + r_B - \log\left[\frac{2}{1-\cos(\Delta\varphi)}\right]$$

# Das native Modell

## Natives Modell

- nutze nativen Polarkoordinaten für jeden Punkt der hyperbolischen Ebene
- tu so, als wären das ganz normale euklidische Polarkoordinaten




- Kreise um den Ursprung sind Kreise
- Kreise mit anderen Mittelpunkten sehen Tränenförmig aus
- Strecken auf Ursprungsger. sind Strecken
- ihre zu sehende Länge ist die korrekte hyperbolische Länge
- andere Strecken sind Richtung Ursprung gekrümmt

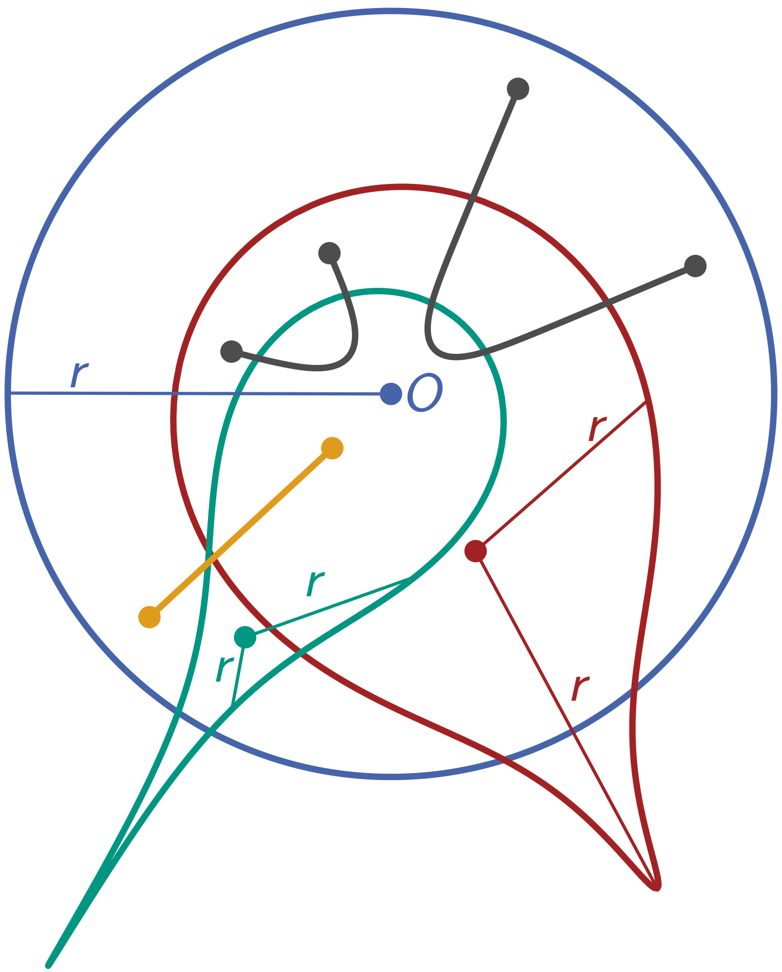
$$d(A, B) \approx r_A + r_B - \log\left[\frac{2}{1-\cos(\Delta\varphi)}\right]$$

# Das native Modell

Karlsruher Institut für Technologie

## Natives Modell

- nutze nativen Polarkoordinaten für jeden Punkt der hyperbolischen Ebene
- tu so, als wären das ganz normale euklidische Polarkoordinaten




- Kreise um den Ursprung sind Kreise
- Kreise mit anderen Mittelpunkten sehen Tränenförmig aus
- Strecken auf Ursprungsger. sind Strecken
- ihre zu sehende Länge ist die korrekte hyperbolische Länge
- andere Strecken sind Richtung Ursprung gekrümmt
- Darstellung ist **nicht** Winkelerhaltend

$$d(A, B) \approx r_A + r_B - \log\left[\frac{2}{1-\cos(\Delta\varphi)}\right]$$

# Poincaré vs. nativ

## Vorteile der Poincaré Disk

- Darstellung ist Winkelerhaltend
- Geraden sind euklidische Kreisbögen, Kreise sind euklidische Kreise
  $\rightarrow$ das sind uns vertraute Objekten

# Poincaré vs. nativ

## Vorteile der Poincaré Disk

- Darstellung ist Winkelerhaltend
- Geraden sind euklidische Kreisbögen, Kreise sind euklidische Kreise
  $\rightarrow$ das sind uns vertraute Objekten
- wir können unsere euklidische Intuition bemühen, um Einsichten über die hyperbolische Ebene zu zeigen

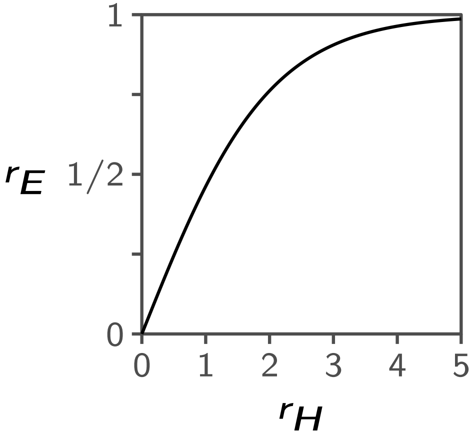
# Poincaré vs. nativ

## Vorteile der Poincaré Disk

- Darstellung ist Winkelerhaltend
- Geraden sind euklidische Kreisbögen, Kreise sind euklidische Kreise
  $\rightarrow$ das sind uns vertraute Objekten
- wir können unsere euklidische Intuition bemühen, um Einsichten über die hyperbolische Ebene zu zeigen

## Nachteile der Poincaré Disk

- die (euklidische) Distanz vom Ursprung geht sehr schnell gegen 1 für wachsende hyperbolische Distanz



# Poincaré vs. nativ

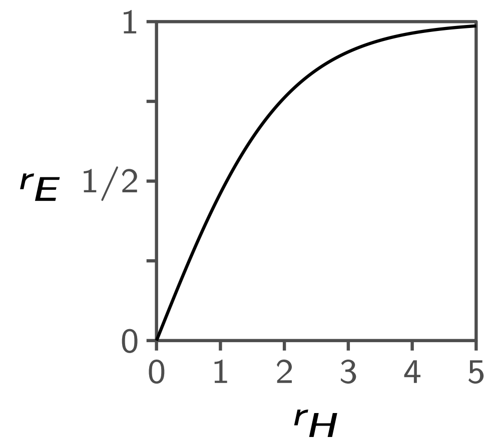
Karlsruher Institut für Technologie

## Vorteile der Poincaré Disk

- Darstellung ist Winkelerhaltend
- Geraden sind euklidische Kreisbögen, Kreise sind euklidische Kreise
  $\rightarrow$ das sind uns vertraute Objekten
- wir können unsere euklidische Intuition bemühen, um Einsichten über die hyperbolische Ebene zu zeigen

## Nachteile der Poincaré Disk

- die (euklidische) Distanz vom Ursprung geht sehr schnell gegen 1 für wachsende hyperbolische Distanz
- möchte man etwas hyperbolisches anschauen, das nicht sehr nah am Ursprung liegt, so liegt alles auf dem Rand der Disk und man sieht nichts mehr



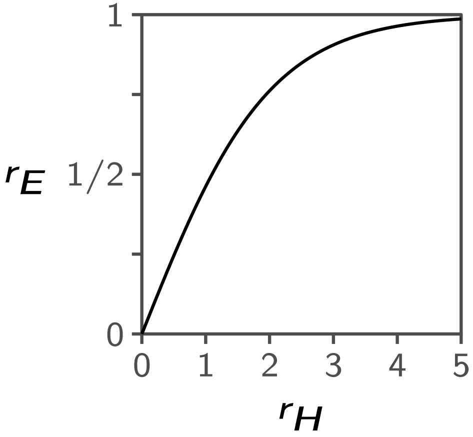
# Poincaré vs. nativ

## Vorteile der Poincaré Disk

- Darstellung ist Winkelerhaltend
- Geraden sind euklidische Kreisbögen, Kreise sind euklidische Kreise
  $\rightarrow$ das sind uns vertraute Objekten
- wir können unsere euklidische Intuition bemühen, um Einsichten über die hyperbolische Ebene zu zeigen

## Nachteile der Poincaré Disk

- die (euklidische) Distanz vom Ursprung geht sehr schnell gegen 1 für wachsende hyperbolische Distanz
- möchte man etwas hyperbolisches anschauen, das nicht sehr nah am Ursprung liegt, so liegt alles auf dem Rand der Disk und man sieht nichts mehr
- anfälliger für numerische Probleme



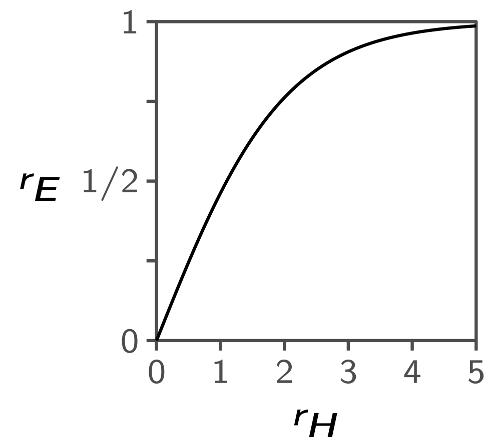
# Poincaré vs. nativ

## Vorteile der Poincaré Disk

- Darstellung ist Winkelerhaltend
- Geraden sind euklidische Kreisbögen, Kreise sind euklidische Kreise
  $\rightarrow$ das sind uns vertraute Objekten
- wir können unsere euklidische Intuition bemühen, um Einsichten über die hyperbolische Ebene zu zeigen

## Nachteile der Poincaré Disk

- die (euklidische) Distanz vom Ursprung geht sehr schnell gegen 1 für wachsende hyperbolische Distanz
- möchte man etwas hyperbolisches anschauen, das nicht sehr nah am Ursprung liegt, so liegt alles auf dem Rand der Disk und man sieht nichts mehr
- anfälliger für numerische Probleme

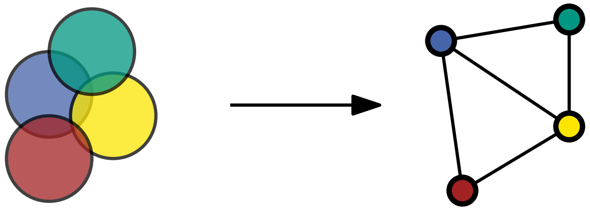



## Heuristik zur Wahl des Modells

- visuelle Darstellung von hyperbolischen Daten $\rightarrow$ natives Modell
- Berechnungen auf Koordinaten $\rightarrow$ natives Modell (oder auch: Hyperboloid)
- Verständnisfragen/Beweise $\rightarrow$ Poincaré Disk

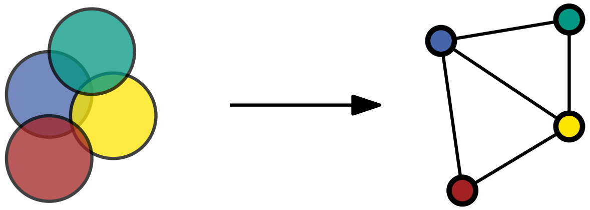
# Unit-Disk Graphen

**Definition**
Ein Graph ist ein **Unit-Disk Graph**, wenn er der geometrische Schnittgraph einer Menge von Disks mit Radius 1 ist.



# Unit-Disk Graphen

**Definition**
Ein Graph ist ein **Unit-Disk Graph**, wenn er der geometrische Schnittgraph einer Menge von Disks mit Radius 1 ist.

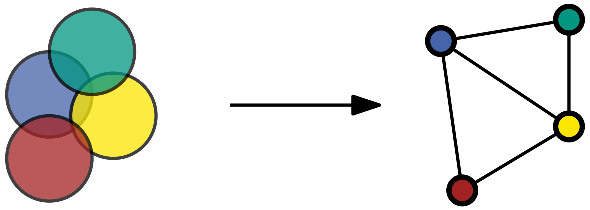


**Jetzt hpyerbolisch**

- kann man im Prinzip erstmal analog definieren

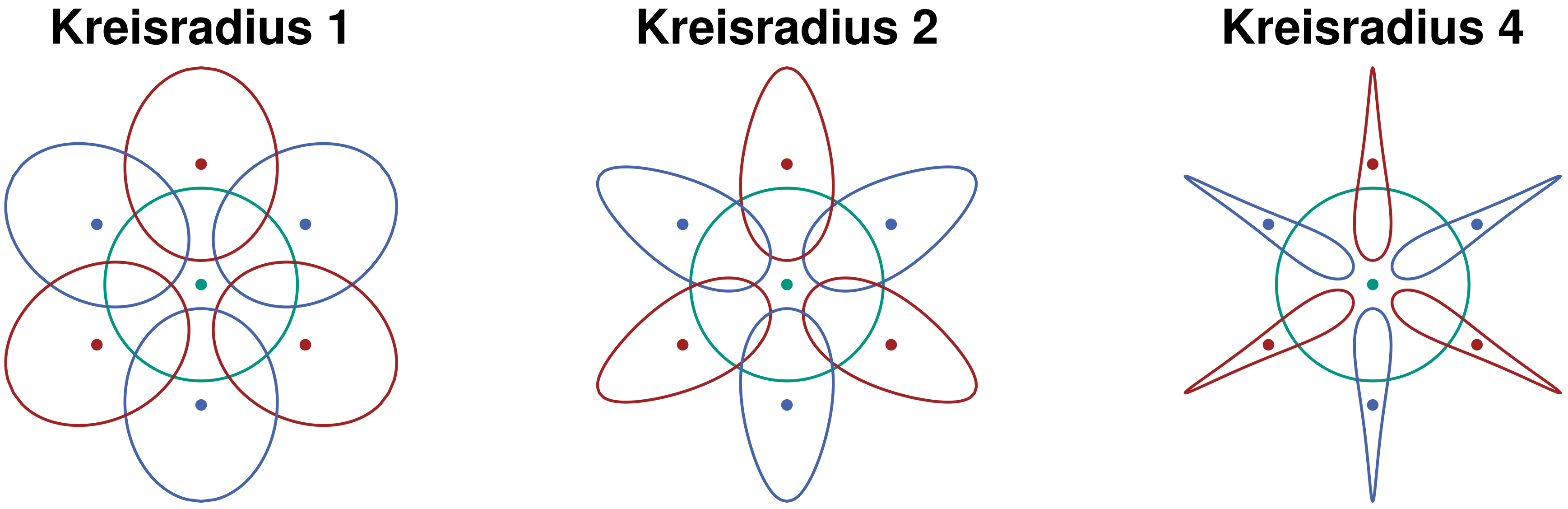
# Unit-Disk Graphen

**Definition**
Ein Graph ist ein **Unit-Disk Graph**, wenn er der geometrische Schnittgraph einer Menge von Disks mit Radius 1 ist.



**Jetzt hpyerbolisch**

- kann man im Prinzip erstmal analog definieren
- Achtung: der Radius macht auf einmal einen Unterschied



# Hyperbolische Unit-Disk Graphen

**Definition** **Beachte:** die Disks der Schnittrepräsentation haben also Radius $R/2$

$G = (V, E)$ ist ein **hyperbolischer Unit-Disk Graph** wenn er eine hyperbolische Unit-Disk Repräsentation hat: ein Abbildung $p\colon V \to \mathbb{H}^2$ zusammen mit einem Radius $R$, sodass $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow d(p(u), p(v)) \leq R$.

# Hyperbolische Unit-Disk Graphen

Karlsruher Institut für Technologie

**Definition**

**Beachte:** die Disks der Schnittrepräsentation haben also Radius $R/2$

$G = (V, E)$ ist ein **hyperbolischer Unit-Disk Graph** wenn er eine hyperbolische Unit-Disk Repräsentation hat: ein Abbildung $p\colon V \to \mathbb{H}^2$ zusammen mit einem Radius $R$, sodass $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow d(p(u), p(v)) \leq R$.

**Warum der Name *Unit*-Disk Graph?**

- der Begriff *Unit* ist hier als „einheitlich“ statt als „Länge $= 1$“ zu verstehen

# Hyperbolische Unit-Disk Graphen

**Definition** **Beachte:** die Disks der Schnittrepräsentation haben also Radius $R/2$

$G = (V, E)$ ist ein **hyperbolischer Unit-Disk Graph** wenn er eine hyperbolische Unit-Disk Repräsentation hat: ein Abbildung $p\colon V \to \mathbb{H}^2$ zusammen mit einem Radius $R$, sodass $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow d(p(u), p(v)) \leq R$.

**Warum der Name *Unit*-Disk Graph?**

- der Begriff *Unit* ist hier als „einheitlich“ statt als „Länge $= 1$“ zu verstehen
- man erhält das gleiche, wenn man $R = 2$ fordert, aber die Krümmung der hyperbolischen Ebene nicht auf $-1$ festhält

# Hyperbolische Unit-Disk Graphen

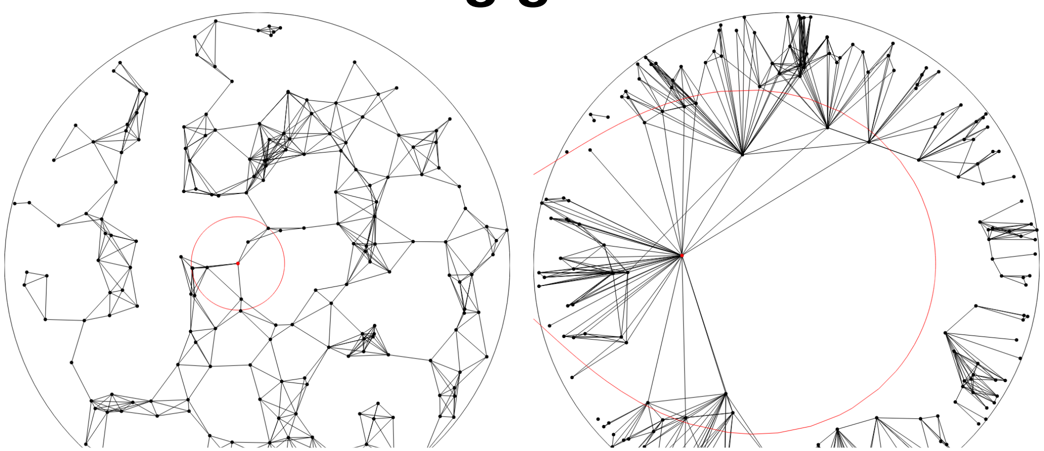
**Definition** **Beachte:** die Disks der Schnittrepräsentation haben also Radius $R/2$

$G = (V, E)$ ist ein **hyperbolischer Unit-Disk Graph** wenn er eine hyperbolische Unit-Disk Repräsentation hat: ein Abbildung $p\colon V \to \mathbb{H}^2$ zusammen mit einem Radius $R$, sodass $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow d(p(u), p(v)) \leq R$.

## Warum der Name *Unit*-Disk Graph?

- der Begriff *Unit* ist hier als „einheitlich“ statt als „Länge $= 1$“ zu verstehen
- man erhält das gleiche, wenn man $R = 2$ fordert, aber die Krümmung der hyperbolischen Ebene nicht auf $-1$ festhält

## Bekomme ich unterschiedliche Strukturen abhängig von *R*?



https://thobl.github.io/hyperbolic-unit-disk-graph/

# Hyperbolische Unit-Disk Graphen

**Definition** **Beachte:** die Disks der Schnittrepräsentation haben also Radius $R/2$

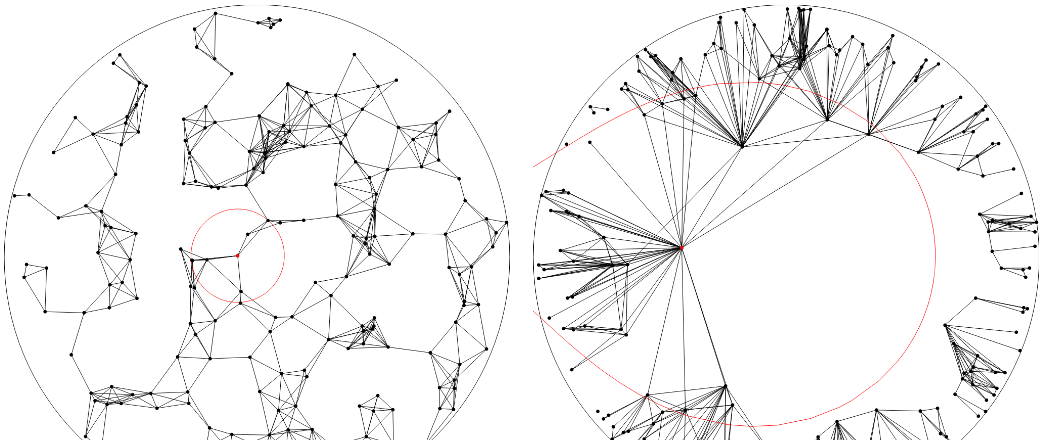
$G = (V, E)$ ist ein **hyperbolischer Unit-Disk Graph** wenn er eine hyperbolische Unit-Disk Repräsentation hat: ein Abbildung $p\colon V \to \mathbb{H}^2$ zusammen mit einem Radius $R$, sodass $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow d(p(u), p(v)) \le R$.

## Warum der Name *Unit*-Disk Graph?

- der Begriff *Unit* ist hier als „einheitlich“ statt als „Länge $= 1$“ zu verstehen
- man erhält das gleiche, wenn man $R = 2$ fordert, aber die Krümmung der hyperbolischen Ebene nicht auf $-1$ festhält

## Bekomme ich unterschiedliche Strukturen abhängig von *R*?

- kleines $R$
  - wie im Euklidischen
  - regelmäßig / homogen
  - gitterartig
- großes $R$
  - unregelmäßig / inhomogen
  - hierarchisch



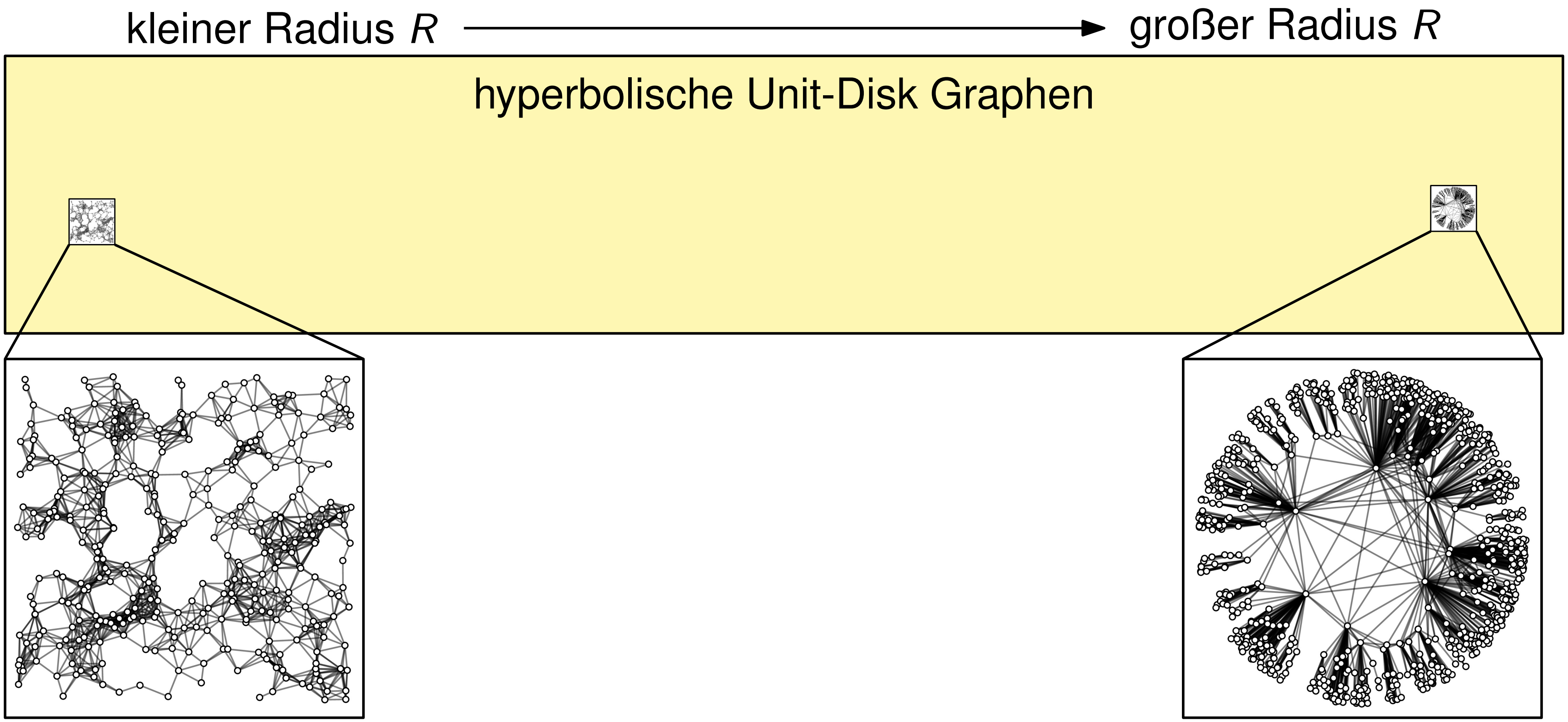
https://thobl.github.io/hyperbolic-unit-disk-graph/

# Wie hyperbolisch darfs sein?

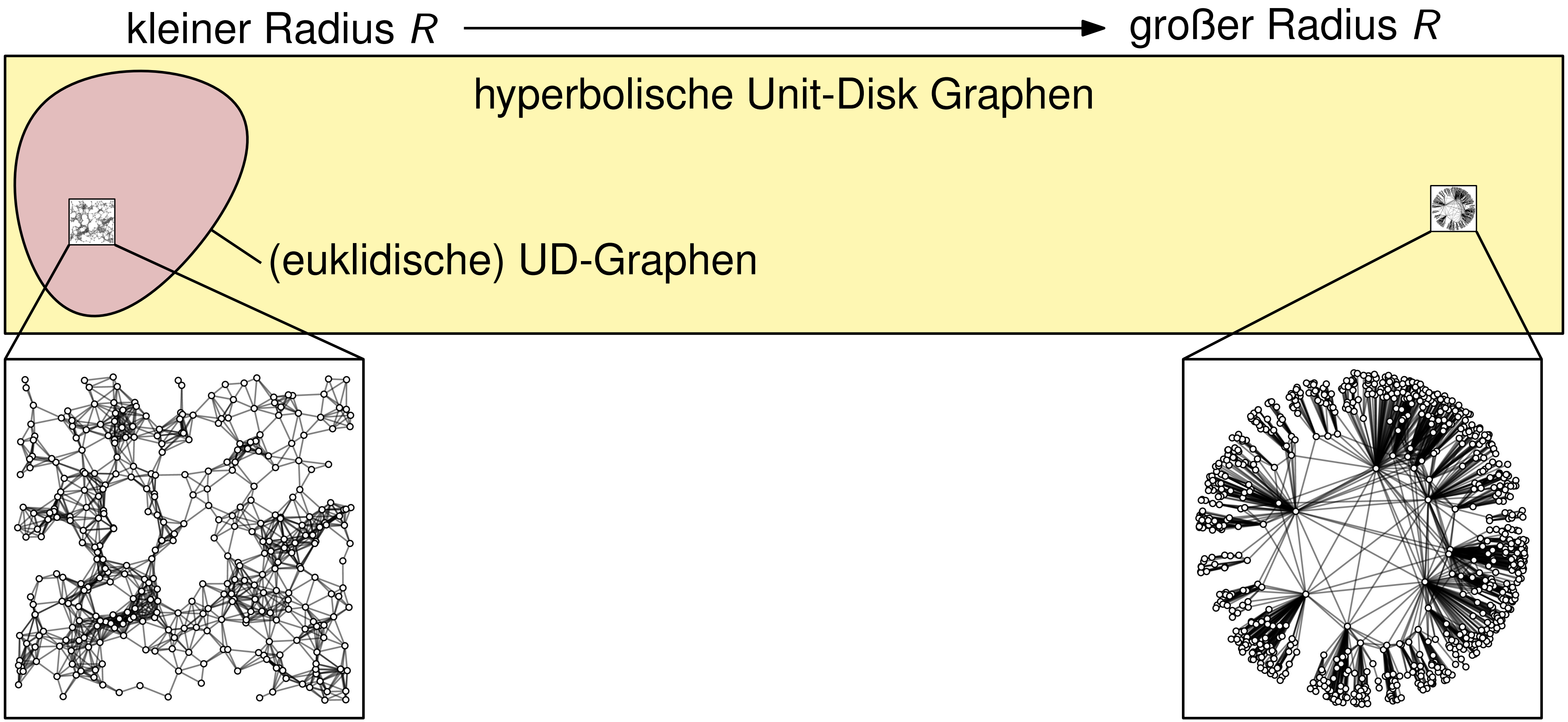
kleiner Radius $R$ $\longrightarrow$ großer Radius $R$

hyperbolische Unit-Disk Graphen

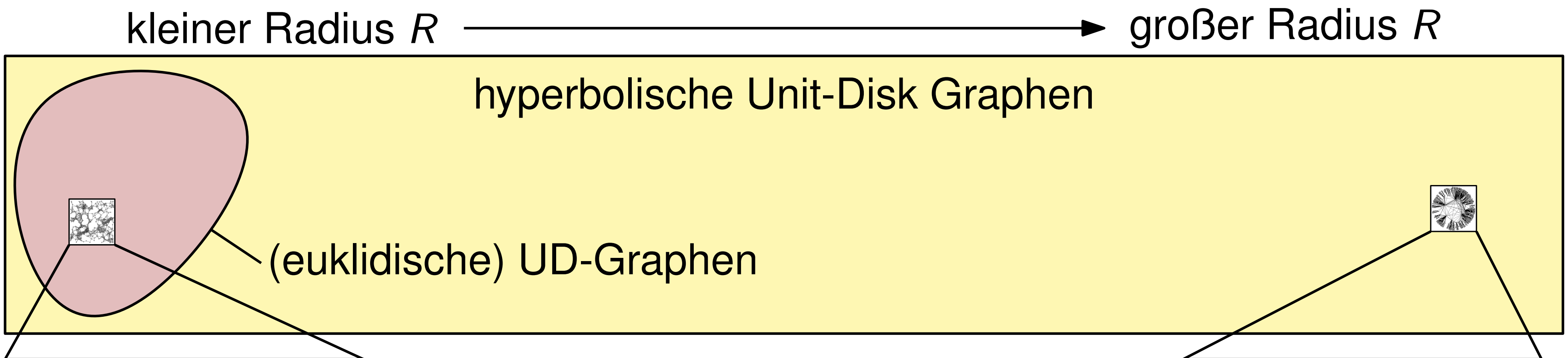
# Wie hyperbolisch darfs sein?

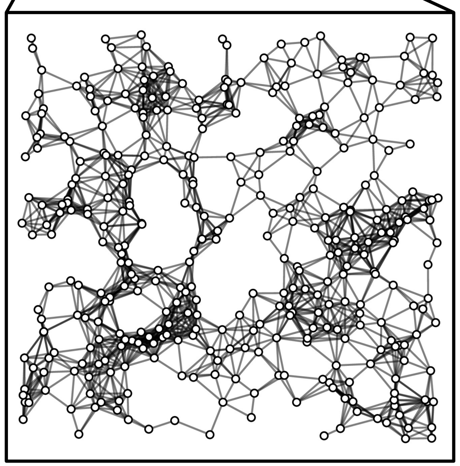


# Wie hyperbolisch darfs sein?



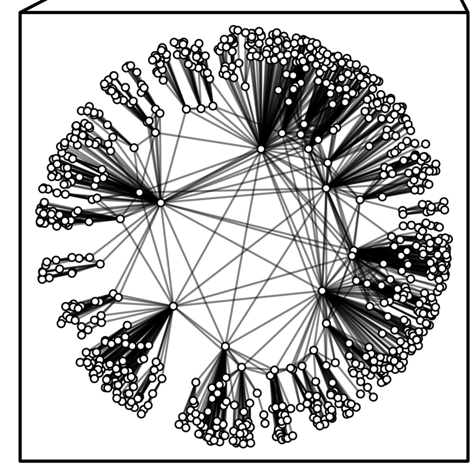
# Wie hyperbolisch darfs sein?



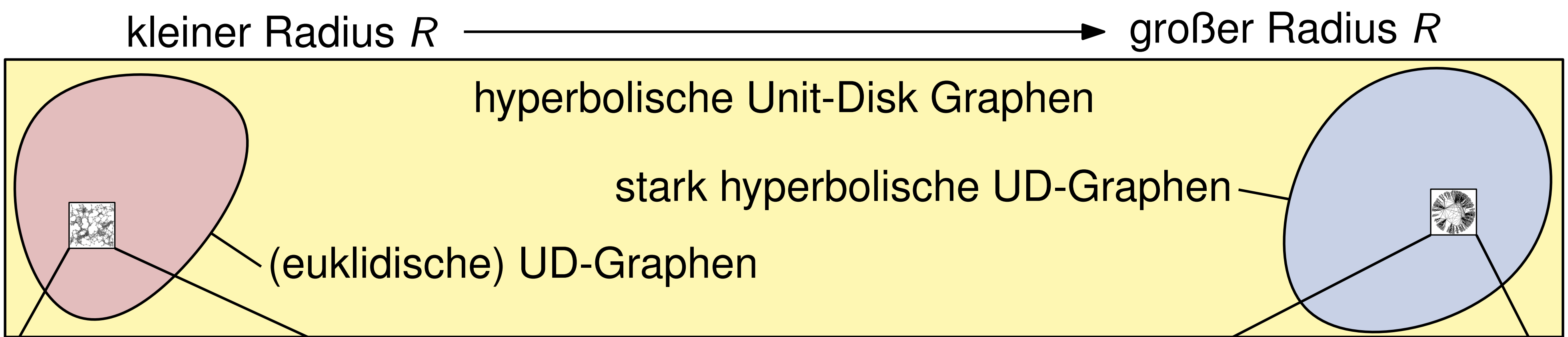



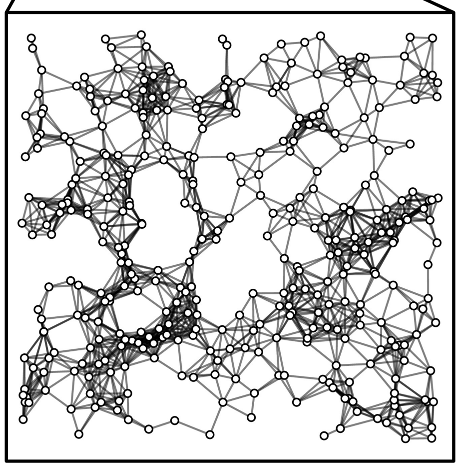
**Situation**

- euklidische UD-Graphen sind eine Teilklasse von hyperbolischen
- viele hyperbolische UD-Graphen sind nicht sehr hyperbolisch



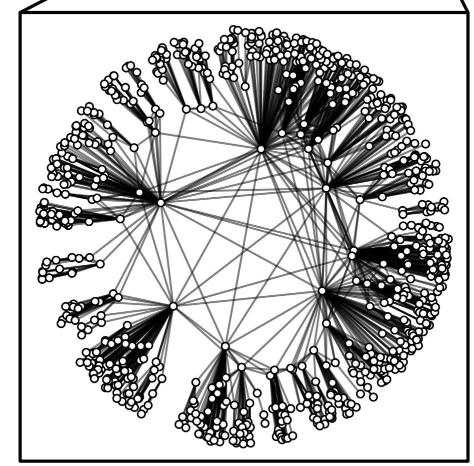
# Wie hyperbolisch darfs sein?



**Situation**

- euklidische UD-Graphen sind eine Teilklasse von hyperbolischen
- viele hyperbolische UD-Graphen sind nicht sehr hyperbolisch



## Stark hyperbolische Unit-Disk Graphen

- Ziel: Gegenstück zu euklidischen UD-Graphen
- mit hierarchischer / heterogener Struktur
- Wie formalisieren wir das? Wie groß ist groß genug für $R$?

# Stark hyperbolisch

**Definition**
$G = (V, E)$ ist ein **hyperbolischer Unit-Disk Graph** wenn er eine hyperbolische Unit-Disk Repräsentation hat: ein Abbildung $p\colon V \to \mathbb{H}^2$ zusammen mit einem Radius $R$, sodass $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow d(p(u), p(v)) \leq R$.

**Definition**
$G$ ist ein **stark hyperbolischer Unit-Disk Graph**, wenn $p$ alle Knoten in eine Disk mit Radius $R$ abbildet.

https://thobl.github.io/hyperbolic-unit-disk-graph/

# Stark hyperbolisch

**Definition**
$G = (V, E)$ ist ein **hyperbolischer Unit-Disk Graph** wenn er eine hyperbolische Unit-Disk Repräsentation hat: ein Abbildung $p \colon V \to \mathbb{H}^2$ zusammen mit einem Radius $R$, sodass $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow d(p(u), p(v)) \leq R$.

**Definition**
$G$ ist ein **stark hyperbolischer Unit-Disk Graph**, wenn $p$ alle Knoten in eine Disk mit Radius $R$ abbildet.

https://thobl.github.io/hyperbolic-unit-disk-graph/

**Darstellung**

- wähle Zentrum dieser Disk als Ursprung für die nativen Polarkoordinaten
- **Achtung:** nicht mit der Poincaré Disk verwechseln

# Stark hyperbolisch

**Definition**
$G = (V, E)$ ist ein **hyperbolischer Unit-Disk Graph** wenn er eine hyperbolische Unit-Disk Repräsentation hat: ein Abbildung $p\colon V \to \mathbb{H}^2$ zusammen mit einem Radius $R$, sodass $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow d(p(u), p(v)) \leq R$.

**Definition**
$G$ ist ein **stark hyperbolischer Unit-Disk Graph**, wenn $p$ alle Knoten in eine Disk mit Radius $R$ abbildet.

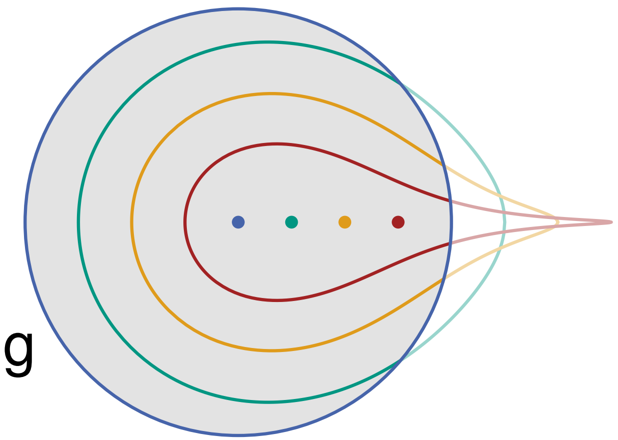
https://thobl.github.io/hyperbolic-unit-disk-graph/

## Darstellung

- wähle Zentrum dieser Disk als Ursprung für die nativen Polarkoordinaten
- **Achtung:** nicht mit der Poincaré Disk verwechseln

## Beobachtungen

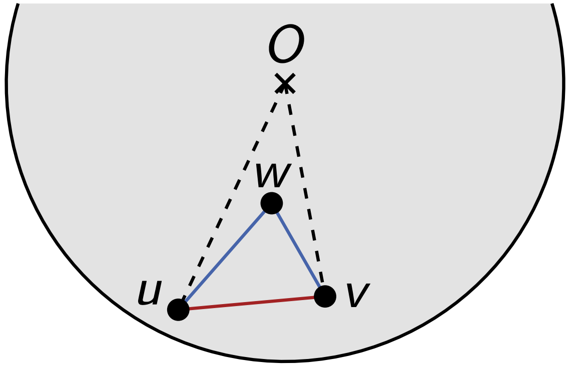
- Knoten im Ursprung: mit allen anderen benachbart
- je weiter außen ein Knoten, desto kleiner sein Einflussbereich
- maximale Heterogenität: jede Distanz vom Ursprung liefert unterschiedlich großen Einflussbereich



# Erzwungene Kanten

## Situation

- stark hyperbolische UD-Repräsentation
- $w$ liegt bezüglich Winkel zwischen $u$ und $v$
- $w$ liegt weiter innen als $u$ und $v$

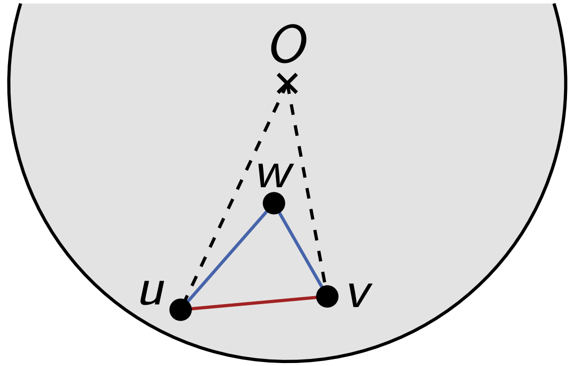



**Theorem** (ohne Beweis)
Wenn $\{u, v\} \in E$, dann auch $\{u, w\}, \{v, w\} \in E$.

# Erzwungene Kanten

## Situation

- stark hyperbolische UD-Repräsentation
- $w$ liegt bezüglich Winkel zwischen $u$ und $v$
- $w$ liegt weiter innen als $u$ und $v$

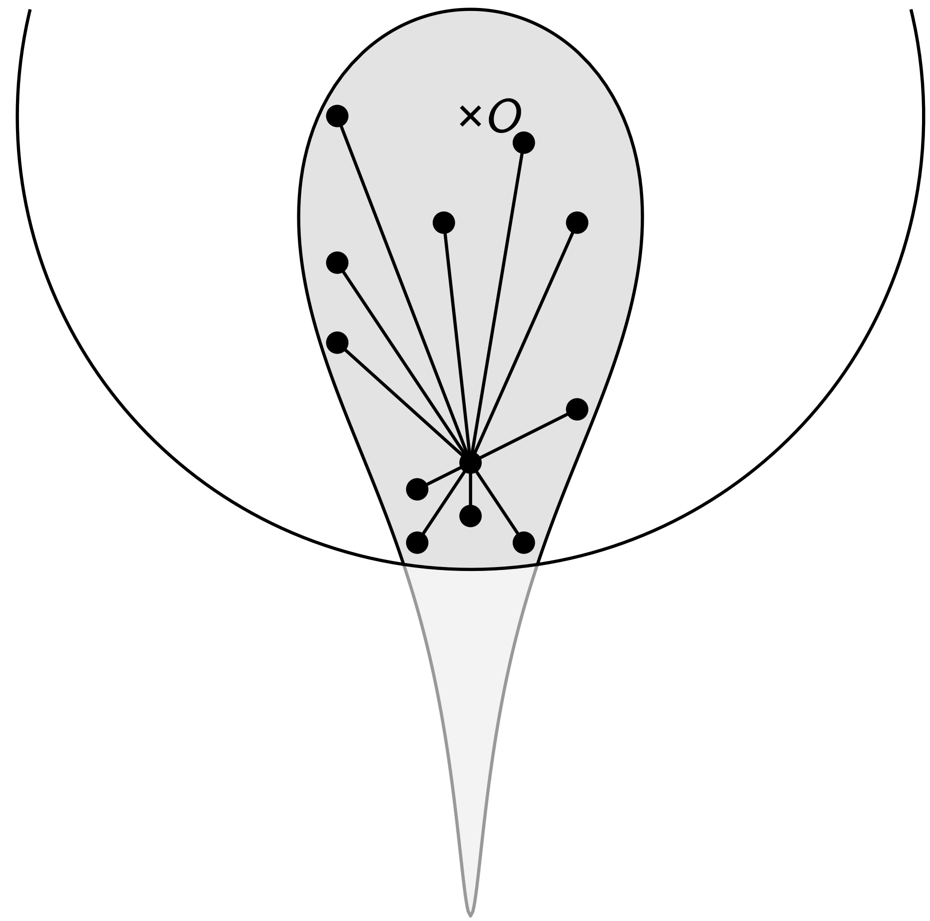



**Theorem** (ohne Beweis)
Wenn $\{u, v\} \in E$, dann auch $\{u, w\}, \{v, w\} \in E$.

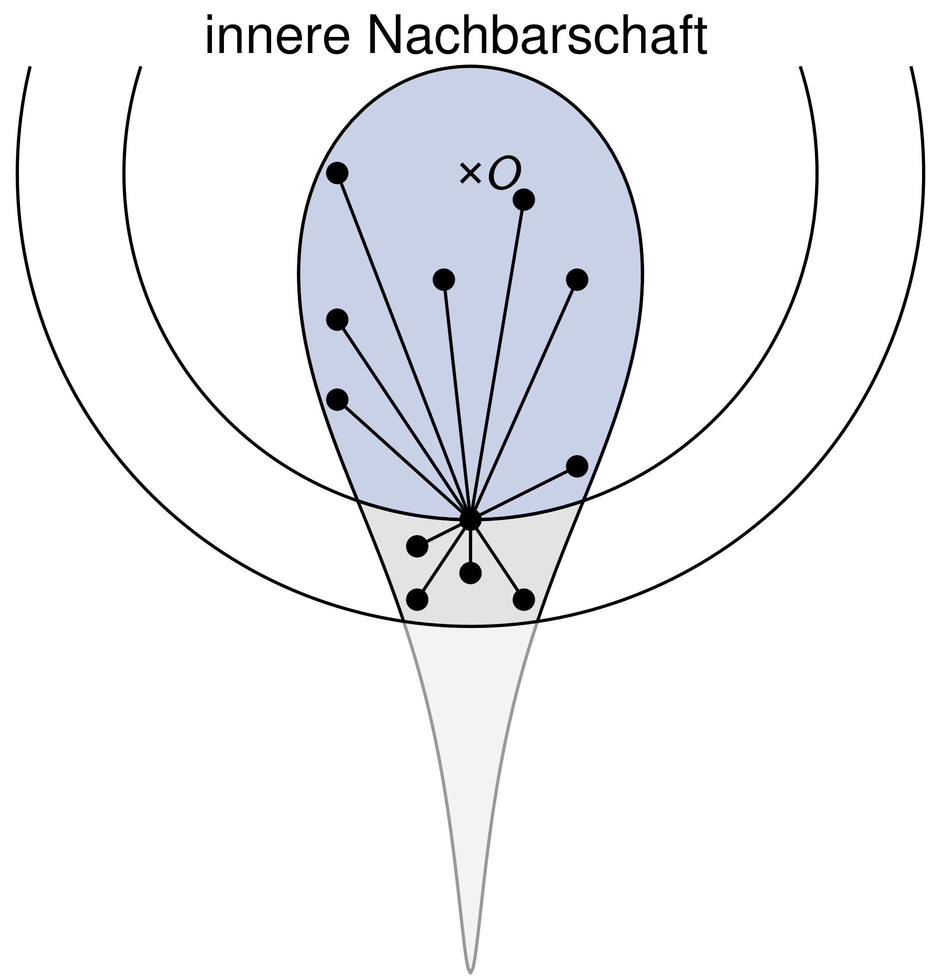
## Anmerkung

- man kann nicht unbemerkt außen an einem inneren Knoten vorbeilaufen
- hierarchische Strukturen: je weiter innen desto höher in der Hierarchie
- Beweis: für Interessierte im Anhang

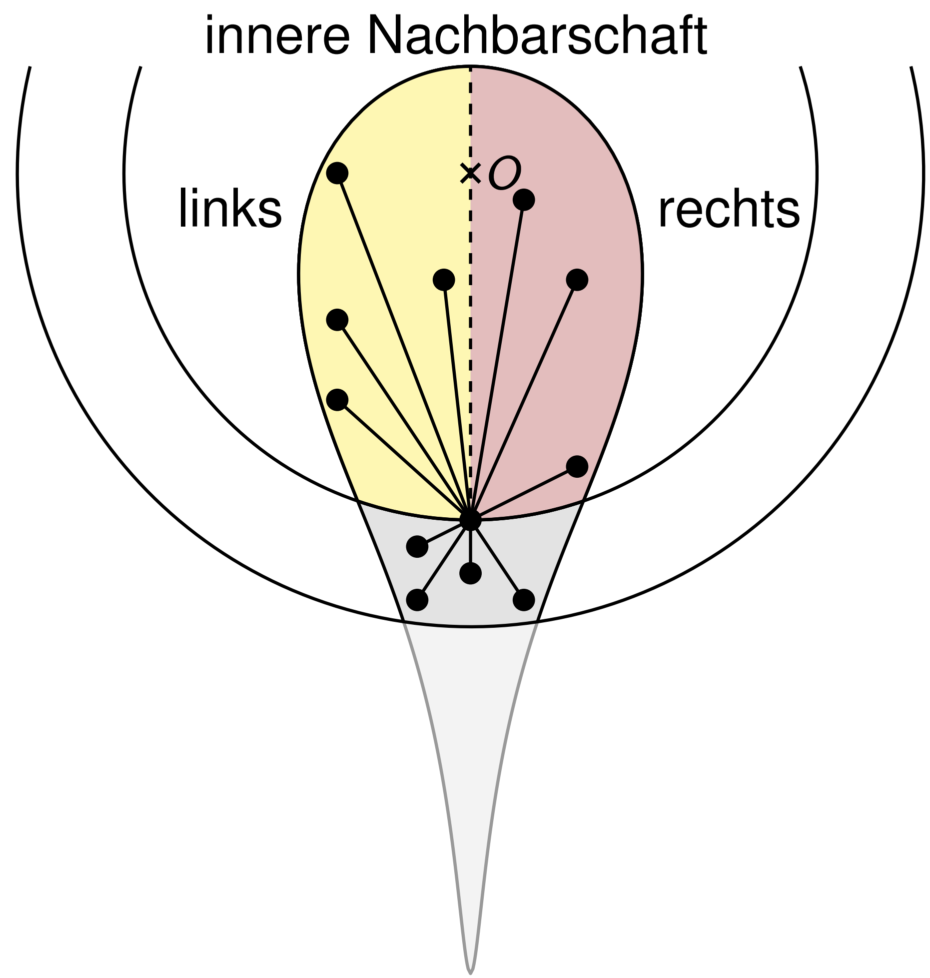
# Innere Nachbarschaft (stark hyperbolisch)



# Innere Nachbarschaft (stark hyperbolisch)

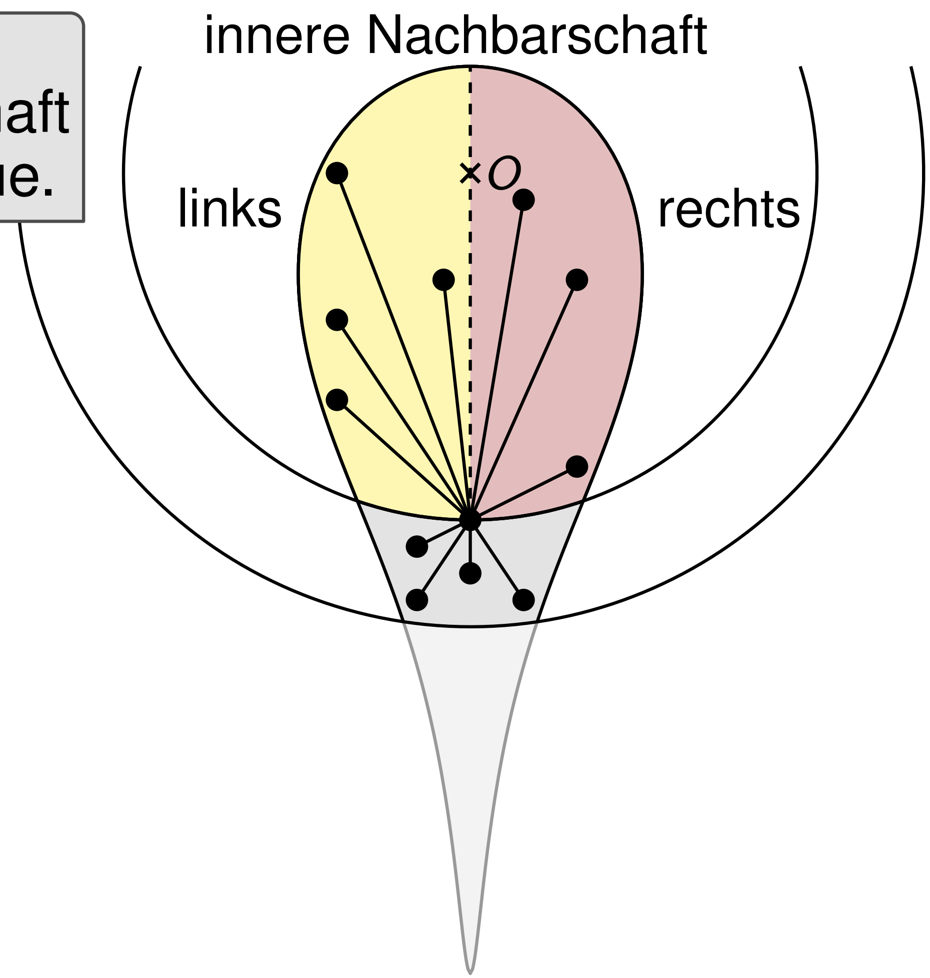


# Innere Nachbarschaft (stark hyperbolisch)



# Innere Nachbarschaft (stark hyperbolisch)

**Theorem**
Die linke und rechte innere Nachbarschaft eines Knotens bilden jeweils eine Clique.

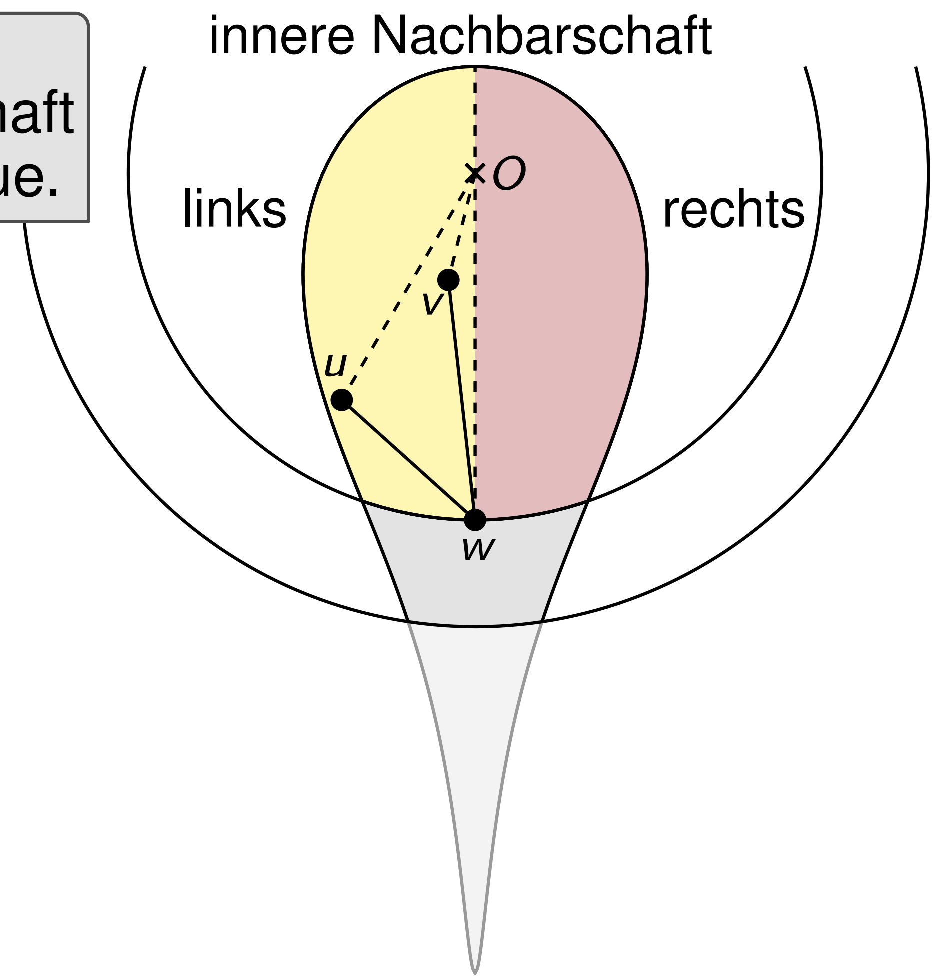


# Innere Nachbarschaft (stark hyperbolisch)

**Theorem**
Die linke und rechte innere Nachbarschaft eines Knotens bilden jeweils eine Clique.

**Beweis**

- zeige: $u$ und $v$ sind verbunden

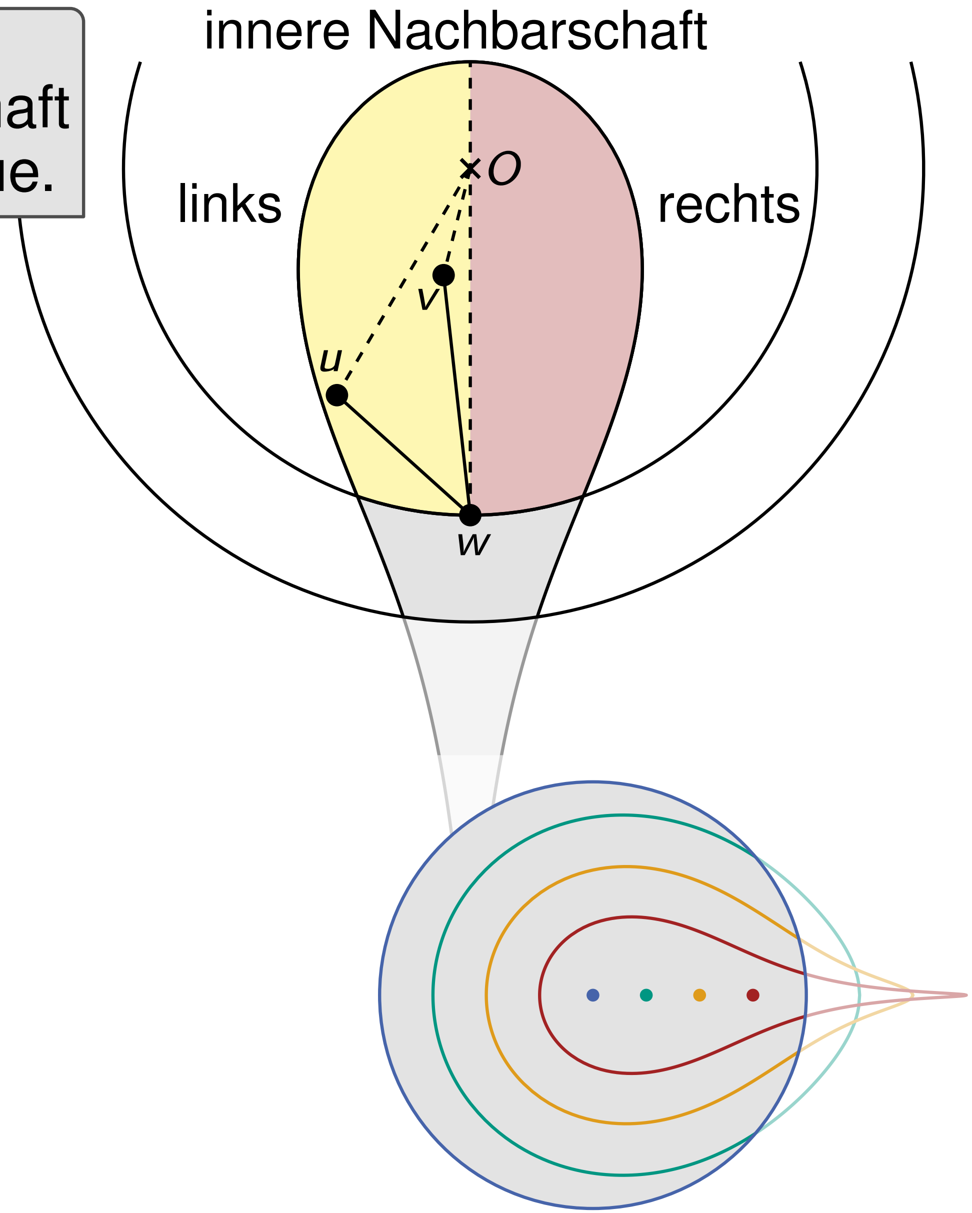


# Innere Nachbarschaft (stark hyperbolisch)

**Theorem**
Die linke und rechte innere Nachbarschaft eines Knotens bilden jeweils eine Clique.

**Beweis**

- zeige: $u$ und $v$ sind verbunden
- $w$ Richtung $O$ verschieben verkleinert seine Nachbarschaft nicht

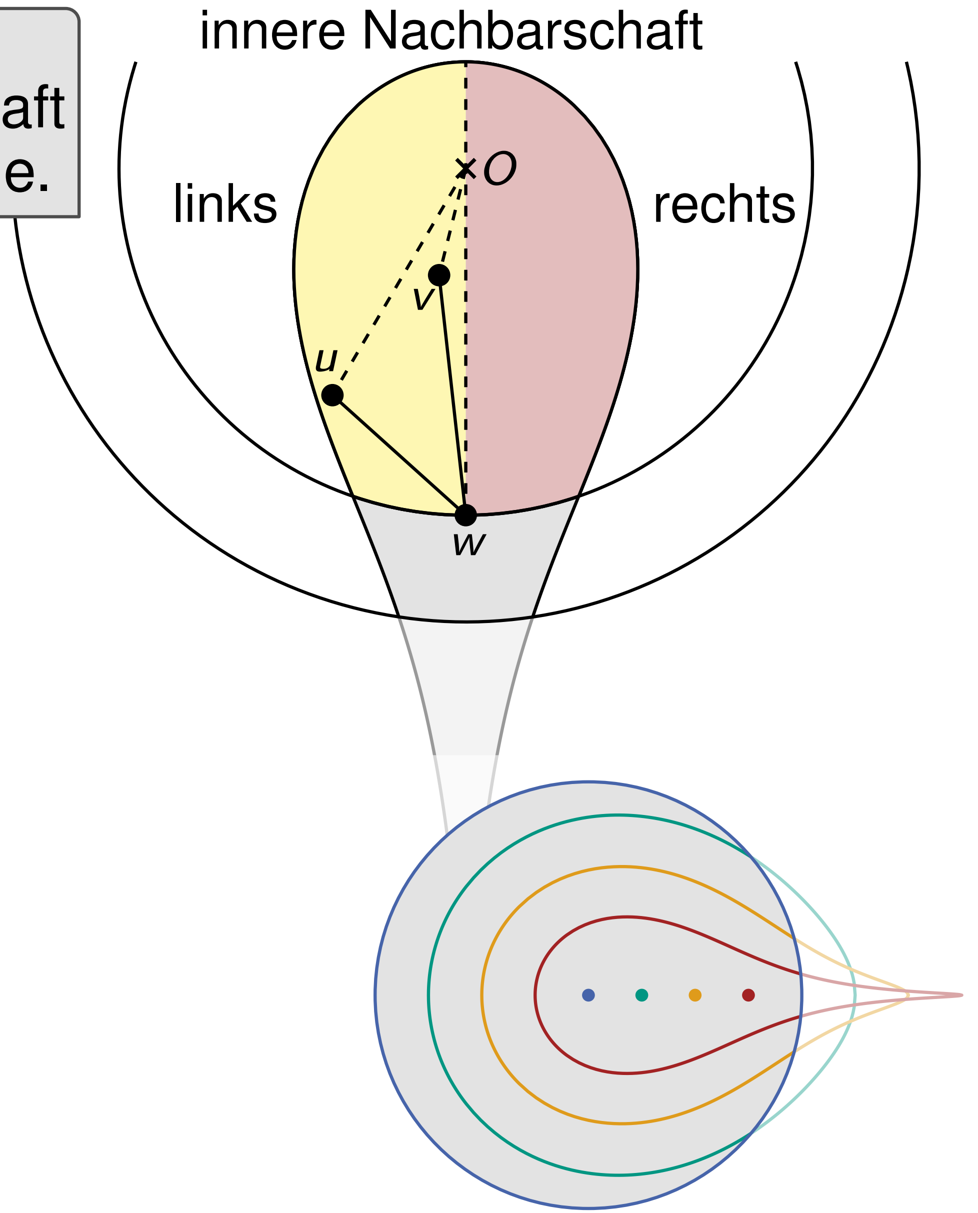


# Innere Nachbarschaft (stark hyperbolisch)

**Theorem**
Die linke und rechte innere Nachbarschaft eines Knotens bilden jeweils eine Clique.

**Beweis**

- zeige: $u$ und $v$ sind verbunden
- $w$ Richtung $O$ verschieben verkleinert seine Nachbarschaft nicht
- verschiebe $w$, sodass $r_w = r_v$
  $\Rightarrow$ $w$ bleibt mit $u$ verbunden
  (beachte: $d(u, w)$ wird ggf. größer, aber nicht größer als $R$)

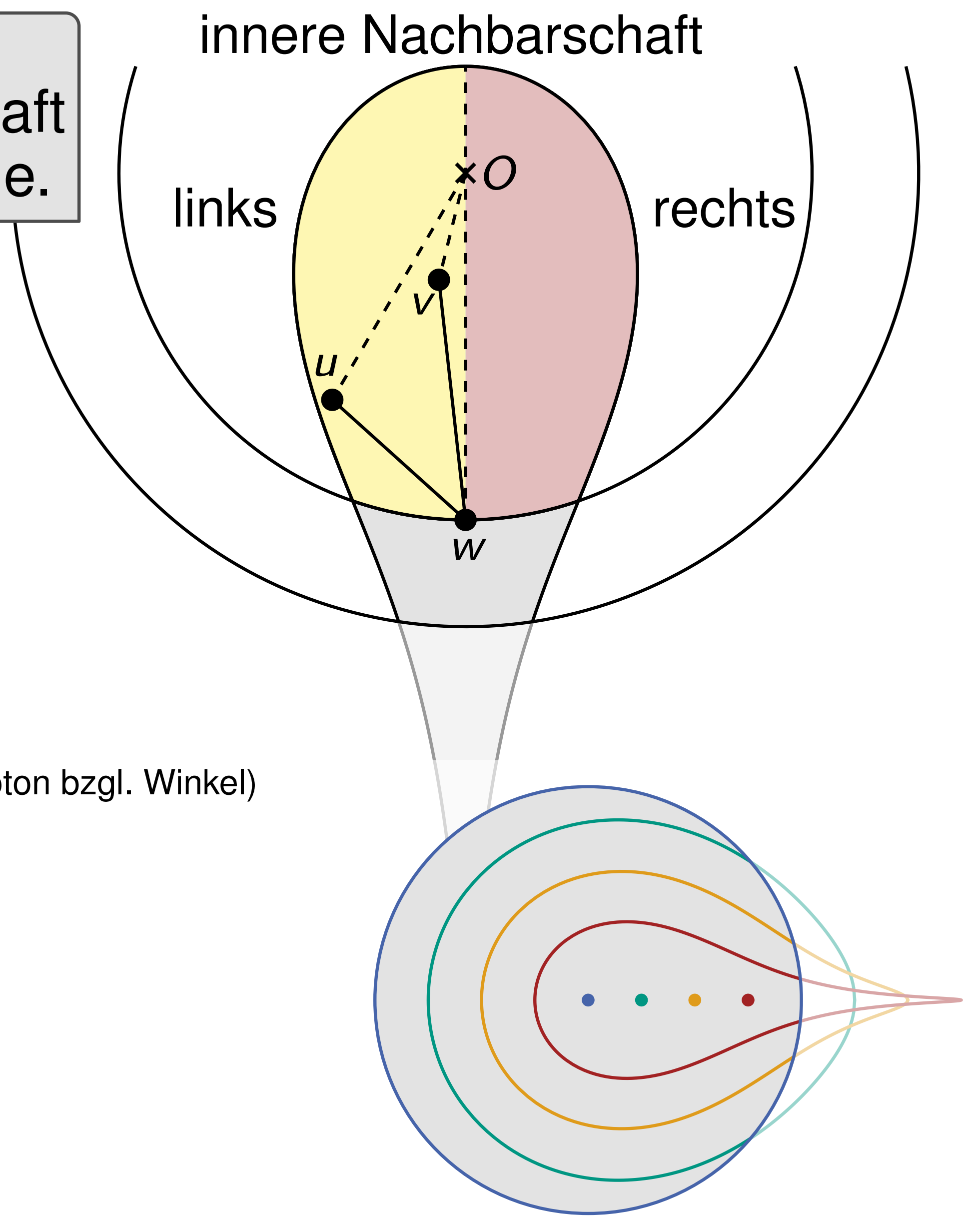


# Innere Nachbarschaft (stark hyperbolisch)

**Theorem**
Die linke und rechte innere Nachbarschaft eines Knotens bilden jeweils eine Clique.

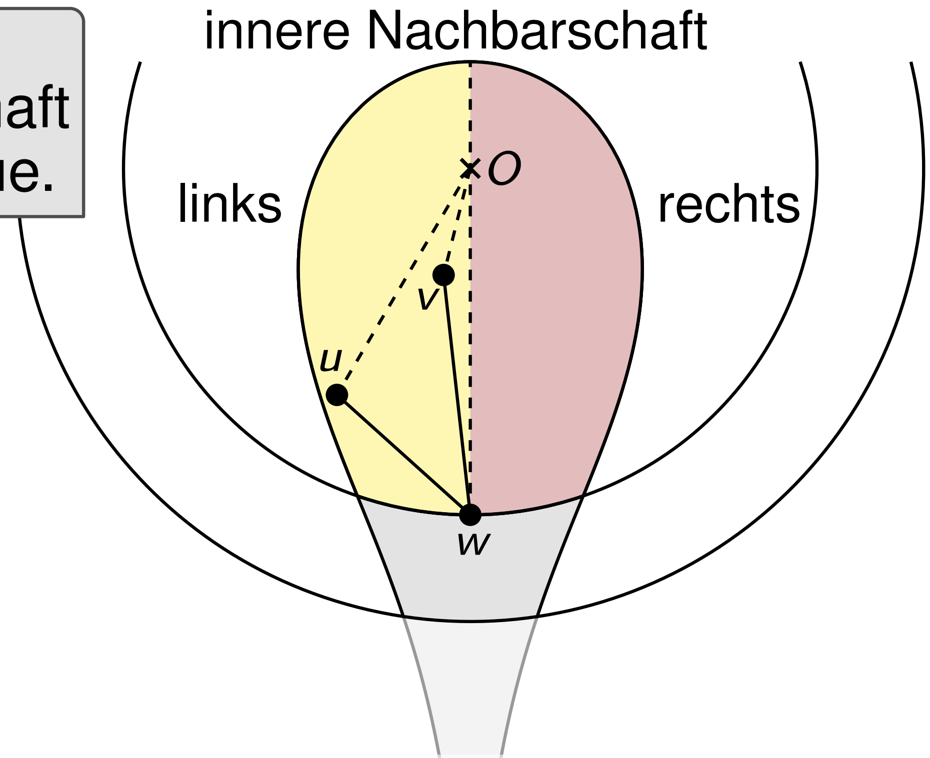
**Beweis**

- zeige: $u$ und $v$ sind verbunden
- $w$ Richtung $O$ verschieben verkleinert seine Nachbarschaft nicht
- verschiebe $w$, sodass $r_w = r_v$
  $\Rightarrow$ $w$ bleibt mit $u$ verbunden
  (beachte: $d(u, w)$ wird ggf. größer, aber nicht größer als $R$)
- verschiebe $w$ weiter, sodass $\varphi_w = \varphi_v$
  $\Rightarrow$ $w$ bleibt mit $u$ verbunden (Distanz monoton bzgl. Winkel)



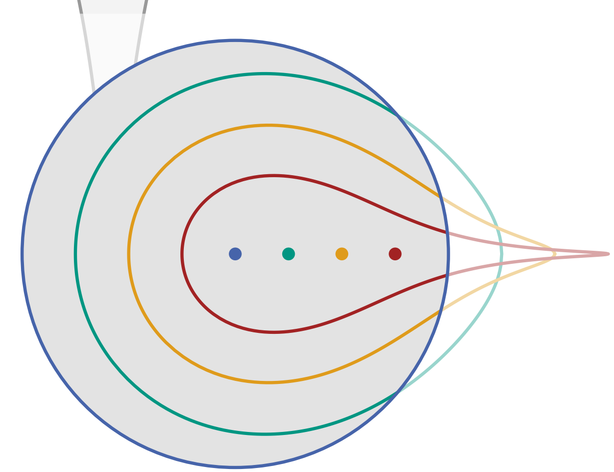
# Innere Nachbarschaft (stark hyperbolisch)

**Theorem**
Die linke und rechte innere Nachbarschaft eines Knotens bilden jeweils eine Clique.




**Beweis**

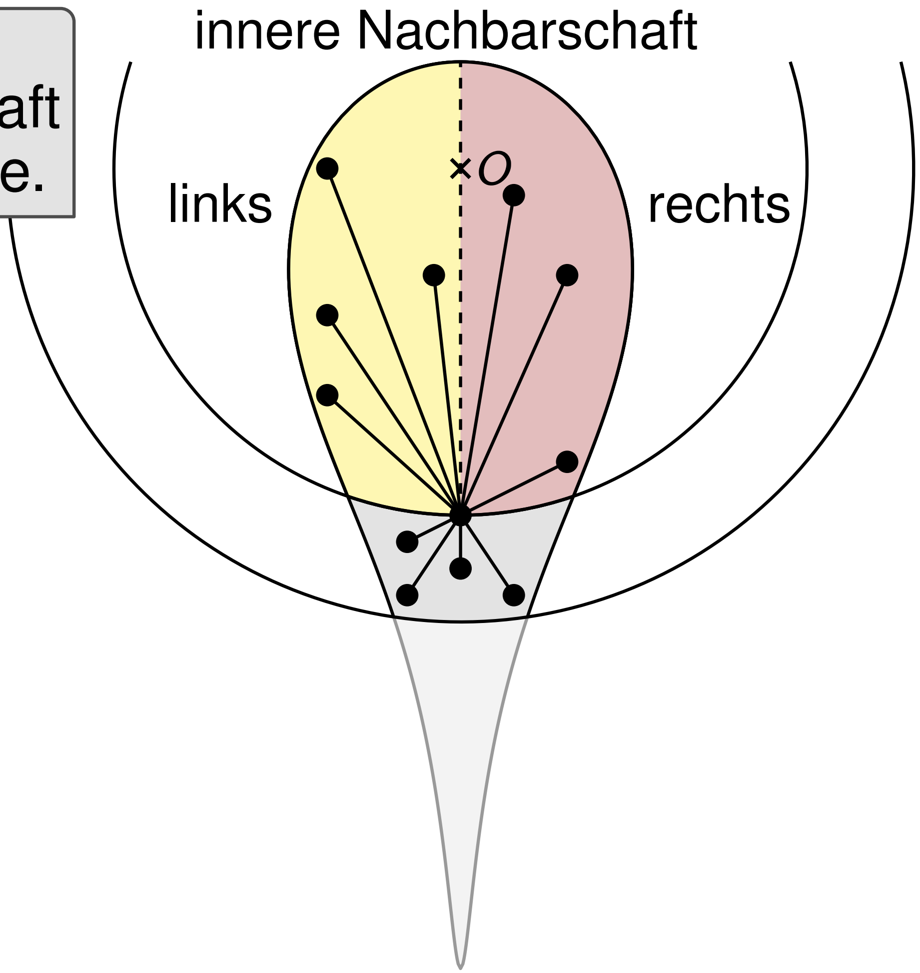
- zeige: $u$ und $v$ sind verbunden
- $w$ Richtung $O$ verschieben verkleinert seine Nachbarschaft nicht
- verschiebe $w$, sodass $r_w = r_v$
  $\Rightarrow$ $w$ bleibt mit $u$ verbunden
  (beachte: $d(u, w)$ wird ggf. größer, aber nicht größer als $R$)
- verschiebe $w$ weiter, sodass $\varphi_w = \varphi_v$
  $\Rightarrow$ $w$ bleibt mit $u$ verbunden (Distanz monoton bzgl. Winkel)
- also: $\{u, v\} \in E$



# Innere Nachbarschaft (stark hyperbolisch)

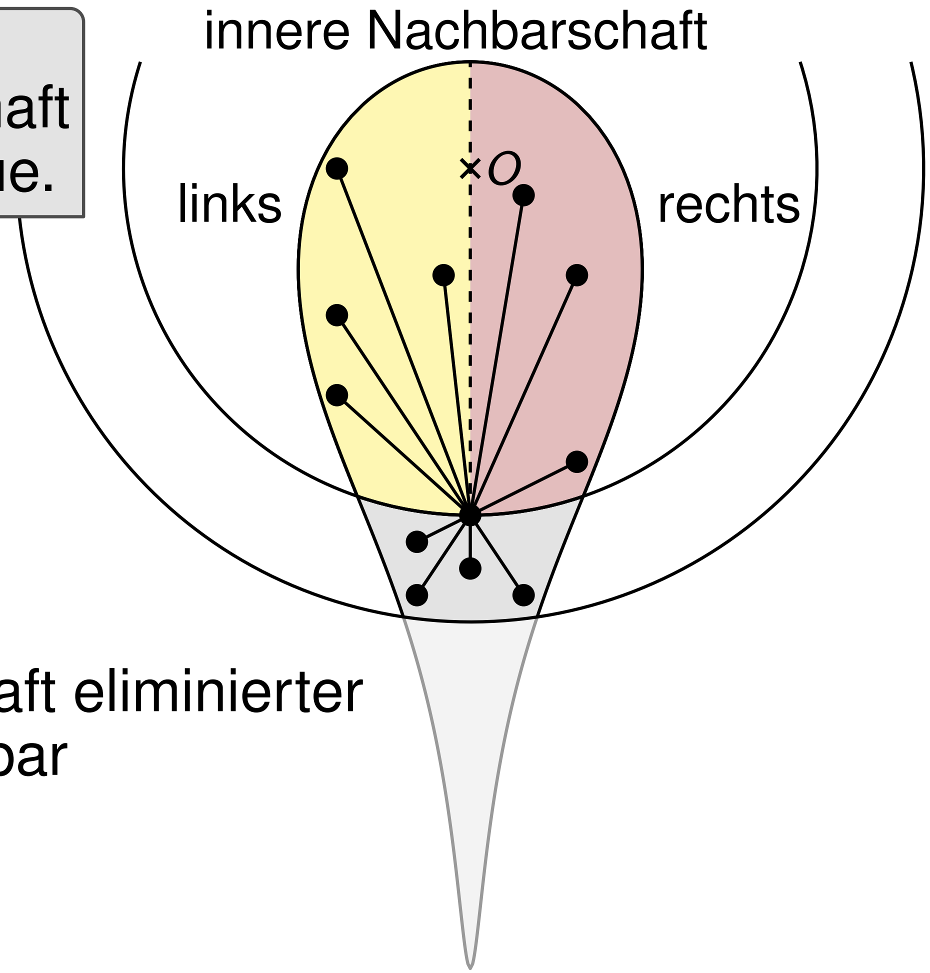
**Theorem**
Die linke und rechte innere Nachbarschaft eines Knotens bilden jeweils eine Clique.

**Folgerung**
- sortiere Knoten $v_1, \dots, v_n$ von Außen nach Innen
- lösche Knoten nach und nach: $G_i = G[\{v_i, \dots, v_n\}]$



# Innere Nachbarschaft (stark hyperbolisch)

**Theorem**
Die linke und rechte innere Nachbarschaft eines Knotens bilden jeweils eine Clique.

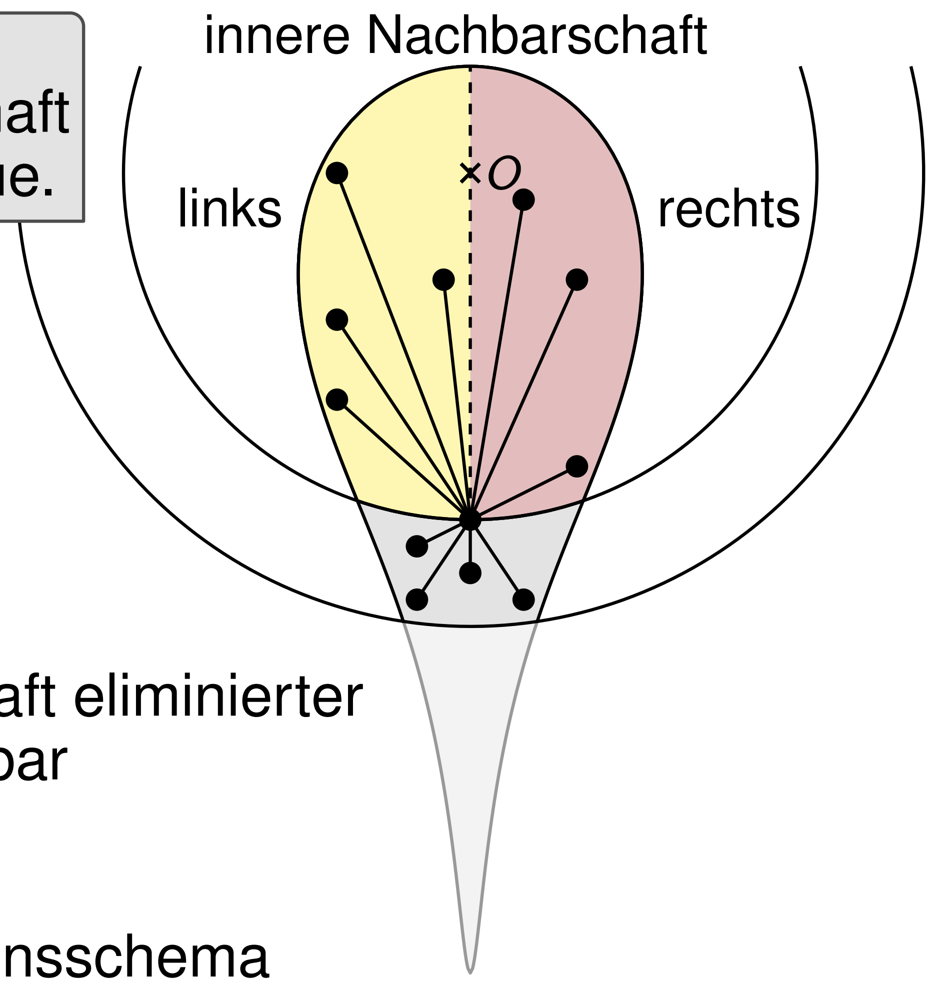



**Folgerung**

- sortiere Knoten $v_1, \ldots, v_n$ von Außen nach Innen
- lösche Knoten nach und nach: $G_i = G[\{v_i, \ldots, v_n\}]$
- $v_i$ hat in $G_i$ nur innere Nachbarn
- Eliminationsschema mit: Nachbarschaft eliminierter Knoten durch zwei Cliquen überdeckbar

# Innere Nachbarschaft (stark hyperbolisch)

**Theorem**
Die linke und rechte innere Nachbarschaft eines Knotens bilden jeweils eine Clique.




**Folgerung**

- sortiere Knoten $v_1, \ldots, v_n$ von Außen nach Innen
- lösche Knoten nach und nach: $G_i = G[\{v_i, \ldots, v_n\}]$
- $v_i$ hat in $G_i$ nur innere Nachbarn
- Eliminationsschema mit: Nachbarschaft eliminierter Knoten durch zwei Cliquen überdeckbar

**Vergleich: Chordale Graphen**

- Graph chordal $\Leftrightarrow$ perfektes Eliminationsschema
- perfektes Eliminationsschema: Nachbarschaft eliminierter Knoten bilden Clique

# Was wissen wir sonst noch so?

## Erkennung von hyperbolischen UD-Graphen

- NP-schwer
- liegt in $\exists\mathbb{R}$
- offen: $\exists\mathbb{R}$-Schwere
- offen: Komplexität für stark hyperbolische Graphen

# Was wissen wir sonst noch so?

## Erkennung von hyperbolischen UD-Graphen

- NP-schwer
- liegt in $\exists\mathbb{R}$
- offen: $\exists\mathbb{R}$-Schwere
- offen: Komplexität für stark hyperbolische Graphen

## Größte Clique finden

- für stark hyperbolische UD-Graphen in polynomieller Zeit

# Was wissen wir sonst noch so?

Karlsruher Institut für Technologie

**Erkennung von hyperbolischen UD-Graphen**

- NP-schwer
- liegt in $\exists\mathbb{R}$
- offen: $\exists\mathbb{R}$-Schwere
- offen: Komplexität für stark hyperbolische Graphen

**Größte Clique finden**

- für stark hyperbolische UD-Graphen in polynomieller Zeit

**Baumweite für stark hyperbolische UD-Graphen**

- balancierte Separatoren der Größe $O(\Delta)$ (max deg)
- Baumzerlegung entsprechender Weite
- ganz anders als bei Gittern

# Was wissen wir sonst noch so?

**Erkennung von hyperbolischen UD-Graphen**

- NP-schwer
- liegt in $\exists\mathbb{R}$
- offen: $\exists\mathbb{R}$-Schwere
- offen: Komplexität für stark hyperbolische Graphen

**Größte Clique finden**

- für stark hyperbolische UD-Graphen in polynomieller Zeit

**Baumweite für stark hyperbolische UD-Graphen**

- balancierte Separatoren der Größe $O(\Delta)$ (max deg)
- Baumzerlegung entsprechender Weite
- ganz anders als bei Gittern

Masterarbeit
Emil Dohse

# Was wissen wir sonst noch so?

**Erkennung von hyperbolischen UD-Graphen**
- NP-schwer
- liegt in $\exists\mathbb{R}$
- offen: $\exists\mathbb{R}$-Schwere
- offen: Komplexität für stark hyperbolische Graphen

**Größte Clique finden**
- für stark hyperbolische UD-Graphen in polynomieller Zeit

**Baumweite für stark hyperbolische UD-Graphen**
- balancierte Separatoren der Größe $O(\Delta)$ (max deg)
- Baumzerlegung entsprechender Weite
- ganz anders als bei Gittern

Masterarbeit
Emil Dohse

**Routing auf stark hyperbolischen UD-Graphen**
- lokales Routing (ähnlich zu greedy Routing) mit kleinem Stretch
- schlägt untere Schranke für allgemeine Graphen

# Kurze Pause

## Warum machen wir eigentlich Theorie?

# Was soll das überhaupt?

## Warum machen wir eigentlich Theorie?

# Was soll das überhaupt?

## Warum machen wir eigentlich Theorie?

- weil es Spaß macht

# Was soll das überhaupt?

**Warum machen wir eigentlich Theorie?**

- weil es Spaß macht
- um Beobachtungen zu erklären
- um Vorhersagen treffen zu können

# Was soll das überhaupt?

## Warum machen wir eigentlich Theorie?

- weil es Spaß macht
- um Beobachtungen zu erklären
- um Vorhersagen treffen zu können

## Algorithmische Beispiele

- sortieren
- orthogonale Bereichsanfragen

| | | | |
|---|---|---|---|
| sortieren | Bubblesort | Mergesort | Speedup |
| | $\Theta(n^2)$ | $\Theta(n \log n)$ | $\Theta\left(\frac{n}{\log n}\right)$ |
| orthogonale Bereichsanfragen | $k$-d Tree | Range-Tree | Speedup |
| | $\Theta(\sqrt{n})$ | $\Theta(\log^2 n)$ | $\Theta\left(\frac{\sqrt{n}}{\log^2 n}\right)$ |

# Was soll das überhaupt?

**Warum machen wir eigentlich Theorie?**

- weil es Spaß macht
- um Beobachtungen zu erklären
- um Vorhersagen treffen zu können

**Algorithmische Beispiele**

| | Bubblesort | Mergesort | Speedup |
|---|---|---|---|
| sortieren | $\Theta(n^2)$ | $\Theta(n \log n)$ | $\Theta\left(\frac{n}{\log n}\right)$ |
| | *k*-d Tree | Range-Tree | Speedup |
| orthogonale Bereichsanfragen | $\Theta(\sqrt{n})$ | $\Theta(\log^2 n)$ | $\Theta\left(\frac{\sqrt{n}}{\log^2 n}\right)$ |

**Vorhersage**

- polynomieller asymptotischer Speedup
- beliebig großer Speedup, wenn man die Instanz groß genug wählt

# Was soll das überhaupt?

## Warum machen wir eigentlich Theorie?

- weil es Spaß macht
- um Beobachtungen zu erklären
- um Vorhersagen treffen zu können

## Algorithmische Beispiele

| | Bubblesort | Mergesort | Speedup |
|---|---|---|---|
| sortieren | $\Theta(n^2)$ | $\Theta(n \log n)$ | $\Theta\left(\frac{n}{\log n}\right)$ |
| | $k$-d Tree | Range-Tree | Speedup |
| orthogonale Bereichsanfragen | $\Theta(\sqrt{n})$ | $\Theta(\log^2 n)$ | $\Theta\left(\frac{\sqrt{n}}{\log^2 n}\right)$ |

## Vorhersage

- polynomieller asymptotischer Speedup
- beliebig großer Speedup, wenn man die Instanz groß genug wählt

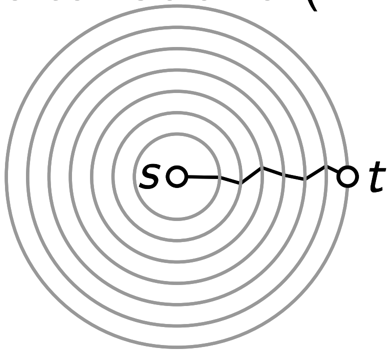
## Schlussfolgerungen

- den langsameren Algorithmus braucht man nicht in Erwägung zu ziehen

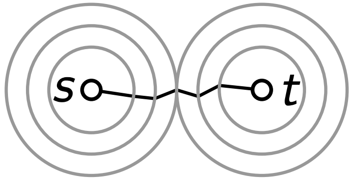
# Beispiel: Bidirektionale Breitensuche

## Kürzeste Wege in ungewichteten Graphen

Breitensuche (BFS)




bidirectionale BFS

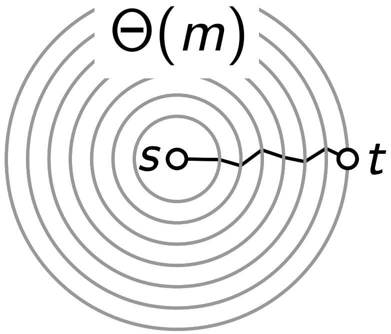


# Beispiel: Bidirektionale Breitensuche

## Kürzeste Wege in ungewichteten Graphen

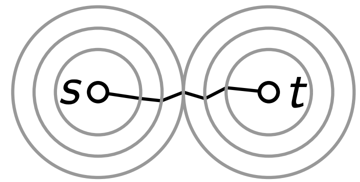
Breitensuche (BFS)

$\Theta(m)$




bidirectionale BFS

$\Theta(m)$




Speedup

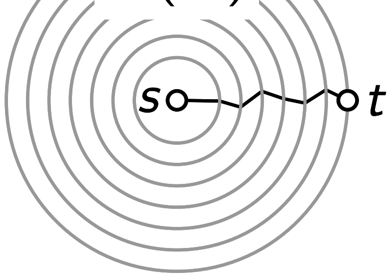
$\Theta(1)$

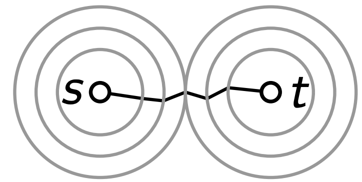
**Vorhersage:** Speedup unabhängig von der Graphgröße

# Beispiel: Bidirektionale Breitensuche

## Kürzeste Wege in ungewichteten Graphen

| Breitensuche (BFS) | bidirectionale BFS | Speedup |
|---|---|---|
| $\Theta(m)$ | $\Theta(m)$ | $\Theta(1)$ |




**Vorhersage:** Speedup unabhängig von der Graphgröße

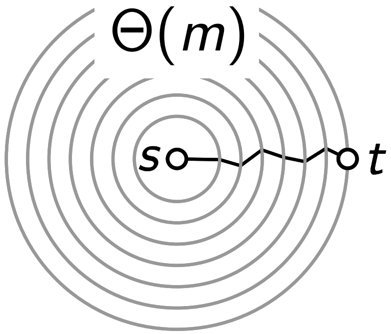
## Schlussfolgerung

# Beispiel: Bidirektionale Breitensuche

## Kürzeste Wege in ungewichteten Graphen

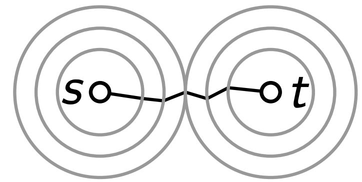
Breitensuche (BFS)

$\Theta(m)$




bidirectionale BFS

$\Theta(m)$




Speedup

$\Theta(1)$

**Vorhersage:** Speedup unabhängig von der Graphgröße

## Schlussfolgerung

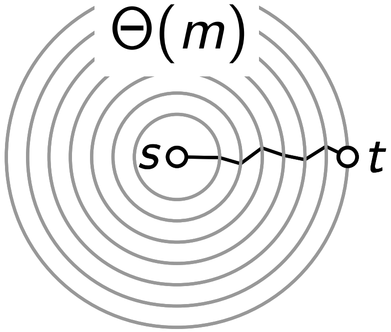
- Option 1: beides implementieren und experimentell vergleichen
  - wenn man fleißig ist bzw. die nötige Zeit hat
  - wenn man sich für konstante Faktoren interessiert

# Beispiel: Bidirektionale Breitensuche

## Kürzeste Wege in ungewichteten Graphen

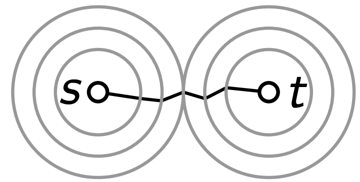
Breitensuche (BFS)

$\Theta(m)$




bidirectionale BFS

$\Theta(m)$




Speedup

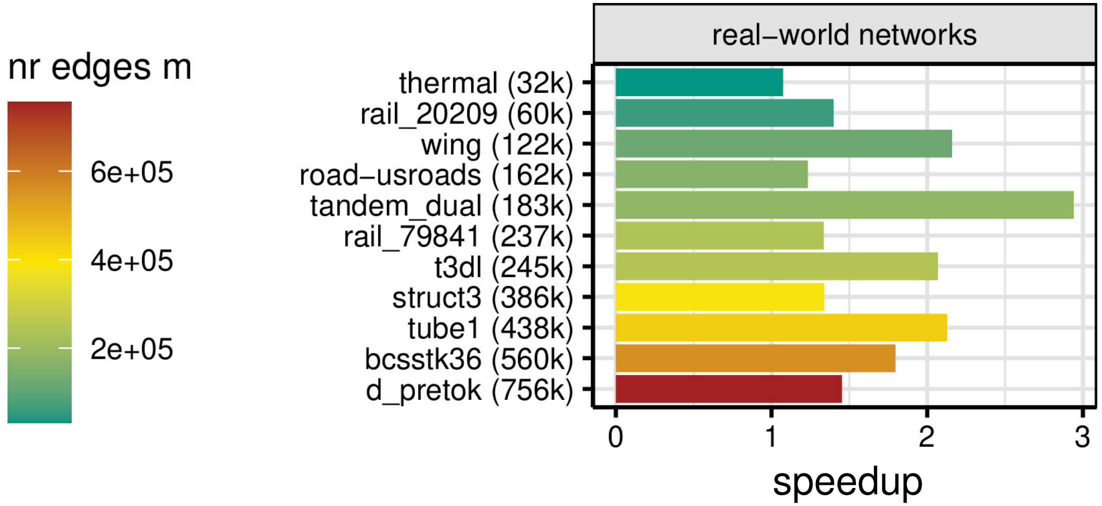
$\Theta(1)$

**Vorhersage:** Speedup unabhängig von der Graphgröße

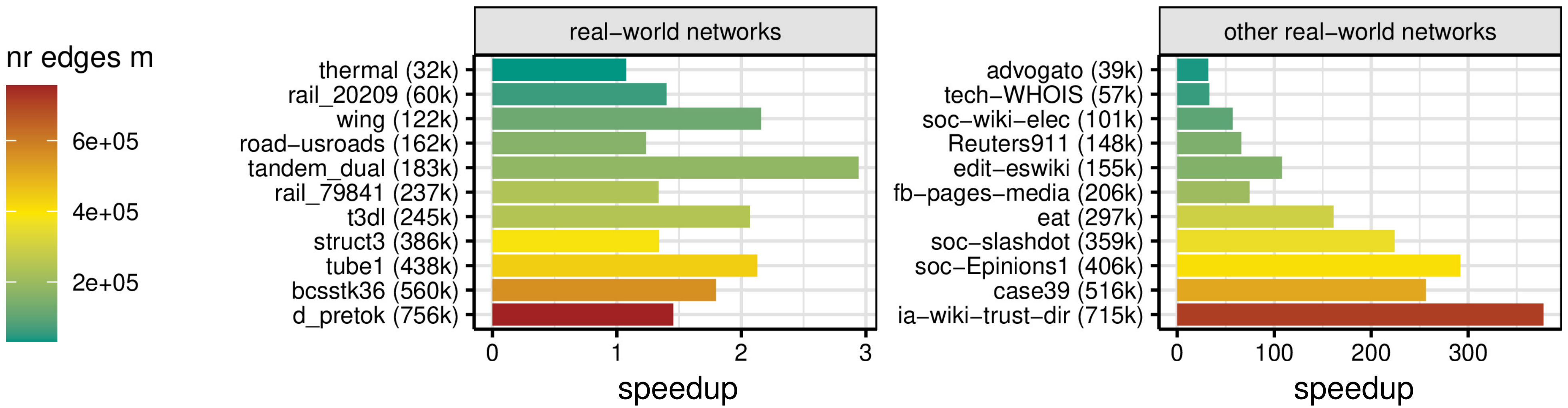
## Schlussfolgerung

- Option 1: beides implementieren und experimentell vergleichen
  - wenn man fleißig ist bzw. die nötige Zeit hat
  - wenn man sich für konstante Faktoren interessiert
- Option 2: einfach BFS nutzen, da bidirektional den Aufwand nicht wert ist
  - wenn man wenig Zeit hat
  - wenn konstante Faktoren gerade nicht sehr relevant sind

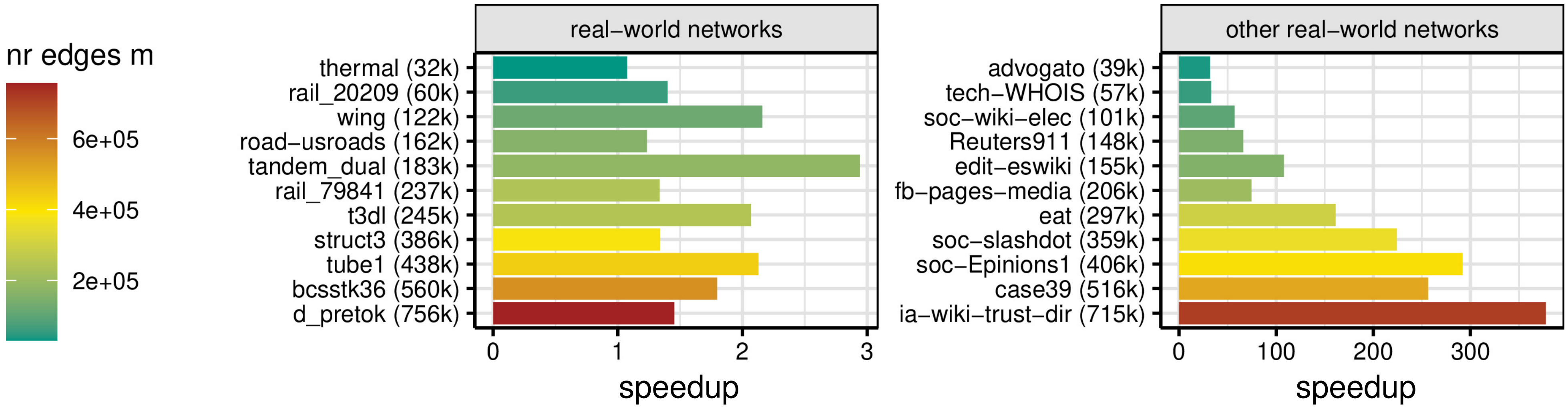
# Bidirektionale BFS: Experimenteller Vergleich



# Bidirektionale BFS: Experimenteller Vergleich



# Bidirektionale BFS: Experimenteller Vergleich

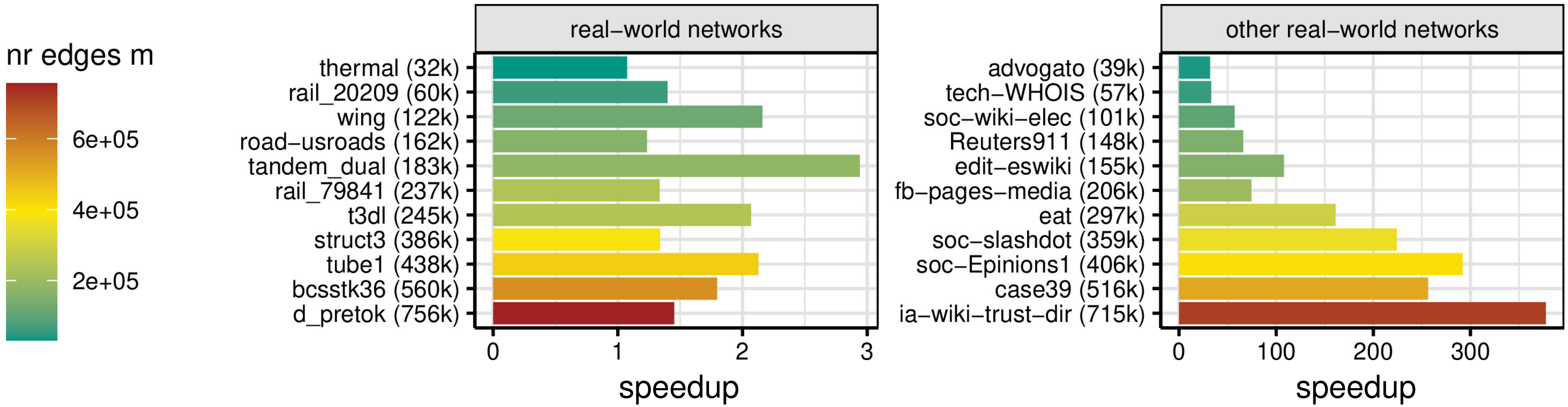



**Beobachtung:** sehr falsche Vorhersage für manche Instanzen

**Was ist daran jetzt schlimm?**

- Algorithmus schneller als erwartet → super

# Bidirektionale BFS: Experimenteller Vergleich

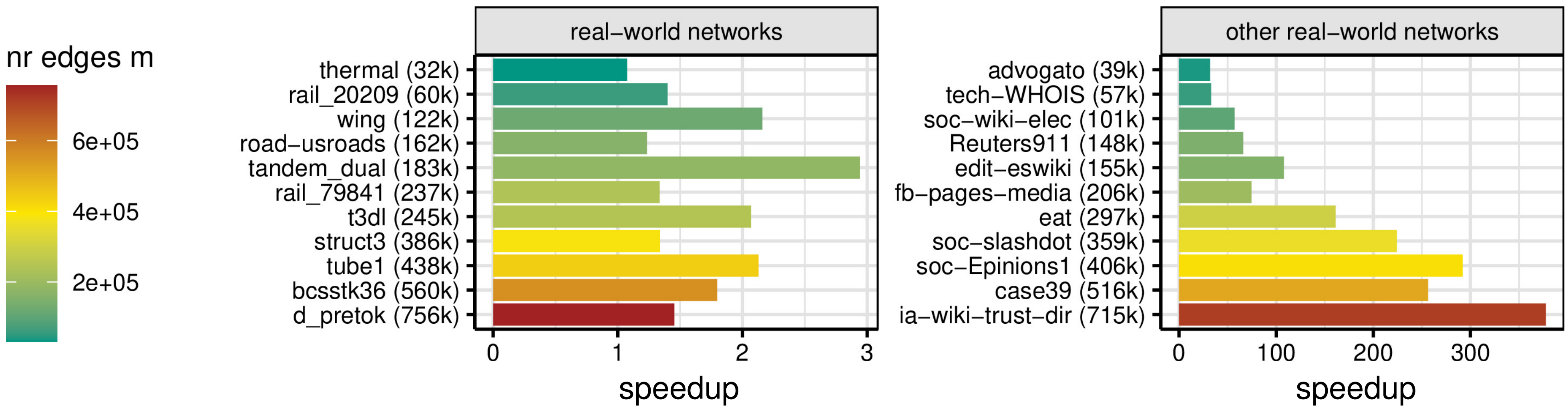



**Beobachtung:** sehr falsche Vorhersage für manche Instanzen

## Was ist daran jetzt schlimm?

- Algorithmus schneller als erwartet $\rightarrow$ super
- außer: ggf. nicht implementiert, da ich dachte, es lohnt nicht

# Bidirektionale BFS: Experimenteller Vergleich




**Beobachtung:** sehr falsche Vorhersage für manche Instanzen

**Was ist daran jetzt schlimm?**

- Algorithmus schneller als erwartet $\rightarrow$ super
- außer: ggf. nicht implementiert, da ich dachte, es lohnt nicht
- außerdem: schon ein bisschen peinlich für die Theorie
  - Analyse von $\Theta(m)$ für bidirektionale BFS hat wenig Spaß gemacht
  - Theorie erklärt nicht das beobachtete Verhalten
  - Theorie sagt etwas falsches voraus

# Make Theory Great Again

## Wo liegt das Problem?

- theoretische Analysen betrachten häufig den Worst-Case
- typische Instanzen sind oft gutartig

# Make Theory Great Again

## Wo liegt das Problem?

- theoretische Analysen betrachten häufig den Worst-Case
- typische Instanzen sind oft gutartig

## Ziele

- formalisiere was „typische Instanze“ und „gutartig“ bedeutet
- analysiere Algorithmen bezüglich dieser Formalisierung
- keine Überraschungen: Erklärung für bzw. korrekte Vorhersage von beobachtetem Verhalten
- Laufzeit in Abhängigkeit struktureller Eigenschaften

# Make Theory Great Again

## Wo liegt das Problem?

- theoretische Analysen betrachten häufig den Worst-Case
- typische Instanzen sind oft gutartig

## Ziele

- formalisiere was „typische Instanze“ und „gutartig“ bedeutet
- analysiere Algorithmen bezüglich dieser Formalisierung
- keine Überraschungen: Erklärung für bzw. korrekte Vorhersage von beobachtetem Verhalten
- Laufzeit in Abhängigkeit struktureller Eigenschaften

## Disclaimer

- verschiedene Methodiken sind für diese Ziele verschieden gut geeignet
- Methodik hierfür ungeeignet $\not\Rightarrow$ Methodik grundsätzlich nutzlos
- Beispiel: Worst-Case Analyse ist weiterhin ein wichtiges und in den meisten Fällen das richtige Tool

# Was ist ein akzeptierbarer Fix?

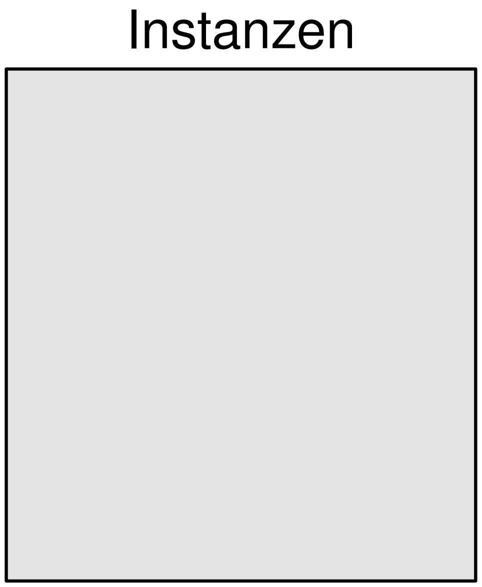
## Der Heilige Gral

- zeige: Instanzen mit einer gewissen Eigenschaft sind leicht
- verifiziere: praktische Instanzen haben die Eigenschaft

# Was ist ein akzeptierbarer Fix?

## Der Heilige Gral

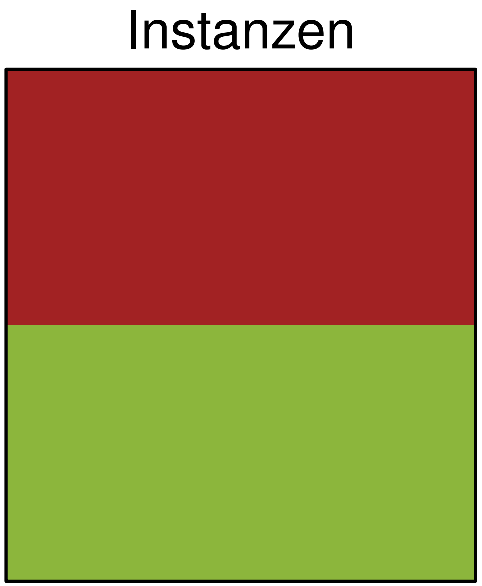
- zeige: Instanzen mit einer gewissen Eigenschaft sind leicht
- verifiziere: praktische Instanzen haben die Eigenschaft



# Was ist ein akzeptierbarer Fix?

## Der Heilige Gral

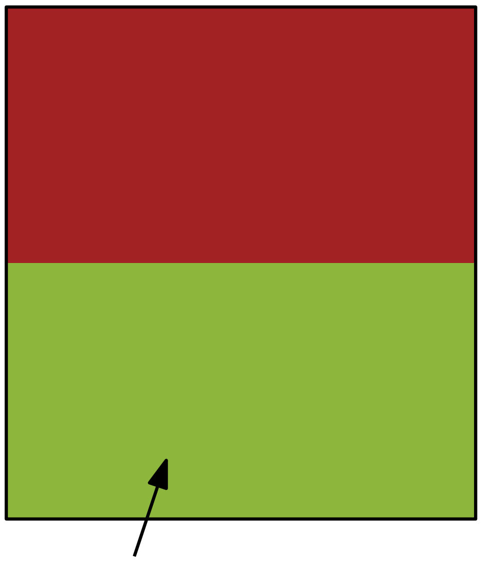
- zeige: Instanzen mit einer gewissen Eigenschaft sind leicht
- verifiziere: praktische Instanzen haben die Eigenschaft



# Was ist ein akzeptierbarer Fix?

## Der Heilige Gral

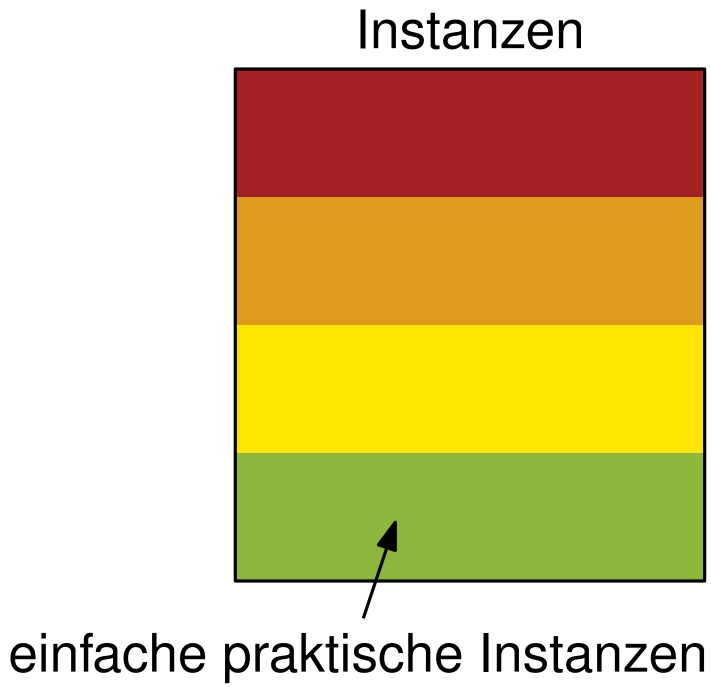
- zeige: Instanzen mit einer gewissen Eigenschaft sind leicht
- verifiziere: praktische Instanzen haben die Eigenschaft



# Was ist ein akzeptierbarer Fix?

## Der Heilige Gral

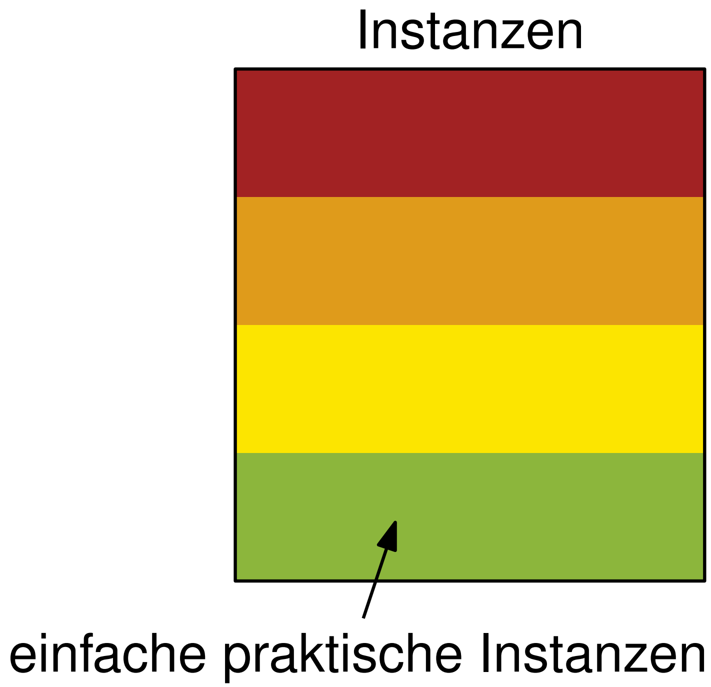
- zeige: Instanzen mit einer gewissen Eigenschaft sind leicht
- verifiziere: praktische Instanzen haben die Eigenschaft



# Was ist ein akzeptierbarer Fix?

## Der Heilige Gral

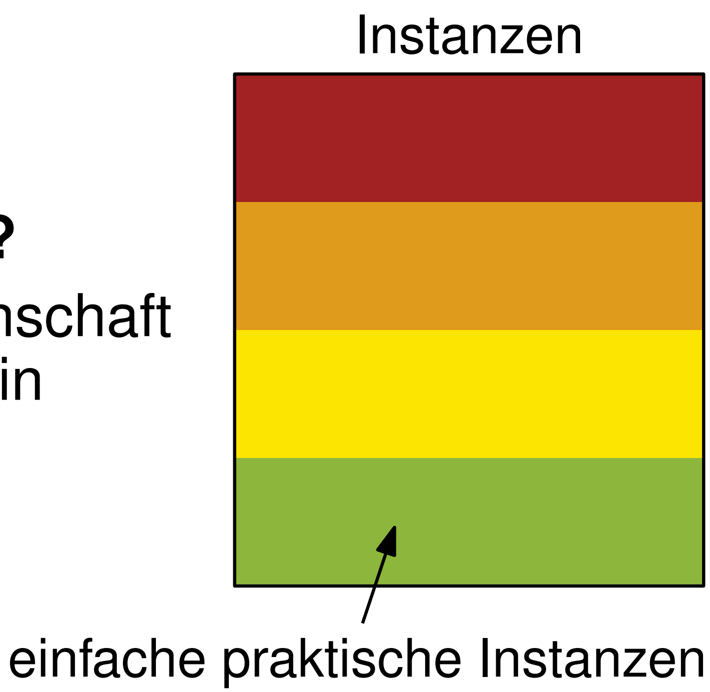
- zeige: Instanzen mit einer gewissen Eigenschaft sind leicht
- verifiziere: praktische Instanzen haben die Eigenschaft
- die Eigenschaft sollte „natürlich“ sein



# Was ist ein akzeptierbarer Fix?

## Der Heilige Gral

- zeige: Instanzen mit einer gewissen Eigenschaft sind leicht
- verifiziere: praktische Instanzen haben die Eigenschaft
- die Eigenschaft sollte „natürlich“ sein



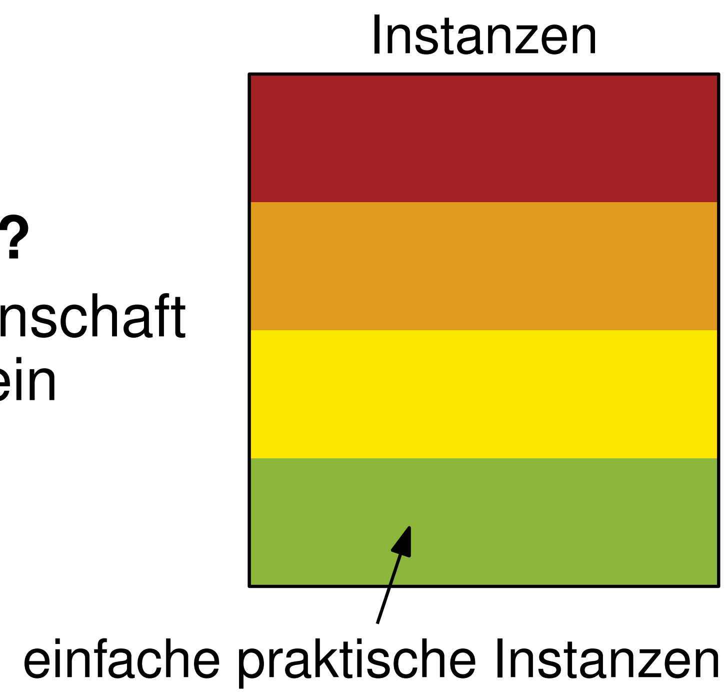

## Warum ist der heilige Gral schwer zu finden?

- Worst-Case unter den Instanzen mit der Eigenschaft
  $\Rightarrow$ Eigenschaft muss ausreichend restriktiv sein
- sollte viele praktische Instanzen einschließen
  $\Rightarrow$ Eigenschaft darf nicht zu restriktiv sein

# Was ist ein akzeptierbarer Fix?

**Der Heilige Gral**

- zeige: Instanzen mit einer gewissen Eigenschaft sind leicht
- verifiziere: praktische Instanzen haben die Eigenschaft
- die Eigenschaft sollte „natürlich" sein




**Warum ist der heilige Gral schwer zu finden?**

- Worst-Case unter den Instanzen mit der Eigenschaft
  $\Rightarrow$ Eigenschaft muss ausreichend restriktiv sein
- sollte viele praktische Instanzen einschließen
  $\Rightarrow$ Eigenschaft darf nicht zu restriktiv sein

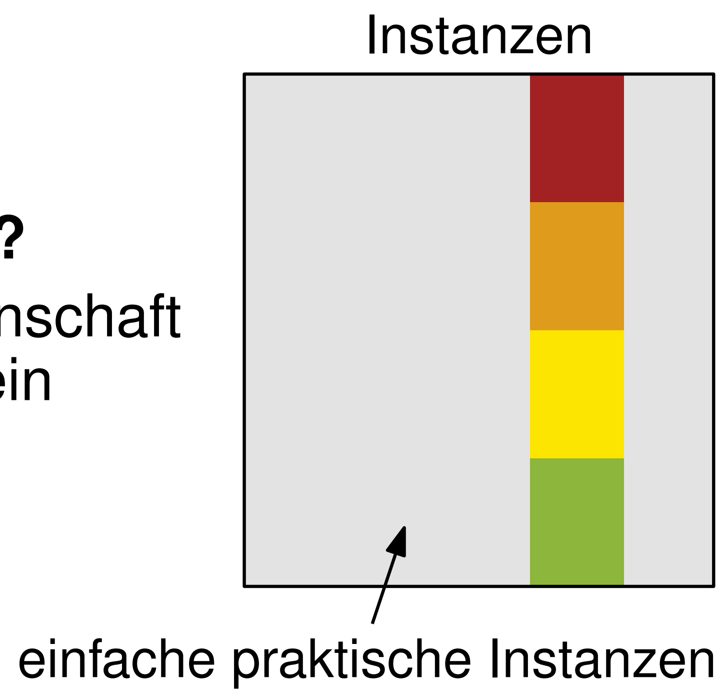
**Schwächerer aber akzeptabler Fix**

- Einschränkung der Analyse auf prototypische Instanzen
- Hoffnung: echte Instanzen verhalten sich ähnlich $\Rightarrow$ keine Überraschung

# Was ist ein akzeptierbarer Fix?

## Der Heilige Gral

- zeige: Instanzen mit einer gewissen Eigenschaft sind leicht
- verifiziere: praktische Instanzen haben die Eigenschaft
- die Eigenschaft sollte „natürlich“ sein




## Warum ist der heilige Gral schwer zu finden?

- Worst-Case unter den Instanzen mit der Eigenschaft
  $\Rightarrow$ Eigenschaft muss ausreichend restriktiv sein
- sollte viele praktische Instanzen einschließen
  $\Rightarrow$ Eigenschaft darf nicht zu restriktiv sein

## Schwächerer aber akzeptabler Fix

- Einschränkung der Analyse auf prototypische Instanzen
- Hoffnung: echte Instanzen verhalten sich ähnlich $\Rightarrow$ keine Überraschung

# Was heißt das jetzt konkret?

## Methodik

- betrachte zufällig generierte Instanzen
- analysiere erwartete Laufzeit
- vergleiche Ergebnisse für verschiedene Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die sich in nur einer Eigenschaft unterscheiden

# Was heißt das jetzt konkret?

## Methodik

- betrachte zufällig generierte Instanzen
- analysiere erwartete Laufzeit
- vergleiche Ergebnisse für verschiedene Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die sich in nur einer Eigenschaft unterscheiden

## Plan im Folgenden

- zwei wichtige Eigenschaften: Lokalität und Heterogenität

# Was heißt das jetzt konkret?

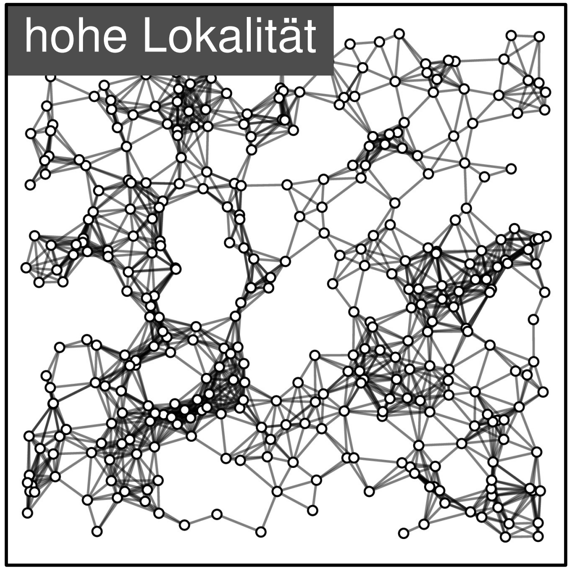
**Methodik**

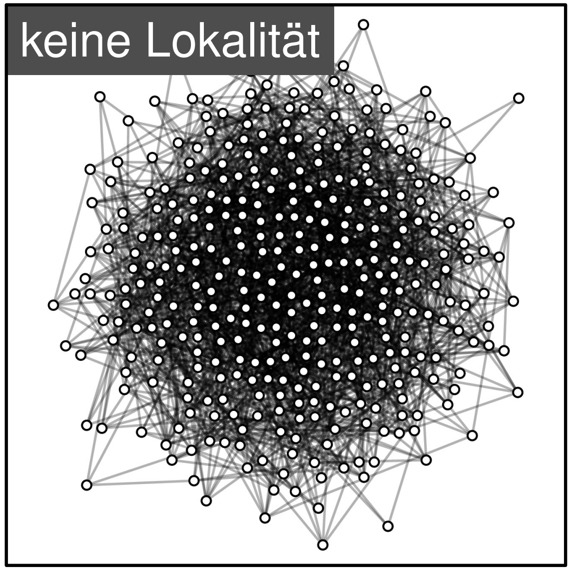
- betrachte zufällig generierte Instanzen
- analysiere erwartete Laufzeit
- vergleiche Ergebnisse für verschiedene Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die sich in nur einer Eigenschaft unterscheiden

**Plan im Folgenden**

- zwei wichtige Eigenschaften: Lokalität und Heterogenität
- Was bekommen wir damit für die bidirektionale Breitensuche?
- Generalisiert das von den prototypischen generierten Instanzen zu praktischen Instanzen?

# Was ist Lokalität?

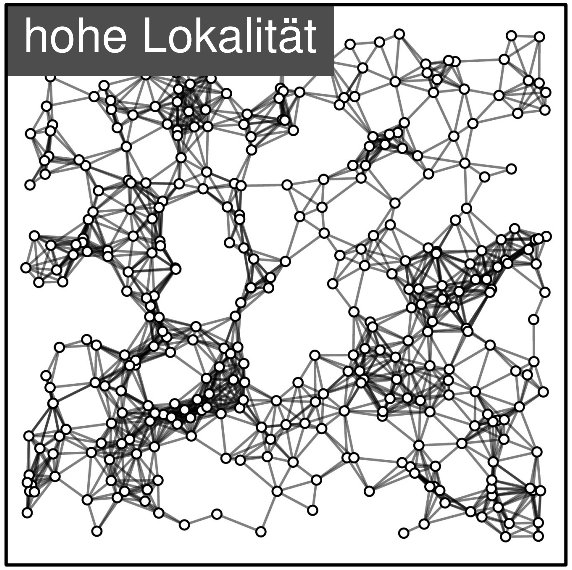


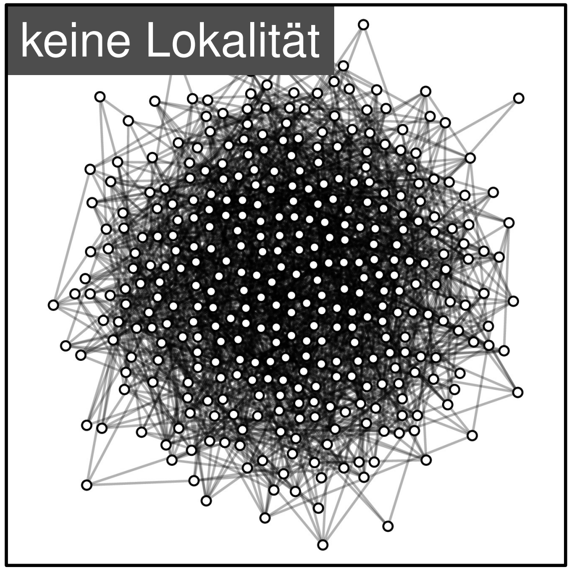




## Charakteristische Eigenschaften

- kurze Kanten
- viele Dreiecke

# Was ist Lokalität?



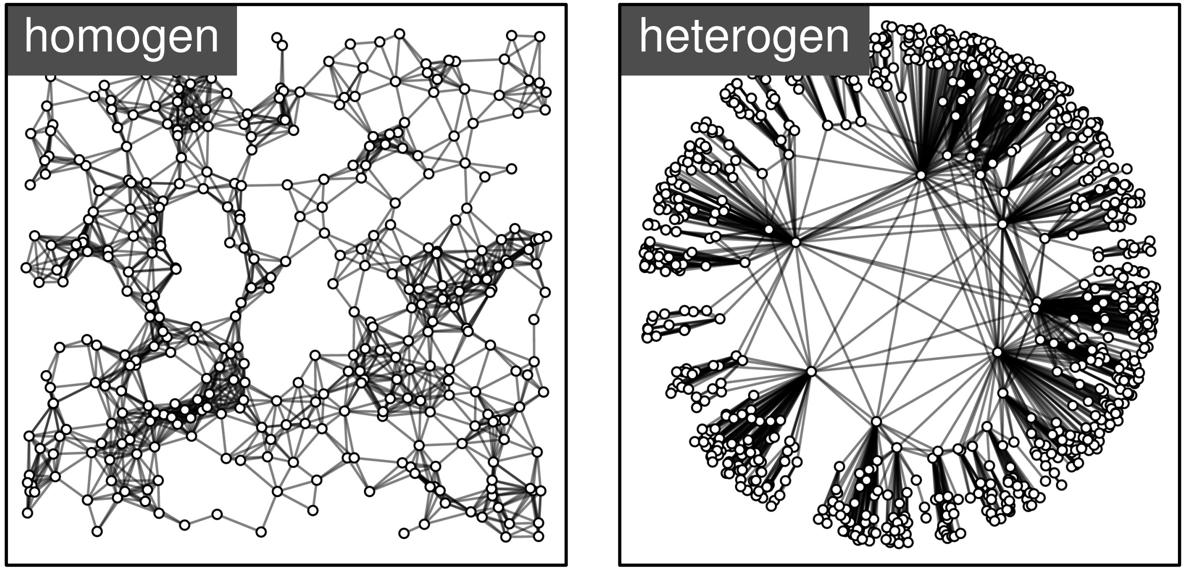

**Charakteristische Eigenschaften**

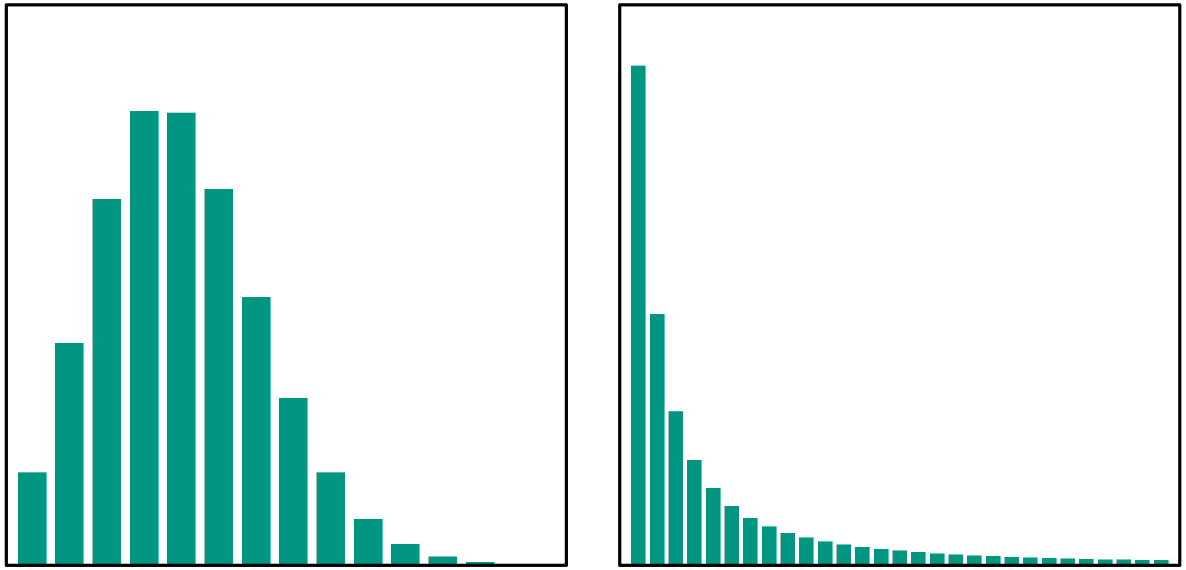
- kurze Kanten
- viele Dreiecke

**Alternative Namen für das selbe Konzept**

- Homophilie
- starkes Clustering
- Modularität
- Redundanz
- zugrundeliegende Geometrie
- tiefe Temperatur

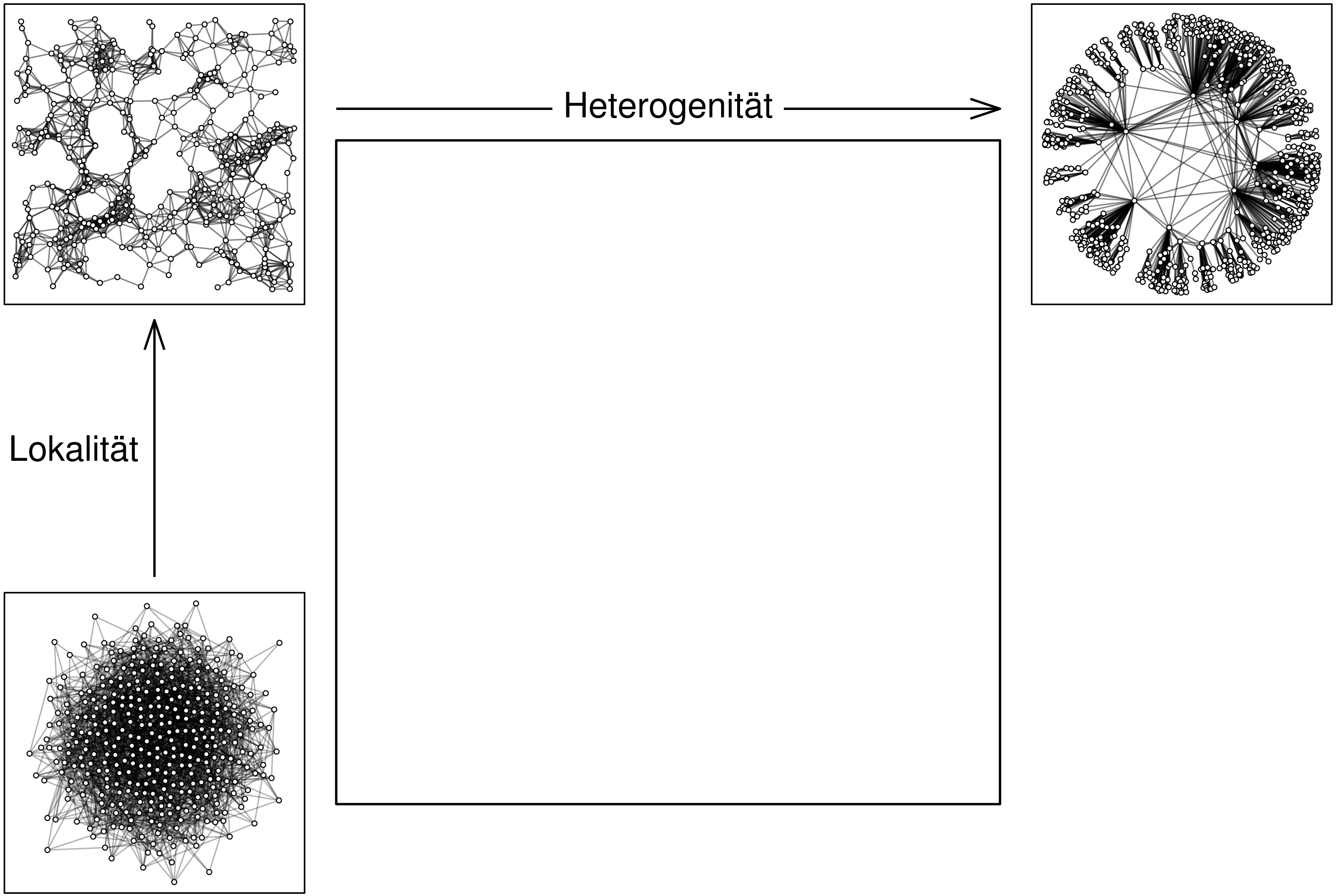
# Was ist Heterogenität?



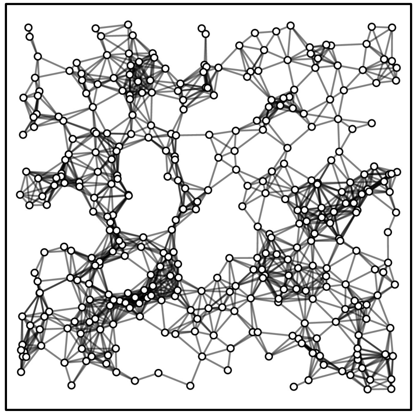



**Gradverteilung**
- kleine/große Varianz
- kleines/großes Maximum
- beide: kleiner Durchschnitt

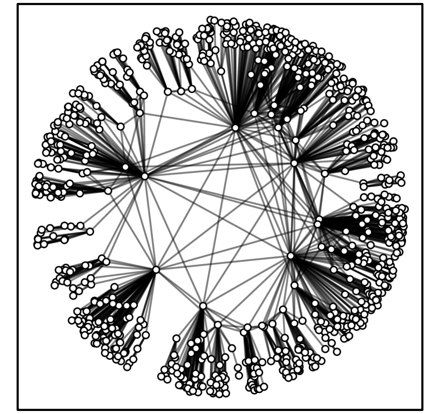
# Formalisierung mittels Zufallsgraphen



# Formalisierung mittels Zufallsgraphen

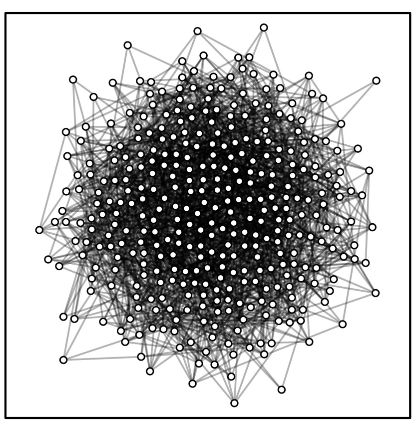


Heterogenität

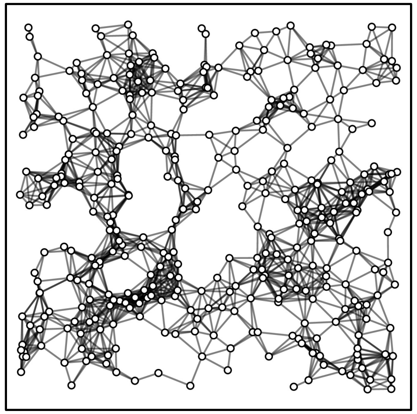


Lokalität

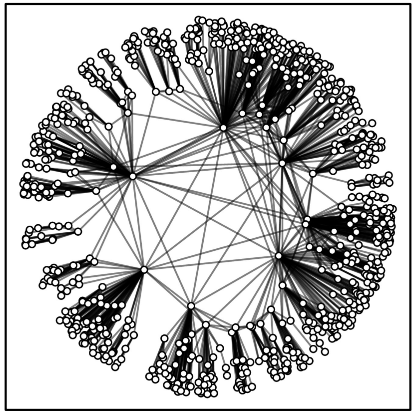
Erdős–Rényi
Gilbert



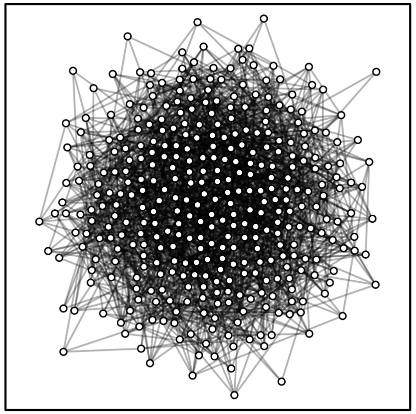
# Formalisierung mittels Zufallsgraphen



Heterogenität →



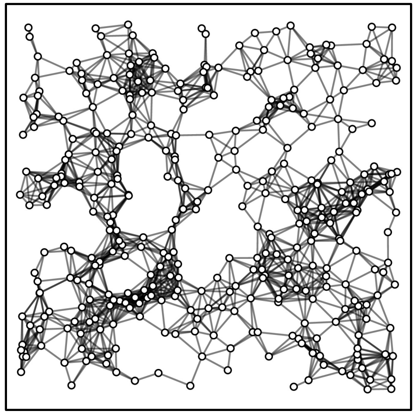
Lokalität ↑



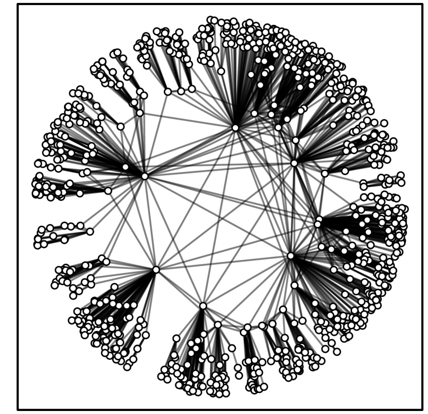
Erdős–Rényi
Gilbert

Chung–Lu
(soft) configuration

# Formalisierung mittels Zufallsgraphen



Heterogenität

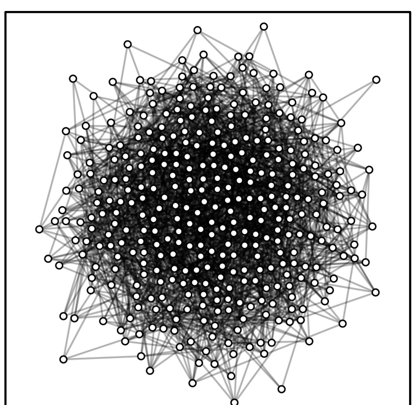


Lokalität

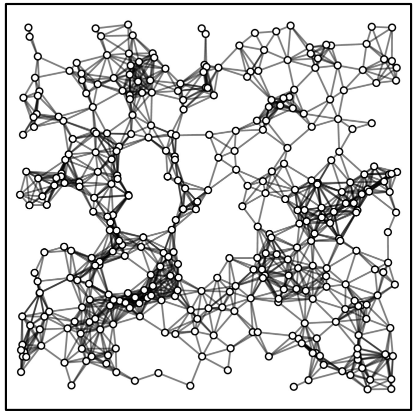
geometrisch

Erdős–Rényi
Gilbert

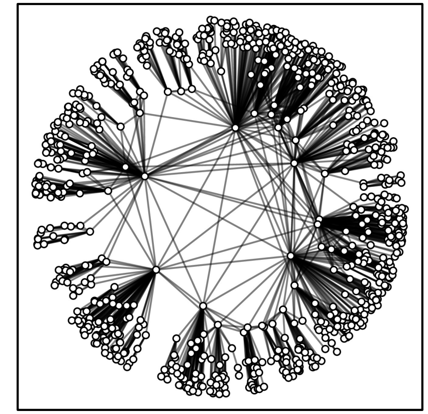
Chung–Lu
(soft) configuration



# Formalisierung mittels Zufallsgraphen

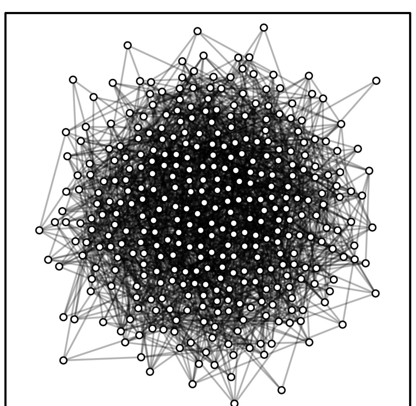


Heterogenität

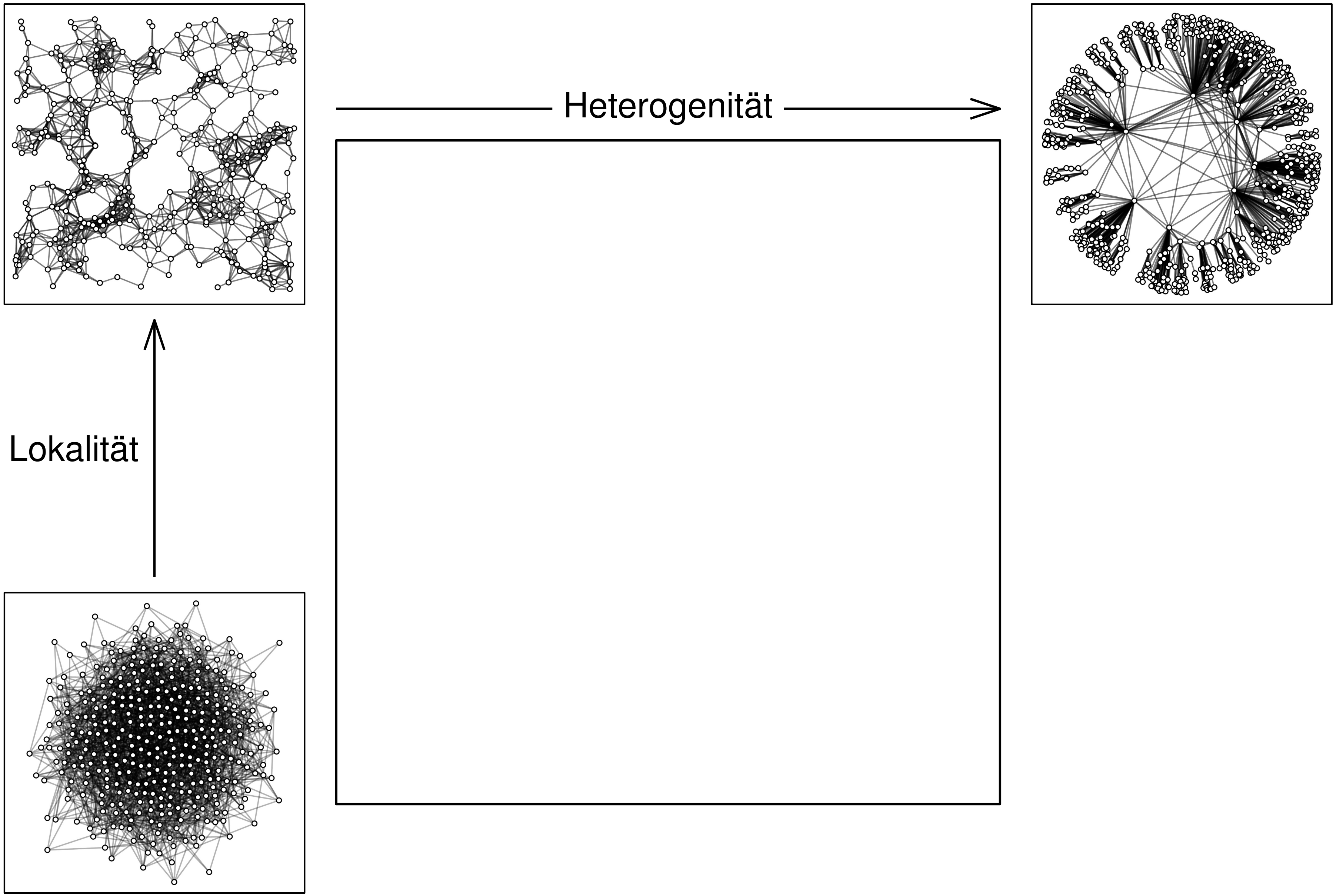


| | |
|---|---|
| geometrisch | hyperbolisch<br>GIRG |
| Erdős–Rényi<br>Gilbert | Chung–Lu<br>(soft) configuration |

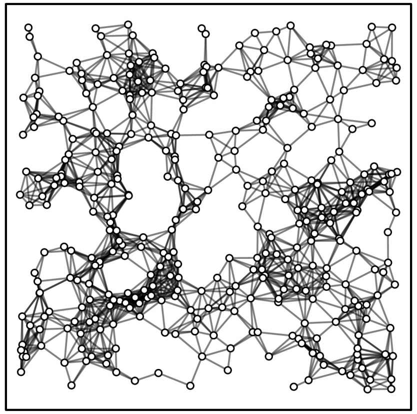
Lokalität



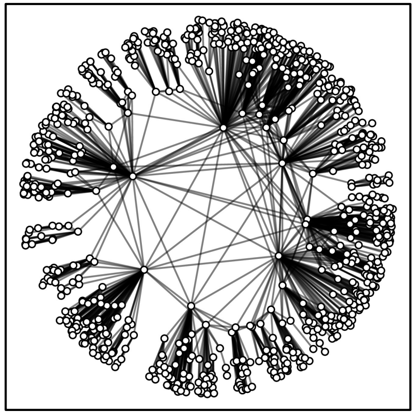
# Vorhersagen für die bidirektionale BFS



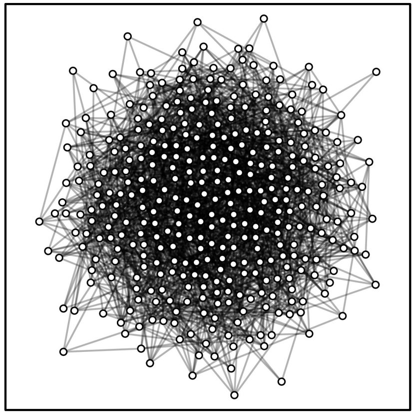
# Vorhersagen für die bidirektionale BFS



Heterogenität



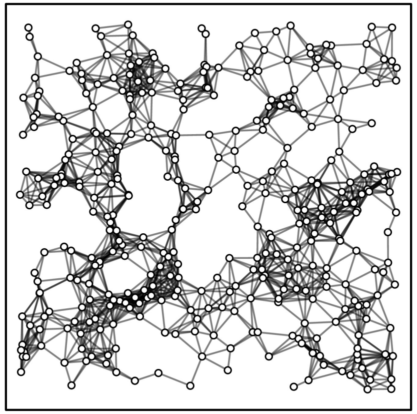
Lokalität



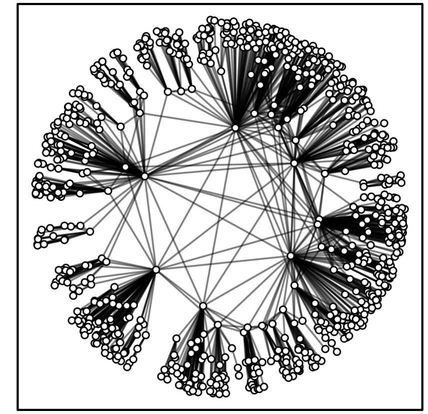
| $\sqrt{n}$ | $\left(\sqrt{n}, n\right)$ |
| --- | --- |
| Erdős–Rényi | Chung–Lu mit power-law |

[**Borassi, Natale** 2016]

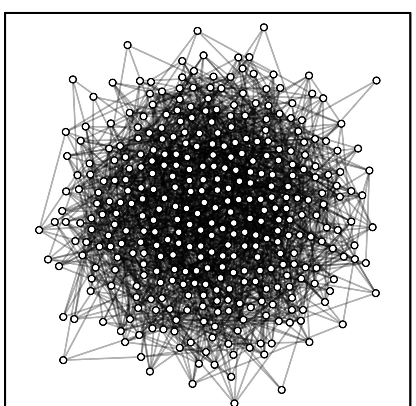
# Vorhersagen für die bidirektionale BFS



Heterogenität



Lokalität



[B., Freiberger, Friedrich, Katzmann, Montenegro-Retana, Thieffry 2018]

| | |
|---|---|
| geometric<br>$n$ | hyperbolic<br>$(\sqrt{n}, n)$ |
| $\sqrt{n}$<br>Erdős–Rényi | $(\sqrt{n}, n)$<br>Chung–Lu mit power-law |

[Borassi, Natale 2016]

# Generalisiert das für praktische Instanzen?

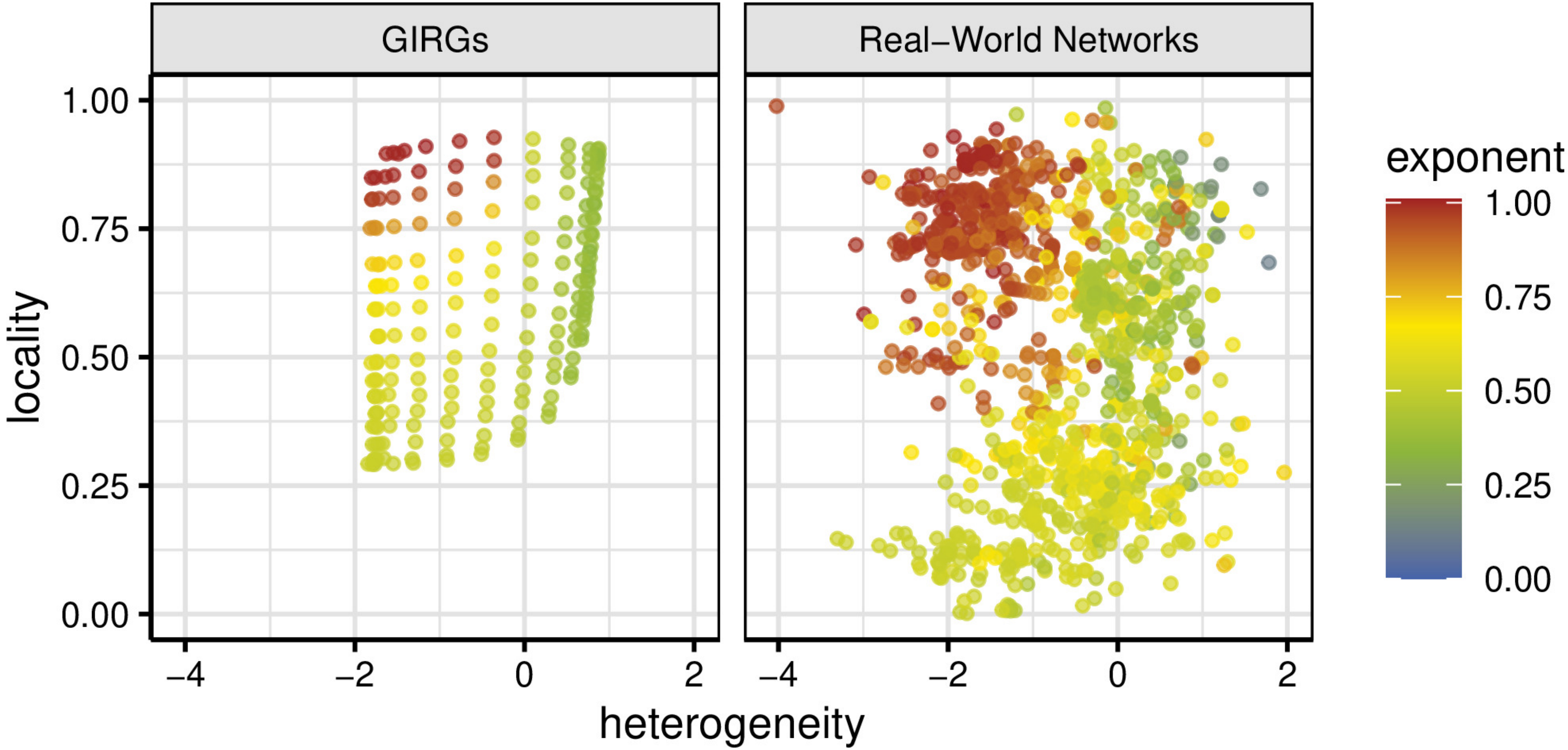
## Vorhersage

- konstanter Speedup, wenn homogen und lokal
- sonst: asymptotischer polynomieller Speedup

# Generalisiert das für praktische Instanzen?

## Vorhersage

- konstanter Speedup, wenn homogen und lokal
- sonst: asymptotischer polynomieller Speedup



# Zusammenfassung

## Hyperbolische Unit-Disk Graphen

- Generalisierung von euklidischen Unit-Disk Graphen
- interessanter Spezialfall: stark hyperbolische UD-Graphen
- viele offene Fragen

# Zusammenfassung

## Hyperbolische Unit-Disk Graphen

- Generalisierung von euklidischen Unit-Disk Graphen
- interessanter Spezialfall: stark hyperbolische UD-Graphen
- viele offene Fragen

## Algorithmen auf Zufallsgraphen

- Lokalität und Heterogenität als wichtige Eigenschaften
- Auswirkung dieser Eigenschaften auf Algorithmen
- Geometrie für Lokalität
- euklidisch $\rightarrow$ homogen; hyperbolisch $\rightarrow$ heterogen

# Zusammenfassung

## Hyperbolische Unit-Disk Graphen

- Generalisierung von euklidischen Unit-Disk Graphen
- interessanter Spezialfall: stark hyperbolische UD-Graphen
- viele offene Fragen

## Algorithmen auf Zufallsgraphen

- Lokalität und Heterogenität als wichtige Eigenschaften
- Auswirkung dieser Eigenschaften auf Algorithmen
- Geometrie für Lokalität
- euklidisch $\rightarrow$ homogen; hyperbolisch $\rightarrow$ heterogen

## Was gibt es sonst noch?

- andere Probleme auf hyperbolischen Zufallsgraphen: Vertex Cover (optimal + Approximation), SAT, Clique
- strukturelle Eigenschaften: Durchmesser, Cliquen, Baumweite, ...
- effiziente Generatoren

# Zusammenfassung

**Hyperbolische Unit-Disk Graphen**

- Generalisierung von euklidischen Unit-Disk Graphen
- interessanter Spezialfall: stark hyperbolische UD-Graphen
- viele offene Fragen

**Algorithmen auf Zufallsgraphen**

- Lokalität und Heterogenität als wichtige Eigenschaften
- Auswirkung dieser Eigenschaften auf Algorithmen
- Geometrie für Lokalität
- euklidisch $\rightarrow$ homogen; hyperbolisch $\rightarrow$ heterogen

**Was gibt es sonst noch?**

- andere Probleme auf hyperbolischen Zufallsgraphen: Vertex Cover (optimal + Approximation), SAT, Clique
- strukturelle Eigenschaften: Durchmesser, Cliquen, Baumweite, ...
- effiziente Generatoren

**Bonusfrage: Was meint Drosten, wenn er von *Netzwerkeffekten* spricht?**

# Literaturhinweise

## (Stark) hyperbolische Unit-Disk Graphen

- **Routing in Strongly Hyperbolic Unit Disk Graphs** (2021)
  Thomas Bläsius, Tobias Friedrich, Maximilian Katzmann, Daniel Stephan
  https://arxiv.org/abs/2107.05518

## Hyperbolische Zufallsgraphen

- **Hyperbolic geometry of complex networks** (2010)
  Krioukov, Papadopoulos, Kitsak, Vahdat, Boguñá
  https://doi.org/10.1103/PhysRevE.82.036106
- **Random Hyperbolic Graphs: Degree Sequence and Clustering** (2012)
  Luca Gugelmann, Konstantinos Panagiotou, Ueli Peter
  https://doi.org/10.1007/978-3-642-31585-5_51

## Bidirektionale Suche in hyperbolischen Zufallsgraphen

- **Efficient Shortest Paths in Scale-Free Networks with Underlying Hyperbolic Geometry** (2018)
  Bläsius, Freiberger, Friedrich, Katzmann, Montenegro-Retana, Thieffry
  https://doi.org/10.4230/LIPIcs.ICALP.2018.20

## Ausführlicheres Video zur zweiten Hälfte von heute

- **Theoretical Algorithm Analysis meets Practical Data** (2021)
  Thomas Bläsius, PODC-DARE Workshop
  https://www.youtube.com/watch?v=Do2FC3k0JMg

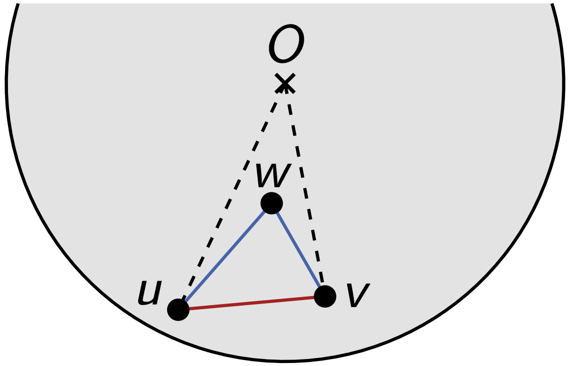
## Effiziente Generierung

- **Sampling Geometric Inhomogeneous Random Graphs in Linear Time** (2017)
  Karl Bringmann, Ralph Keusch, Johannes Lengler
  https://doi.org/10.4230/LIPIcs.ESA.2017.20
- **Efficiently Generating Geometric Inhomogeneous and Hyperbolic Random Graphs** (2019)
  Bläsius, Friedrich, Katzmann, Meyer, Penschuck, Weyand
  https://doi.org/10.4230/LIPIcs.ESA.2019.21

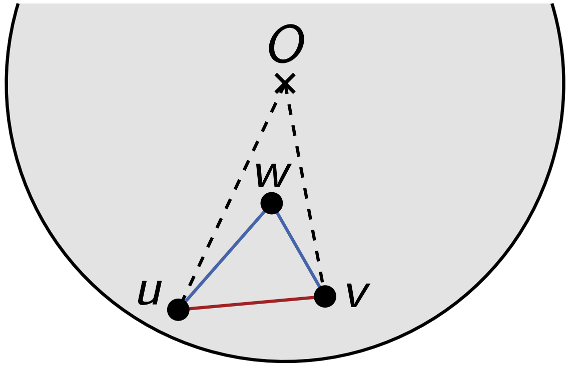
# Bonus: Erzwungene Kanten

## Situation

- stark hyperbolische UD-Repräsentation
- $w$ liegt bezüglich Winkel zwischen $u$ und $v$
- $w$ liegt weiter innen als $u$ und $v$



# Bonus: Erzwungene Kanten




**Situation**

- stark hyperbolische UD-Repräsentation
- $w$ liegt bezüglich Winkel zwischen $u$ und $v$
- $w$ liegt weiter innen als $u$ und $v$

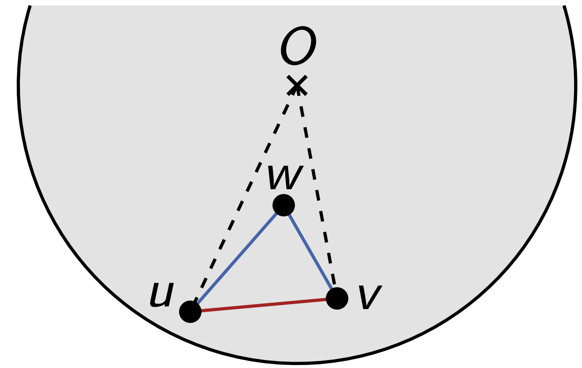
**Theorem**
Wenn $\{u, v\} \in E$, dann auch $\{u, w\}, \{v, w\} \in E$.

**Beweis**

# Bonus: Erzwungene Kanten

**Situation**

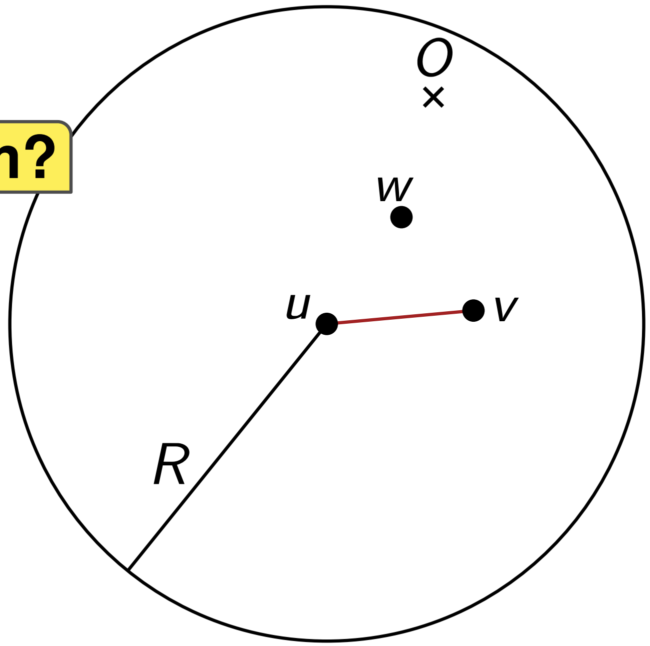
- stark hyperbolische UD-Repräsentation
- $w$ liegt bezüglich Winkel zwischen $u$ und $v$
- $w$ liegt weiter innen als $u$ und $v$




**Theorem**
Wenn $\{u, v\} \in E$, dann auch $\{u, w\}, \{v, w\} \in E$.

**Beweis**

- Kreis um $u$ mit Radius $R$ enthält $v$ und $O$ **Warum?**

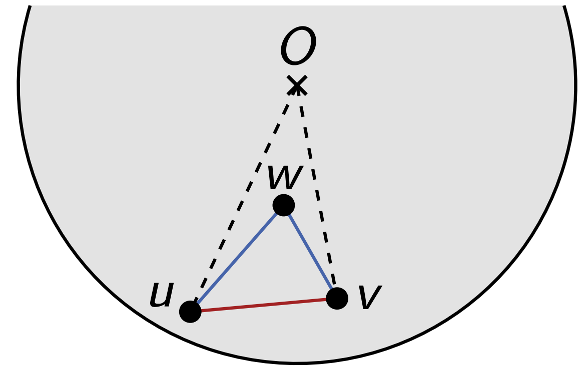



(schematische Darstellung)

# Bonus: Erzwungene Kanten

**Situation**

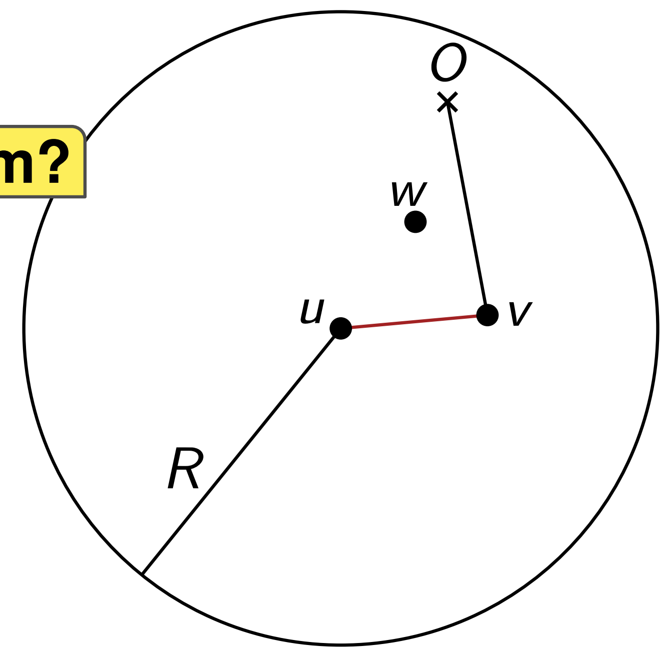
- stark hyperbolische UD-Repräsentation
- $w$ liegt bezüglich Winkel zwischen $u$ und $v$
- $w$ liegt weiter innen als $u$ und $v$




**Theorem**
Wenn $\{u, v\} \in E$, dann auch $\{u, w\}, \{v, w\} \in E$.

**Beweis**

- Kreis um $u$ mit Radius $R$ enthält $v$ und $O$ **Warum?**
- Kreis sind konvex $\Rightarrow$ Strecke $\overline{vO}$ liegt im Kreis

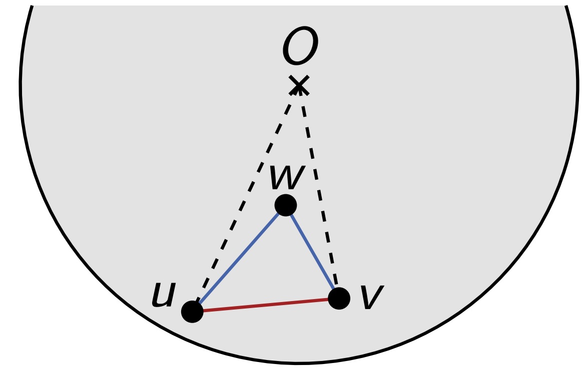



(schematische Darstellung)

# Bonus: Erzwungene Kanten

## Situation

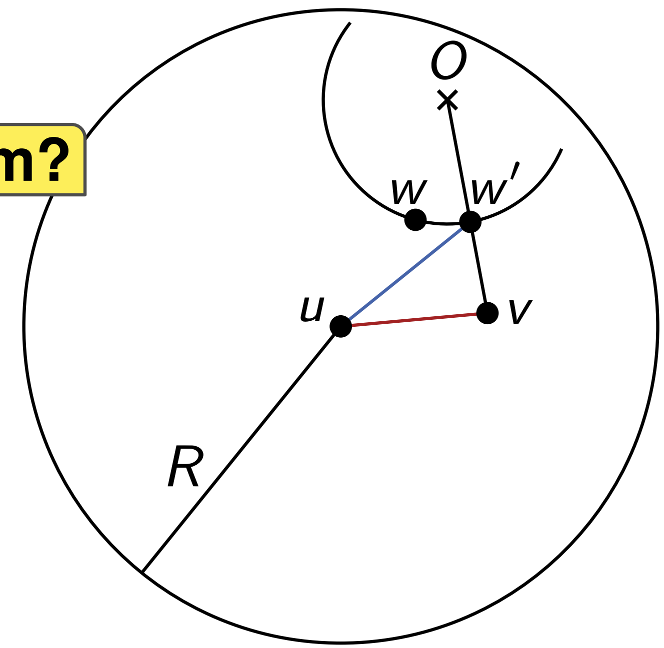
- stark hyperbolische UD-Repräsentation
- $w$ liegt bezüglich Winkel zwischen $u$ und $v$
- $w$ liegt weiter innen als $u$ und $v$




**Theorem**
Wenn $\{u, v\} \in E$, dann auch $\{u, w\}, \{v, w\} \in E$.

## Beweis

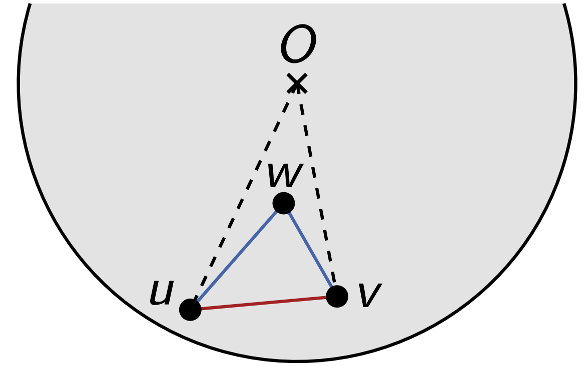
- Kreis um $u$ mit Radius $R$ enthält $v$ und $O$ **Warum?**
- Kreis sind konvex $\Rightarrow$ Strecke $\overline{vO}$ liegt im Kreis
- $w'$ liegt in dem Kreis $\Rightarrow d(u, w') \leq R$




(schematische Darstellung)

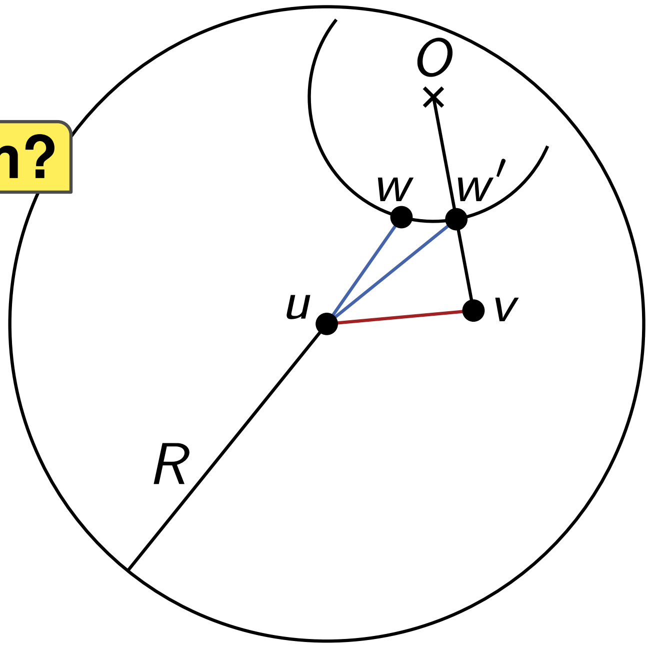
# Bonus: Erzwungene Kanten

**Situation**
- stark hyperbolische UD-Repräsentation
- $w$ liegt bezüglich Winkel zwischen $u$ und $v$
- $w$ liegt weiter innen als $u$ und $v$




**Theorem**
Wenn $\{u, v\} \in E$, dann auch $\{u, w\}, \{v, w\} \in E$.

**Beweis**
- Kreis um $u$ mit Radius $R$ enthält $v$ und $O$ **Warum?**
- Kreis sind konvex $\Rightarrow$ Strecke $\overline{vO}$ liegt im Kreis
- $w'$ liegt in dem Kreis $\Rightarrow d(u, w') \leq R$
- Distanz ist monoton bzgl. Winkeldifferenz
  $\Rightarrow d(u, w) \leq R$

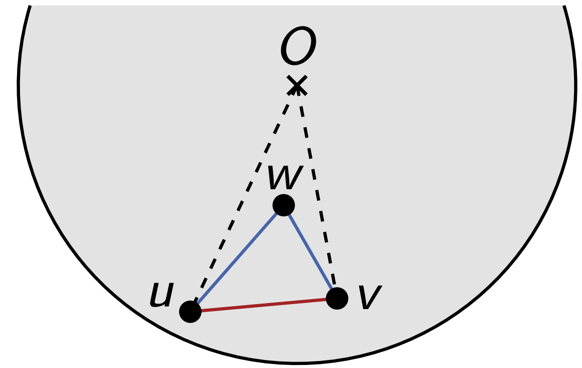



(schematische Darstellung)

# Bonus: Erzwungene Kanten

## Situation

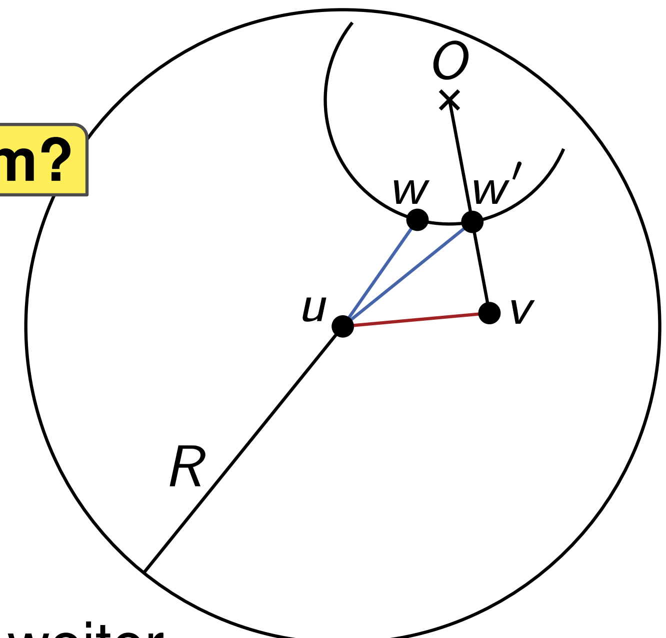
- stark hyperbolische UD-Repräsentation
- $w$ liegt bezüglich Winkel zwischen $u$ und $v$
- $w$ liegt weiter innen als $u$ und $v$




**Theorem**
Wenn $\{u, v\} \in E$, dann auch $\{u, w\}, \{v, w\} \in E$.

## Beweis

- Kreis um $u$ mit Radius $R$ enthält $v$ und $O$ **Warum?**
- Kreis sind konvex $\Rightarrow$ Strecke $\overline{vO}$ liegt im Kreis
- $w'$ liegt in dem Kreis $\Rightarrow d(u, w') \leq R$
- Distanz ist monoton bzgl. Winkeldifferenz $\Rightarrow d(u, w) \leq R$




(schematische Darstellung)

## Anmerkung

- man kann also nicht unbemerkt außen an einem weiter innen liegenden Knoten vorbeilaufen
- hierarchische Strukturen: je weiter innen desto höher in der Hierarchie