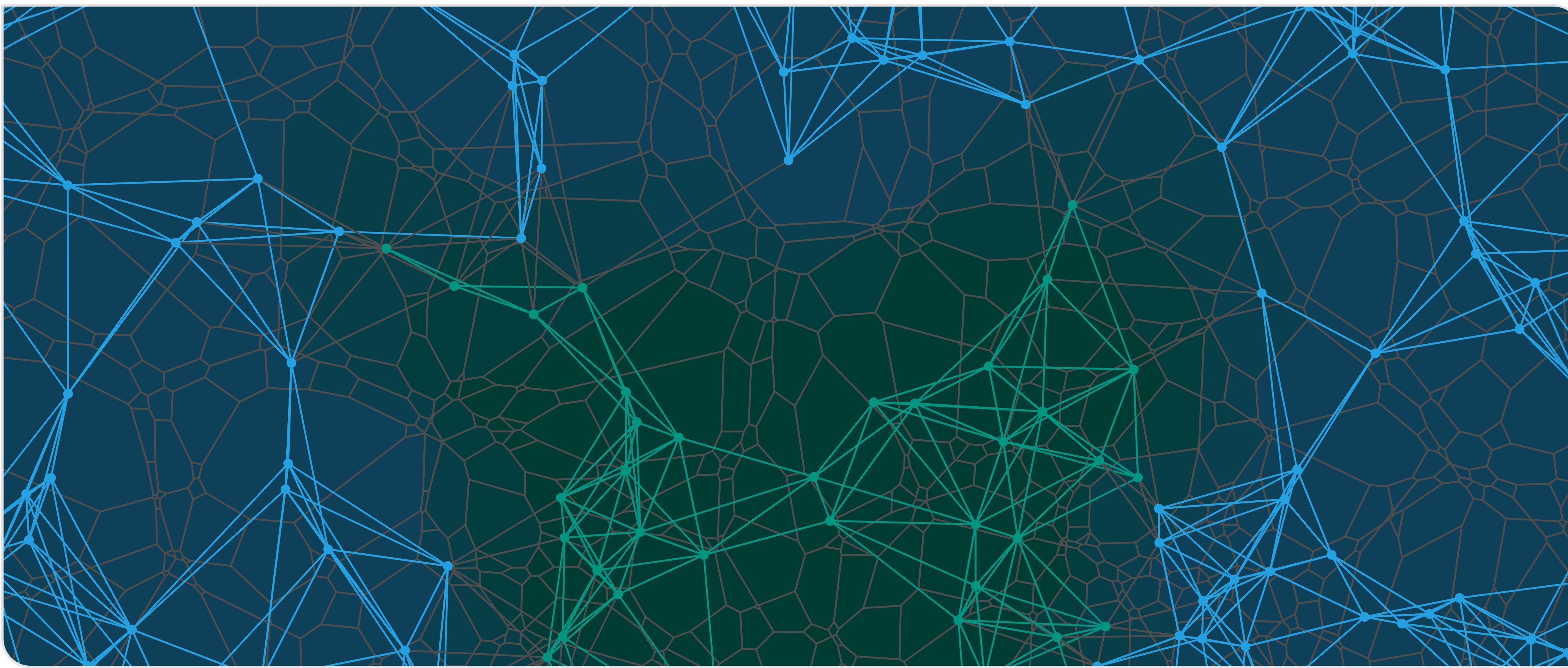
Karlsruher Institut für Technologie

# Algorithmische Geometrie

## Geometrie



# Kongruenzsätze: zurück in die Schulzeit

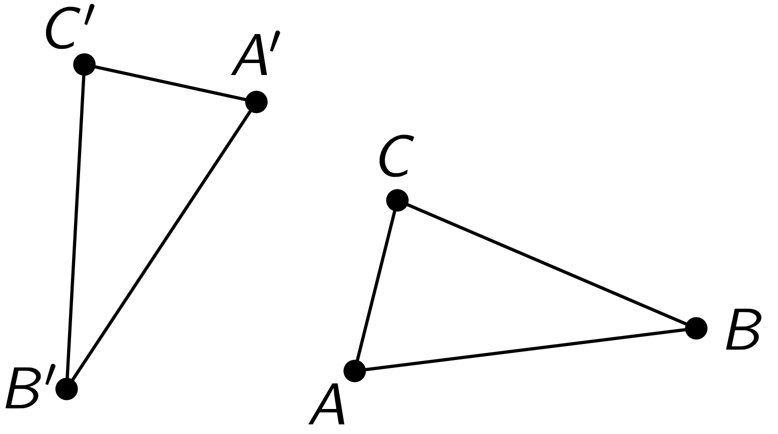
**Theorem** **(Kongruenzsatz SSS)**
Dreiecke $\Delta ABC$ und $\Delta A'B'C'$ mit $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$, $|\overline{BC}| = |\overline{B'C'}|$ und $|\overline{CA}| = |\overline{C'A'}|$ sind kongruent.

# Kongruenzsätze: zurück in die Schulzeit

**Theorem** **(Kongruenzsatz SSS)**
Dreiecke $\Delta ABC$ und $\Delta A'B'C'$ mit $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$, $|\overline{BC}| = |\overline{B'C'}|$ und $|\overline{CA}| = |\overline{C'A'}|$ sind kongruent.

**Beweis**

- $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}| \Rightarrow$ es gibt eine Bewegung $b$, mit $b(A) = A'$ und $b(B) = B'$



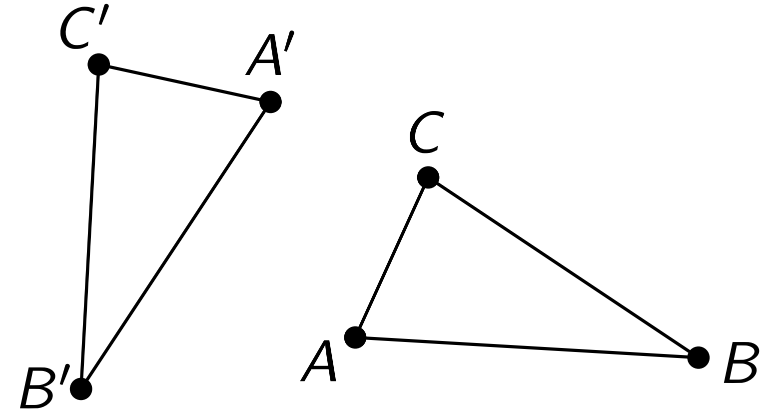
# Kongruenzsätze: zurück in die Schulzeit

**Theorem** **(Kongruenzsatz SSS)**

Dreiecke $\Delta ABC$ und $\Delta A'B'C'$ mit $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$, $|\overline{BC}| = |\overline{B'C'}|$ und $|\overline{CA}| = |\overline{C'A'}|$ sind kongruent.

**Beweis**

- $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}| \Rightarrow$ es gibt eine Bewegung $b$, mit $b(A) = A'$ und $b(B) = B'$

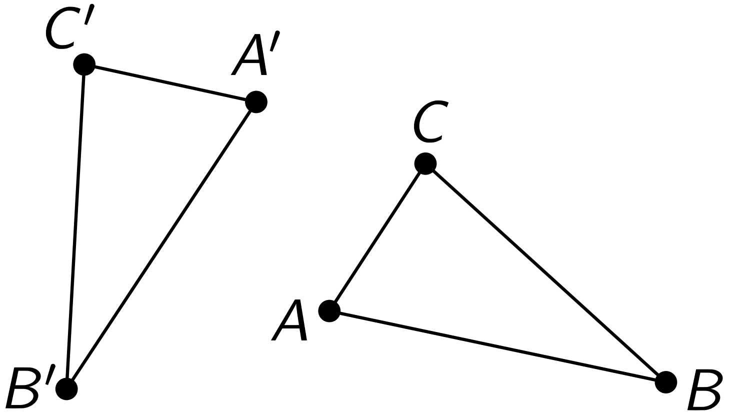


# Kongruenzsätze: zurück in die Schulzeit

**Theorem** **(Kongruenzsatz SSS)**
Dreiecke $\Delta ABC$ und $\Delta A'B'C'$ mit $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$, $|\overline{BC}| = |\overline{B'C'}|$ und $|\overline{CA}| = |\overline{C'A'}|$ sind kongruent.

**Beweis**

- $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}| \Rightarrow$ es gibt eine Bewegung $b$, mit $b(A) = A'$ und $b(B) = B'$

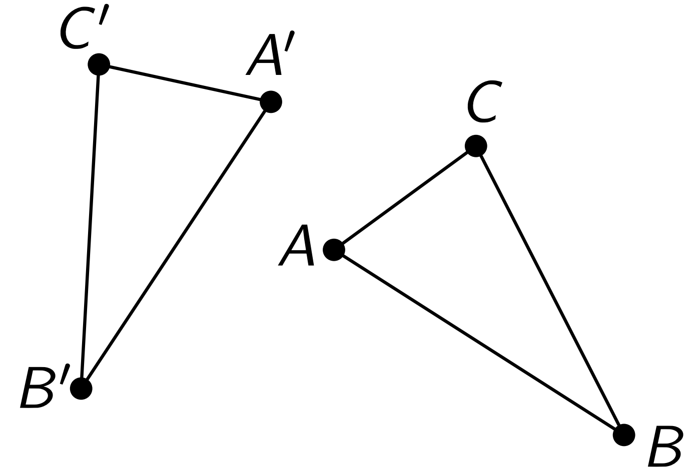


# Kongruenzsätze: zurück in die Schulzeit

**Theorem** **(Kongruenzsatz SSS)**
Dreiecke $\Delta ABC$ und $\Delta A'B'C'$ mit $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$, $|\overline{BC}| = |\overline{B'C'}|$ und $|\overline{CA}| = |\overline{C'A'}|$ sind kongruent.

**Beweis**

- $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}| \Rightarrow$ es gibt eine Bewegung $b$, mit $b(A) = A'$ und $b(B) = B'$

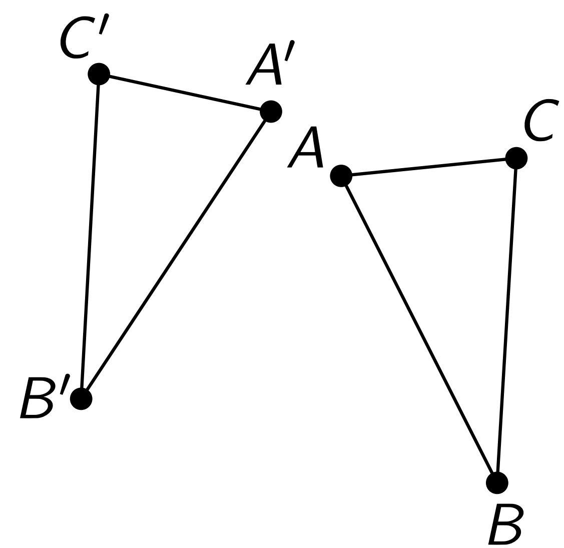


# Kongruenzsätze: zurück in die Schulzeit

**Theorem** **(Kongruenzsatz SSS)**
Dreiecke $\Delta ABC$ und $\Delta A'B'C'$ mit $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$, $|\overline{BC}| = |\overline{B'C'}|$ und $|\overline{CA}| = |\overline{C'A'}|$ sind kongruent.

**Beweis**

- $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}| \Rightarrow$ es gibt eine Bewegung $b$, mit $b(A) = A'$ und $b(B) = B'$

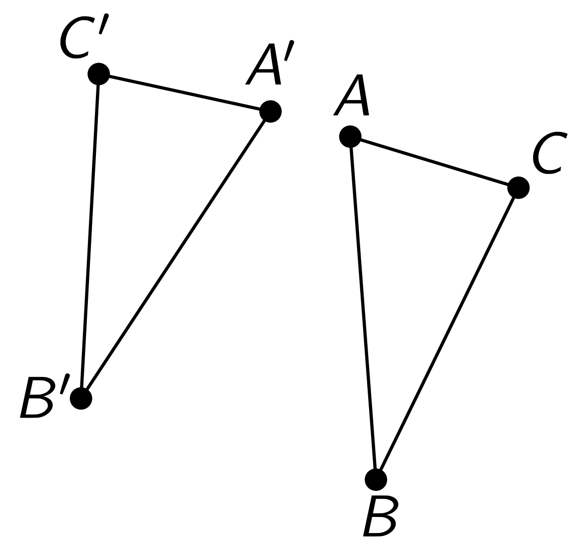


# Kongruenzsätze: zurück in die Schulzeit

**Theorem** **(Kongruenzsatz SSS)**
Dreiecke $\Delta ABC$ und $\Delta A'B'C'$ mit $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$, $|\overline{BC}| = |\overline{B'C'}|$ und $|\overline{CA}| = |\overline{C'A'}|$ sind kongruent.

**Beweis**

- $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}| \Rightarrow$ es gibt eine Bewegung $b$, mit $b(A) = A'$ und $b(B) = B'$



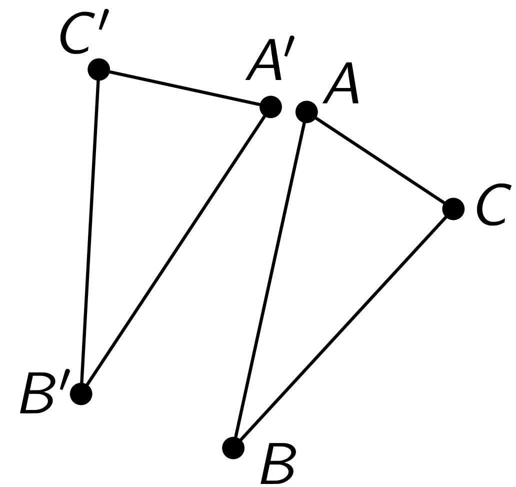
# Kongruenzsätze: zurück in die Schulzeit

**Theorem** **(Kongruenzsatz SSS)**

Dreiecke $\Delta ABC$ und $\Delta A'B'C'$ mit $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$, $|\overline{BC}| = |\overline{B'C'}|$ und $|\overline{CA}| = |\overline{C'A'}|$ sind kongruent.

**Beweis**

- $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}| \Rightarrow$ es gibt eine Bewegung $b$, mit $b(A) = A'$ und $b(B) = B'$



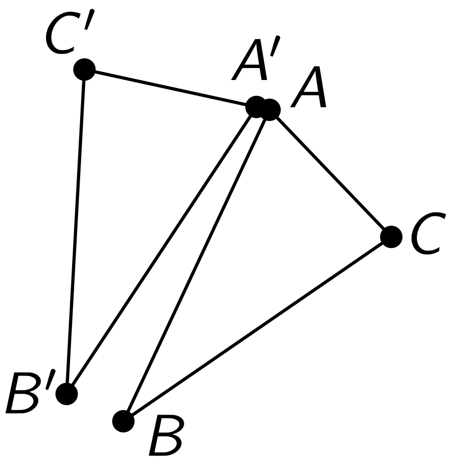
# Kongruenzsätze: zurück in die Schulzeit

**Theorem** **(Kongruenzsatz SSS)**

Dreiecke $\Delta ABC$ und $\Delta A'B'C'$ mit $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$, $|\overline{BC}| = |\overline{B'C'}|$ und $|\overline{CA}| = |\overline{C'A'}|$ sind kongruent.

**Beweis**

- $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}| \Rightarrow$ es gibt eine Bewegung $b$, mit $b(A) = A'$ und $b(B) = B'$

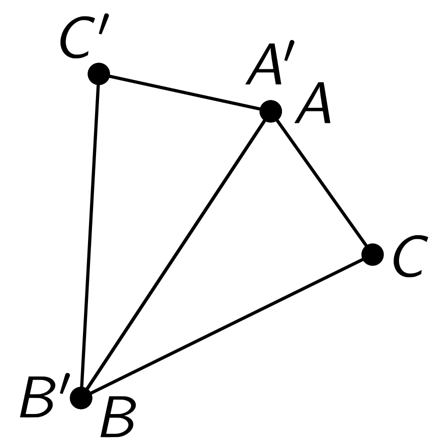


# Kongruenzsätze: zurück in die Schulzeit

**Theorem** **(Kongruenzsatz SSS)**
Dreiecke $\Delta ABC$ und $\Delta A'B'C'$ mit $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$, $|\overline{BC}| = |\overline{B'C'}|$ und $|\overline{CA}| = |\overline{C'A'}|$ sind kongruent.

**Beweis**

- $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}| \Rightarrow$ es gibt eine Bewegung $b$, mit $b(A) = A'$ und $b(B) = B'$



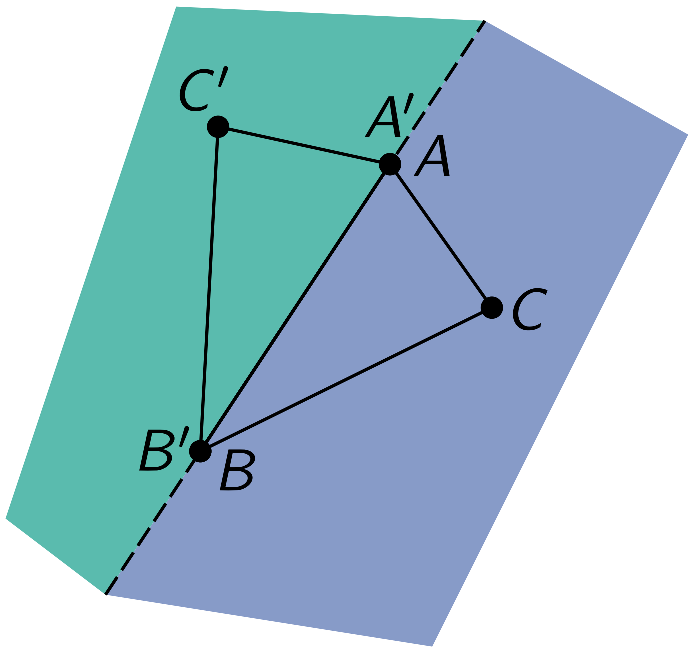
# Kongruenzsätze: zurück in die Schulzeit

**Theorem** **(Kongruenzsatz SSS)**

Dreiecke $\Delta ABC$ und $\Delta A'B'C'$ mit $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$, $|\overline{BC}| = |\overline{B'C'}|$ und $|\overline{CA}| = |\overline{C'A'}|$ sind kongruent.

**Beweis**

- $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}| \Rightarrow$ es gibt eine Bewegung $b$, mit $b(A) = A'$ und $b(B) = B'$
- $A'B'$ definiert zwei Halbebenen



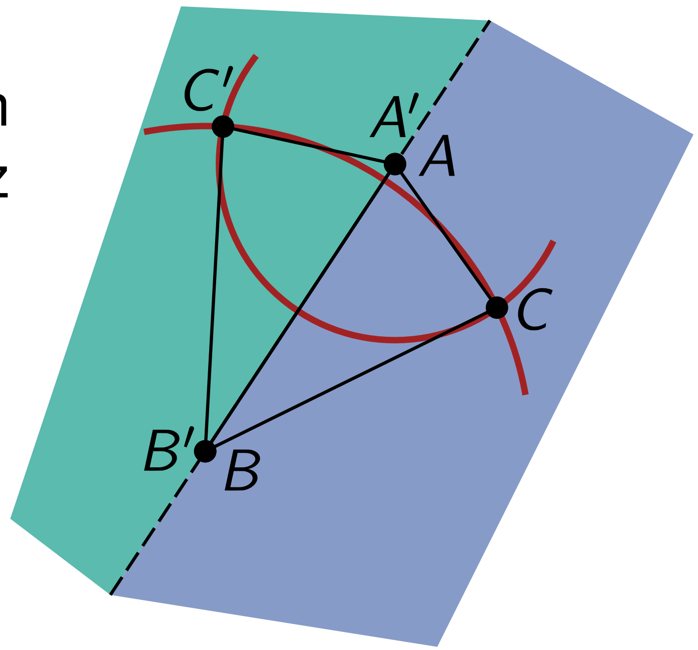
# Kongruenzsätze: zurück in die Schulzeit

**Theorem** **(Kongruenzsatz SSS)**

Dreiecke $\Delta ABC$ und $\Delta A'B'C'$ mit $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$, $|\overline{BC}| = |\overline{B'C'}|$ und $|\overline{CA}| = |\overline{C'A'}|$ sind kongruent.

**Beweis**

- $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}| \Rightarrow$ es gibt eine Bewegung $b$, mit $b(A) = A'$ und $b(B) = B'$
- $A'B'$ definiert zwei Halbebenen
- in jeder der Halbebenen gibt es nur einen Punkt mit Distanz $|\overline{AC}|$ von $A$ und Distanz $|\overline{BC}|$ von $B$

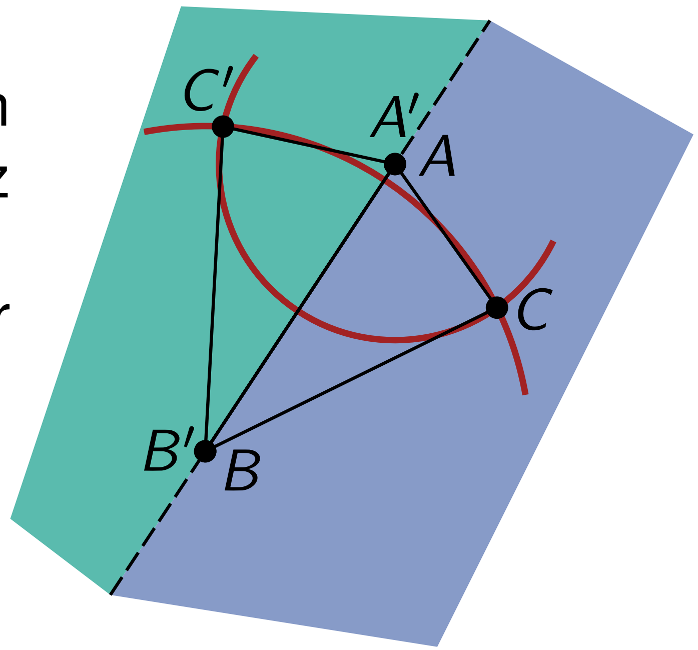


# Kongruenzsätze: zurück in die Schulzeit

**Theorem** **(Kongruenzsatz SSS)**
Dreiecke $\Delta ABC$ und $\Delta A'B'C'$ mit $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$, $|\overline{BC}| = |\overline{B'C'}|$ und $|\overline{CA}| = |\overline{C'A'}|$ sind kongruent.

**Beweis**

- $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}| \Rightarrow$ es gibt eine Bewegung $b$, mit $b(A) = A'$ und $b(B) = B'$
- $A'B'$ definiert zwei Halbebenen
- in jeder der Halbebenen gibt es nur einen Punkt mit Distanz $|\overline{AC}|$ von $A$ und Distanz $|\overline{BC}|$ von $B$
- entweder $b$ oder $b$ zusammen mit einer Spiegelung an $A'B'$ bildet $C$ auf $C'$ ab
  $\Rightarrow$ Dreiecke sind kongruent

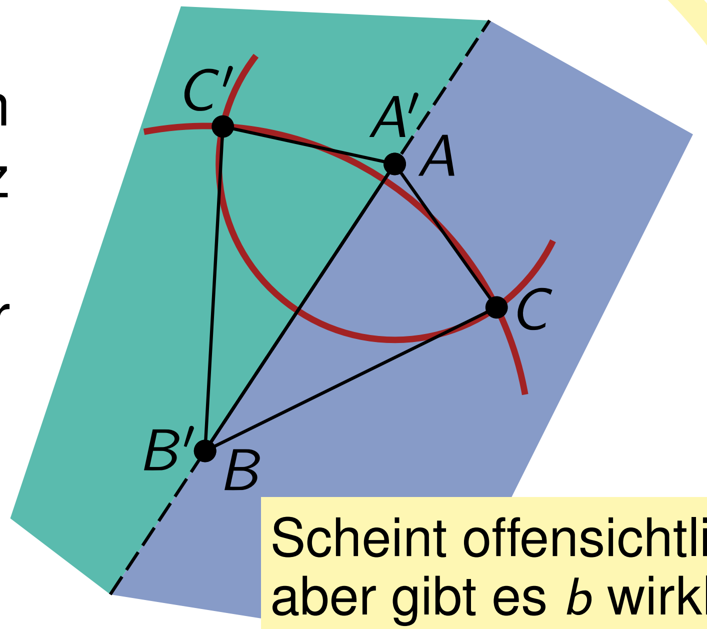


# Kongruenzsätze: zurück in die Schulzeit

**Theorem** **(Kongruenzsatz SSS)**
Dreiecke $\Delta ABC$ und $\Delta A'B'C'$ mit $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$, $|\overline{BC}| = |\overline{B'C'}|$ und $|\overline{CA}| = |\overline{C'A'}|$ sind kongruent.

**Beweis**

- $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}| \Rightarrow$ es gibt eine Bewegung $b$, mit $b(A) = A'$ und $b(B) = B'$
- $A'B'$ definiert zwei Halbebenen
- in jeder der Halbebenen gibt es nur einen Punkt mit Distanz $|\overline{AC}|$ von $A$ und Distanz $|\overline{BC}|$ von $B$
- entweder $b$ oder $b$ zusammen mit einer Spiegelung an $A'B'$ bildet $C$ auf $C'$ ab
  $\Rightarrow$ Dreiecke sind kongruent




Scheint offensichtlich. . .
aber gibt es $b$ wirklich?

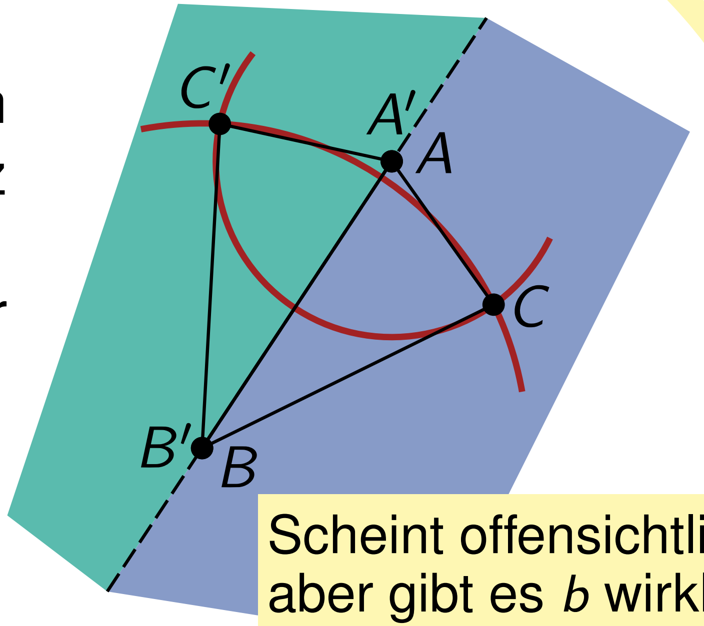
# Kongruenzsätze: zurück in die Schulzeit

**Theorem** **(Kongruenzsatz SSS)**

Dreiecke $\Delta ABC$ und $\Delta A'B'C'$ mit $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$, $|\overline{BC}| = |\overline{B'C'}|$ und $|\overline{CA}| = |\overline{C'A'}|$ sind kongruent.

**Beweis**

- $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}| \Rightarrow$ es gibt eine Bewegung $b$, mit $b(A) = A'$ und $b(B) = B'$
- $A'B'$ definiert zwei Halbebenen
- in jeder der Halbebenen gibt es nur einen Punkt mit Distanz $|\overline{AC}|$ von $A$ und Distanz $|\overline{BC}|$ von $B$
- entweder $b$ oder $b$ zusammen mit einer Spiegelung an $A'B'$ bildet $C$ auf $C'$ ab
  $\Rightarrow$ Dreiecke sind kongruent




Scheint offensichtlich. . .
aber gibt es $b$ wirklich?

Wer garantiert uns das?

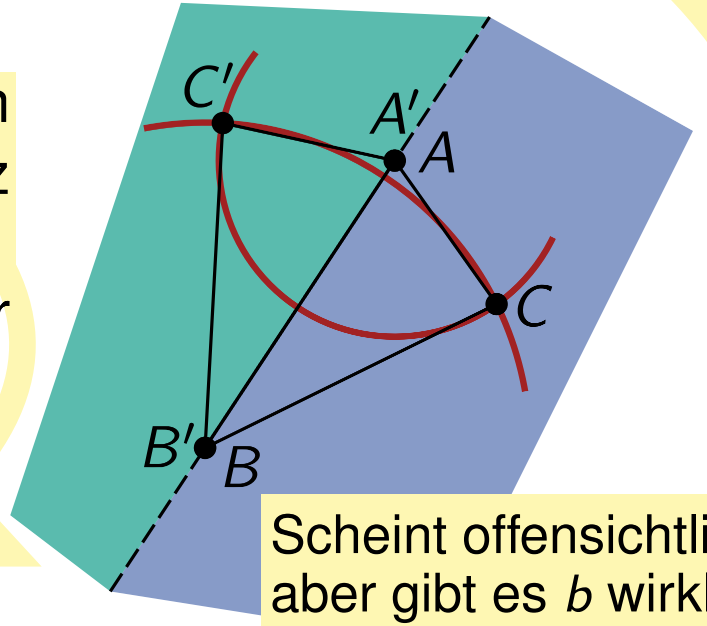
# Kongruenzsätze: zurück in die Schulzeit

**Theorem** **(Kongruenzsatz SSS)**
Dreiecke $\Delta ABC$ und $\Delta A'B'C'$ mit $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$, $|\overline{BC}| = |\overline{B'C'}|$ und $|\overline{CA}| = |\overline{C'A'}|$ sind kongruent.

**Beweis**

- $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}| \Rightarrow$ es gibt eine Bewegung $b$, mit $b(A) = A'$ und $b(B) = B'$
- $A'B'$ definiert zwei Halbebenen
- in jeder der Halbebenen gibt es nur einen Punkt mit Distanz $|\overline{AC}|$ von $A$ und Distanz $|\overline{BC}|$ von $B$
- entweder $b$ oder $b$ zusammen mit einer Spiegelung an $A'B'$ bildet $C$ auf $C'$ ab $\Rightarrow$ Dreiecke sind kongruent

Stimmt das wirklich? Wenn ja, warum?




Scheint offensichtlich. . .
aber gibt es $b$ wirklich?

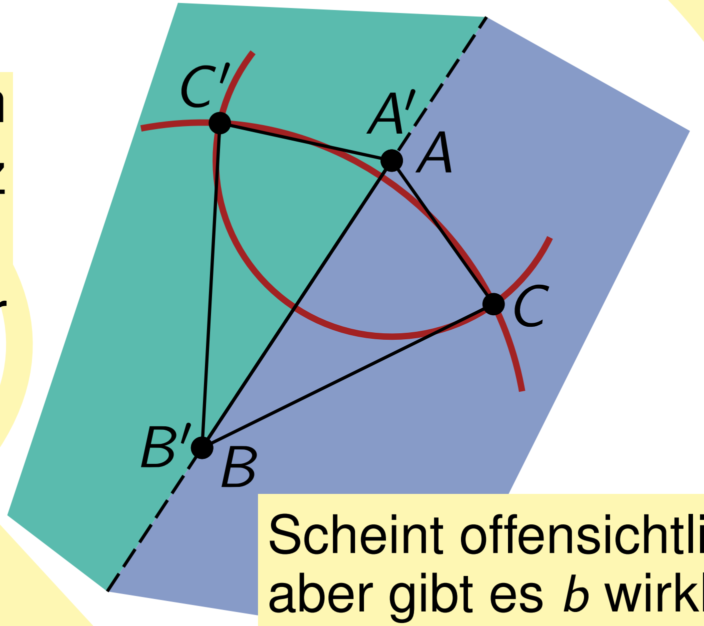
Wer garantiert uns das?

# Kongruenzsätze: zurück in die Schulzeit

**Theorem** **(Kongruenzsatz SSS)**
Dreiecke $\Delta ABC$ und $\Delta A'B'C'$ mit $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$, $|\overline{BC}| = |\overline{B'C'}|$ und $|\overline{CA}| = |\overline{C'A'}|$ sind kongruent.

**Beweis**

- $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}| \Rightarrow$ es gibt eine Bewegung $b$, mit $b(A) = A'$ und $b(B) = B'$
- $A'B'$ definiert zwei Halbebenen
- in jeder der Halbebenen gibt es nur einen Punkt mit Distanz $|\overline{AC}|$ von $A$ und Distanz $|\overline{BC}|$ von $B$
- entweder $b$ oder $b$ zusammen mit einer Spiegelung an $A'B'$ bildet $C$ auf $C'$ ab
  $\Rightarrow$ Dreiecke sind kongruent




Stimmt das wirklich? Wenn ja, warum?

Läuft letzten Endes auf die Dreiecksungleichung hinaus!

Scheint offensichtlich... aber gibt es $b$ wirklich?

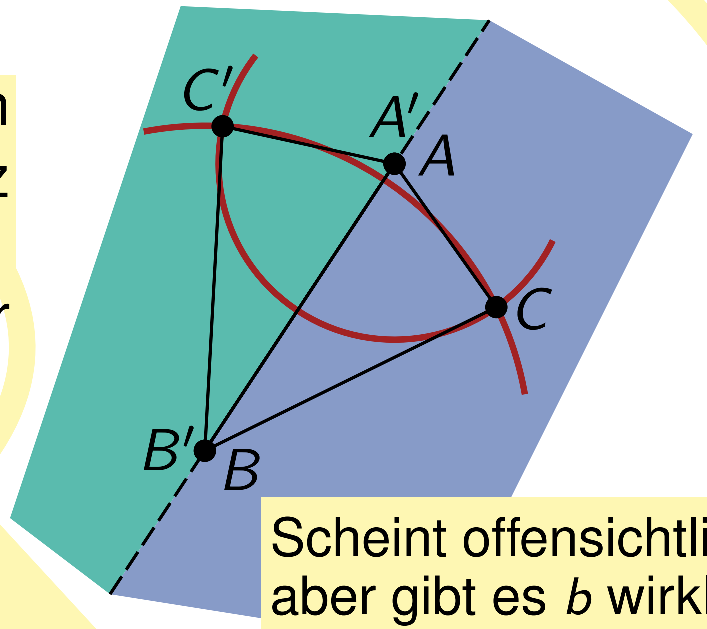
Wer garantiert uns das?

# Kongruenzsätze: zurück in die Schulzeit

**Theorem** **(Kongruenzsatz SSS)**
Dreiecke $\Delta ABC$ und $\Delta A'B'C'$ mit $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$, $|\overline{BC}| = |\overline{B'C'}|$ und $|\overline{CA}| = |\overline{C'A'}|$ sind kongruent.

**Beweis**

- $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}| \Rightarrow$ es gibt eine Bewegung $b$, mit $b(A) = A'$ und $b(B) = B'$
- $A'B'$ definiert zwei Halbebenen
- in jeder der Halbebenen gibt es nur einen Punkt mit Distanz $|\overline{AC}|$ von $A$ und Distanz $|\overline{BC}|$ von $B$
- entweder $b$ oder $b$ zusammen mit einer Spiegelung an $A'B'$ bildet $C$ auf $C'$ ab
  $\Rightarrow$ Dreiecke sind kongruent




Stimmt das wirklich? Wenn ja, warum?

Läuft letzten Endes auf die Dreiecksungleichung hinaus!

Und wie beweisen wir die Dreiecksungleichung?

Scheint offensichtlich. . .
aber gibt es $b$ wirklich?

Wer garantiert uns das?

# Axiomatische Sichtweise nach Euklid

**Euklid (um 300 v. Chr.)**

- formulierte gewisse Grundwahrheiten (Postulate und Axiome)
- alles weitere sollte ohne Benutzung der Anschauung folgen

# Axiomatische Sichtweise nach Euklid

## Euklid (um 300 v. Chr.)

- formulierte gewisse Grundwahrheiten (Postulate und Axiome)
- alles weitere sollte ohne Benutzung der Anschauung folgen

### Die fünf Axiome

- Was demselben gleich ist, ist auch untereinander gleich.
- Wird Gleiches zu Gleichem hinzugefügt, erhält man Gleiches.
- Wird Gleiches von Gleichem weggenommen, bleibt Gleiches übrig.
- Was sich deckt, ist gleich.
- Das Ganze ist größer als der Teil.

# Axiomatische Sichtweise nach Euklid

## Euklid (um 300 v. Chr.)

- formulierte gewisse Grundwahrheiten (Postulate und Axiome)
- alles weitere sollte ohne Benutzung der Anschauung folgen

### Die fünf Axiome

- Was demselben gleich ist, ist auch untereinander gleich.
- Wird Gleiches zu Gleichem hinzugefügt, erhält man Gleiches.
- Wird Gleiches von Gleichem weggenommen, bleibt Gleiches übrig.
- Was sich deckt, ist gleich.
- Das Ganze ist größer als der Teil.

### Die fünf Postulate fordern, dass

- man von jedem Punkt zu jedem anderen eine Strecke ziehen kann;

# Axiomatische Sichtweise nach Euklid

## Euklid (um 300 v. Chr.)

- formulierte gewisse Grundwahrheiten (Postulate und Axiome)
- alles weitere sollte ohne Benutzung der Anschauung folgen

### Die fünf Axiome

- Was demselben gleich ist, ist auch untereinander gleich.
- Wird Gleiches zu Gleichem hinzugefügt, erhält man Gleiches.
- Wird Gleiches von Gleichem weggenommen, bleibt Gleiches übrig.
- Was sich deckt, ist gleich.
- Das Ganze ist größer als der Teil.

### Die fünf Postulate fordern, dass

- man von jedem Punkt zu jedem anderen eine Strecke ziehen kann;
- man jede Strecke zu einer Geraden verlängern kann;

# Axiomatische Sichtweise nach Euklid

## Euklid (um 300 v. Chr.)

- formulierte gewisse Grundwahrheiten (Postulate und Axiome)
- alles weitere sollte ohne Benutzung der Anschauung folgen

### Die fünf Axiome

- Was demselben gleich ist, ist auch untereinander gleich.
- Wird Gleiches zu Gleichem hinzugefügt, erhält man Gleiches.
- Wird Gleiches von Gleichem weggenommen, bleibt Gleiches übrig.
- Was sich deckt, ist gleich.
- Das Ganze ist größer als der Teil.

### Die fünf Postulate fordern, dass

- man von jedem Punkt zu jedem anderen eine Strecke ziehen kann;
- man jede Strecke zu einer Geraden verlängern kann;
- man zu jedem Mittelpunkt und Radius einen Kreis zeichnen kann;

# Axiomatische Sichtweise nach Euklid

## Euklid (um 300 v. Chr.)

- formulierte gewisse Grundwahrheiten (Postulate und Axiome)
- alles weitere sollte ohne Benutzung der Anschauung folgen

### Die fünf Axiome

- Was demselben gleich ist, ist auch untereinander gleich.
- Wird Gleiches zu Gleichem hinzugefügt, erhält man Gleiches.
- Wird Gleiches von Gleichem weggenommen, bleibt Gleiches übrig.
- Was sich deckt, ist gleich.
- Das Ganze ist größer als der Teil.

### Die fünf Postulate fordern, dass

- man von jedem Punkt zu jedem anderen eine Strecke ziehen kann;
- man jede Strecke zu einer Geraden verlängern kann;
- man zu jedem Mittelpunkt und Radius einen Kreis zeichnen kann;
- alle rechten Winkel gleich sind;

# Axiomatische Sichtweise nach Euklid

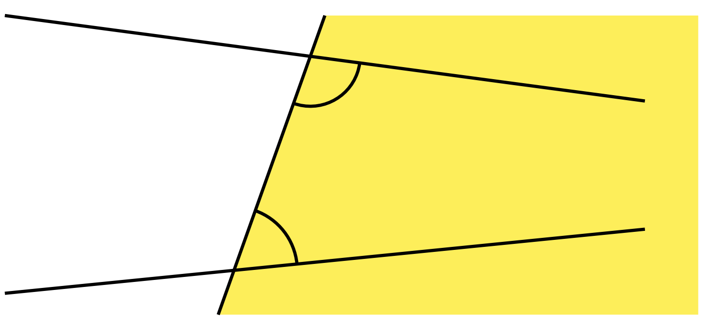
Karlsruher Institut für Technologie

## Euklid (um 300 v. Chr.)

- formulierte gewisse Grundwahrheiten (Postulate und Axiome)
- alles weitere sollte ohne Benutzung der Anschauung folgen

### Die fünf Axiome

- Was demselben gleich ist, ist auch untereinander gleich.
- Wird Gleiches zu Gleichem hinzugefügt, erhält man Gleiches.
- Wird Gleiches von Gleichem weggenommen, bleibt Gleiches übrig.
- Was sich deckt, ist gleich.
- Das Ganze ist größer als der Teil.



### Die fünf Postulate fordern, dass

- man von jedem Punkt zu jedem anderen eine Strecke ziehen kann;
- man jede Strecke zu einer Geraden verlängern kann;
- man zu jedem Mittelpunkt und Radius einen Kreis zeichnen kann;
- alle rechten Winkel gleich sind;
- sich zwei Geraden, die von einer dritten so geschnitten werden, dass zwei innere Winkel auf derselben Seite zusammen kleiner als zwei rechte Winkel sind, bei Verlängerung ins unendliche auf ebendieser Seite schneiden.

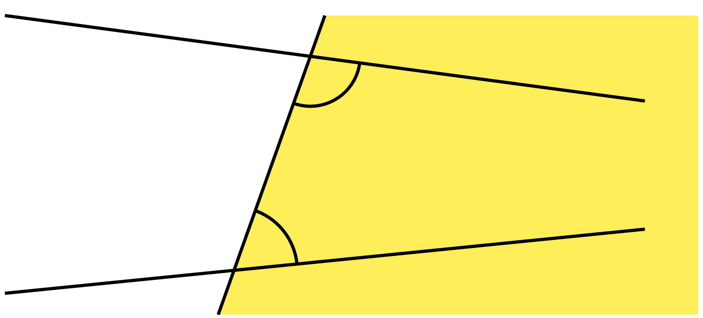
# Axiomatische Sichtweise nach Euklid

## Euklid (um 300 v. Chr.)

- formulierte gewisse Grundwahrheiten (Postulate und Axiome)
- alles weitere sollte ohne Benutzung der Anschauung folgen

### Die fünf Axiome

- Was demselben gleich ist, ist auch untereinander gleich.
- Wird Gleiches zu Gleichem hinzugefügt, erhält man Gleiches.
- Wird Gleiches von Gleichem weggenommen, bleibt Gleiches übrig.
- Was sich deckt, ist gleich.
- Das Ganze ist größer als der Teil.



### Die fünf Postulate fordern, dass

- man von jedem Punkt zu jedem anderen eine Strecke ziehen kann;
- man jede Strecke zu einer Geraden verlängern kann;
- man zu jedem Mittelpunkt und Radius einen Kreis zeichnen kann;
- alle rechten Winkel gleich sind;
- sich zwei Geraden, die von einer dritten so geschnitten werden, dass zwei innere Winkel auf derselben Seite zusammen kleiner als zwei rechte Winkel sind, bei Verlängerung ins unendliche auf ebendieser Seite schneiden.

das letzte Postulat heißt **Parallelenaxiom**

# Trivia

**Euklids Elemente (um 300 v. Chr.)**

- eine Reihe von Büchern über den damaligen Stand der Mathematik mit halbwegs einheitlicher Sprache
- verfolgt den eben genannten deduktiven Ansatz (basierend auf Axiomen)

# Trivia

**Euklids Elemente (um 300 v. Chr.)**

- eine Reihe von Büchern über den damaligen Stand der Mathematik mit halbwegs einheitlicher Sprache
- verfolgt den eben genannten deduktiven Ansatz (basierend auf Axiomen)
- enthält: Satz des Pythagoras, Winkelsumme im Dreieck, erste Binomische Formel, Satz des Thales, erster Strahlensatz, Ähnlichkeitssätze für Dreiecke, Euklidischer Algorithmus (ggt), unendlich viele Primzahlen, ...

# Trivia

Karlsruher Institut für Technologie

**Euklids Elemente (um 300 v. Chr.)**

- eine Reihe von Büchern über den damaligen Stand der Mathematik mit halbwegs einheitlicher Sprache
- verfolgt den eben genannten deduktiven Ansatz (basierend auf Axiomen)
- enthält: Satz des Pythagoras, Winkelsumme im Dreieck, erste Binomische Formel, Satz des Thales, erster Strahlensatz, Ähnlichkeitssätze für Dreiecke, Euklidischer Algorithmus (ggt), unendlich viele Primzahlen, . . .
- nach der Bibel das häufigst editierte, kommentierte und übersetzte Werk

# Trivia

**Euklids Elemente (um 300 v. Chr.)**

- eine Reihe von Büchern über den damaligen Stand der Mathematik mit halbwegs einheitlicher Sprache
- verfolgt den eben genannten deduktiven Ansatz (basierend auf Axiomen)
- enthält: Satz des Pythagoras, Winkelsumme im Dreieck, erste Binomische Formel, Satz des Thales, erster Strahlensatz, Ähnlichkeitssätze für Dreiecke, Euklidischer Algorithmus (ggt), unendlich viele Primzahlen, . . .
- nach der Bibel das häufigst editierte, kommentierte und übersetzte Werk

**Parallelenaxiom**

- wurde über Jahrhunderte hinweg versucht aus den anderen herzuleiten
- ist aber notwendig (werden wir später noch etwas konkreter sehen)

# Trivia

Karlsruher Institut für Technologie

**Euklids Elemente (um 300 v. Chr.)**

- eine Reihe von Büchern über den damaligen Stand der Mathematik mit halbwegs einheitlicher Sprache
- verfolgt den eben genannten deduktiven Ansatz (basierend auf Axiomen)
- enthält: Satz des Pythagoras, Winkelsumme im Dreieck, erste Binomische Formel, Satz des Thales, erster Strahlensatz, Ähnlichkeitssätze für Dreiecke, Euklidischer Algorithmus (ggt), unendlich viele Primzahlen, ...
- nach der Bibel das häufigst editierte, kommentierte und übersetzte Werk

**Parallelenaxiom**

- wurde über Jahrhunderte hinweg versucht aus den anderen herzuleiten
- ist aber notwendig (werden wir später noch etwas konkreter sehen)

**Moderne Sichtweise**

- die Anschauung konnte Euklid nicht immer komplett vermeiden
- Definitionen wie: Punkt ist, was ohne Teile ist; Linie ist Länge ohne Breite

# Trivia

**Euklids Elemente (um 300 v. Chr.)**

- eine Reihe von Büchern über den damaligen Stand der Mathematik mit halbwegs einheitlicher Sprache
- verfolgt den eben genannten deduktiven Ansatz (basierend auf Axiomen)
- enthält: Satz des Pythagoras, Winkelsumme im Dreieck, erste Binomische Formel, Satz des Thales, erster Strahlensatz, Ähnlichkeitssätze für Dreiecke, Euklidischer Algorithmus (ggt), unendlich viele Primzahlen, …
- nach der Bibel das häufigst editierte, kommentierte und übersetzte Werk

**Parallelenaxiom**

- wurde über Jahrhunderte hinweg versucht aus den anderen herzuleiten
- ist aber notwendig (werden wir später noch etwas konkreter sehen)

**Moderne Sichtweise**

- die Anschauung konnte Euklid nicht immer komplett vermeiden
- Definitionen wie: Punkt ist, was ohne Teile ist; Linie ist Länge ohne Breite
- Hilbert setzt deduktive Methode konsequent um (*Grundlagen der Geometrie*, 1899)

# Trivia

Karlsruher Institut für Technologie

### Euklids Elemente (um 300 v. Chr.)

- eine Reihe von Büchern über den damaligen Stand der Mathematik mit halbwegs einheitlicher Sprache
- verfolgt den eben genannten deduktiven Ansatz (basierend auf Axiomen)
- enthält: Satz des Pythagoras, Winkelsumme im Dreieck, erste Binomische Formel, Satz des Thales, erster Strahlensatz, Ähnlichkeitssätze für Dreiecke, Euklidischer Algorithmus (ggt), unendlich viele Primzahlen, ...
- nach der Bibel das häufigst editierte, kommentierte und übersetzte Werk

### Parallelenaxiom

- wurde über Jahrhunderte hinweg versucht aus den anderen herzuleiten
- ist aber notwendig (werden wir später noch etwas konkreter sehen)

### Moderne Sichtweise

- die Anschauung konnte Euklid nicht immer komplett vermeiden
- Definitionen wie: Punkt ist, was ohne Teile ist; Linie ist Länge ohne Breite
- Hilbert setzt deduktive Methode konsequent um (*Grundlagen der Geometrie*, 1899)
- Hilbert (1891): »Man muss jederzeit an Stelle von „Punkte, Geraden, Ebenen" „Tische, Stühle, Bierseidel" sagen können.«

# Modernere Axiomatische Sichtweise

**Grundbestandteile**

- zunächst inhaltsleere **Grundbegriffe** („Punkt“ und „Tisch“ austauschbar)

# Modernere Axiomatische Sichtweise

**Grundbestandteile**

- zunächst inhaltsleere **Grundbegriffe** („Punkt“ und „Tisch“ austauschbar)
- die Grundbegriffe werden von **Axiomen** mit Inhalt gefüllt
  (gewissermaßen sind das nur Eigenschaften, die wir uns für die Grundbegriffe wünschen)

# Modernere Axiomatische Sichtweise

## Grundbestandteile

- zunächst inhaltsleere **Grundbegriffe** („Punkt“ und „Tisch“ austauschbar)
- die Grundbegriffe werden von **Axiomen** mit Inhalt gefüllt
  (gewissermaßen sind das nur Eigenschaften, die wir uns für die Grundbegriffe wünschen)
- **Sätze**, die ausschließlich aus den Axiomen hergeleitet werden

# Modernere Axiomatische Sichtweise

**Grundbestandteile**

- zunächst inhaltsleere **Grundbegriffe** („Punkt“ und „Tisch“ austauschbar)
- die Grundbegriffe werden von **Axiomen** mit Inhalt gefüllt
  (gewissermaßen sind das nur Eigenschaften, die wir uns für die Grundbegriffe wünschen)
- **Sätze**, die ausschließlich aus den Axiomen hergeleitet werden
- **Definitionen** sind nur Abkürzungen um die Notation zu vereinfachen

# Modernere Axiomatische Sichtweise

## Grundbestandteile

- zunächst inhaltsleere **Grundbegriffe** („Punkt“ und „Tisch“ austauschbar)
- die Grundbegriffe werden von **Axiomen** mit Inhalt gefüllt
  (gewissermaßen sind das nur Eigenschaften, die wir uns für die Grundbegriffe wünschen)
- **Sätze**, die ausschließlich aus den Axiomen hergeleitet werden
- **Definitionen** sind nur Abkürzungen um die Notation zu vereinfachen

## Wünschenswerte Eigenschaften eines Axiomensystem

- Widerspruchsfreiheit

# Modernere Axiomatische Sichtweise

**Grundbestandteile**

- zunächst inhaltsleere **Grundbegriffe** („Punkt“ und „Tisch“ austauschbar)
- die Grundbegriffe werden von **Axiomen** mit Inhalt gefüllt
  (gewissermaßen sind das nur Eigenschaften, die wir uns für die Grundbegriffe wünschen)
- **Sätze**, die ausschließlich aus den Axiomen hergeleitet werden
- **Definitionen** sind nur Abkürzungen um die Notation zu vereinfachen

**Wünschenswerte Eigenschaften eines Axiomensystem**

- Widerspruchsfreiheit
- Unabhängigkeit (keines der Axiome lässt sich aus einem anderen herleiten)

# Modernere Axiomatische Sichtweise

## Grundbestandteile

- zunächst inhaltsleere **Grundbegriffe** („Punkt“ und „Tisch“ austauschbar)
- die Grundbegriffe werden von **Axiomen** mit Inhalt gefüllt
  (gewissermaßen sind das nur Eigenschaften, die wir uns für die Grundbegriffe wünschen)
- **Sätze**, die ausschließlich aus den Axiomen hergeleitet werden
- **Definitionen** sind nur Abkürzungen um die Notation zu vereinfachen

## Wünschenswerte Eigenschaften eines Axiomensystem

- Widerspruchsfreiheit
- Unabhängigkeit (keines der Axiome lässt sich aus einem anderen herleiten)
- Vollständigkeit (jede im System formulierbare Aussage ist beweis- oder widerlegbar)

# Modernere Axiomatische Sichtweise

## Grundbestandteile

- zunächst inhaltsleere **Grundbegriffe** („Punkt“ und „Tisch“ austauschbar)
- die Grundbegriffe werden von **Axiomen** mit Inhalt gefüllt
  (gewissermaßen sind das nur Eigenschaften, die wir uns für die Grundbegriffe wünschen)
- **Sätze**, die ausschließlich aus den Axiomen hergeleitet werden
- **Definitionen** sind nur Abkürzungen um die Notation zu vereinfachen

## Wünschenswerte Eigenschaften eines Axiomensystem

- Widerspruchsfreiheit
- Unabhängigkeit (keines der Axiome lässt sich aus einem anderen herleiten)
- Vollständigkeit (jede im System formulierbare Aussage ist beweis- oder widerlegbar)
- man bekommt nicht immer, was man sich wünscht. . .
  (siehe Gödelscher Unvollständigkeitssatz)

# Modernere Axiomatische Sichtweise

## Grundbestandteile

- zunächst inhaltsleere **Grundbegriffe** („Punkt“ und „Tisch“ austauschbar)
- die Grundbegriffe werden von **Axiomen** mit Inhalt gefüllt
  (gewissermaßen sind das nur Eigenschaften, die wir uns für die Grundbegriffe wünschen)
- **Sätze**, die ausschließlich aus den Axiomen hergeleitet werden
- **Definitionen** sind nur Abkürzungen um die Notation zu vereinfachen

## Wünschenswerte Eigenschaften eines Axiomensystem

- Widerspruchsfreiheit
- Unabhängigkeit (keines der Axiome lässt sich aus einem anderen herleiten)
- Vollständigkeit (jede im System formulierbare Aussage ist beweis- oder widerlegbar)
- man bekommt nicht immer, was man sich wünscht. . .
  (siehe Gödelscher Unvollständigkeitssatz)

## Vorgehen im Folgenden

- Axiomatischer Aufbau der Geometrie (mit fünf Axiomgruppen I–V)
- Axiomensystem nach Kolmogorov (1977) (äquivalent zu Hilberts System)

# Modernere Axiomatische Sichtweise

## Grundbestandteile

- zunächst inhaltsleere **Grundbegriffe** („Punkt“ und „Tisch“ austauschbar)
- die Grundbegriffe werden von **Axiomen** mit Inhalt gefüllt
  (gewissermaßen sind das nur Eigenschaften, die wir uns für die Grundbegriffe wünschen)
- **Sätze**, die ausschließlich aus den Axiomen hergeleitet werden
- **Definitionen** sind nur Abkürzungen um die Notation zu vereinfachen

## Wünschenswerte Eigenschaften eines Axiomensystem

- Widerspruchsfreiheit
- Unabhängigkeit (keines der Axiome lässt sich aus einem anderen herleiten)
- Vollständigkeit (jede im System formulierbare Aussage ist beweis- oder widerlegbar)
- man bekommt nicht immer, was man sich wünscht. . .
  (siehe Gödelscher Unvollständigkeitssatz)

## Vorgehen im Folgenden

- Axiomatischer Aufbau der Geometrie (mit fünf Axiomgruppen I–V)
- Axiomensystem nach Kolmogorov (1977) (äquivalent zu Hilberts System)
- wir gehen davon aus, dass wir grundlegende Dinge wie Zahlen (Peano) und wie Mengenlehre (ZFC) schon zur Verfügung haben

# Erste Grundbegriffe: Punkte und Geraden

**Definition**
Seien $\mathcal{P}$ und $\mathcal{B}$ disjunkte Mengen. Ihre Elemente nennen wir **Punkte** bzw. **Blöcke**. Sei weiter $I \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{B}$. Dann heißt $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ **Inzidenzstruktur**. Wenn $(P, b) \in I$, dann sagen wir, dass $P$ und $b$ **inzident** sind.

# Erste Grundbegriffe: Punkte und Geraden

**Definition**
Seien $\mathcal{P}$ und $\mathcal{B}$ disjunkte Mengen. Ihre Elemente nennen wir **Punkte** bzw. **Blöcke**. Sei weiter $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{B}$. Dann heißt $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ **Inzidenzstruktur**. Wenn $(P, b) \in \mathcal{I}$, dann sagen wir, dass $P$ und $b$ **inzident** sind.

**Beispiel**

- $\mathcal{P}$ ist die Menge der Stühle, $\mathcal{B}$ die Menge der Tische in einem Restaurant
- $(P, b) \in \mathcal{I}$, wenn Stuhl $P$ an Tisch $b$ steht

# Erste Grundbegriffe: Punkte und Geraden

**Definition**
Seien $\mathcal{P}$ und $\mathcal{B}$ disjunkte Mengen. Ihre Elemente nennen wir **Punkte** bzw. **Blöcke**. Sei weiter $I \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{B}$. Dann heißt $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ **Inzidenzstruktur**. Wenn $(P, b) \in I$, dann sagen wir, dass $P$ und $b$ **inzident** sind.

**Beispiel**
- $\mathcal{P}$ ist die Menge der Stühle, $\mathcal{B}$ die Menge der Tische in einem Restaurant
- $(P, b) \in I$, wenn Stuhl $P$ an Tisch $b$ steht

**Definition**
Eine Inzidenzstruktur heißt **einfach** bzw. **Geometrie**, wenn keine zwei Blöcke zu den selben Punkten inzident sind. Die Blöcke heißen **Geraden**.

# Erste Grundbegriffe: Punkte und Geraden

**Definition**
Seien $\mathcal{P}$ und $\mathcal{B}$ disjunkte Mengen. Ihre Elemente nennen wir **Punkte** bzw. **Blöcke**. Sei weiter $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{B}$. Dann heißt $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ **Inzidenzstruktur**. Wenn $(P, b) \in \mathcal{I}$, dann sagen wir, dass $P$ und $b$ **inzident** sind.

**Beispiel**

- $\mathcal{P}$ ist die Menge der Stühle, $\mathcal{B}$ die Menge der Tische in einem Restaurant
- $(P, b) \in \mathcal{I}$, wenn Stuhl $P$ an Tisch $b$ steht

**Definition**
Eine Inzidenzstruktur heißt **einfach** bzw. **Geometrie**, wenn keine zwei Blöcke zu den selben Punkten inzident sind. Die Blöcke heißen **Geraden**.

**Beispiel**

- $\mathcal{B} \subseteq 2^{\mathcal{P}}$ und $(P, b) \in \mathcal{I} \Leftrightarrow P \in b$

# Erste Grundbegriffe: Punkte und Geraden

**Definition**
Seien $\mathcal{P}$ und $\mathcal{B}$ disjunkte Mengen. Ihre Elemente nennen wir **Punkte** bzw. **Blöcke**. Sei weiter $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{B}$. Dann heißt $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ **Inzidenzstruktur**. Wenn $(P, b) \in \mathcal{I}$, dann sagen wir, dass $P$ und $b$ **inzident** sind.

**Beispiel**

- $\mathcal{P}$ ist die Menge der Stühle, $\mathcal{B}$ die Menge der Tische in einem Restaurant
- $(P, b) \in \mathcal{I}$, wenn Stuhl $P$ an Tisch $b$ steht

**Definition**
Eine Inzidenzstruktur heißt **einfach** bzw. **Geometrie**, wenn keine zwei Blöcke zu den selben Punkten inzident sind. Die Blöcke heißen **Geraden**.

**Beispiel**

- $\mathcal{B} \subseteq 2^{\mathcal{P}}$ und $(P, b) \in \mathcal{I} \Leftrightarrow P \in b$
- bezeichne eine solche Inzidenzstruktur mit $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$

# Erste Grundbegriffe: Punkte und Geraden

**Definition**
Seien $\mathcal{P}$ und $\mathcal{B}$ disjunkte Mengen. Ihre Elemente nennen wir **Punkte** bzw. **Blöcke**. Sei weiter $I \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{B}$. Dann heißt $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ **Inzidenzstruktur**. Wenn $(P, b) \in I$, dann sagen wir, dass $P$ und $b$ **inzident** sind.

**Beispiel**

- $\mathcal{P}$ ist die Menge der Stühle, $\mathcal{B}$ die Menge der Tische in einem Restaurant
- $(P, b) \in I$, wenn Stuhl $P$ an Tisch $b$ steht

**Definition**
Eine Inzidenzstruktur heißt **einfach** bzw. **Geometrie**, wenn keine zwei Blöcke zu den selben Punkten inzident sind. Die Blöcke heißen **Geraden**.

**Beispiel**

- $\mathcal{B} \subseteq 2^{\mathcal{P}}$ und $(P, b) \in I \Leftrightarrow P \in b$
- bezeichne eine solche Inzidenzstruktur mit $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$
- man kann leicht zeigen: jede Geometrie ist isomorph zu $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$

(für die naheliegende Definition von *isomorph*)

# Absolute/Euklidische Ebene und Inzidenzaxiome

**Definition**
Eine Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ mit einer Abbildung $d\colon \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, die Axiomgruppen I–IV genügt, heißt **absolute Ebene**. Genügt sie Axiomgruppen I–V, so heißt sie **euklidische Ebene**. Für $A, B \in \mathcal{P}$ ist $d(A, B)$ der **Abstand** von $A$ und $B$.

# Absolute/Euklidische Ebene und Inzidenzaxiome

**Definition**
Eine Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ mit einer Abbildung $d \colon \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, die Axiomgruppen I–IV genügt, heißt **absolute Ebene**. Genügt sie Axiomgruppen I–V, so heißt sie **euklidische Ebene**. Für $A, B \in \mathcal{P}$ ist $d(A, B)$ der **Abstand** von $A$ und $B$.

**Axiomgruppe I: Inzidenzaxiome**

(1) Zu zwei Punkten $A \neq B$ gibt es genau eine Gerade $g$ mit $A \in g$ und $B \in g$.
(Bezeichnung: $g = AB$)

(2) Jede Gerade enthält mindestens zwei Punkte.

(3) Es gibt drei Punkte, die nicht derselben Gerade angehören.

# Absolute/Euklidische Ebene und Inzidenzaxiome

**Definition**
Eine Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ mit einer Abbildung $d\colon \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, die Axiomgruppen I–IV genügt, heißt **absolute Ebene**. Genügt sie Axiomgruppen I–V, so heißt sie **euklidische Ebene**. Für $A, B \in \mathcal{P}$ ist $d(A, B)$ der **Abstand** von $A$ und $B$.

**Axiomgruppe I: Inzidenzaxiome**

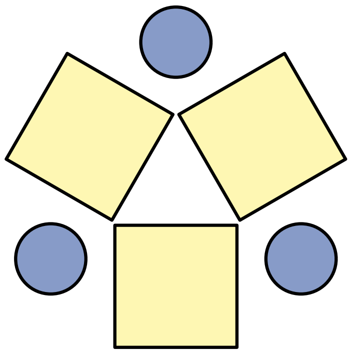
(1) Zu zwei Punkten $A \neq B$ gibt es genau eine Gerade $g$ mit $A \in g$ und $B \in g$.
(Bezeichnung: $g = AB$)

(2) Jede Gerade enthält mindestens zwei Punkte.

(3) Es gibt drei Punkte, die nicht derselben Gerade angehören.

**Beispiel**

- Hocker sind Punkte
- Tische sind Geraden
- ein Hocker ist inzident zu einem Tisch, wenn er an ihm dran steht



Erfüllt diese Inzidenzstruktur Axiomgruppe I?

# Absolute/Euklidische Ebene und Inzidenzaxiome

**Definition**
Eine Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ mit einer Abbildung $d\colon \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, die Axiomgruppen I–IV genügt, heißt **absolute Ebene**. Genügt sie Axiomgruppen I–V, so heißt sie **euklidische Ebene**. Für $A, B \in \mathcal{P}$ ist $d(A, B)$ der **Abstand** von $A$ und $B$.

**Axiomgruppe I: Inzidenzaxiome**

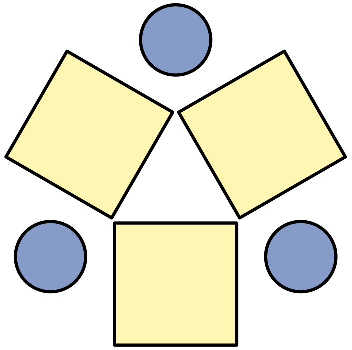
(1) Zu zwei Punkten $A \neq B$ gibt es genau eine Gerade $g$ mit $A \in g$ und $B \in g$.
(Bezeichnung: $g = AB$)

(2) Jede Gerade enthält mindestens zwei Punkte.

(3) Es gibt drei Punkte, die nicht derselben Gerade angehören.

**Beispiel**

- Hocker sind Punkte
- Tische sind Geraden
- ein Hocker ist inzident zu einem Tisch, wenn er an ihm dran steht



Erfüllt diese Inzidenzstruktur Axiomgruppe I?

**Satz** Zwei versch. Geraden haben höchstens einen Punkt gemeinsam.

# Abstandsaxiome

**Definition**
Punkte die auf derselben Geraden liegen heißen **kollinear**.

# Abstandsaxiome

**Definition**
Punkte die auf derselben Geraden liegen heißen **kollinear**.

**Axiomgruppe II: Abstandsaxiome**

(1) Für alle Punkte $A, B$ gilt: $d(A, B) \geq 0$ und $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.

(2) Für alle Punkte $A, B$ gilt: $d(A, B) = d(B, A)$.

(3) Für alle Punkte $A, B, C$ gilt $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$. Außerdem sind $A, B, C$ genau dann kollinear, wenn eine der folgenden Gleichungen gilt:

$$d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$$
$$d(A, C) + d(C, B) = d(A, B)$$
$$d(B, A) + d(A, C) = d(B, C)$$

# Abstandsaxiome

**Definition**
Punkte die auf derselben Geraden liegen heißen **kollinear**.

**Axiomgruppe II: Abstandsaxiome**

(1) Für alle Punkte $A, B$ gilt: $d(A,B) \geq 0$ und $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.

(2) Für alle Punkte $A, B$ gilt: $d(A,B) = d(B,A)$.

(3) Für alle Punkte $A, B, C$ gilt $d(A,B) + d(B,C) \geq d(A,C)$. Außerdem sind $A, B, C$ genau dann kollinear, wenn eine der folgenden Gleichungen gilt:

$$d(A,B) + d(B,C) = d(A,C)$$
$$d(A,C) + d(C,B) = d(A,B)$$
$$d(B,A) + d(A,C) = d(B,C)$$

**Bemerkung**

- Axiomgruppe II macht aus der Punktemenge einen metrischen Raum

# Abstandsaxiome

KIT Karlsruher Institut für Technologie

**Definition**
Punkte die auf derselben Geraden liegen heißen **kollinear**.

**Axiomgruppe II: Abstandsaxiome**

(1) Für alle Punkte $A, B$ gilt: $d(A, B) \geq 0$ und $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.

(2) Für alle Punkte $A, B$ gilt: $d(A, B) = d(B, A)$.

(3) Für alle Punkte $A, B, C$ gilt $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$. Außerdem sind $A, B, C$ genau dann kollinear, wenn eine der folgenden Gleichungen gilt:

$$d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$$
$$d(A, C) + d(C, B) = d(A, B)$$
$$d(B, A) + d(A, C) = d(B, C)$$

## Bemerkung

- Axiomgruppe II macht aus der Punktemenge einen metrischen Raum
- Eigenschaft von Geraden: drei Punkte liegen auf einer Geraden $\Leftrightarrow$ Einer stellt auf dem Weg zwischen den Anderen keinen Umweg dar

# Abstandsaxiome

**Definition**
Punkte die auf derselben Geraden liegen heißen **kollinear**.

**Axiomgruppe II: Abstandsaxiome**

(1) Für alle Punkte $A, B$ gilt: $d(A, B) \geq 0$ und $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.

(2) Für alle Punkte $A, B$ gilt: $d(A, B) = d(B, A)$.

(3) Für alle Punkte $A, B, C$ gilt $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$. Außerdem sind $A, B, C$ genau dann kollinear, wenn eine der folgenden Gleichungen gilt:

$$d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$$
$$d(A, C) + d(C, B) = d(A, B)$$
$$d(B, A) + d(A, C) = d(B, C)$$

## Bemerkung

- Axiomgruppe II macht aus der Punktemenge einen metrischen Raum
- Eigenschaft von Geraden: drei Punkte liegen auf einer Geraden $\Leftrightarrow$ Einer stellt auf dem Weg zwischen den Anderen keinen Umweg dar
- dem Einen geben wir gleich einen Namen: er liegt **zwischen** den Anderen

# Strecken, Strahlen und Konvexität

**Definition**
$B$ ist **zwischen** $A$ und $C$, wenn $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$ und $B \notin \{A, C\}$.

# Strecken, Strahlen und Konvexität

**Definition**
$B$ ist **zwischen** $A$ und $C$, wenn $d(A, B)+d(B, C) = d(A, C)$ und $B \notin \{A, C\}$.

**Definition**
Für $A, B \in \mathcal{P}$ mit $A \neq B$ heißt $(AB) = \{P \in \mathcal{P} \mid \text{P liegt zwischen A und B}\}$ die **offene Strecke** und $\overline{AB} = (AB) \cup \{A, B\}$ die **Strecke** zwischen $A$ und $B$. $A$ und $B$ sind die **Endpunkte** und $d(A, B)$ ist die **Länge** der Strecke.

# Strecken, Strahlen und Konvexität

**Definition**
$B$ ist **zwischen** $A$ und $C$, wenn $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$ und $B \notin \{A, C\}$.

**Definition**
Für $A, B \in \mathcal{P}$ mit $A \neq B$ heißt $(AB) = \{P \in \mathcal{P} \mid \text{P liegt zwischen A und B}\}$ die **offene Strecke** und $\overline{AB} = (AB) \cup \{A, B\}$ die **Strecke** zwischen $A$ und $B$. $A$ und $B$ sind die **Endpunkte** und $d(A, B)$ ist die **Länge** der Strecke.

**Definition**
Seien $A, B \in \mathcal{P}$ mit $A \neq B$. Bezeichne mit $AB^+$ die Menge der Punkte $P$ mit $P \in \overline{AB}$ oder $B \in \overline{AP}$. Bezeichne mit $AB^-$ die Menge der Punkte $P$ mit $A \in \overline{PB}$. Die Mengen $AB^+$ und $AB^-$ heißen **Strahlen** mit Anfangspunkt $A$.

# Strecken, Strahlen und Konvexität

**Definition**
$B$ ist **zwischen** $A$ und $C$, wenn $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$ und $B \notin \{A, C\}$.

**Definition**
Für $A, B \in \mathcal{P}$ mit $A \neq B$ heißt $(AB) = \{P \in \mathcal{P} \mid \text{P liegt zwischen A und B}\}$ die **offene Strecke** und $\overline{AB} = (AB) \cup \{A, B\}$ die **Strecke** zwischen $A$ und $B$. $A$ und $B$ sind die **Endpunkte** und $d(A, B)$ ist die **Länge** der Strecke.

**Definition**
Seien $A, B \in \mathcal{P}$ mit $A \neq B$. Bezeichne mit $AB^+$ die Menge der Punkte $P$ mit $P \in \overline{AB}$ oder $B \in \overline{AP}$. Bezeichne mit $AB^-$ die Menge der Punkte $P$ mit $A \in \overline{PB}$. Die Mengen $AB^+$ und $AB^-$ heißen **Strahlen** mit Anfangspunkt $A$.

**Definition**
Eine Menge $M \subseteq \mathcal{P}$ heißt **konvex**, wenn $\overline{AB} \subseteq M$ für alle $A, B \in M$.

# Anordnungsaxiome und Halbebenen

**Axiomgruppe III: Anordnungsaxiome**

(1) Für jeden Punkt $A$ und jede Zahl $a \in \mathbb{R}^+$ gibt es auf jedem Strahl mit Anfangspunkt $A$ genau einen Punkt $B$ mit $d(A, B) = a$.

(2) Jede Gerade $g$ zerlegt die Menge $\mathcal{P} \setminus g$ in zwei nichtleere Teilmengen, sodass:

  (a) Die Strecke zwischen zwei Punkten, die nicht in derselben Teilmenge liegen, schneidet $g$.

  (b) Die Strecke zwischen zwei Punkten, die in derselben Teilmenge liegen, schneidet $g$ nicht.

# Anordnungsaxiome und Halbebenen

**Axiomgruppe III: Anordnungsaxiome**

(1) Für jeden Punkt $A$ und jede Zahl $a \in \mathbb{R}^+$ gibt es auf jedem Strahl mit Anfangspunkt $A$ genau einen Punkt $B$ mit $d(A, B) = a$.

(2) Jede Gerade $g$ zerlegt die Menge $\mathcal{P} \setminus g$ in zwei nichtleere Teilmengen, sodass:

   (a) Die Strecke zwischen zwei Punkten, die nicht in derselben Teilmenge liegen, schneidet $g$.

   (b) Die Strecke zwischen zwei Punkten, die in derselben Teilmenge liegen, schneidet $g$ nicht.

**Definition**
Die beiden Mengen heißen **offene Halbebenen** mit **Randgerade** $g$. Nimmt man $g$ hinzu, so erhält man eine **Halbebene**. Die Halbebene mit Randgrade $g = AB$, die den Punkt $C \notin g$ enthält, bezeichnen wir mit $ABC^+$. Die andere mit $ABC^-$.

# Anordnungsaxiome und Halbebenen

Karlsruher Institut für Technologie

**Axiomgruppe III: Anordnungsaxiome**

(1) Für jeden Punkt $A$ und jede Zahl $a \in \mathbb{R}^+$ gibt es auf jedem Strahl mit Anfangspunkt $A$ genau einen Punkt $B$ mit $d(A, B) = a$.

(2) Jede Gerade $g$ zerlegt die Menge $\mathcal{P} \setminus g$ in zwei nichtleere Teilmengen, sodass:

   (a) Die Strecke zwischen zwei Punkten, die nicht in derselben Teilmenge liegen, schneidet $g$.

   (b) Die Strecke zwischen zwei Punkten, die in derselben Teilmenge liegen, schneidet $g$ nicht.

**Definition**

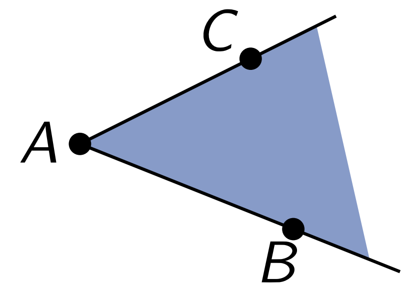
Die beiden Mengen heißen **offene Halbebenen** mit **Randgerade** $g$. Nimmt man $g$ hinzu, so erhält man eine **Halbebene**. Die Halbebene mit Randgrade $g = AB$, die den Punkt $C \notin g$ enthält, bezeichnen wir mit $ABC^+$. Die andere mit $ABC^-$.

## Bemerkung

- (1) sorgt dafür, dass es unendlich viele Punkte gibt
- (2) besagt insbesondere, dass Halbebenen konvex sind

# Winkel und Bewegungen

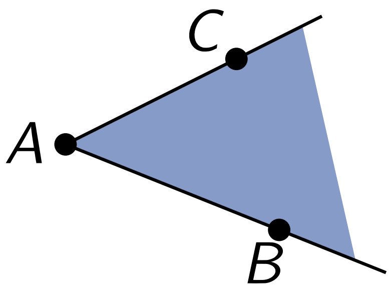
**Definition**
Die Vereinigung zweier Strahlen heißt **Winkel** $\angle BAC = AB^+ \cup AC^+$, mit **Schenkeln** $AB^+$ und $AC^+$. Er ist **gestreckt**, wenn $\angle BAC = AB$ und der **Nullwinkel**, wenn $AB^+ = AC^+$. $ABC^+ \cap ACB^+$ ist das **Innere** des Winkels.



# Winkel und Bewegungen

**Definition**
Die Vereinigung zweier Strahlen heißt **Winkel** $\angle BAC = AB^+ \cup AC^+$, mit **Schenkeln** $AB^+$ und $AC^+$. Er ist **gestreckt**, wenn $\angle BAC = AB$ und der **Nullwinkel**, wenn $AB^+ = AC^+$. $ABC^+ \cap ACB^+$ ist das **Innere** des Winkels.

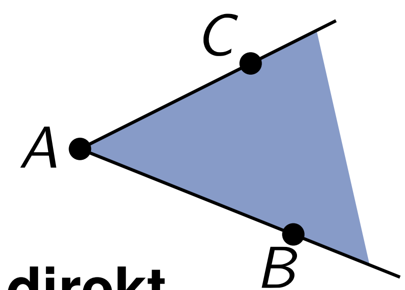
**Definition**
Eine surjektive Abbildung $b\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ist eine **Bewegung**, wenn sie alle Abstände unverändert lässt.



# Winkel und Bewegungen

**Definition**
Die Vereinigung zweier Strahlen heißt **Winkel** $\angle BAC = AB^+ \cup AC^+$, mit **Schenkeln** $AB^+$ und $AC^+$. Er ist **gestreckt**, wenn $\angle BAC = AB$ und der **Nullwinkel**, wenn $AB^+ = AC^+$. $ABC^+ \cap ACB^+$ ist das **Innere** des Winkels.

**Definition**
Eine surjektive Abbildung $b \colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ist eine **Bewegung**, wenn sie alle Abstände unverändert lässt.




**Folgende Eigenschaften erhält man mehr oder weniger direkt**

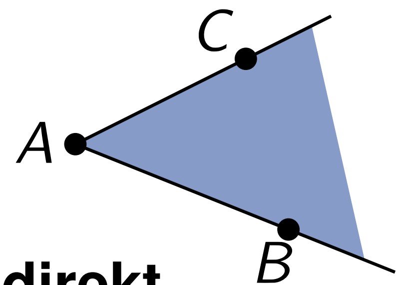
- eine Bewegung ist auch injektiv, da $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$

# Winkel und Bewegungen

Karlsruher Institut für Technologie

**Definition**
Die Vereinigung zweier Strahlen heißt **Winkel** $\angle BAC = AB^+ \cup AC^+$, mit **Schenkeln** $AB^+$ und $AC^+$. Er ist **gestreckt**, wenn $\angle BAC = AB$ und der **Nullwinkel**, wenn $AB^+ = AC^+$. $ABC^+ \cap ACB^+$ ist das **Innere** des Winkels.

**Definition**
Eine surjektive Abbildung $b \colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ist eine **Bewegung**, wenn sie alle Abstände unverändert lässt.



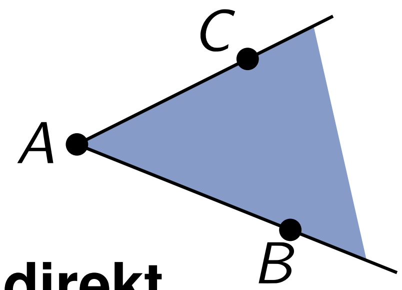

**Folgende Eigenschaften erhält man mehr oder weniger direkt**

- eine Bewegung ist auch injektiv, da $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
- Bewegungen erhalten die Zwischenbeziehung, Strecken, Geraden, Halbgeraden, Halbebenen, Winkel, etc.

# Winkel und Bewegungen

**Definition**
Die Vereinigung zweier Strahlen heißt **Winkel** $\angle BAC = AB^+ \cup AC^+$, mit **Schenkeln** $AB^+$ und $AC^+$. Er ist **gestreckt**, wenn $\angle BAC = AB$ und der **Nullwinkel**, wenn $AB^+ = AC^+$. $ABC^+ \cap ACB^+$ ist das **Innere** des Winkels.

**Definition**
Eine surjektive Abbildung $b \colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ist eine **Bewegung**, wenn sie alle Abstände unverändert lässt.



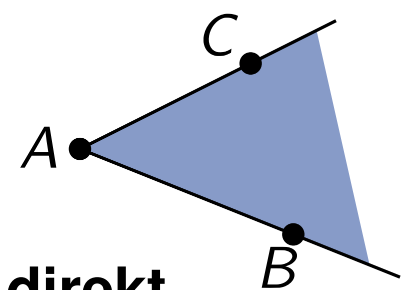

**Folgende Eigenschaften erhält man mehr oder weniger direkt**

- eine Bewegung ist auch injektiv, da $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
- Bewegungen erhalten die Zwischenbeziehung, Strecken, Geraden, Halbgeraden, Halbebenen, Winkel, etc.
- für $d(A, B) = d(A', B') > 0$ gibt es höchstens zwei Bewegungen, die $A$ auf $A'$ und $B$ auf $B'$ abbilden

# Winkel und Bewegungen

**Definition**
Die Vereinigung zweier Strahlen heißt **Winkel** $\angle BAC = AB^+ \cup AC^+$, mit **Schenkeln** $AB^+$ und $AC^+$. Er ist **gestreckt**, wenn $\angle BAC = AB$ und der **Nullwinkel**, wenn $AB^+ = AC^+$. $ABC^+ \cap ACB^+$ ist das **Innere** des Winkels.

**Definition**
Eine surjektive Abbildung $b\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ist eine **Bewegung**, wenn sie alle Abstände unverändert lässt.




**Folgende Eigenschaften erhält man mehr oder weniger direkt**

- eine Bewegung ist auch injektiv, da $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
- Bewegungen erhalten die Zwischenbeziehung, Strecken, Geraden, Halbgeraden, Halbebenen, Winkel, etc.
- für $d(A, B) = d(A', B') > 0$ gibt es höchstens zwei Bewegungen, die $A$ auf $A'$ und $B$ auf $B'$ abbilden

**Axiomgruppe IV: Bewegungsaxiom**
Für $d(A, B) = d(A', B') > 0$ gibt es mindestens zwei Bewegungen, die $A$ auf $A'$ und $B$ auf $B'$ abbilden.

# Das Parallelenaxiom

**Definition**
Zwei Geraden, die sich nicht schneiden, heißen **parallel**.

# Das Parallelenaxiom

**Definition**

Zwei Geraden, die sich nicht schneiden, heißen **parallel**.

**Axiomgruppe V: Euklidisches Parallelenaxiom**

Zu jeder Geraden $g$ und jedem Punkt $P \notin g$ gibt es höchstens eine Gerade, die $P$ enthält und zu $g$ parallel ist.

# Das Parallelenaxiom

**Definition**
Zwei Geraden, die sich nicht schneiden, heißen **parallel**.

**Axiomgruppe V: Euklidisches Parallelenaxiom**
Zu jeder Geraden $g$ und jedem Punkt $P \notin g$ gibt es höchstens eine Gerade, die $P$ enthält und zu $g$ parallel ist.

## Erinnerung

**Axiomgruppe I: Inzidenzaxiome**
zwei Punkte definieren eine Gerade; jede Gerade enthält zwei Punkte; es gibt drei nicht kollineare Punkte

**Axiomgruppe II: Abstandsaxiome**
Distanz ist eine Metrik; Gleichheit bei Dreiecksungleichung genau dann, wenn kollinear

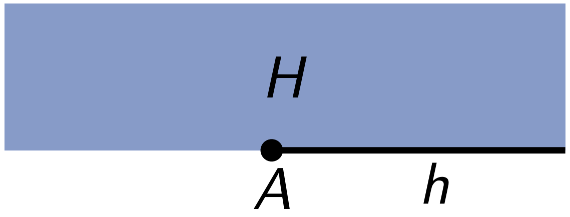
**Axiomgruppe III: Anordnungsaxiome**
in jede Richtung mit jedem Abstand gibt es einen Punkt; Geraden zerlegen Ebene in zwei Halbebenen

**Axiomgruppe IV: Bewegungsaxiome**
es gibt zwei Bewegungen die gleich lange Strecken aufeinander abbilden (orientierungserhaltend)

**Definition**
Eine Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ mit einer Abbildung $d\colon \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, die Axiomgruppen I–IV genügt, heißt **absolute Ebene**. Genügt sie Axiomgruppen I–V, so heißt sie **euklidische Ebene**. Für $A, B \in \mathcal{P}$ ist $d(A, B)$ der **Abstand** von $A$ und $B$.

# Aussagen über die absolute Ebene
# Fahnensatz und spezielle Bewegungen

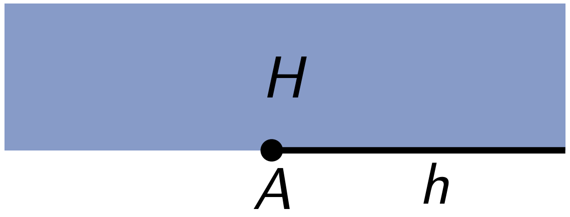
**Definition**
Sei $h = AB^+$ ein Strahl und $H$ eine Halbebene mit Randgerade $AB$. Das Tripel $(A, h, H)$ heißt **Fahne**.



# Aussagen über die absolute Ebene
# Fahnensatz und spezielle Bewegungen

Karlsruher Institut für Technologie

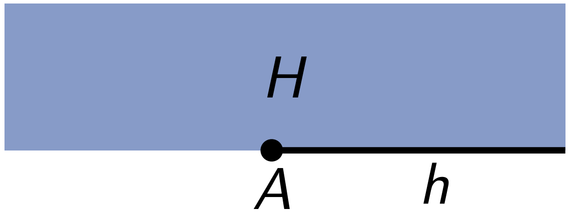
**Definition**
Sei $h = AB^+$ ein Strahl und $H$ eine Halbebene mit Randgerade $AB$. Das Tripel $(A, h, H)$ heißt **Fahne**.




**Theorem** **(Fahnensatz)**
Für zwei Fahnen $(A, h, H)$ und $(A', h', H')$ gibt es genau eine Bewegung, die $(A, h, H)$ auf $(A', h', H')$ abbildet (also $b(A) = A'$, $b(h) = h'$, $b(H) = H'$).

# Fahnensatz und spezielle Bewegungen

**Definition**
Sei $h = AB^+$ ein Strahl und $H$ eine Halbebene mit Randgerade $AB$. Das Tripel $(A, h, H)$ heißt **Fahne**.




**Theorem** **(Fahnensatz)**
Für zwei Fahnen $(A, h, H)$ und $(A', h', H')$ gibt es genau eine Bewegung, die $(A, h, H)$ auf $(A', h', H')$ abbildet (also $b(A) = A'$, $b(h) = h'$, $b(H) = H'$).

**Definition**
Die Bewegung, die $(A, h, H)$ auf $(A', h', H')$ abbildet heißt **Translation**, wenn $A \neq A'$, $h' \subseteq h$ und $H = H'$. Ähnlich kann man **Geraden-**, **Punktspiegelung** und **Drehung** definieren.

# Aussagen über die absolute Ebene
# Dreiecke und Kongruenz

**Definition**
Seien $A$, $B$, $C$ nicht kollineare Punkte. Dann ist $\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$ das **Dreieck** mit den **Seiten** $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$.

# Aussagen über die absolute Ebene
## Dreiecke und Kongruenz

**Definition**
Seien $A$, $B$, $C$ nicht kollineare Punkte. Dann ist $\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$ das **Dreieck** mit den **Seiten** $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$.

**Definition**
Zwei Punktemengen $M$ und $M'$ sind **Kongruent** ($M \cong M'$), wenn es eine Bewegung $b$ gibt mit $b(M) = M'$.

# Aussagen über die absolute Ebene
## Dreiecke und Kongruenz

**Definition**
Seien $A$, $B$, $C$ nicht kollineare Punkte. Dann ist $\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$ das **Dreieck** mit den **Seiten** $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$.

**Definition**
Zwei Punktemengen $M$ und $M'$ sind **Kongruent** ($M \cong M'$), wenn es eine Bewegung $b$ gibt mit $b(M) = M'$.

**Theorem** **(Kongruenzsatz SSS)**
Dreiecke $\Delta ABC$ und $\Delta A'B'C'$ mit $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ und $\overline{CA} \cong \overline{C'A'}$ sind kongruent.

# Aussagen über die absolute Ebene
## Dreiecke und Kongruenz

Karlsruher Institut für Technologie

**Definition**
Seien $A$, $B$, $C$ nicht kollineare Punkte. Dann ist $\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$ das **Dreieck** mit den **Seiten** $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$.

**Definition**
Zwei Punktemengen $M$ und $M'$ sind **Kongruent** ($M \cong M'$), wenn es eine Bewegung $b$ gibt mit $b(M) = M'$.

**Theorem** **(Kongruenzsatz SSS)**
Dreiecke $\Delta ABC$ und $\Delta A'B'C'$ mit $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ und $\overline{CA} \cong \overline{C'A'}$ sind kongruent.

**Theorem** **(Kongruenzsatz SWS)**
Dreiecke $\Delta ABC$ und $\Delta A'B'C'$ mit $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ und $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ sind kongruent.

**Theorem** **(Kongruenzsatz WSW)**
Dreiecke $\Delta ABC$ und $\Delta A'B'C'$ mit $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ und $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ sind kongruent.

# Aussagen über die absolute Ebene
# Verschiedenes

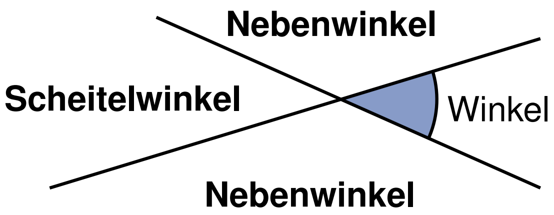
## Disclaimer

- wir benutzten im Folgenden Begriffe, die wir nicht formal definiert haben
- das sind bekannte Begriffe, von denen ihr vermutlich eine Vorstellung habt
- eine Definition (unter Weglassung der Intuition) ist meist kanonisch

# Aussagen über die absolute Ebene
# Verschiedenes

## Disclaimer

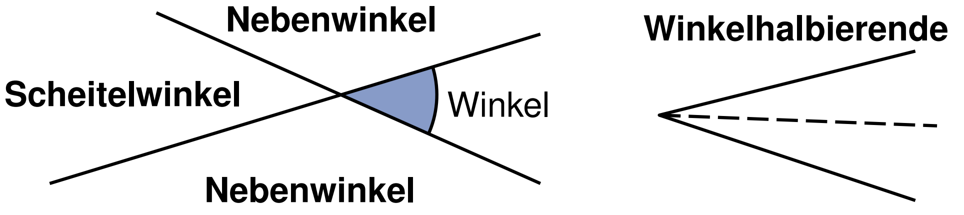
- wir benutzten im Folgenden Begriffe, die wir nicht formal definiert haben
- das sind bekannte Begriffe, von denen ihr vermutlich eine Vorstellung habt
- eine Definition (unter Weglassung der Intuition) ist meist kanonisch



# Aussagen über die absolute Ebene
# Verschiedenes

## Disclaimer

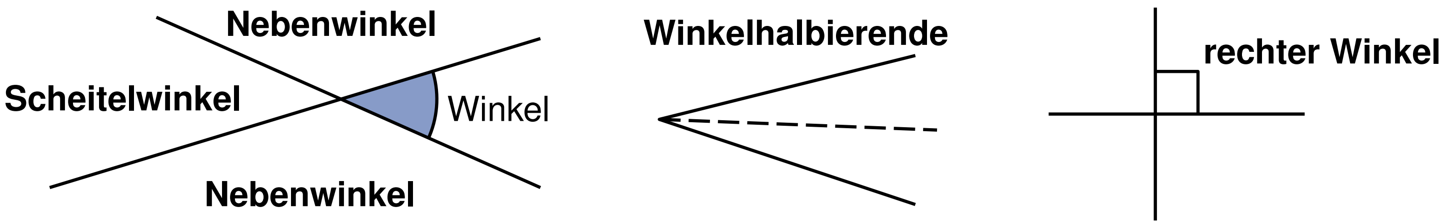
- wir benutzten im Folgenden Begriffe, die wir nicht formal definiert haben
- das sind bekannte Begriffe, von denen ihr vermutlich eine Vorstellung habt
- eine Definition (unter Weglassung der Intuition) ist meist kanonisch



# Aussagen über die absolute Ebene
# Verschiedenes

## Disclaimer

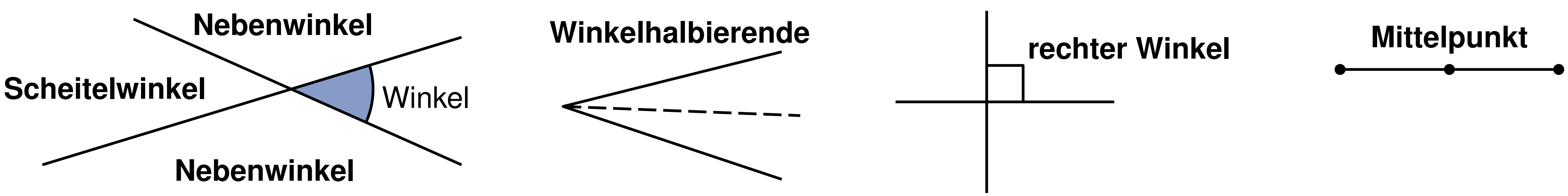
- wir benutzten im Folgenden Begriffe, die wir nicht formal definiert haben
- das sind bekannte Begriffe, von denen ihr vermutlich eine Vorstellung habt
- eine Definition (unter Weglassung der Intuition) ist meist kanonisch



# Aussagen über die absolute Ebene
# Verschiedenes

## Disclaimer

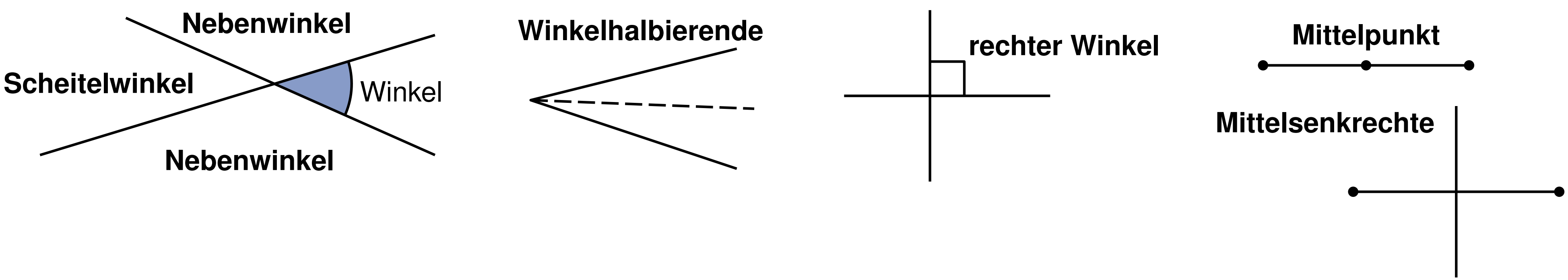
- wir benutzten im Folgenden Begriffe, die wir nicht formal definiert haben
- das sind bekannte Begriffe, von denen ihr vermutlich eine Vorstellung habt
- eine Definition (unter Weglassung der Intuition) ist meist kanonisch



# Aussagen über die absolute Ebene
# Verschiedenes

## Disclaimer

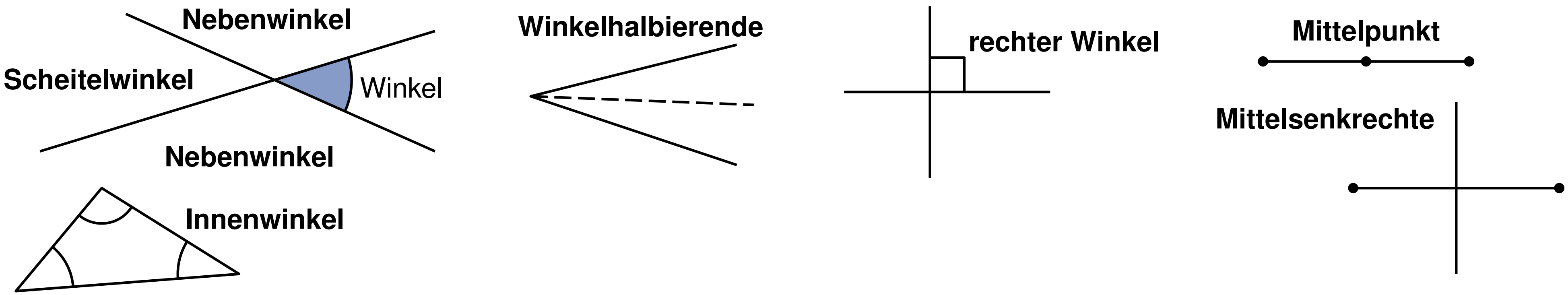
- wir benutzten im Folgenden Begriffe, die wir nicht formal definiert haben
- das sind bekannte Begriffe, von denen ihr vermutlich eine Vorstellung habt
- eine Definition (unter Weglassung der Intuition) ist meist kanonisch



# Aussagen über die absolute Ebene
# Verschiedenes

## Disclaimer

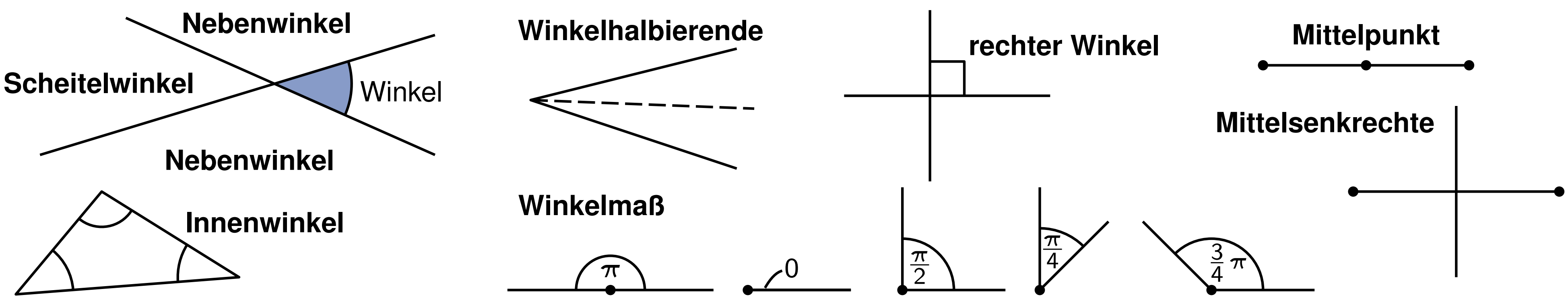
- wir benutzten im Folgenden Begriffe, die wir nicht formal definiert haben
- das sind bekannte Begriffe, von denen ihr vermutlich eine Vorstellung habt
- eine Definition (unter Weglassung der Intuition) ist meist kanonisch



# Aussagen über die absolute Ebene
# Verschiedenes

## Disclaimer

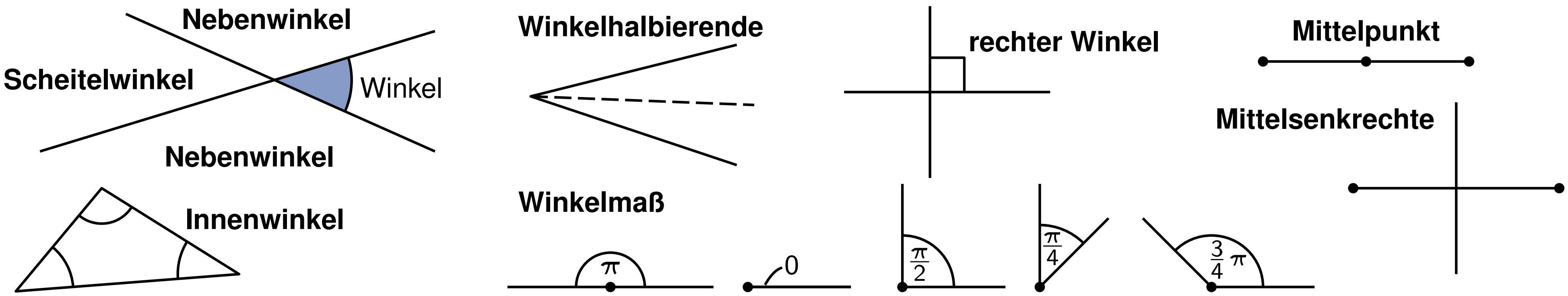
- wir benutzten im Folgenden Begriffe, die wir nicht formal definiert haben
- das sind bekannte Begriffe, von denen ihr vermutlich eine Vorstellung habt
- eine Definition (unter Weglassung der Intuition) ist meist kanonisch



# Aussagen über die absolute Ebene
## Verschiedenes

### Disclaimer

- wir benutzten im Folgenden Begriffe, die wir nicht formal definiert haben
- das sind bekannte Begriffe, von denen ihr vermutlich eine Vorstellung habt
- eine Definition (unter Weglassung der Intuition) ist meist kanonisch



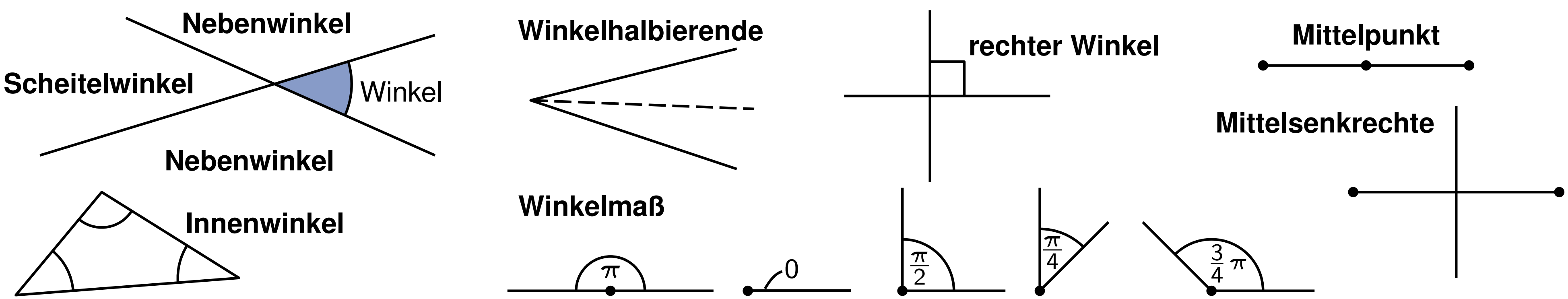

### Theoreme

- jeder Winkel ist zu seinem Scheitelwinkel kongruent

# Aussagen über die absolute Ebene
# Verschiedenes

## Disclaimer

- wir benutzten im Folgenden Begriffe, die wir nicht formal definiert haben
- das sind bekannte Begriffe, von denen ihr vermutlich eine Vorstellung habt
- eine Definition (unter Weglassung der Intuition) ist meist kanonisch



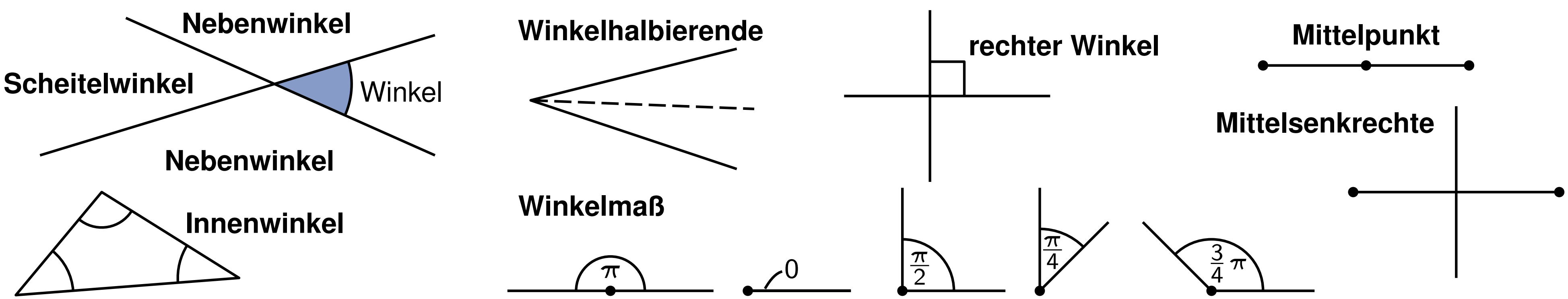

## Theoreme

- jeder Winkel ist zu seinem Scheitelwinkel kongruent
- die Winkelhalbierende eines Winkels, der Mittelpunkt einer Strecke und die Mittelsenkrechte einer Strecke sind eindeutig

# Aussagen über die absolute Ebene
# Verschiedenes

## Disclaimer

- wir benutzten im Folgenden Begriffe, die wir nicht formal definiert haben
- das sind bekannte Begriffe, von denen ihr vermutlich eine Vorstellung habt
- eine Definition (unter Weglassung der Intuition) ist meist kanonisch



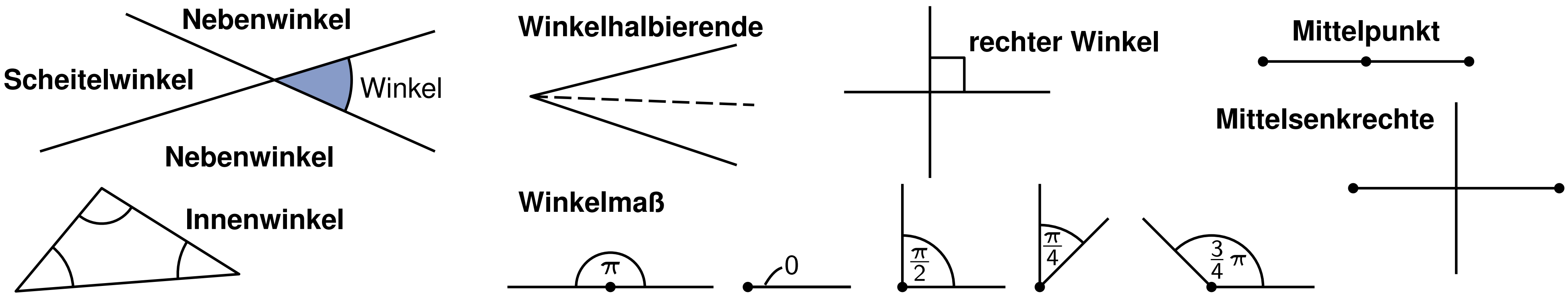

## Theoreme

- jeder Winkel ist zu seinem Scheitelwinkel kongruent
- die Winkelhalbierende eines Winkels, der Mittelpunkt einer Strecke und die Mittelsenkrechte einer Strecke sind eindeutig
- Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ $=$ Menge aller Punkte $C$ mit $d(A, C) = d(B, C)$

# Aussagen über die absolute Ebene
# Verschiedenes

## Disclaimer

- wir benutzten im Folgenden Begriffe, die wir nicht formal definiert haben
- das sind bekannte Begriffe, von denen ihr vermutlich eine Vorstellung habt
- eine Definition (unter Weglassung der Intuition) ist meist kanonisch




## Theoreme

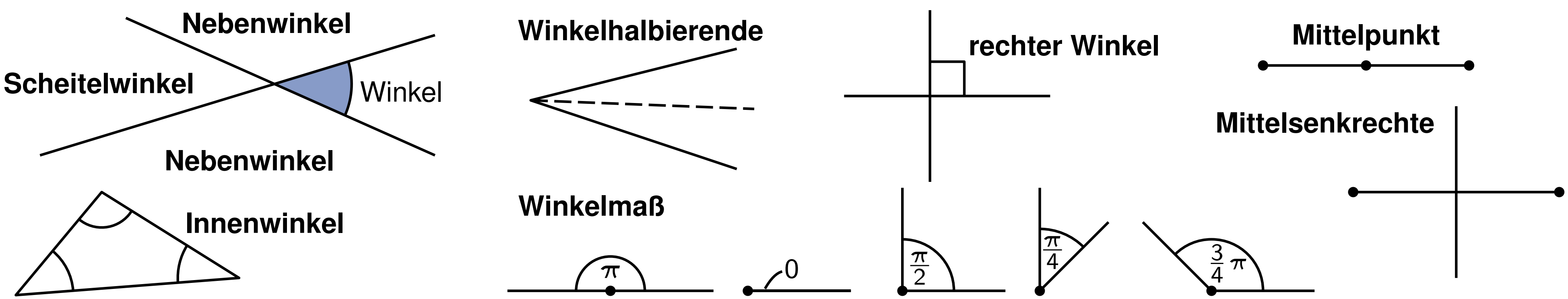
- jeder Winkel ist zu seinem Scheitelwinkel kongruent
- die Winkelhalbierende eines Winkels, der Mittelpunkt einer Strecke und die Mittelsenkrechte einer Strecke sind eindeutig
- Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ $=$ Menge aller Punkte $C$ mit $d(A, C) = d(B, C)$
- die Summe der Innenwinkel(maße) ist maximal $\pi$

# Aussagen über die absolute Ebene
# Verschiedenes



## Disclaimer

- wir benutzten im Folgenden Begriffe, die wir nicht formal definiert haben
- das sind bekannte Begriffe, von denen ihr vermutlich eine Vorstellung habt
- eine Definition (unter Weglassung der Intuition) ist meist kanonisch




## Theoreme

- jeder Winkel ist zu seinem Scheitelwinkel kongruent
- die Winkelhalbierende eines Winkels, der Mittelpunkt einer Strecke und die Mittelsenkrechte einer Strecke sind eindeutig
- Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ = Menge aller Punkte $C$ mit $d(A, C) = d(B, C)$
- die Summe der Innenwinkel(maße) ist maximal $\pi$
- gibt es ein Dreieck mit Innenwinkelsumme $\pi$, so hat jedes Dreieck IWS $\pi$

# Zwischenstand

**Definition**
Eine Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ mit $d\colon \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, die Axiomgruppen I–IV genügt, heißt **absolute Ebene**. Genügt sie Axiomgruppen I–V, so heißt sie **euklidische Ebene**.

**Axiomgruppe I: Inzidenzaxiome**
zwei Punkte definieren eine Gerade; jede Gerade enthält zwei Punkte; es gibt drei nicht kollineare Punkte

**Axiomgruppe II: Abstandsaxiome**
Distanz ist eine Metrik; Gleichheit bei Dreiecksungleichung genau dann, wenn kollinear

**Axiomgruppe III: Anordnungsaxiome**
in jede Richtung mit jedem Abstand gibt es einen Punkt; Geraden zerlegen Ebene in zwei Halbebenen

**Axiomgruppe IV: Bewegungsaxiome**
es gibt zwei Bewegungen die gleich lange Strecken aufeinander abbilden (orientierungserhaltend)

**Axiomgruppe V: Euklidisches Parallelenaxiom**
Gerade $g$ und Punkt $P \notin g \Rightarrow$ höchstens eine Gerade parallel zu $g$ durch $P$

# Zwischenstand

Karlsruher Institut für Technologie

**Definition**
Eine Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ mit $d\colon \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, die Axiomgruppen I–IV genügt, heißt **absolute Ebene**. Genügt sie Axiomgruppen I–V, so heißt sie **euklidische Ebene**.

**Axiomgruppe I: Inzidenzaxiome**
zwei Punkte definieren eine Gerade; jede Gerade enthält zwei Punkte; es gibt drei nicht kollineare Punkte

**Axiomgruppe II: Abstandsaxiome**
Distanz ist eine Metrik; Gleichheit bei Dreiecksungleichung genau dann, wenn kollinear

**Axiomgruppe III: Anordnungsaxiome**
in jede Richtung mit jedem Abstand gibt es einen Punkt; Geraden zerlegen Ebene in zwei Halbebenen

**Axiomgruppe IV: Bewegungsaxiome**
es gibt zwei Bewegungen die gleich lange Strecken aufeinander abbilden (orientierungserhaltend)

**Axiomgruppe V: Euklidisches Parallelenaxiom**
Gerade $g$ und Punkt $P \notin g \Rightarrow$ höchstens eine Gerade parallel zu $g$ durch $P$

## Was passiert, wenn wir das Parallelenaxiom negieren?

# Zwischenstand

**Definition**
Eine Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ mit $d\colon \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, die Axiomgruppen I–IV genügt, heißt **absolute Ebene**. Genügt sie Axiomgruppen I–V, so heißt sie **euklidische Ebene**.

**Axiomgruppe I: Inzidenzaxiome**
zwei Punkte definieren eine Gerade; jede Gerade enthält zwei Punkte; es gibt drei nicht kollineare Punkte

**Axiomgruppe II: Abstandsaxiome**
Distanz ist eine Metrik; Gleichheit bei Dreiecksungleichung genau dann, wenn kollinear

**Axiomgruppe III: Anordnungsaxiome**
in jede Richtung mit jedem Abstand gibt es einen Punkt; Geraden zerlegen Ebene in zwei Halbebenen

**Axiomgruppe IV: Bewegungsaxiome**
es gibt zwei Bewegungen die gleich lange Strecken aufeinander abbilden (orientierungserhaltend)

**Axiomgruppe V: Euklidisches Parallelenaxiom**
Gerade $g$ und Punkt $P \notin g \Rightarrow$ höchstens eine Gerade parallel zu $g$ durch $P$

## Was passiert, wenn wir das Parallelenaxiom negieren?

**Axiomgruppe V': hyperbolisches Parallelenaxiom**
Es gibt eine Gerade und einen Punkt $P \notin g$, sodass es zwei Geraden gibt, die $P$ enthalten und zu $g$ parallel sind.

# Zwischenstand

**Definition**
Eine Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ mit $d\colon \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, die Axiomgruppen I–IV genügt, heißt **absolute Ebene**. Genügt sie Axiomgruppen I–V, so heißt sie **euklidische Ebene**.

**Axiomgruppe I: Inzidenzaxiome**
zwei Punkte definieren eine Gerade; jede Gerade enthält zwei Punkte; es gibt drei nicht kollineare Punkte

**Axiomgruppe II: Abstandsaxiome**
Distanz ist eine Metrik; Gleichheit bei Dreiecksungleichung genau dann, wenn kollinear

**Axiomgruppe III: Anordnungsaxiome**
in jede Richtung mit jedem Abstand gibt es einen Punkt; Geraden zerlegen Ebene in zwei Halbebenen

**Axiomgruppe IV: Bewegungsaxiome**
es gibt zwei Bewegungen die gleich lange Strecken aufeinander abbilden (orientierungserhaltend)

**Axiomgruppe V: Euklidisches Parallelenaxiom**
Gerade $g$ und Punkt $P \notin g \Rightarrow$ höchstens eine Gerade parallel zu $g$ durch $P$

## Was passiert, wenn wir das Parallelenaxiom negieren?

**Axiomgruppe V': hyperbolisches Parallelenaxiom**
Es gibt eine Gerade und einen Punkt $P \notin g$, sodass es zwei Geraden gibt, die $P$ enthalten und zu $g$ parallel sind.

**Definition**
Eine Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ mit einer Abbildung $d\colon \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, die Axiomgruppen I–IV, sowie V' genügt, heißt **hyperbolische Ebene**.

# Die Hyperbolische Ebene

**Was passiert, wenn wir das Parallelenaxiom negieren?**

- die Axiome bleiben konsistent
- man erhält mit der hyperbolischen Ebene neben der euklidischen Ebene ein zweites Modell, das den Axiomen der absoluten Ebene genügt
- alle Sätze der absoluten Ebene gelten auch für die hyperbolische Ebene

# Die Hyperbolische Ebene

**Was passiert, wenn wir das Parallelenaxiom negieren?**

- die Axiome bleiben konsistent
- man erhält mit der hyperbolischen Ebene neben der euklidischen Ebene ein zweites Modell, das den Axiomen der absoluten Ebene genügt
- alle Sätze der absoluten Ebene gelten auch für die hyperbolische Ebene

**Theorem**
In der hyperbolischen Ebene gibt es für jede Gerade $g$ und jeden Punkt $P \notin g$ unendlich viele Geraden durch $P$, die zu $g$ parallel sind.

# Die Hyperbolische Ebene

**Was passiert, wenn wir das Parallelenaxiom negieren?**

- die Axiome bleiben konsistent
- man erhält mit der hyperbolischen Ebene neben der euklidischen Ebene ein zweites Modell, das den Axiomen der absoluten Ebene genügt
- alle Sätze der absoluten Ebene gelten auch für die hyperbolische Ebene

**Theorem**
In der hyperbolischen Ebene gibt es für jede Gerade $g$ und jeden Punkt $P \notin g$ unendlich viele Geraden durch $P$, die zu $g$ parallel sind.

**Theorem**
Hyperbolischen Ebene: Die Innenwinkelsumme in Dreiecken ist kleiner $\pi$.

# Die Hyperbolische Ebene

**Was passiert, wenn wir das Parallelenaxiom negieren?**

- die Axiome bleiben konsistent
- man erhält mit der hyperbolischen Ebene neben der euklidischen Ebene ein zweites Modell, das den Axiomen der absoluten Ebene genügt
- alle Sätze der absoluten Ebene gelten auch für die hyperbolische Ebene

**Theorem**
In der hyperbolischen Ebene gibt es für jede Gerade $g$ und jeden Punkt $P \notin g$ unendlich viele Geraden durch $P$, die zu $g$ parallel sind.

**Theorem**
Hyperbolischen Ebene: Die Innenwinkelsumme in Dreiecken ist kleiner $\pi$.

**Irgendwie ist das alles komisch**

# Die Hyperbolische Ebene

**Was passiert, wenn wir das Parallelenaxiom negieren?**

- die Axiome bleiben konsistent
- man erhält mit der hyperbolischen Ebene neben der euklidischen Ebene ein zweites Modell, das den Axiomen der absoluten Ebene genügt
- alle Sätze der absoluten Ebene gelten auch für die hyperbolische Ebene

**Theorem**
In der hyperbolischen Ebene gibt es für jede Gerade $g$ und jeden Punkt $P \notin g$ unendlich viele Geraden durch $P$, die zu $g$ parallel sind.

**Theorem**
Hyperbolischen Ebene: Die Innenwinkelsumme in Dreiecken ist kleiner $\pi$.

**Irgendwie ist das alles komisch**

- bisher gesehen: Betrachtung der euklidischen Ebene ohne Intuition
- daraus ergibt sich recht natürlich die hyperbolische Ebene

# Die Hyperbolische Ebene

## Was passiert, wenn wir das Parallelenaxiom negieren?

- die Axiome bleiben konsistent
- man erhält mit der hyperbolischen Ebene neben der euklidischen Ebene ein zweites Modell, das den Axiomen der absoluten Ebene genügt
- alle Sätze der absoluten Ebene gelten auch für die hyperbolische Ebene

**Theorem**
In der hyperbolischen Ebene gibt es für jede Gerade $g$ und jeden Punkt $P \notin g$ unendlich viele Geraden durch $P$, die zu $g$ parallel sind.

**Theorem**
Hyperbolischen Ebene: Die Innenwinkelsumme in Dreiecken ist kleiner $\pi$.

## Irgendwie ist das alles komisch

- bisher gesehen: Betrachtung der euklidischen Ebene ohne Intuition
- daraus ergibt sich recht natürlich die hyperbolische Ebene
- uns fehlt aber irgendwie noch die Intuition für die hyperbolische Ebene

# Die Hyperbolische Ebene

**Was passiert, wenn wir das Parallelenaxiom negieren?**

- die Axiome bleiben konsistent
- man erhält mit der hyperbolischen Ebene neben der euklidischen Ebene ein zweites Modell, das den Axiomen der absoluten Ebene genügt
- alle Sätze der absoluten Ebene gelten auch für die hyperbolische Ebene

**Theorem**
In der hyperbolischen Ebene gibt es für jede Gerade $g$ und jeden Punkt $P \notin g$ unendlich viele Geraden durch $P$, die zu $g$ parallel sind.

**Theorem**
Hyperbolischen Ebene: Die Innenwinkelsumme in Dreiecken ist kleiner $\pi$.

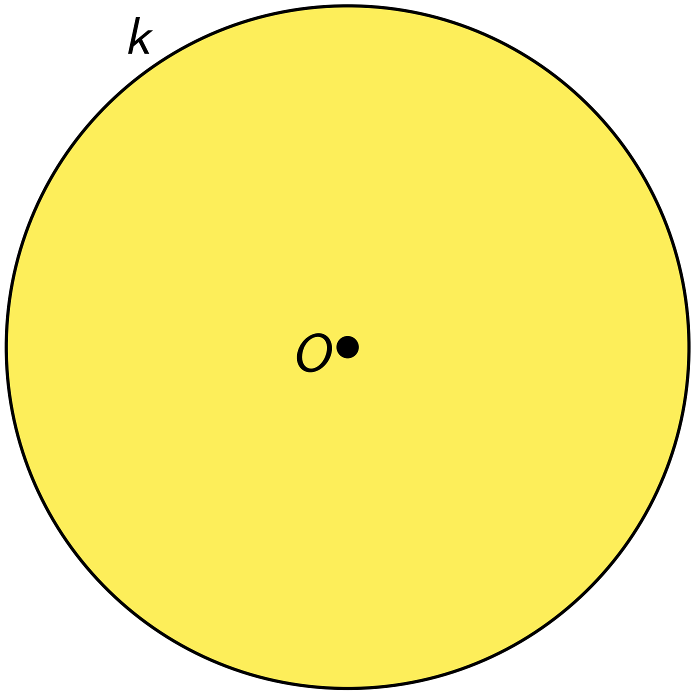
**Irgendwie ist das alles komisch**

- bisher gesehen: Betrachtung der euklidischen Ebene ohne Intuition
- daraus ergibt sich recht natürlich die hyperbolische Ebene
- uns fehlt aber irgendwie noch die Intuition für die hyperbolische Ebene
- hilfreich: Modelle als Repräsentation der hyperbolische Ebene

# Poincarésches Kreisscheibenmodell (Poincaré disk model)

## Punkte

- betrachte einen (euklidischen) Kreis $k$ mit Radius 1 um den Punkt $O$
- sei $\mathcal{P}$ die Menge der Punkte im Inneren des Kreises



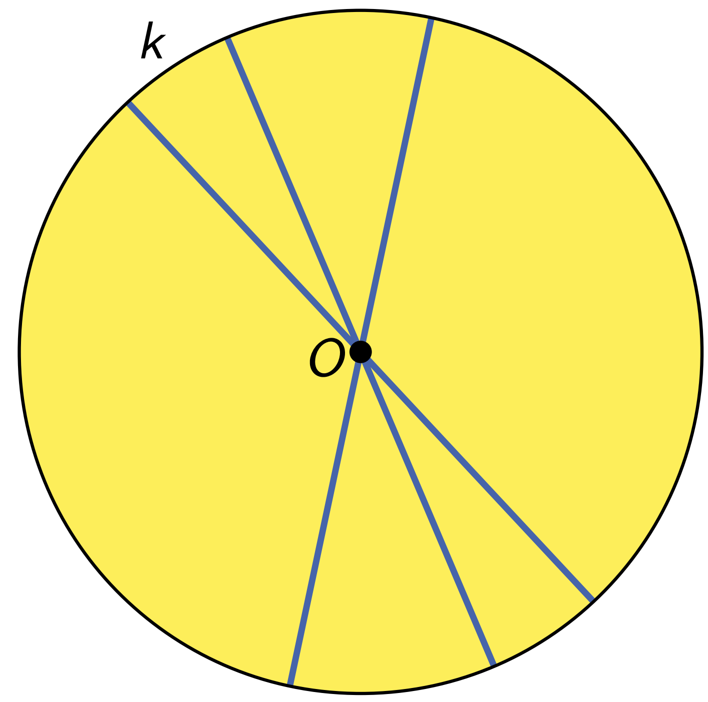
# Poincarésches Kreisscheibenmodell (Poincaré disk model)

**Punkte**

- betrachte einen (euklidischen) Kreis $k$ mit Radius 1 um den Punkt $O$
- sei $\mathcal{P}$ die Menge der Punkte im Inneren des Kreises

**Geraden**

- sei $\mathcal{G}$ die Vereinigung von:
  - Menge der offenen Strecken durch $O$ mit Endpunkten auf $k$



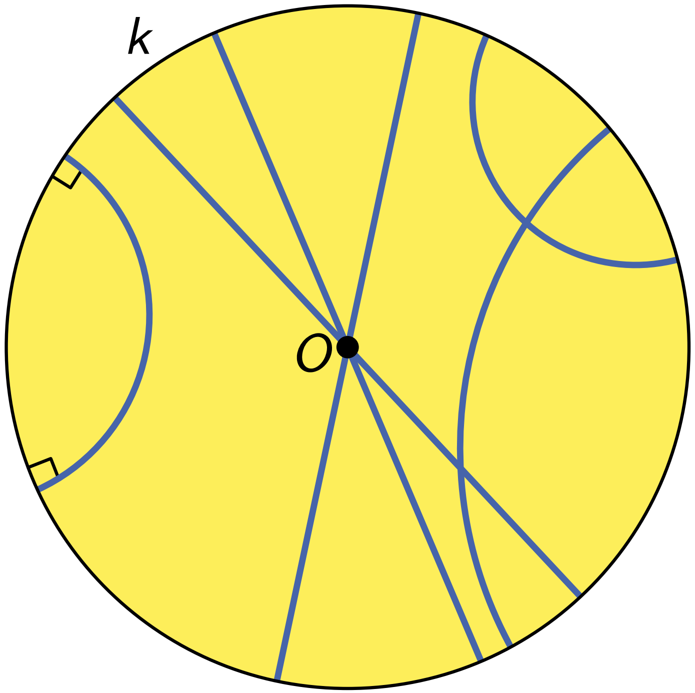
# Poincarésches Kreisscheibenmodell (Poincaré disk model)

**Punkte**

- betrachte einen (euklidischen) Kreis $k$ mit Radius 1 um den Punkt $O$
- sei $\mathcal{P}$ die Menge der Punkte im Inneren des Kreises

**Geraden**

- sei $\mathcal{G}$ die Vereinigung von:
  - Menge der offenen Strecken durch $O$ mit Endpunkten auf $k$
  - Menge der offenen Kreisbögen in $k$, die senkrecht auf $k$ stehen



# Kurze Pause
# Sind die Axiome erfüllt?

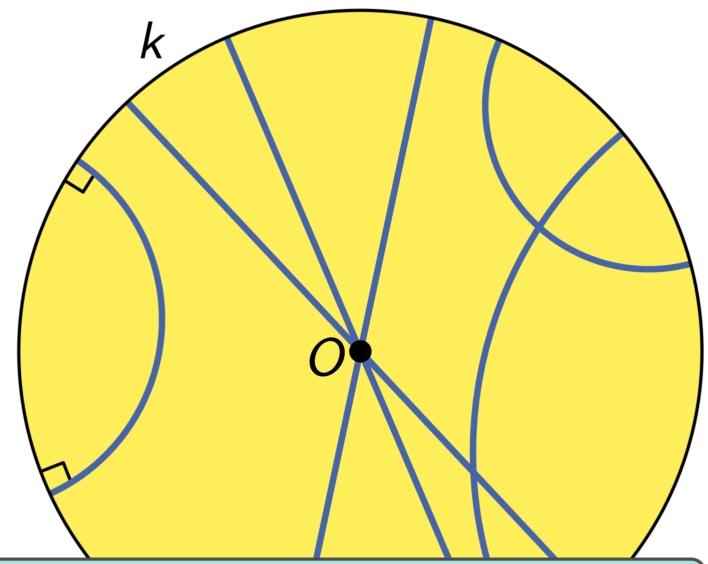
Karlsruher Institut für Technologie

## Punkte

- betrachte einen (euklidischen) Kreis $k$ mit Radius 1 um den Punkt $O$
- sei $\mathcal{P}$ die Menge der Punkte im Inneren des Kreises

## Geraden

- sei $\mathcal{G}$ die Vereinigung von:
  - Menge der offenen Strecken durch $O$ mit Endpunkten auf $k$
  - Menge der offenen Kreisbögen in $k$, die senkrecht auf $k$ stehen




**Axiomgruppe I: Inzidenzaxiome**
zwei Punkte definieren eine Gerade; jede Gerade enthält zwei Punkte; es gibt drei nicht kollineare Punkte

**Axiomgruppe II: Abstandsaxiome**
Distanz ist eine Metrik; Gleichheit bei Dreiecksungleichung genau dann, wenn kollinear

**Axiomgruppe III: Anordnungsaxiome**
in jede Richtung mit jedem Abstand gibt es einen Punkt; Geraden zerlegen Ebene in zwei Halbebenen

**Axiomgruppe IV: Bewegungsaxiome**
es gibt zwei Bewegungen die gleich lange Strecken aufeinander abbilden (orientierungserhaltend)

**Axiomgruppe V': hyperbolisches Parallelenaxiom**
es gibt Gerade $g$ und Punkt $P \notin g$, sodass zwei Geraden durch $P$ parallel zu $g$ sind

# Poincarésches Kreisscheibenmodell (Poincaré disk model)

**Punkte**

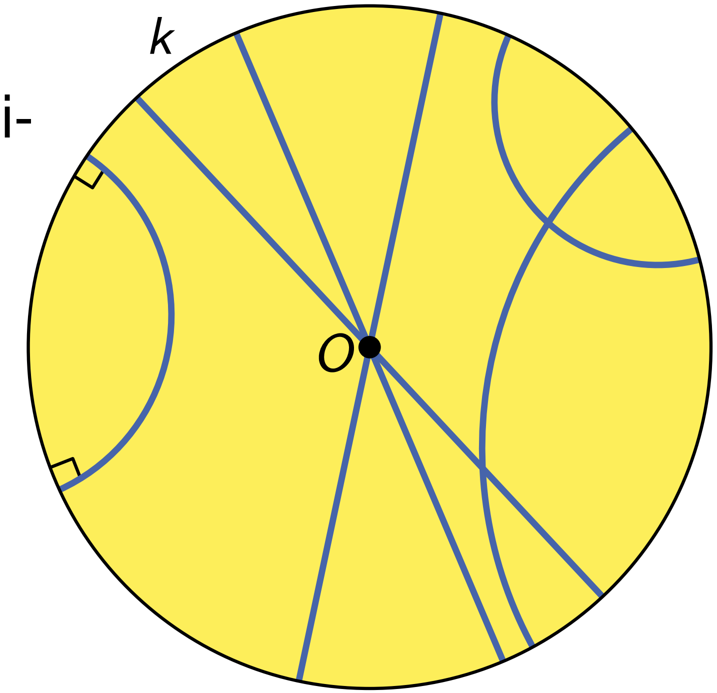
- betrachte einen (euklidischen) Kreis $k$ mit Radius 1 um den Punkt $O$
- sei $\mathcal{P}$ die Menge der Punkte im Inneren des Kreises

**Geraden**

- sei $\mathcal{G}$ die Vereinigung von:
  - Menge der offenen Strecken durch $O$ mit Endpunkten auf $k$
  - Menge der offenen Kreisbögen in $k$, die senkrecht auf $k$ stehen

**Es gilt**

- $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ zusammen mit einer geeigneten Distanzfunktion erfüllt die Axiome I–IV und V'



# Poincarésches Kreisscheibenmodell (Poincaré disk model)

## Punkte

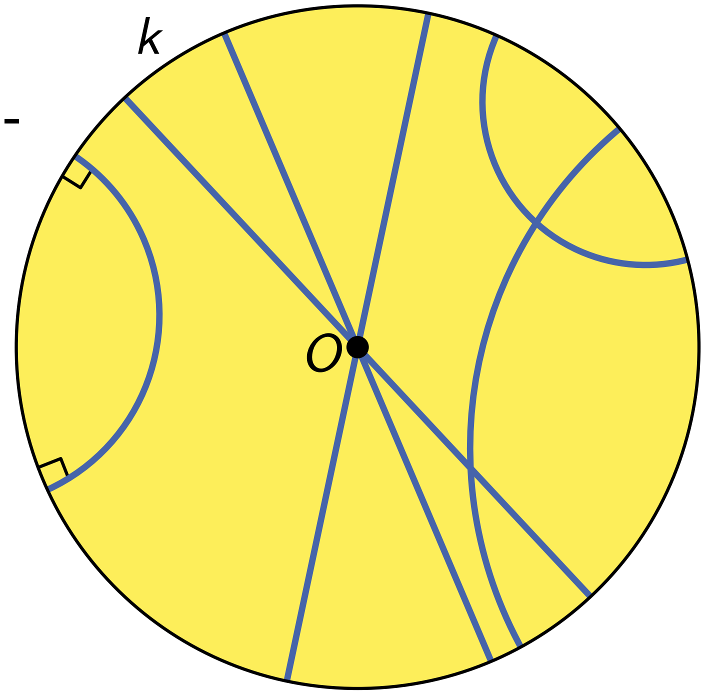
- betrachte einen (euklidischen) Kreis $k$ mit Radius 1 um den Punkt $O$
- sei $\mathcal{P}$ die Menge der Punkte im Inneren des Kreises

## Geraden

- sei $\mathcal{G}$ die Vereinigung von:
  - Menge der offenen Strecken durch $O$ mit Endpunkten auf $k$
  - Menge der offenen Kreisbögen in $k$, die senkrecht auf $k$ stehen

## Es gilt

- $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ zusammen mit einer geeigneten Distanzfunktion erfüllt die Axiome I–IV und V'
- das Modell ist winkelerhaltend



# Poincarésches Kreisscheibenmodell (Poincaré disk model)

## Punkte

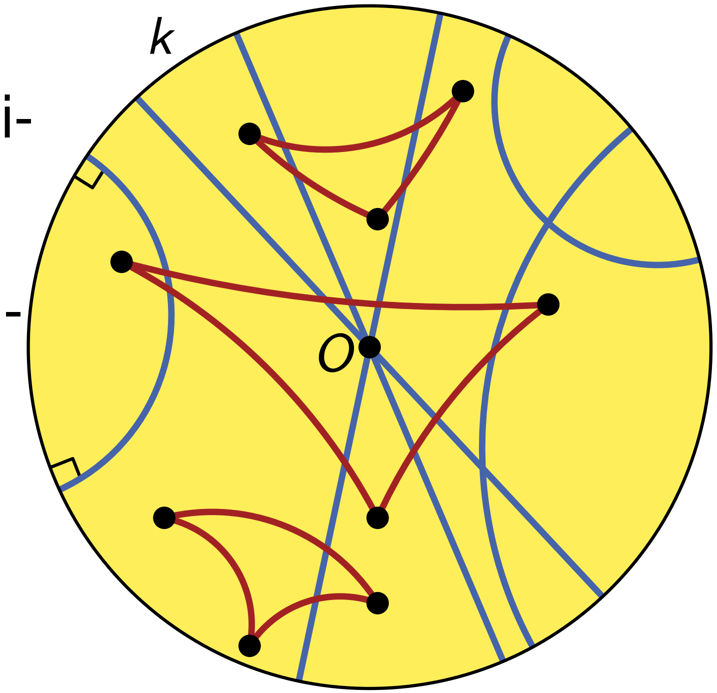
- betrachte einen (euklidischen) Kreis $k$ mit Radius 1 um den Punkt $O$
- sei $\mathcal{P}$ die Menge der Punkte im Inneren des Kreises

## Geraden

- sei $\mathcal{G}$ die Vereinigung von:
  - Menge der offenen Strecken durch $O$ mit Endpunkten auf $k$
  - Menge der offenen Kreisbögen in $k$, die senkrecht auf $k$ stehen

## Es gilt

- $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ zusammen mit einer geeigneten Distanzfunktion erfüllt die Axiome I–IV und V'
- das Modell ist winkelerhaltend
- damit wird „intuitiv offensichtlich“, dass die Innenwinkelsumme eines Dreiecks kleiner $\pi$ ist



# Poincarésches Kreisscheibenmodell (Poincaré disk model)

### Punkte

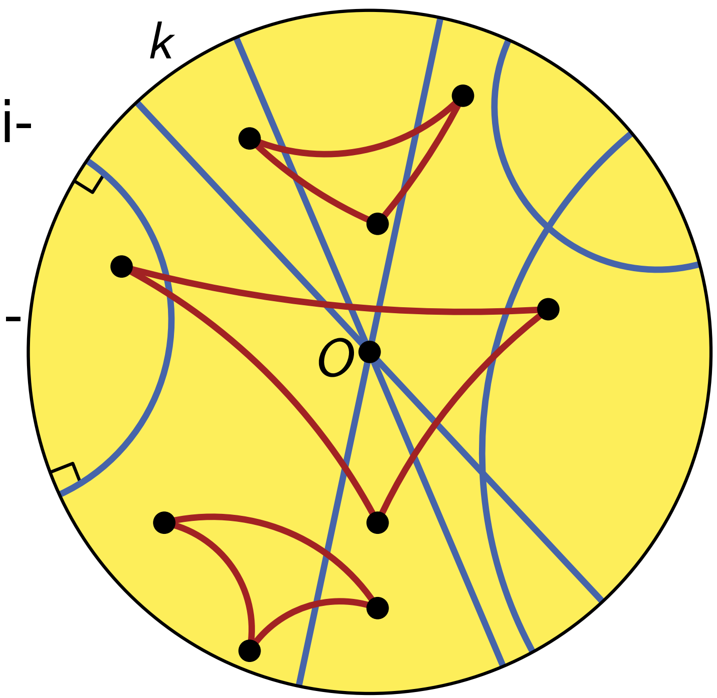
- betrachte einen (euklidischen) Kreis $k$ mit Radius 1 um den Punkt $O$
- sei $\mathcal{P}$ die Menge der Punkte im Inneren des Kreises

### Geraden

- sei $\mathcal{G}$ die Vereinigung von:
  - Menge der offenen Strecken durch $O$ mit Endpunkten auf $k$
  - Menge der offenen Kreisbögen in $k$, die senkrecht auf $k$ stehen

### Es gilt

- $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ zusammen mit einer geeigneten Distanzfunktion erfüllt die Axiome I–IV und V'
- das Modell ist winkelerhaltend
- damit wird „intuitiv offensichtlich“, dass die Innenwinkelsumme eines Dreiecks kleiner $\pi$ ist
- Distanzen sind stark verzerrt dargestellt



# Poincarésches Kreisscheibenmodell (Poincaré disk model)

Karlsruher Institut für Technologie

## Punkte

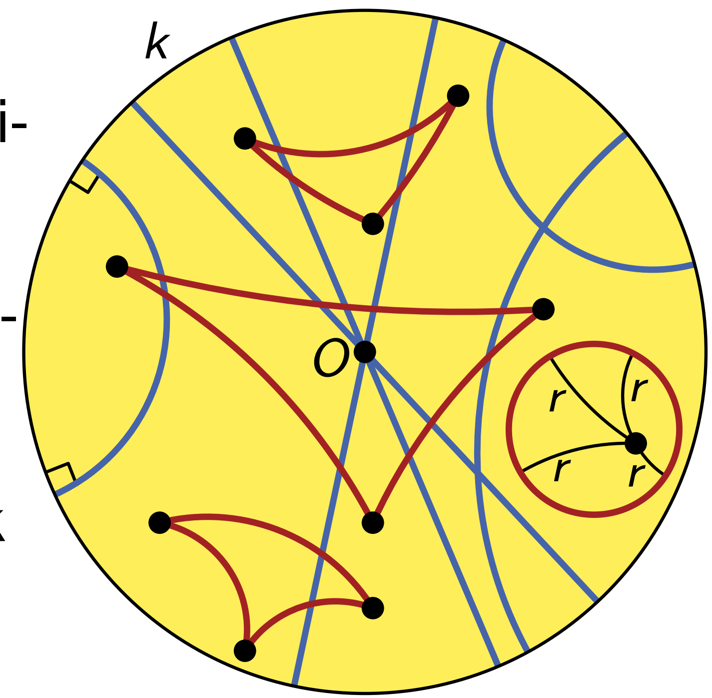
- betrachte einen (euklidischen) Kreis $k$ mit Radius 1 um den Punkt $O$
- sei $\mathcal{P}$ die Menge der Punkte im Inneren des Kreises

## Geraden

- sei $\mathcal{G}$ die Vereinigung von:
  - Menge der offenen Strecken durch $O$ mit Endpunkten auf $k$
  - Menge der offenen Kreisbögen in $k$, die senkrecht auf $k$ stehen

## Es gilt

- $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ zusammen mit einer geeigneten Distanzfunktion erfüllt die Axiome I–IV und V'
- das Modell ist winkelerhaltend
- damit wird „intuitiv offensichtlich“, dass die Innenwinkelsumme eines Dreiecks kleiner $\pi$ ist
- Distanzen sind stark verzerrt dargestellt
- hyperbolische Kreise sind in der Poincaré Disk Kreise (aber mit anderem Zentrum)



# Poincarésches Kreisscheibenmodell (Poincaré disk model)

### Punkte

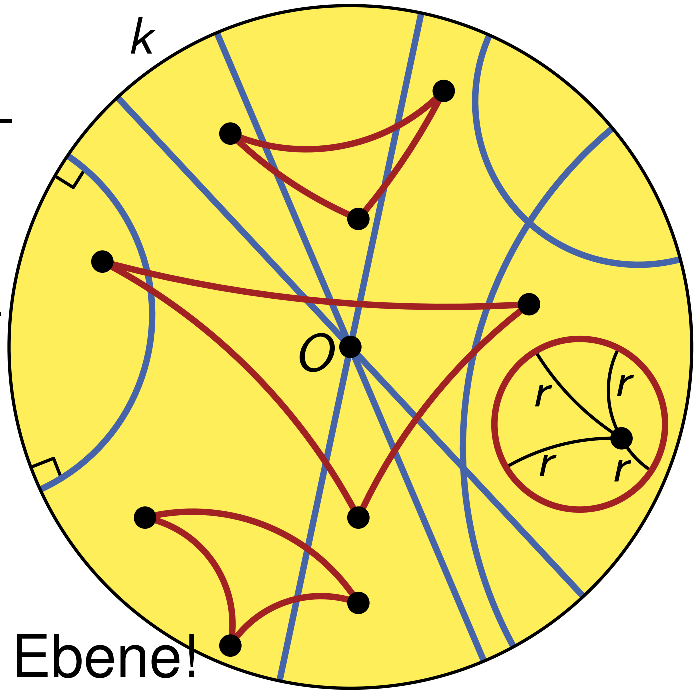
- betrachte einen (euklidischen) Kreis $k$ mit Radius 1 um den Punkt $O$
- sei $\mathcal{P}$ die Menge der Punkte im Inneren des Kreises

### Geraden

- sei $\mathcal{G}$ die Vereinigung von:
  - Menge der offenen Strecken durch $O$ mit Endpunkten auf $k$
  - Menge der offenen Kreisbögen in $k$, die senkrecht auf $k$ stehen

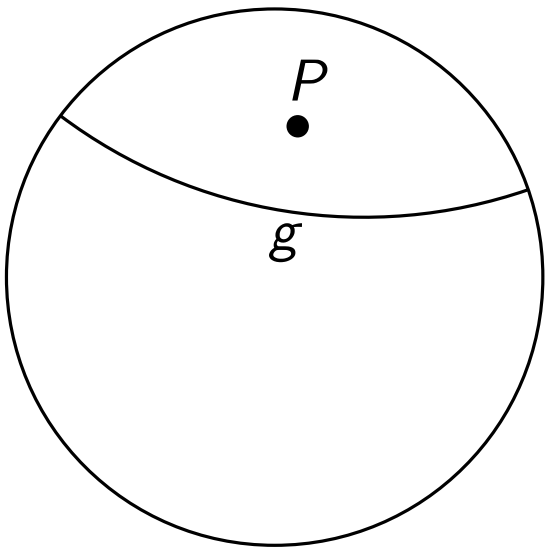
### Es gilt

- $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ zusammen mit einer geeigneten Distanzfunktion erfüllt die Axiome I–IV und V'
- das Modell ist winkelerhaltend
- damit wird „intuitiv offensichtlich", dass die Innenwinkelsumme eines Dreiecks kleiner $\pi$ ist
- Distanzen sind stark verzerrt dargestellt
- hyperbolische Kreise sind in der Poincaré Disk Kreise (aber mit anderem Zentrum)
- Punkte auf $k$ gehören nicht zur hyperbolischen Ebene!



# Poincarésches Kreisscheibenmodell
# Parallele Geraden und ideale Punkte

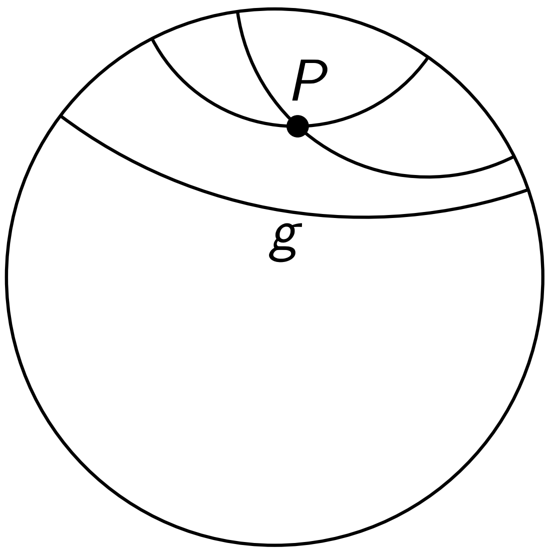
## Parallele Geraden durch einen Punkt



# Poincarésches Kreisscheibenmodell
# Parallele Geraden und ideale Punkte

## Parallele Geraden durch einen Punkt

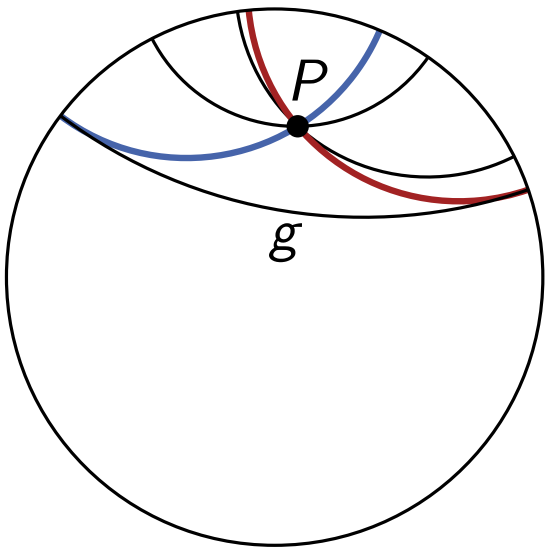
- man kann leicht mehrere zu $g$ parallele Geraden durch $P$ finden



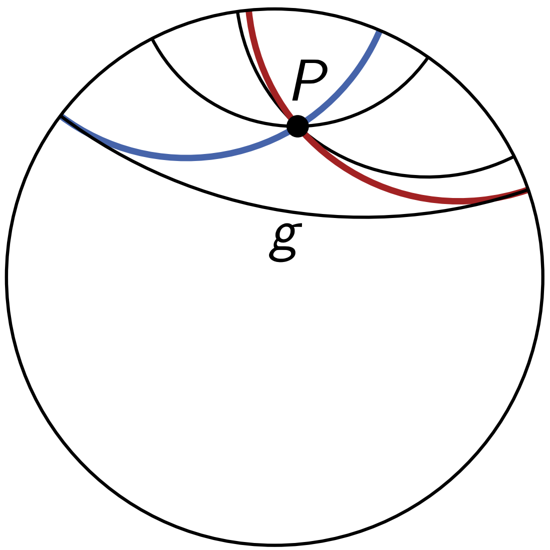
# Poincarésches Kreisscheibenmodell
# Parallele Geraden und ideale Punkte

## Parallele Geraden durch einen Punkt

- man kann leicht mehrere zu $g$ parallele Geraden durch $P$ finden
- zwei Geraden sind gerade so noch parallel
  - diese „schneiden“ $g$ auf dem Rand der Poincaré Disk
  - sie sind die **Grenzparallelen** zu $g$ durch $P$



# Poincarésches Kreisscheibenmodell
# Parallele Geraden und ideale Punkte




## Parallele Geraden durch einen Punkt

- man kann leicht mehrere zu $g$ parallele Geraden durch $P$ finden
- zwei Geraden sind gerade so noch parallel
  - diese „schneiden“ $g$ auf dem Rand der Poincaré Disk
  - sie sind die **Grenzparallelen** zu $g$ durch $P$

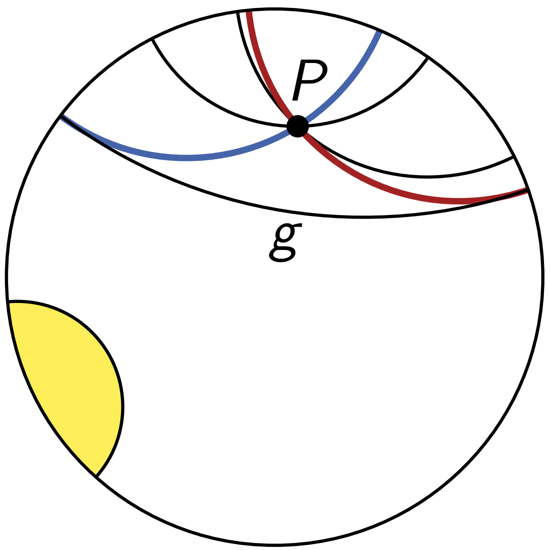
## Halbebenen

- es gibt beliebig viele disjunkte Halbebenen (die alle kongruent sind)

# Poincarésches Kreisscheibenmodell
# Parallele Geraden und ideale Punkte

## Parallele Geraden durch einen Punkt

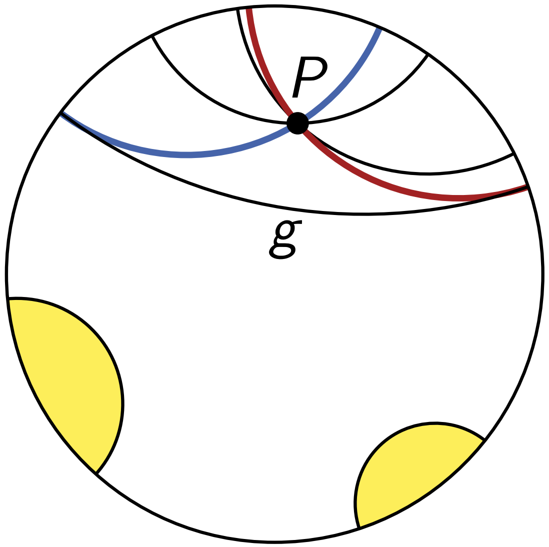
- man kann leicht mehrere zu $g$ parallele Geraden durch $P$ finden
- zwei Geraden sind gerade so noch parallel
  - diese „schneiden“ $g$ auf dem Rand der Poincaré Disk
  - sie sind die **Grenzparallelen** zu $g$ durch $P$




## Halbebenen

- es gibt beliebig viele disjunkte Halbebenen (die alle kongruent sind)

# Poincarésches Kreisscheibenmodell
# Parallele Geraden und ideale Punkte



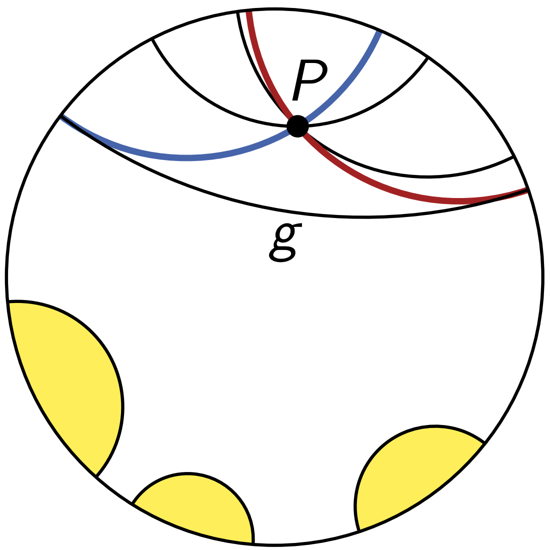

## Parallele Geraden durch einen Punkt

- man kann leicht mehrere zu $g$ parallele Geraden durch $P$ finden
- zwei Geraden sind gerade so noch parallel
  - diese „schneiden" $g$ auf dem Rand der Poincaré Disk
  - sie sind die **Grenzparallelen** zu $g$ durch $P$

## Halbebenen

- es gibt beliebig viele disjunkte Halbebenen (die alle kongruent sind)

# Poincarésches Kreisscheibenmodell
# Parallele Geraden und ideale Punkte



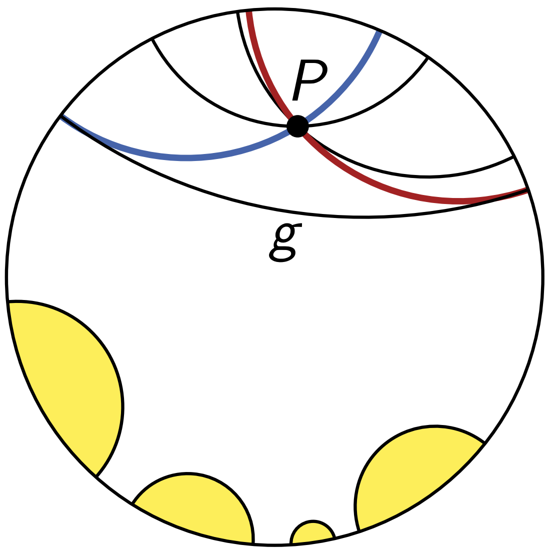

## Parallele Geraden durch einen Punkt

- man kann leicht mehrere zu $g$ parallele Geraden durch $P$ finden
- zwei Geraden sind gerade so noch parallel
  - diese „schneiden“ $g$ auf dem Rand der Poincaré Disk
  - sie sind die **Grenzparallelen** zu $g$ durch $P$

## Halbebenen

- es gibt beliebig viele disjunkte Halbebenen (die alle kongruent sind)

# Poincarésches Kreisscheibenmodell
# Parallele Geraden und ideale Punkte



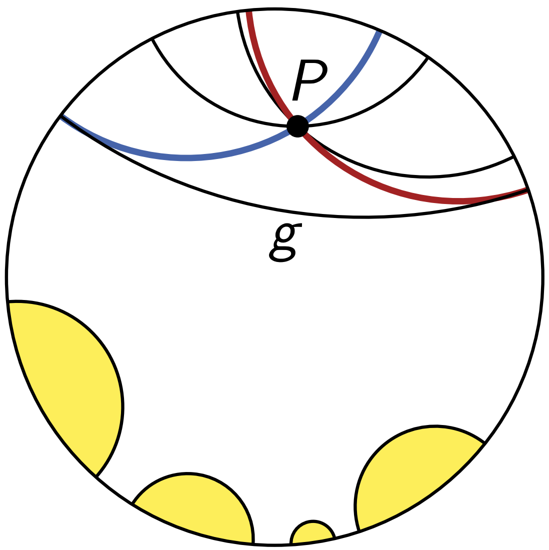

**Parallele Geraden durch einen Punkt**

- man kann leicht mehrere zu $g$ parallele Geraden durch $P$ finden
- zwei Geraden sind gerade so noch parallel
  - diese „schneiden“ $g$ auf dem Rand der Poincaré Disk
  - sie sind die **Grenzparallelen** zu $g$ durch $P$

**Halbebenen**

- es gibt beliebig viele disjunkte Halbebenen (die alle kongruent sind)

# Poincarésches Kreisscheibenmodell
# Parallele Geraden und ideale Punkte




## Parallele Geraden durch einen Punkt

- man kann leicht mehrere zu $g$ parallele Geraden durch $P$ finden
- zwei Geraden sind gerade so noch parallel
  - diese „schneiden“ $g$ auf dem Rand der Poincaré Disk
  - sie sind die **Grenzparallelen** zu $g$ durch $P$

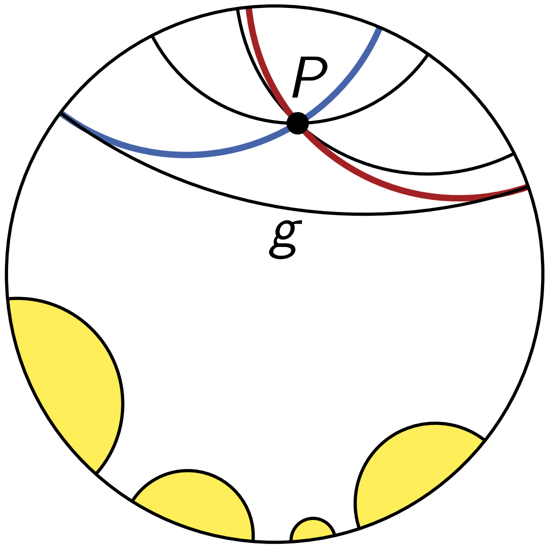
## Halbebenen

- es gibt beliebig viele disjunkte Halbebenen (die alle kongruent sind)
- damit gibt es im hyperbolischen irgendwie mehr Platz als im Euklidischen

# Poincarésches Kreisscheibenmodell
# Parallele Geraden und ideale Punkte

## Parallele Geraden durch einen Punkt

- man kann leicht mehrere zu $g$ parallele Geraden durch $P$ finden
- zwei Geraden sind gerade so noch parallel
  - diese „schneiden“ $g$ auf dem Rand der Poincaré Disk
  - sie sind die **Grenzparallelen** zu $g$ durch $P$

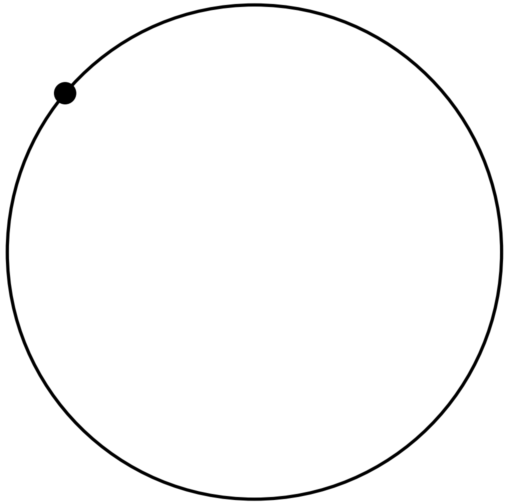



## Halbebenen

- es gibt beliebig viele disjunkte Halbebenen (die alle kongruent sind)
- damit gibt es im hyperbolischen irgendwie mehr Platz als im Euklidischen

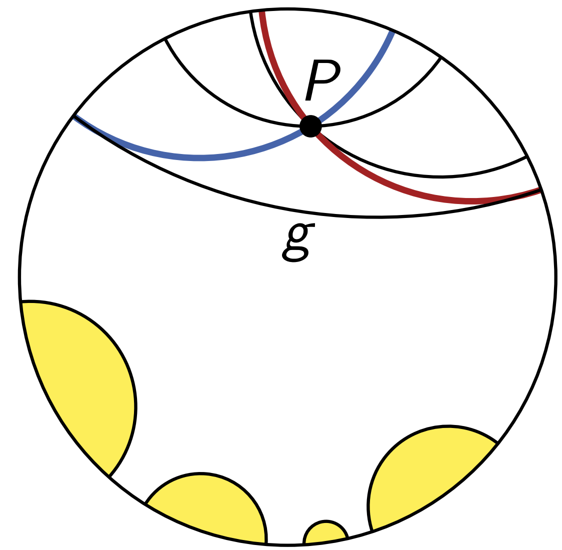
## Ideale Punkte

- die Punkte auf dem Kreis heißen ideale Punkte
- Sind selbst nicht Teil der hyperbolischen Ebene!



# Poincarésches Kreisscheibenmodell
# Parallele Geraden und ideale Punkte

## Parallele Geraden durch einen Punkt



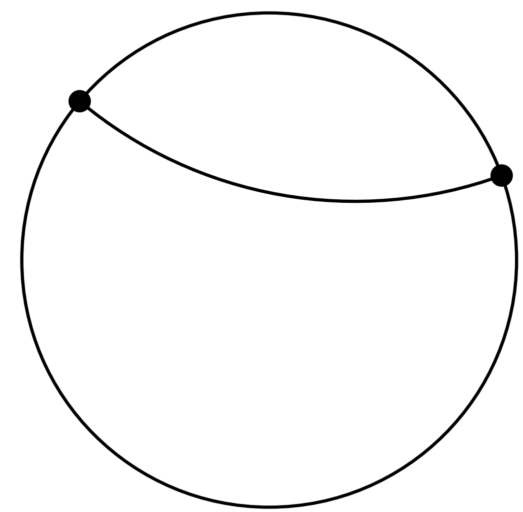

- man kann leicht mehrere zu $g$ parallele Geraden durch $P$ finden
- zwei Geraden sind gerade so noch parallel
  - diese „schneiden“ $g$ auf dem Rand der Poincaré Disk
  - sie sind die **Grenzparallelen** zu $g$ durch $P$

## Halbebenen

- es gibt beliebig viele disjunkte Halbebenen (die alle kongruent sind)
- damit gibt es im hyperbolischen irgendwie mehr Platz als im Euklidischen

## Ideale Punkte

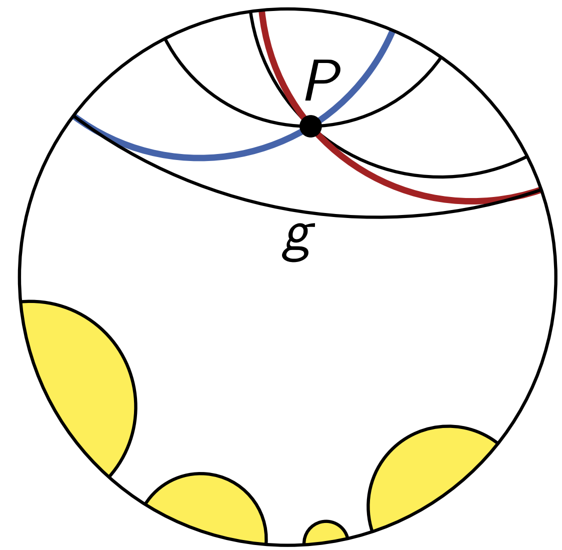
- die Punkte auf dem Kreis heißen ideale Punkte
- Sind selbst nicht Teil der hyperbolischen Ebene!
- jede Gerade „endet“ in zwei idealen Punkten



# Poincarésches Kreisscheibenmodell
# Parallele Geraden und ideale Punkte

## Parallele Geraden durch einen Punkt

- man kann leicht mehrere zu $g$ parallele Geraden durch $P$ finden
- zwei Geraden sind gerade so noch parallel
  - diese „schneiden“ $g$ auf dem Rand der Poincaré Disk
  - sie sind die **Grenzparallelen** zu $g$ durch $P$

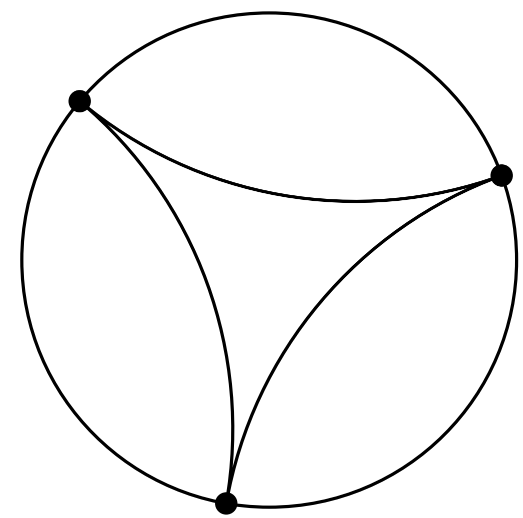



## Halbebenen

- es gibt beliebig viele disjunkte Halbebenen (die alle kongruent sind)
- damit gibt es im hyperbolischen irgendwie mehr Platz als im Euklidischen

## Ideale Punkte

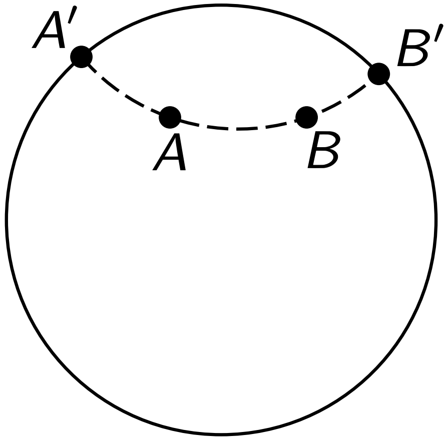
- die Punkte auf dem Kreis heißen ideale Punkte
- Sind selbst nicht Teil der hyperbolischen Ebene!
- jede Gerade „endet“ in zwei idealen Punkten
- ideales Dreieck: drei Geraden, die drei ideale Punkte „verbinden“
- Verallgemeinerung: ideale $n$-Ecke



# Poincarésches Kreisscheibenmodell
# Distanzen

## Distanzen

- $A$ und $B$: zwei Punkte in der Poincaré Disk
- $A'$ und $B'$: idealen Punkte der Gerade $AB$ (wie im Bild)



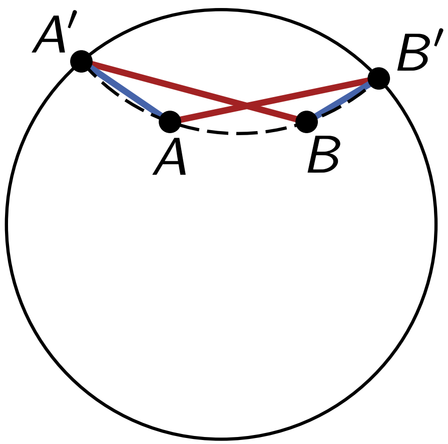
# Poincarésches Kreisscheibenmodell
# Distanzen

## Distanzen

- $A$ und $B$: zwei Punkte in der Poincaré Disk
- $A'$ und $B'$: idealen Punkte der Gerade $AB$ (wie im Bild)
- dann gilt: $$d_H(A,B) = \log \frac{d_E(A,B') \cdot d_E(A',B)}{d_E(A,A') \cdot d_E(B,B')}$$

hyperbolische Distanz

euklidische Distanz
(in der Poincaré Disk)



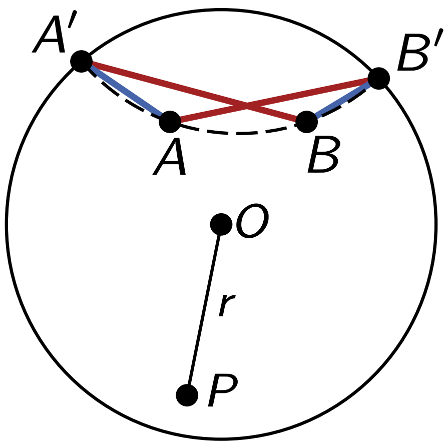
# Poincarésches Kreisscheibenmodell
# Distanzen

## Distanzen

- $A$ und $B$: zwei Punkte in der Poincaré Disk
- $A'$ und $B'$: idealen Punkte der Gerade $AB$ (wie im Bild)
- dann gilt: $$d_H(A,B) = \log \frac{d_E(A,B') \cdot d_E(A',B)}{d_E(A,A') \cdot d_E(B,B')}$$

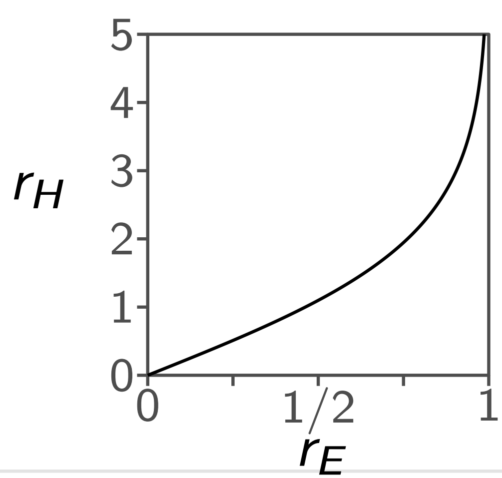
hyperbolische Distanz

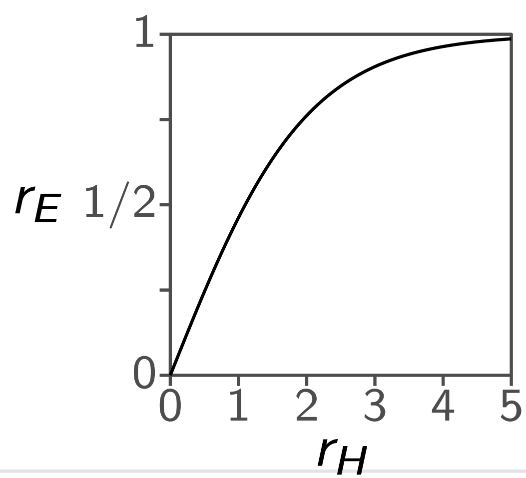
euklidische Distanz
(in der Poincaré Disk)




## Distanzen zum Ursprung

- sei $O$ der Ursprung und $P$ ein Punkt mit $r_E = d_E(O,P)$ und $r_H = d_H(O,P)$
- dann gilt: $$r_H = \log \frac{1+r_E}{1-r_E} \quad \text{und} \quad r_E = \frac{e^{r_H}-1}{e^{r_H}+1}$$



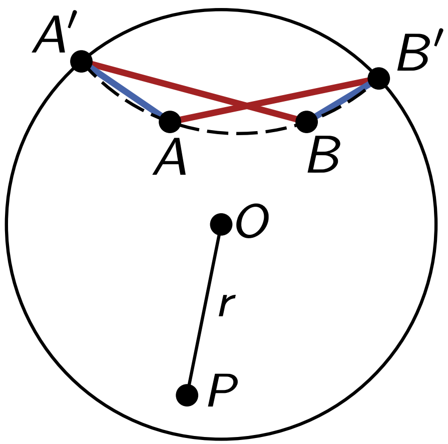



## Distanzen

- $A$ und $B$: zwei Punkte in der Poincaré Disk
- $A'$ und $B'$: idealen Punkte der Gerade $AB$ (wie im Bild)
- dann gilt: $$d_H(A,B) = \log \frac{d_E(A,B') \cdot d_E(A',B)}{d_E(A,A') \cdot d_E(B,B')}$$

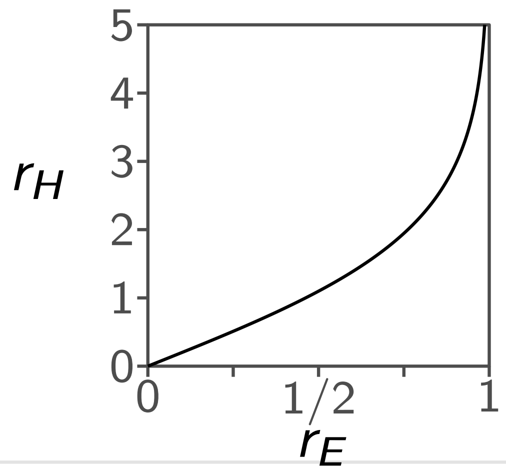
hyperbolische Distanz

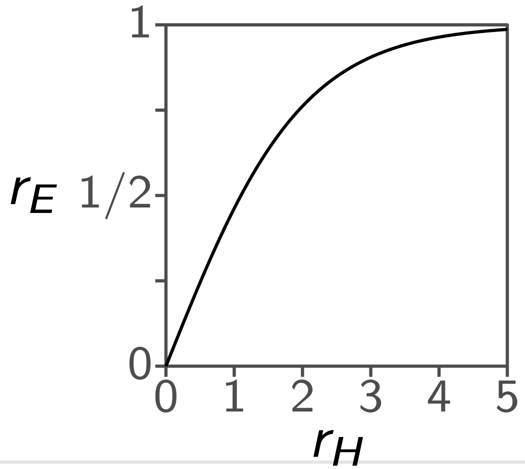
euklidische Distanz
(in der Poincaré Disk)




## Distanzen zum Ursprung

- sei $O$ der Ursprung und $P$ ein Punkt mit $r_E = d_E(O,P)$ und $r_H = d_H(O,P)$
- dann gilt: $$r_H = \log \frac{1+r_E}{1-r_E} = 2\,\mathrm{arctanh}(r_E) \quad \text{und} \quad r_E = \frac{e^{r_H}-1}{e^{r_H}+1} = \tanh\left(\frac{r_H}{2}\right)$$



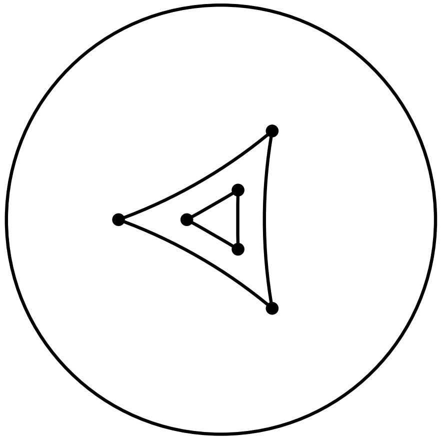



# Fläche in der hyperbolischen Ebene

Karlsruher Institut für Technologie

## Fläche eines Dreiecks

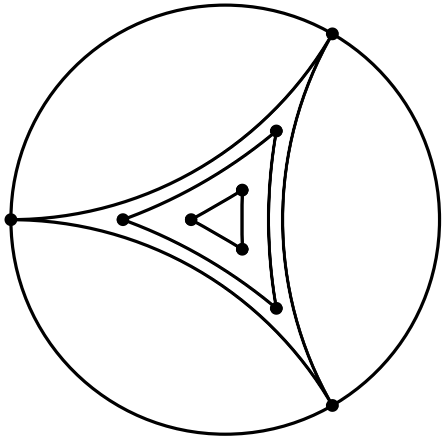
- Flächeninhalt eines Dreiecks ist $\pi$ − Innenwinkelsumme
- alle Dreiecke haben Flächeninhalt echt kleiner $\pi$



# Fläche in der hyperbolischen Ebene

## Fläche eines Dreiecks

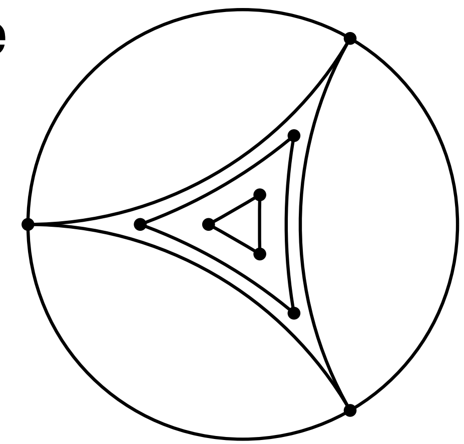
- Flächeninhalt eines Dreiecks ist $\pi -$ Innenwinkelsumme
- alle Dreiecke haben Flächeninhalt echt kleiner $\pi$
- ein ideales Dreieck hat Flächeninhalt $\pi$



# Fläche in der hyperbolischen Ebene

## Fläche eines Dreiecks

- Flächeninhalt eines Dreiecks ist $\pi -$ Innenwinkelsumme
- alle Dreiecke haben Flächeninhalt echt kleiner $\pi$
- ein ideales Dreieck hat Flächeninhalt $\pi$



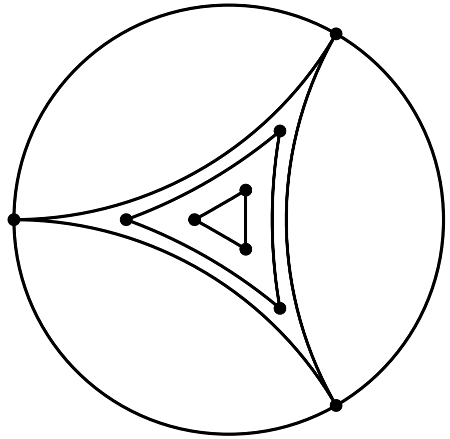
## Kreis mit (hyperbolischem) Radius *r*

- Umfang: $2\pi \sinh(r)$
- Flächeninhalt: $4\pi \sinh^2(r/2) = 2\pi(\cosh(r) - 1)$

# Fläche in der hyperbolischen Ebene

## Fläche eines Dreiecks

- Flächeninhalt eines Dreiecks ist $\pi$ – Innenwinkelsumme
- alle Dreiecke haben Flächeninhalt echt kleiner $\pi$
- ein ideales Dreieck hat Flächeninhalt $\pi$

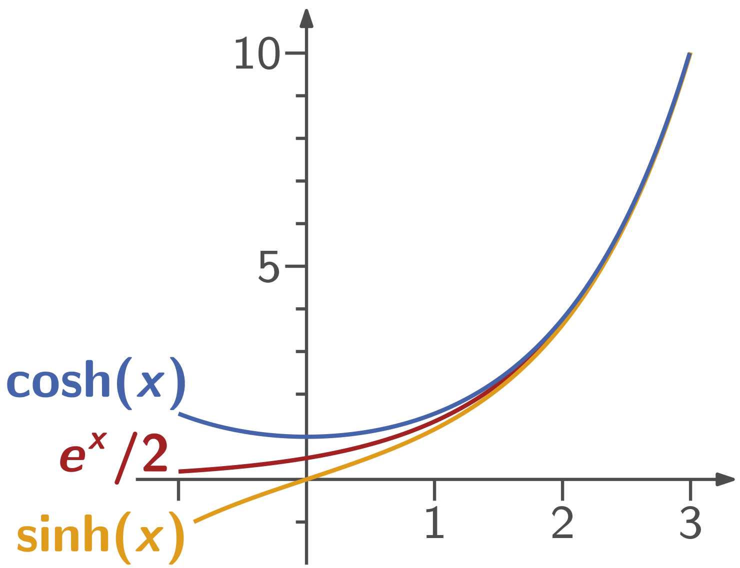


## Kreis mit (hyperbolischem) Radius *r*

- Umfang: $2\pi \sinh(r)$
- Flächeninhalt: $4\pi \sinh^2(r/2) = 2\pi(\cosh(r) - 1)$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

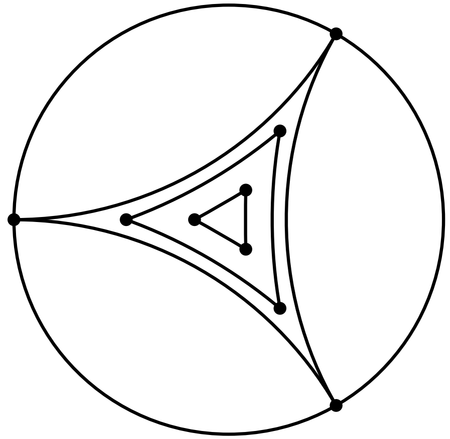
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



# Fläche in der hyperbolischen Ebene

## Fläche eines Dreiecks

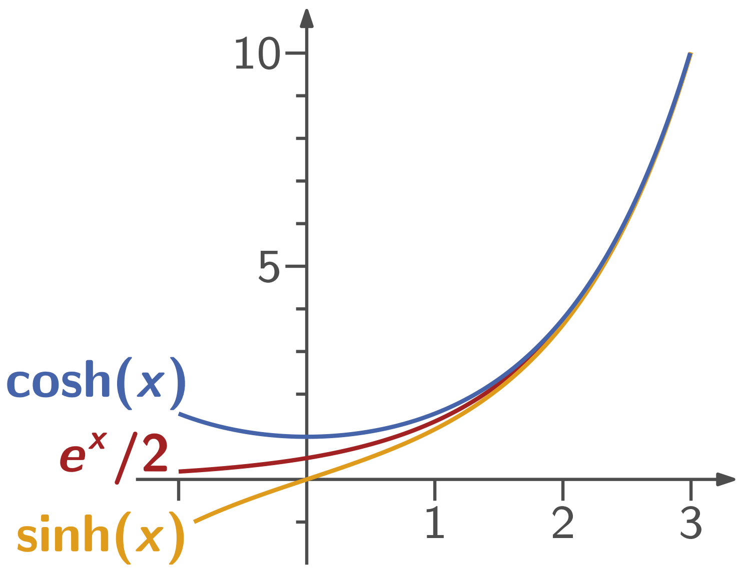
- Flächeninhalt eines Dreiecks ist $\pi$ – Innenwinkelsumme
- alle Dreiecke haben Flächeninhalt echt kleiner $\pi$
- ein ideales Dreieck hat Flächeninhalt $\pi$

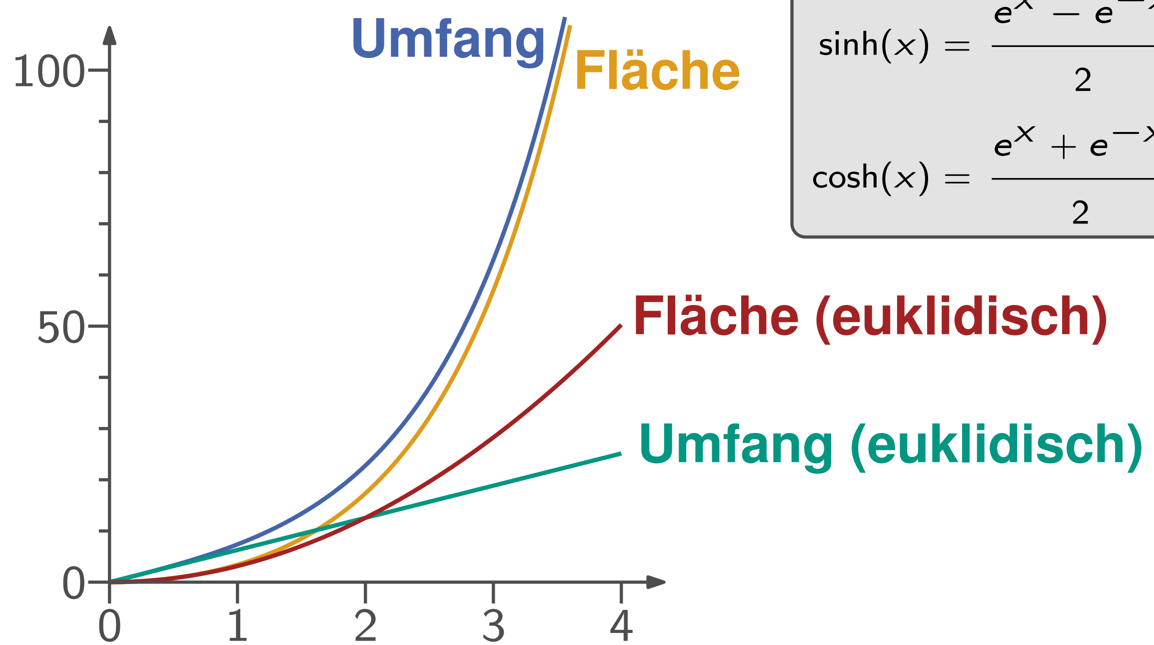


## Kreis mit (hyperbolischem) Radius *r*

- Umfang: $2\pi \sinh(r)$
- Flächeninhalt: $4\pi \sinh^2(r/2) = 2\pi(\cosh(r) - 1)$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



# Zusammenfassung

## Heute gesehen

- axiomatischer Aufbau der Geometrie: definieren und beweisen ohne die Anschauung zu bemühen

# Zusammenfassung

Karlsruher Institut für Technologie

## Heute gesehen

- axiomatischer Aufbau der Geometrie: definieren und beweisen ohne die Anschauung zu bemühen
- das Parallelenaxiom und die hyperbolische Ebene

# Zusammenfassung

## Heute gesehen

- axiomatischer Aufbau der Geometrie: definieren und beweisen ohne die Anschauung zu bemühen
- das Parallelenaxiom und die hyperbolische Ebene
- grundlegende Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen der Euklidischen und der hyperbolischen Ebene

# Zusammenfassung

## Heute gesehen

- axiomatischer Aufbau der Geometrie: definieren und beweisen ohne die Anschauung zu bemühen
- das Parallelenaxiom und die hyperbolische Ebene
- grundlegende Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen der Euklidischen und der hyperbolischen Ebene
- Poincaré Disk hilft der Intuition

# Zusammenfassung

## Heute gesehen

- axiomatischer Aufbau der Geometrie: definieren und beweisen ohne die Anschauung zu bemühen
- das Parallelenaxiom und die hyperbolische Ebene
- grundlegende Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen der Euklidischen und der hyperbolischen Ebene
- Poincaré Disk hilft der Intuition

## Was gibt es sonst noch?

- diverse andere Modelle: obere Halbebene (Poincaré Halbebene), Hyperboloidmodell, Beltrami-Klein-Modell, native Polarkoordinaten, ...
- andere Koordinatensysteme

# Zusammenfassung

## Heute gesehen

- axiomatischer Aufbau der Geometrie: definieren und beweisen ohne die Anschauung zu bemühen
- das Parallelenaxiom und die hyperbolische Ebene
- grundlegende Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen der Euklidischen und der hyperbolischen Ebene
- Poincaré Disk hilft der Intuition

## Was gibt es sonst noch?

- diverse andere Modelle: obere Halbebene (Poincaré Halbebene), Hyperboloidmodell, Beltrami-Klein-Modell, native Polarkoordinaten, ...
- andere Koordinatensysteme
- verschiedene Anwendungen in der hyperbolischen Ebene

# Nützliche Ressourcen zur hyperbolischen Ebene

Karlsruher Institut für Technologie

**„gelbe Seiten“** http://www.maths.gla.ac.uk/wws/cabripages/hyperbolic/hyperbolic0.html

- viele nützliche Infos und Formeln zur hyperbolischen Geometrie

**Ipelet**

- Poincaré Modell https://github.com/thobl/ipelets/tree/master/poincare
- native Polarkoordinaten https://github.com/maxkatzmann/native-hyperbolic-ipelet

**Hipe** https://github.com/maxkatzmann/Hipe

- hyperbolisches Ipe
- native Polarkoordinaten

**Hydra** https://github.com/maxkatzmann/hydra

- Programmiersprache zum Erzeugen hyperbolischer Zeichnungen
- native Polarkoordinaten

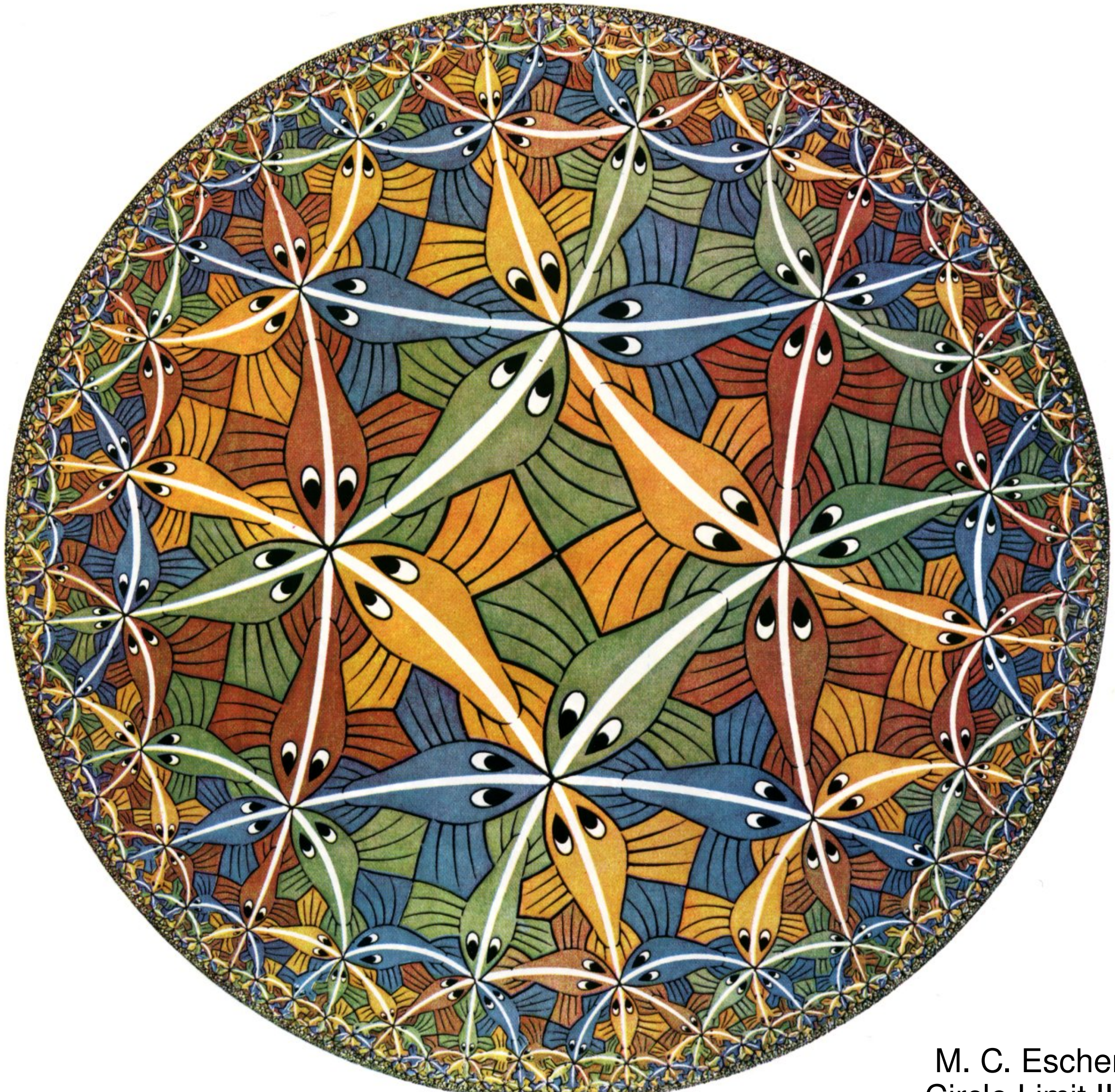
**Poincaré Disk in c++** https://github.com/dcoeurjo/PoincareDisk

- c++ Bibliothek zum Erzeugen hyperbolischer Zeichnungen
- Poincaré Modell

**Hyperbolische Spiele**

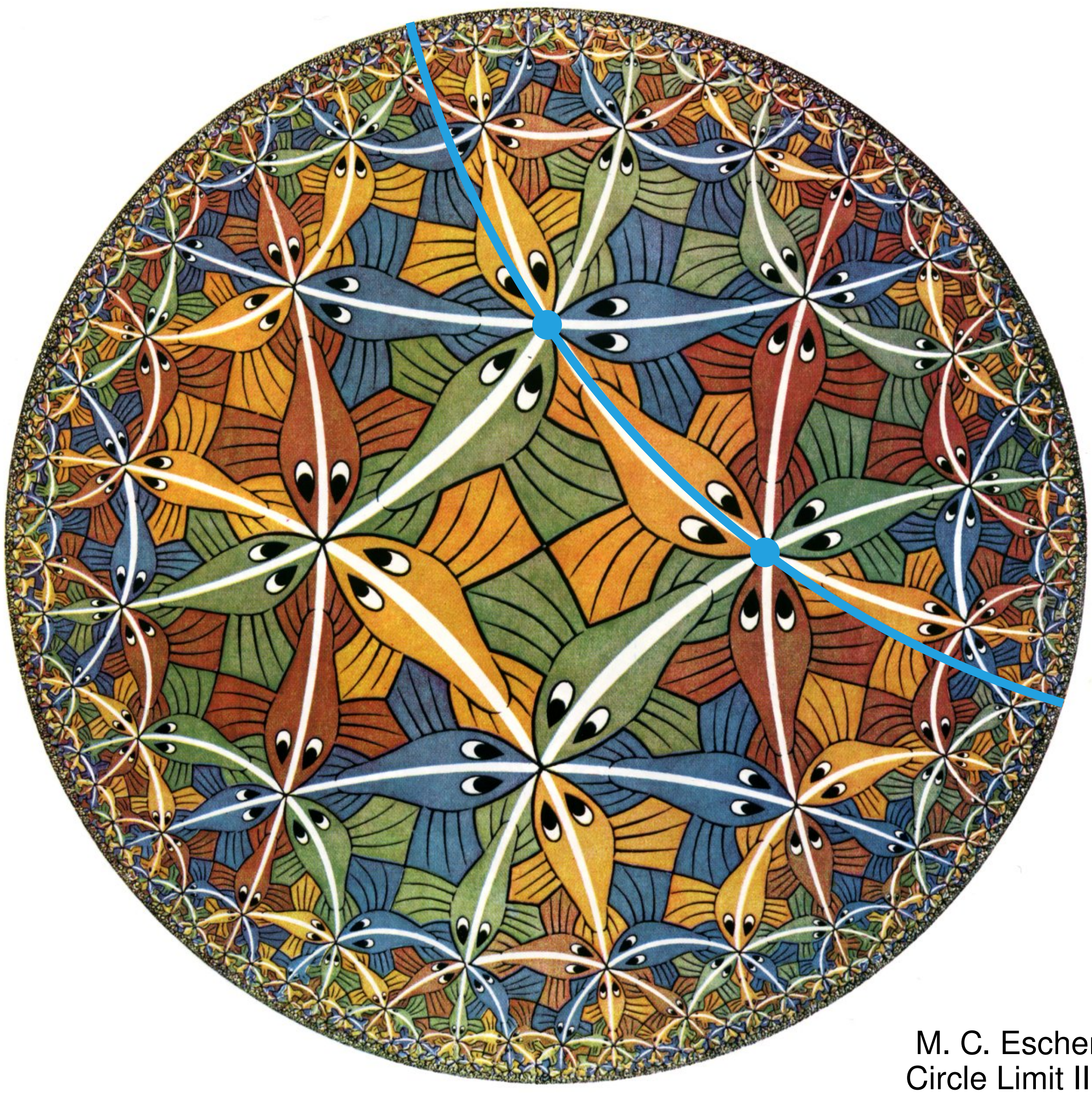
- HyperRogue http://www.roguetemple.com/z/hyper/
- Hyperbolica https://www.youtube.com/playlist?list=PLh9DXIT3m6N4qJK9GKQB3yk61tVe6qJvA

# Bonus: hyperbolische Fische
# Poincaré disk (mehr oder weniger)



M. C. Escher
Circle Limit III

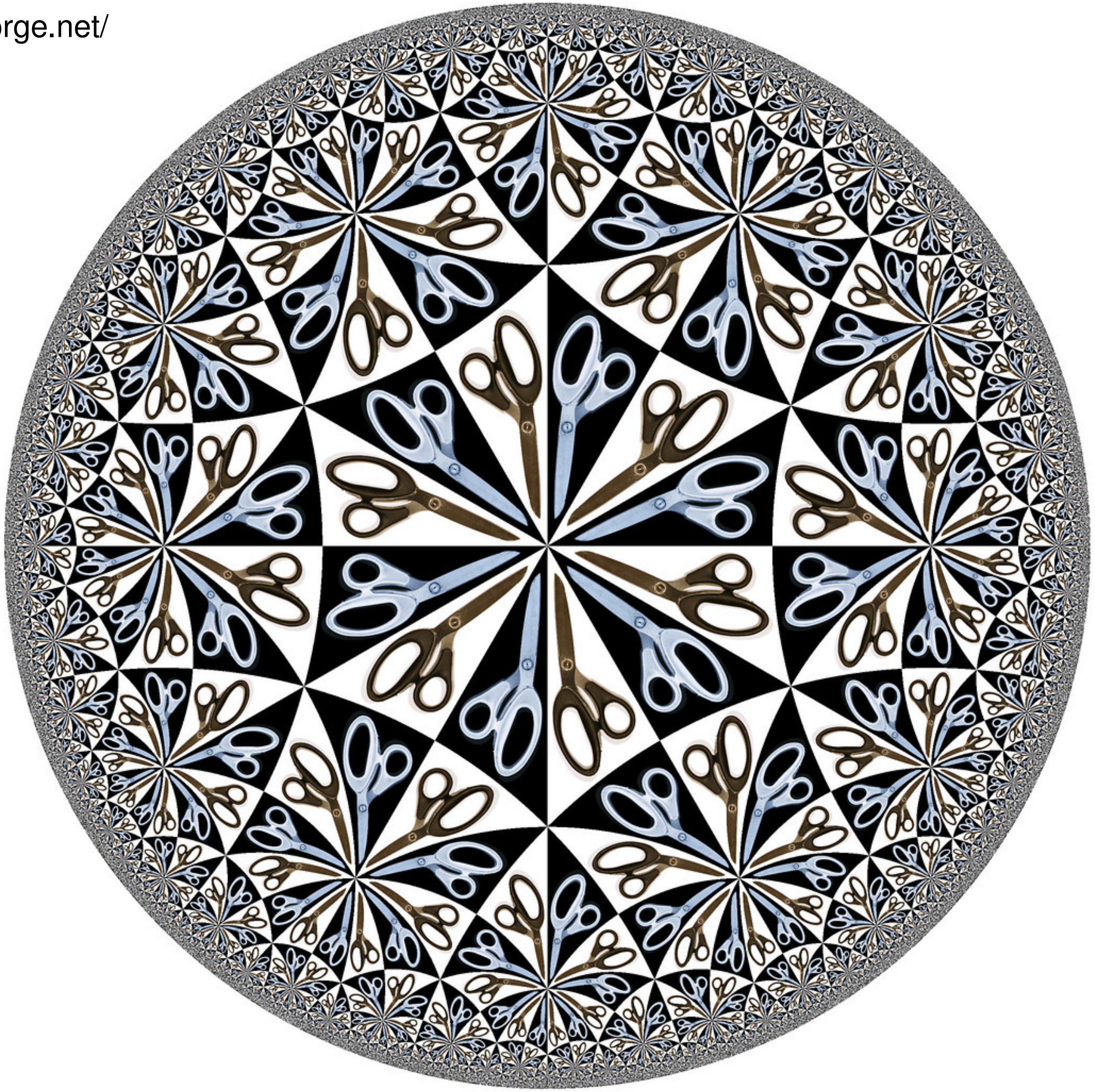
# Bonus: hyperbolische Fische
# Poincaré disk (mehr oder weniger)



M. C. Escher
Circle Limit III

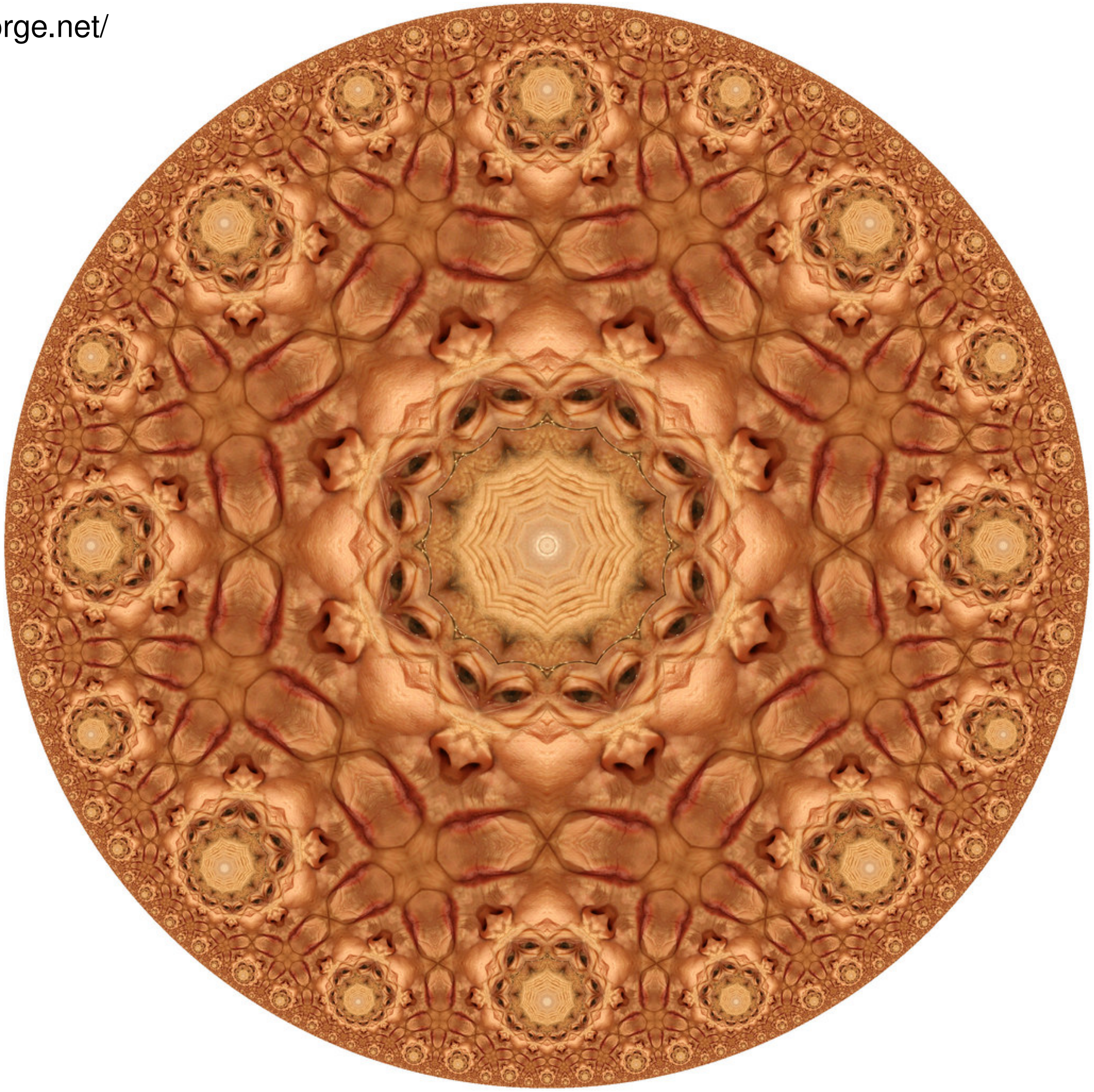
# Bonus: photographic tiling of the Poincaré disk

http://poincare.sourceforge.net/



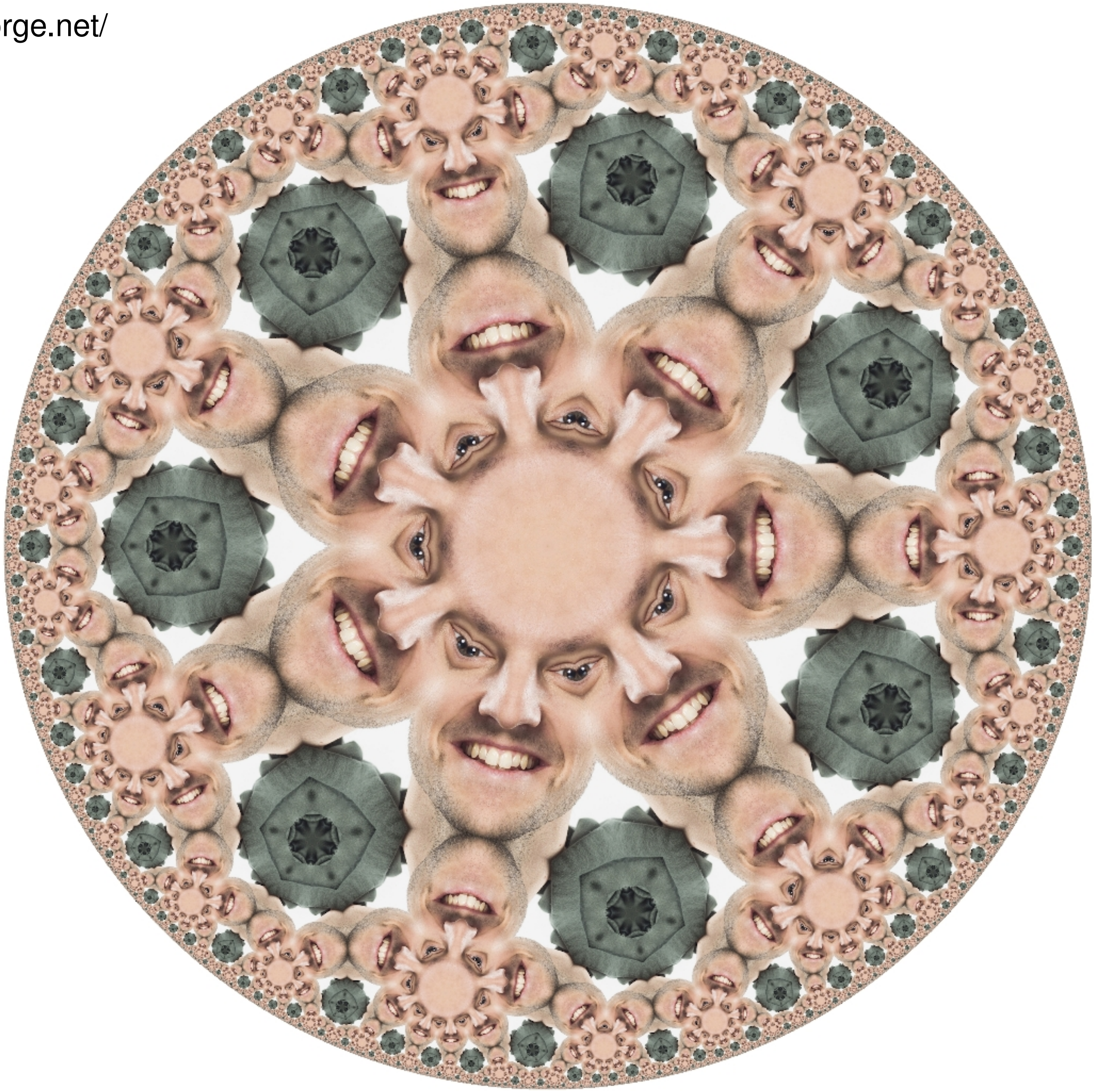
# Bonus: photographic tiling of the Poincaré disk

http://poincare.sourceforge.net/



# Bonus: photographic tiling of the Poincaré disk

http://poincare.sourceforge.net/



# Bonus: hyperbolisches Gitter
# natives Modell