

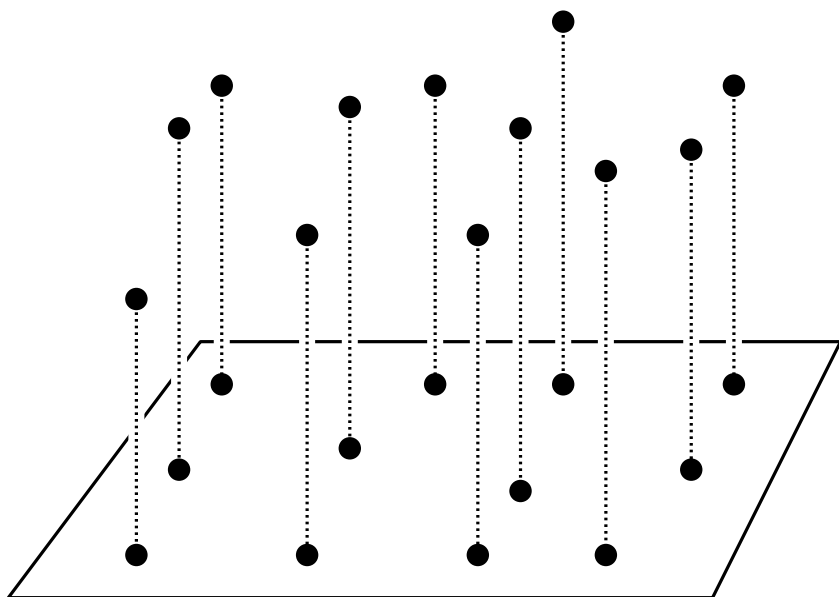
Algorithmische Geometrie

Höheninterpolation & Delaunay-Triangulierung



Höheninterpolation

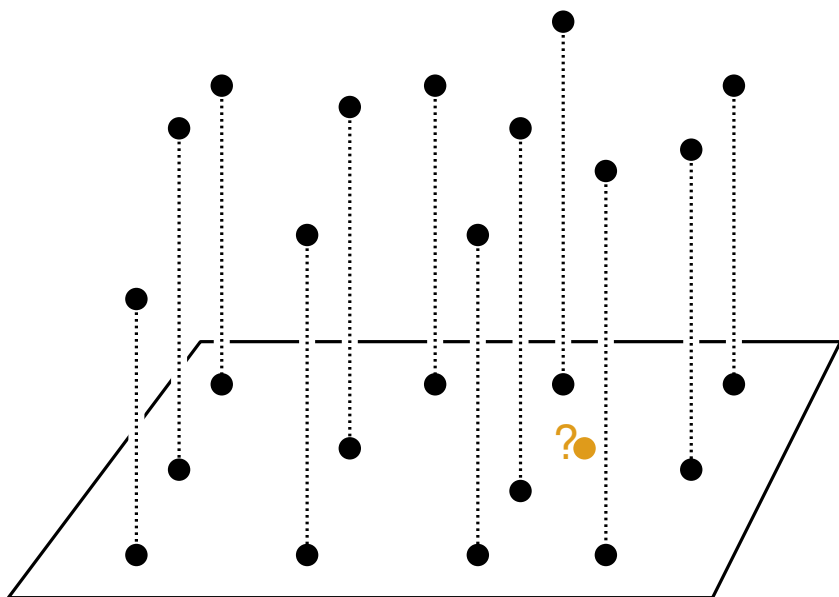
Messpunkte einer Terrain-Höhenmessung



Höheninterpolation

Messpunkte einer Terrain-Höhenmessung

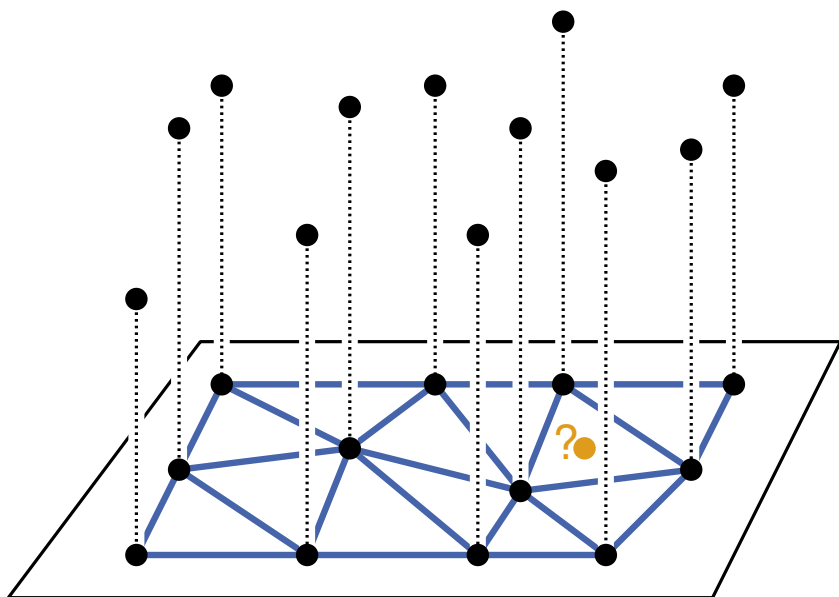
- Wie hoch liegt ein nicht gemessener Punkt?



Höheninterpolation

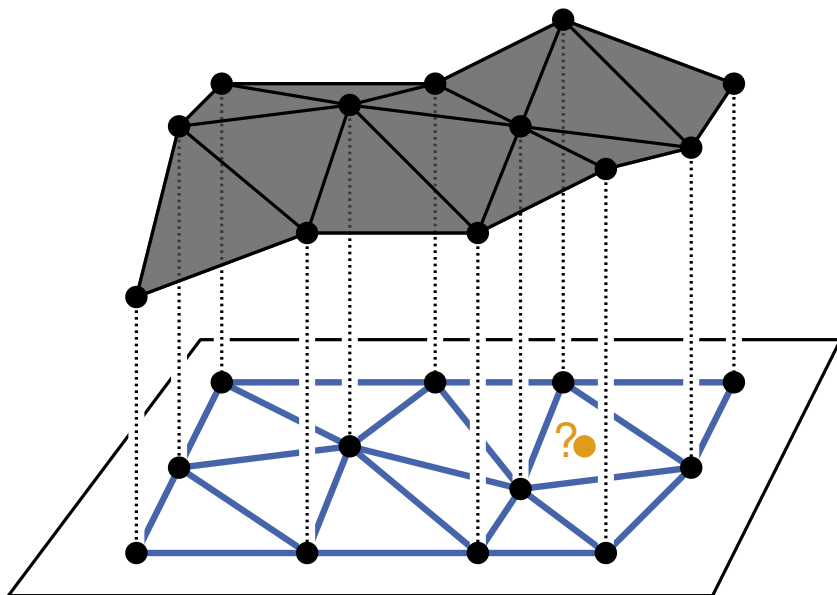
Messpunkte einer Terrain-Höhenmessung

- Wie hoch liegt ein nicht gemessener Punkt?
- trianguliere die Punkte in der Ebene



Höheninterpolation

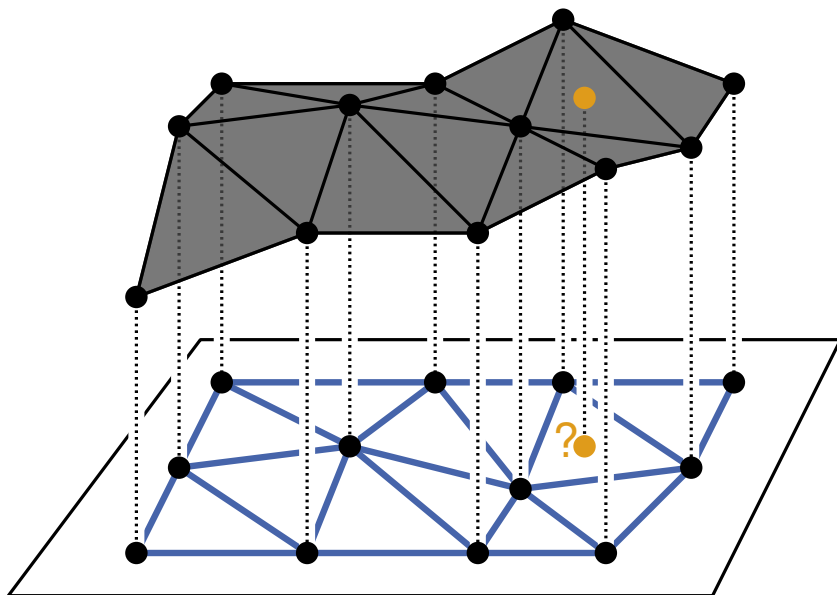
Messpunkte einer Terrain-Höhenmessung



- Wie hoch liegt ein nicht gemessener Punkt?
- trianguliere die Punkte in der Ebene
- → Triangulierung der 3D-Messpunkte

Höheninterpolation

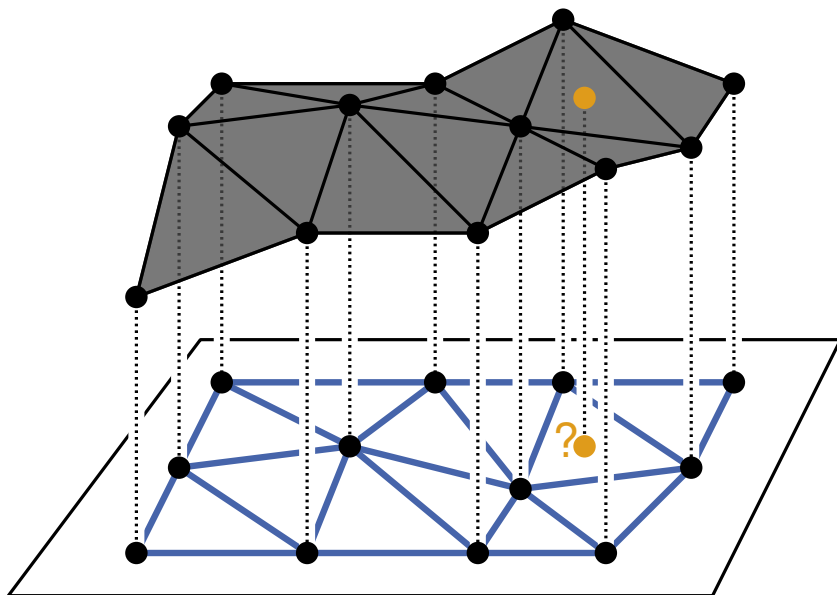
Messpunkte einer Terrain-Höhenmessung



- Wie hoch liegt ein nicht gemessener Punkt?
- trianguliere die Punkte in der Ebene
- → Triangulierung der 3D-Messpunkte
- lies Höhe des angefragten Punktes aus der Triangulierung ab

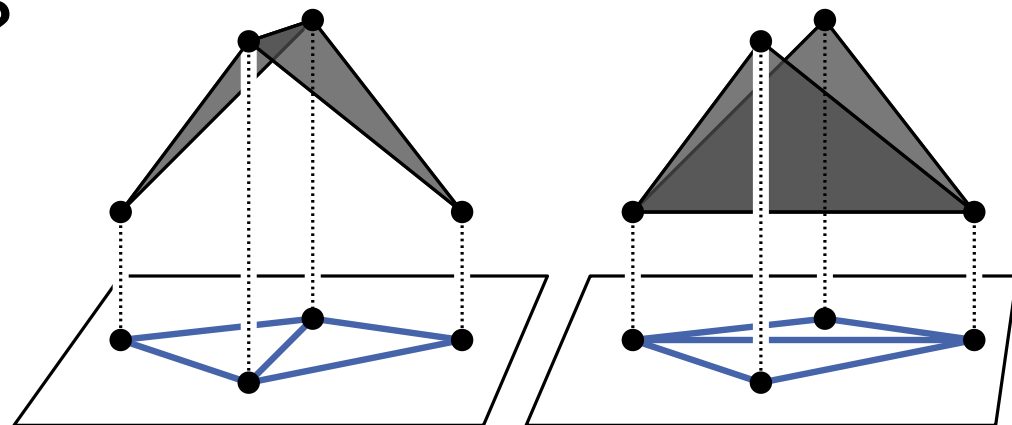
Höheninterpolation

Messpunkte einer Terrain-Höhenmessung



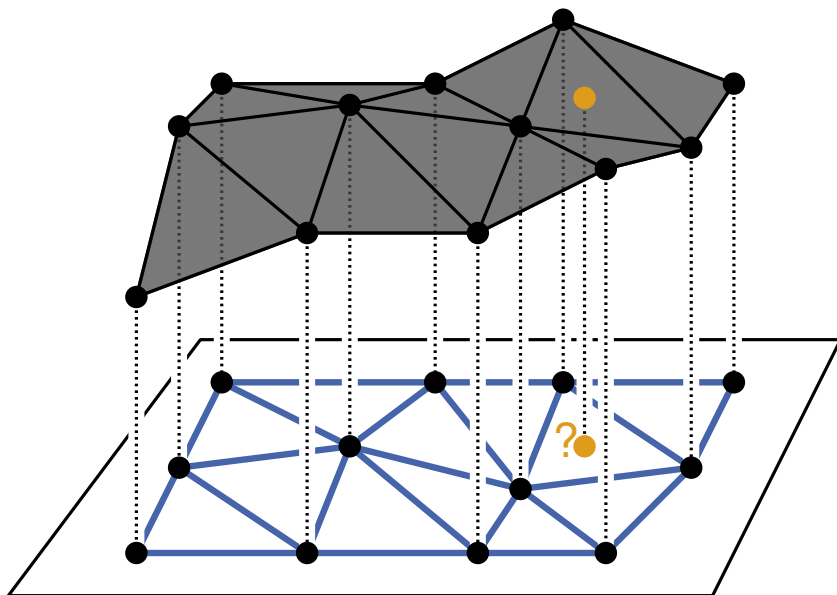
- Wie hoch liegt ein nicht gemessener Punkt?
- trianguliere die Punkte in der Ebene
- → Triangulierung der 3D-Messpunkte
- lies Höhe des angefragten Punktes aus der Triangulierung ab

Was ist eine gute Triangulierung?



Höheninterpolation

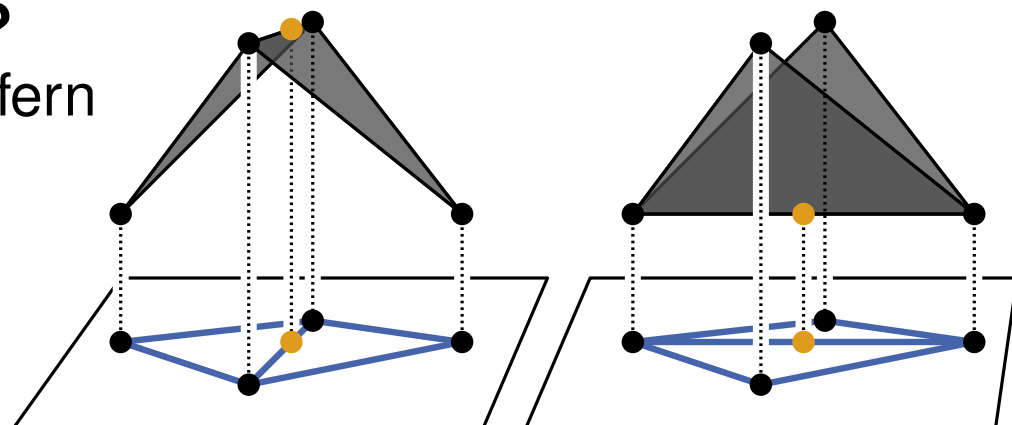
Messpunkte einer Terrain-Höhenmessung



- Wie hoch liegt ein nicht gemessener Punkt?
- trianguliere die Punkte in der Ebene
- → Triangulierung der 3D-Messpunkte
- lies Höhe des angefragten Punktes aus der Triangulierung ab

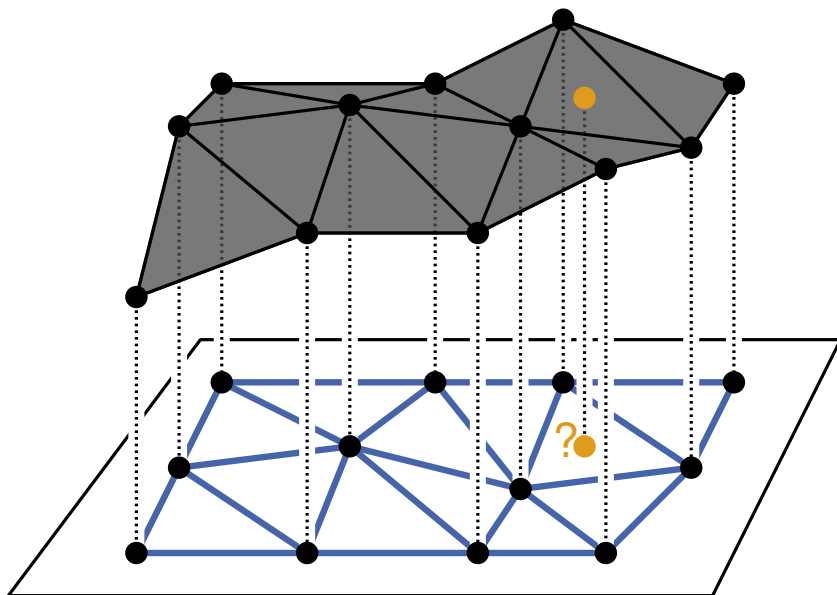
Was ist eine gute Triangulierung?

- verschiedene Triangulierungen liefern sehr unterschiedliche Ergebnisse



Höheninterpolation

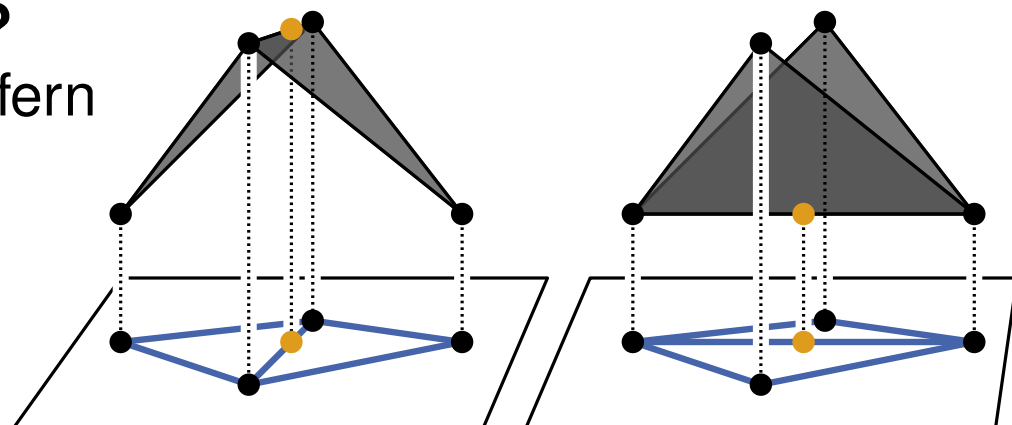
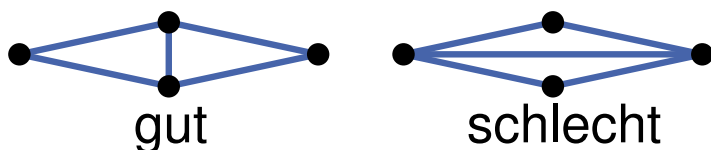
Messpunkte einer Terrain-Höhenmessung



- Wie hoch liegt ein nicht gemessener Punkt?
- trianguliere die Punkte in der Ebene
- → Triangulierung der 3D-Messpunkte
- lies Höhe des angefragten Punktes aus der Triangulierung ab

Was ist eine gute Triangulierung?

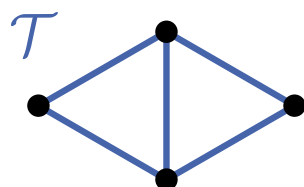
- verschiedene Triangulierungen liefern sehr unterschiedliche Ergebnisse
- Ziel: vermeide dünne Dreiecke



Gute und Schlechte Triangulierungen

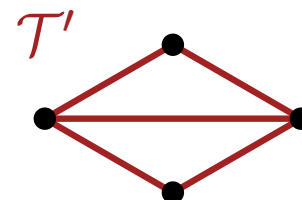
Winkel-Vektor

- betrachte Triangulierung $\mathcal{T}$ einer Punktmenge mit m Dreiecken
- Innenwinkel der Dreiecke, aufsteigend sortiert: $\alpha_1, \dots, \alpha_{3m}$
- Winkel-Vektor: $\alpha(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{3m})$



$$\alpha(\mathcal{T}) = (60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$$

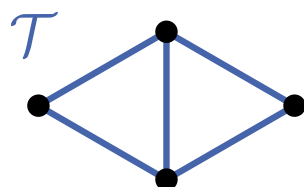
$$\alpha(\mathcal{T}') = (30^\circ, 30^\circ, 30^\circ, 30^\circ, 120^\circ, 120^\circ)$$



Gute und Schlechte Triangulierungen

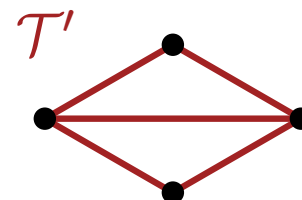
Winkel-Vektor

- betrachte Triangulierung $\mathcal{T}$ einer Punktmenge mit m Dreiecken
- Innenwinkel der Dreiecke, aufsteigend sortiert: $\alpha_1, \dots, \alpha_{3m}$
- Winkel-Vektor: $\alpha(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{3m})$



$$\alpha(\mathcal{T}) = (60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$$

$$\alpha(\mathcal{T}') = (30^\circ, 30^\circ, 30^\circ, 30^\circ, 120^\circ, 120^\circ)$$

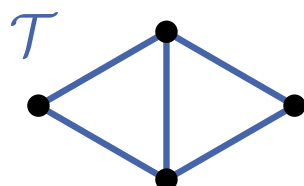


- wir ordnen die Winkel-Vektoren lexikographisch
- also $\alpha(\mathcal{T}) > \alpha(\mathcal{T}') \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \dots, 3m\} : a_i > a'_i \text{ und } \forall j < i : a_j = a'_j$

Gute und Schlechte Triangulierungen

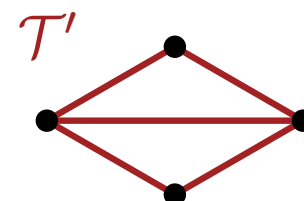
Winkel-Vektor

- betrachte Triangulierung $\mathcal{T}$ einer Punktmenge mit m Dreiecken
- Innenwinkel der Dreiecke, aufsteigend sortiert: $\alpha_1, \dots, \alpha_{3m}$
- Winkel-Vektor: $\alpha(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{3m})$



$$\alpha(\mathcal{T}) = (60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$$

$$\alpha(\mathcal{T}') = (30^\circ, 30^\circ, 30^\circ, 30^\circ, 120^\circ, 120^\circ)$$



- wir ordnen die Winkel-Vektoren lexikographisch
- also $\alpha(\mathcal{T}) > \alpha(\mathcal{T}') \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \dots, 3m\} : a_i > a'_i \text{ und } \forall j < i : a_j = a'_j$

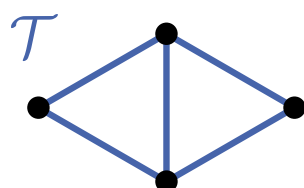
Optimale Triangulierungen

- Triangulierung ist optimal, wenn sie maximal ist (bzgl. dieser Ordnung)
(also $\mathcal{T}$ optimal $\Leftrightarrow \mathcal{T} \geq \mathcal{T}'$ für alle Triangulierungen $\mathcal{T}'$)

Gute und Schlechte Triangulierungen

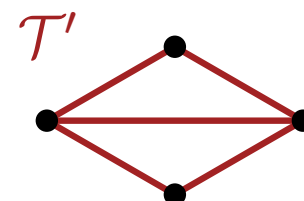
Winkel-Vektor

- betrachte Triangulierung $\mathcal{T}$ einer Punktmenge mit m Dreiecken
- Innenwinkel der Dreiecke, aufsteigend sortiert: $\alpha_1, \dots, \alpha_{3m}$
- Winkel-Vektor: $\alpha(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{3m})$



$$\alpha(\mathcal{T}) = (60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$$

$$\alpha(\mathcal{T}') = (30^\circ, 30^\circ, 30^\circ, 30^\circ, 120^\circ, 120^\circ)$$



- wir ordnen die Winkel-Vektoren lexikographisch
- also $\alpha(\mathcal{T}) > \alpha(\mathcal{T}') \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \dots, 3m\} : a_i > a'_i \text{ und } \forall j < i : a_j = a'_j$

Optimale Triangulierungen

- Triangulierung ist optimal, wenn sie maximal ist (bzgl. dieser Ordnung)
(also $\mathcal{T}$ optimal $\Leftrightarrow \mathcal{T} \geq \mathcal{T}'$ für alle Triangulierungen $\mathcal{T}'$)

Im Folgenden

- Woran erkennen wir eine optimale Triangulierung?
- Können wir eine optimale Triangulierung berechnen?
- Ist die optimale Triangulierung eindeutig?

Verbotene Kanten

Idee

- verbessere Triangulierung schrittweise durch lokale Veränderungen
- dadurch erreicht man ein lokales Maximum
- Hoffnung: das ist auch ein globales Maximum

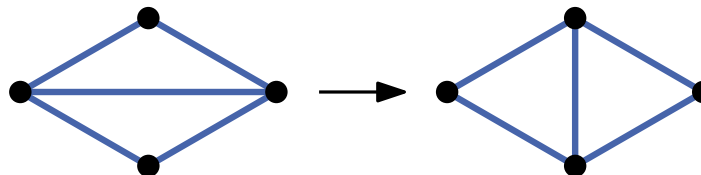
Verbotene Kanten

Idee

- verbessere Triangulierung schrittweise durch lokale Veränderungen
- dadurch erreicht man ein lokales Maximum
- Hoffnung: das ist auch ein globales Maximum

Kanten-Flip

- entferne eine (innere) Kante
- füge die andere Diagonale ein



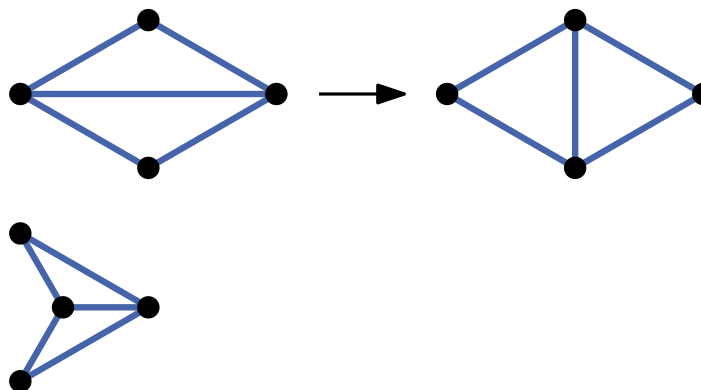
Verbotene Kanten

Idee

- verbessere Triangulierung schrittweise durch lokale Veränderungen
- dadurch erreicht man ein lokales Maximum
- Hoffnung: das ist auch ein globales Maximum

Kanten-Flip

- entferne eine (innere) Kante
- füge die andere Diagonale ein



Beobachtung

- ist nicht für jede Kante möglich

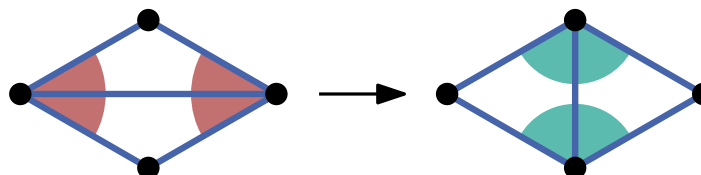
Verbotene Kanten

Idee

- verbessere Triangulierung schrittweise durch lokale Veränderungen
- dadurch erreicht man ein lokales Maximum
- Hoffnung: das ist auch ein globales Maximum

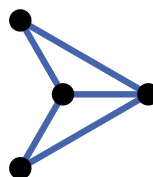
Kanten-Flip

- entferne eine (innere) Kante
- füge die andere Diagonale ein



Beobachtung

- ist nicht für jede Kante möglich
- wir interessieren uns für die vier Winkel an der geflippten Kante



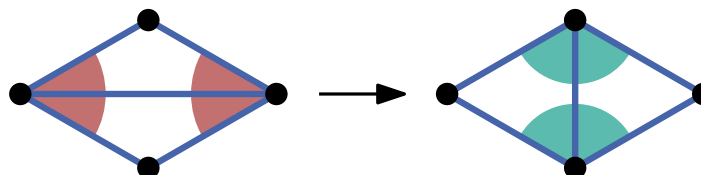
Verbotene Kanten

Idee

- verbessere Triangulierung schrittweise durch lokale Veränderungen
- dadurch erreicht man ein lokales Maximum
- Hoffnung: das ist auch ein globales Maximum

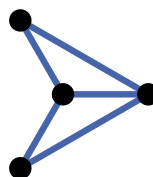
Kanten-Flip

- entferne eine (innere) Kante
- füge die andere Diagonale ein



Beobachtung

- ist nicht für jede Kante möglich
- wir interessieren uns für die vier Winkel an der geflippten Kante
- Kante ist verboten, wenn ihr Flip den minimalen dieser Winkel vergrößert
- sei e in $\mathcal{T}$ verboten und sei $\mathcal{T}' = \text{flip}(\mathcal{T}, e)$; dann gilt $\alpha(\mathcal{T}') > \alpha(\mathcal{T})$



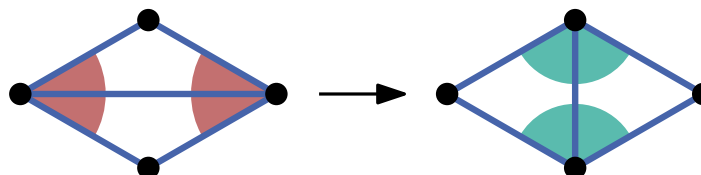
Verbotene Kanten

Idee

- verbessere Triangulierung schrittweise durch lokale Veränderungen
- dadurch erreicht man ein lokales Maximum
- Hoffnung: das ist auch ein globales Maximum

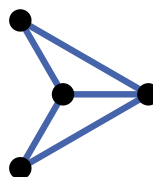
Kanten-Flip

- entferne eine (innere) Kante
- füge die andere Diagonale ein



Beobachtung

- ist nicht für jede Kante möglich
- wir interessieren uns für die vier Winkel an der geflippten Kante
- Kante ist verboten, wenn ihr Flip den minimalen dieser Winkel vergrößert
- sei e in $\mathcal{T}$ verboten und sei $\mathcal{T}' = \text{flip}(\mathcal{T}, e)$; dann gilt $\alpha(\mathcal{T}') > \alpha(\mathcal{T})$



Finde ein lokales Maximum

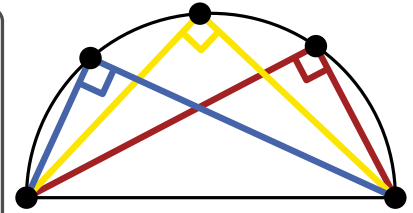
- solange es eine verbotene Kante gibt: flippe diese

Warum terminiert das?

Satz des Thales

Satz des Thales

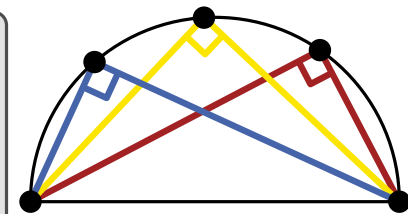
Die Strecken von einem Punkt auf einem Kreis zu den Endpunkten eines Durchmessers bilden einen rechten Winkel.



Satz des Thales

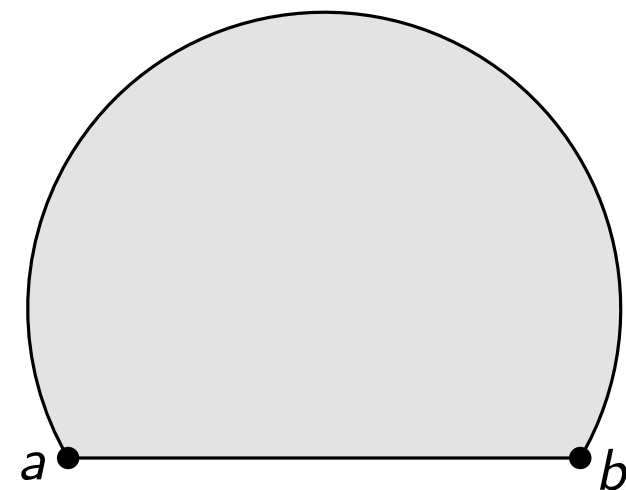
Satz des Thales

Die Strecken von einem Punkt auf einem Kreis zu den Endpunkten eines Durchmessers bilden einen rechten Winkel.



Verallgemeinerung

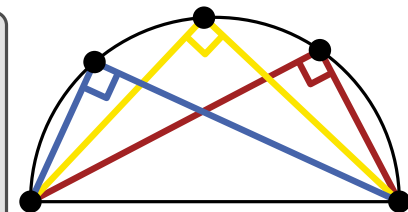
- halte eine beliebige Sehne eines Kreises fest (Endpunkte: a und b)
- halte außerdem eines der beiden Kreissegmente fest



Satz des Thales

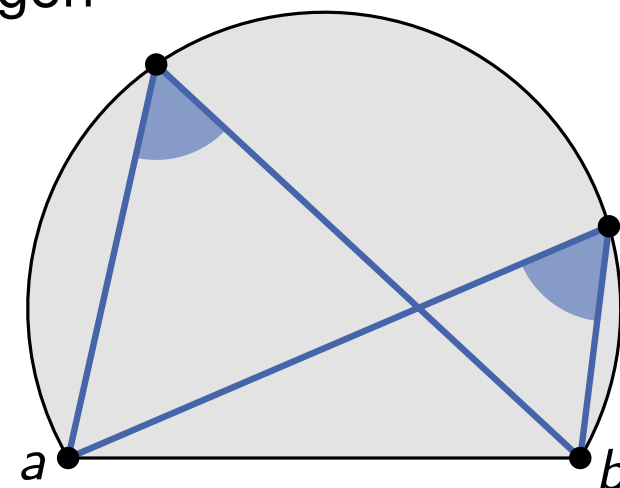
Satz des Thales

Die Strecken von einem Punkt auf einem Kreis zu den Endpunkten eines Durchmessers bilden einen rechten Winkel.



Verallgemeinerung

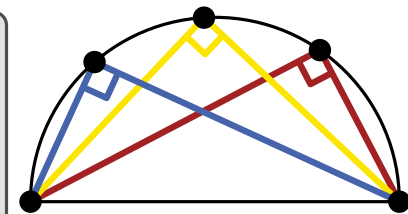
- halte eine beliebige Sehne eines Kreises fest (Endpunkte: a und b)
- halte außerdem eines der beiden Kreissegmente fest
- die Strecken von jedem Punkt auf dem Kreisbogen zu a und b haben denselben Winkel



Satz des Thales

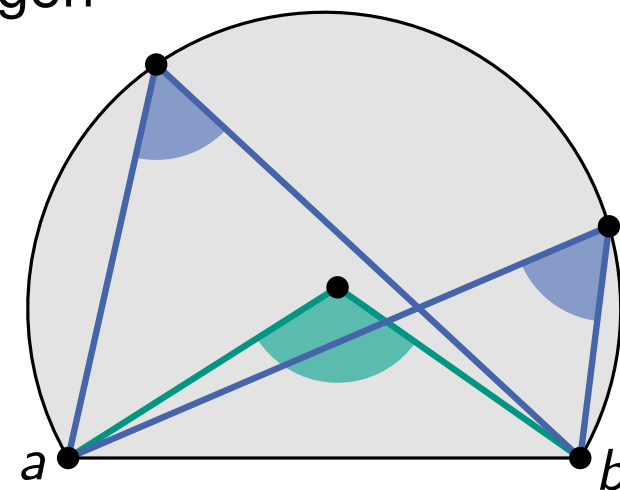
Satz des Thales

Die Strecken von einem Punkt auf einem Kreis zu den Endpunkten eines Durchmessers bilden einen rechten Winkel.



Verallgemeinerung

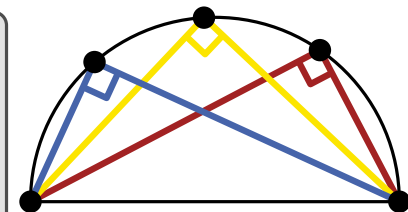
- halte eine beliebige Sehne eines Kreises fest (Endpunkte: a und b)
- halte außerdem eines der beiden Kreissegmente fest
- die Strecken von jedem Punkt auf dem Kreisbogen zu a und b haben denselben Winkel
- für Punkte innerhalb ist der Winkel größer



Satz des Thales

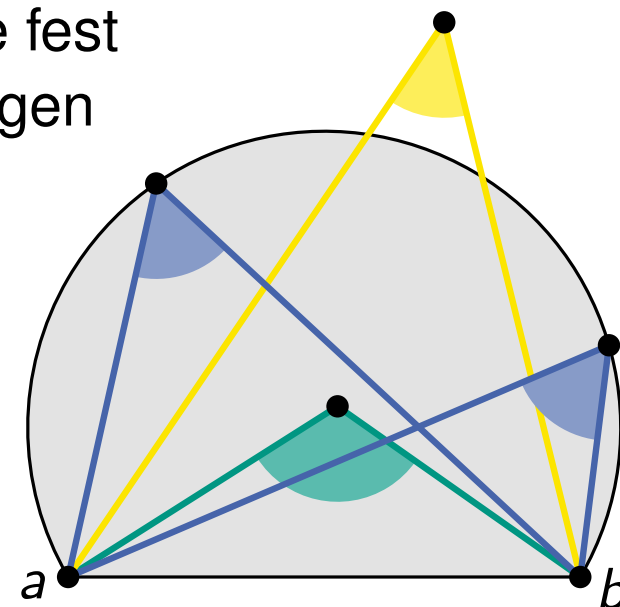
Satz des Thales

Die Strecken von einem Punkt auf einem Kreis zu den Endpunkten eines Durchmessers bilden einen rechten Winkel.



Verallgemeinerung

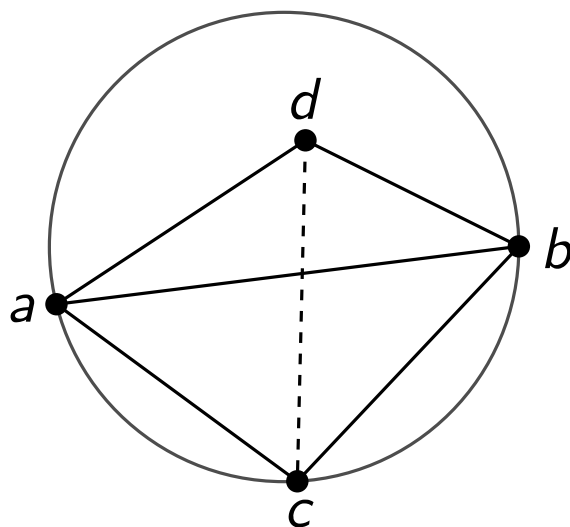
- halte eine beliebige Sehne eines Kreises fest (Endpunkte: a und b)
- halte außerdem eines der beiden Kreissegmente fest
- die Strecken von jedem Punkt auf dem Kreisbogen zu a und b haben denselben Winkel
- für Punkte innerhalb ist der Winkel größer
- für Punkte außerhalb ist der Winkel kleiner
(auf derselben Seite von ab)



Welche Kanten sind verboten?

Lemma

Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.



Welche Kanten sind verboten?

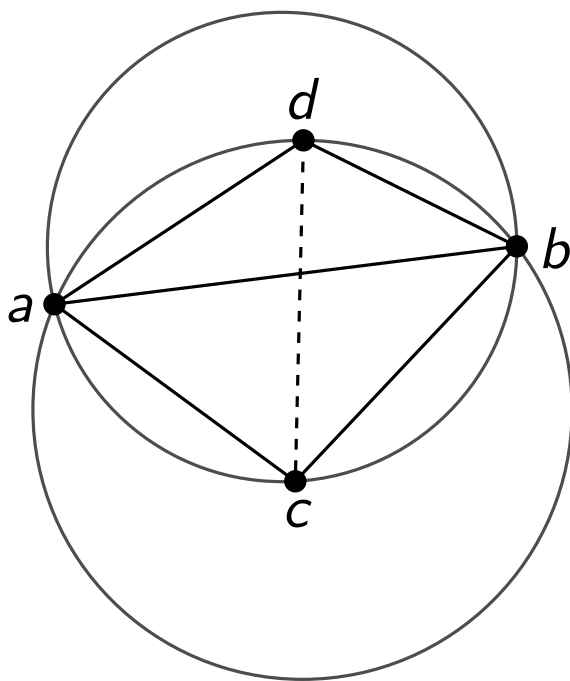
Lemma

Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Beweis

■ beachte: der Umkreis um $\triangle abd$ enthält dann c

Warum?



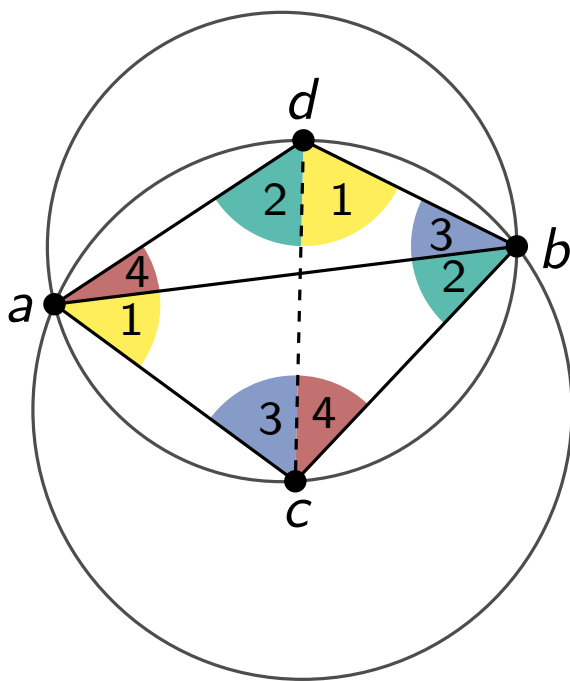
Welche Kanten sind verboten?

Lemma

Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Beweis

- beachte: der Umkreis um $\triangle abd$ enthält dann c
- betrachte Bijektion zwischen Winkeln bei a und b , sowie Winkeln bei c und d der geflippten Kante

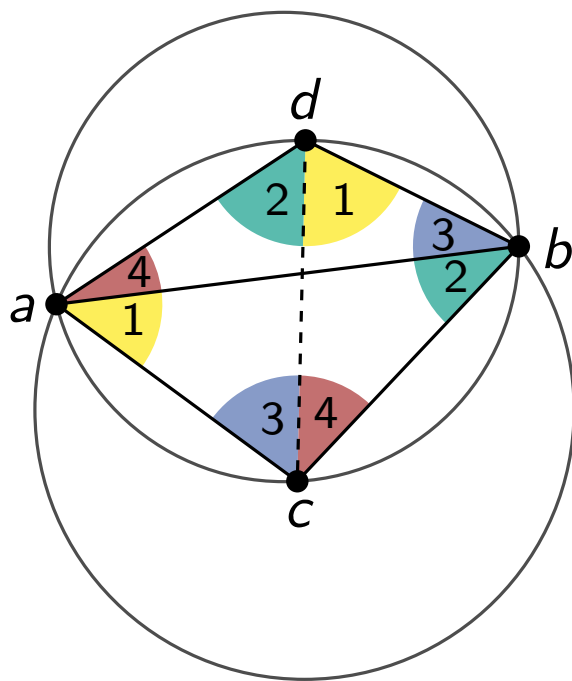


Welche Kanten sind verboten?

Lemma

Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Beweis



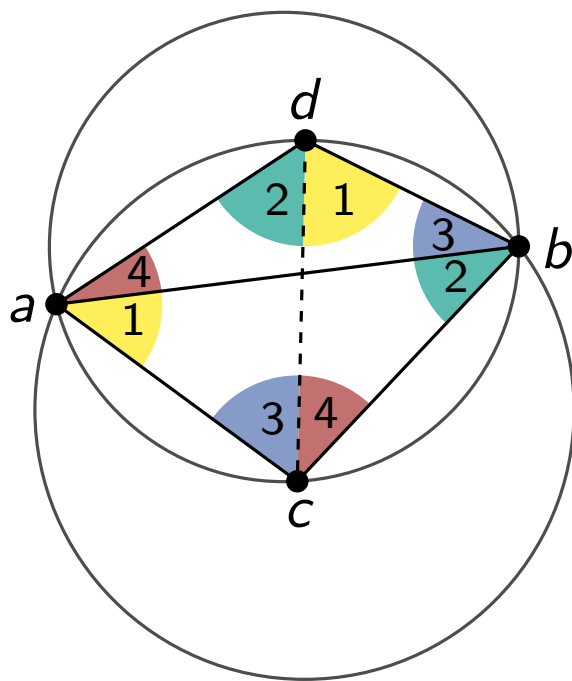
- beachte: der Umkreis um $\triangle abd$ enthält dann c
- betrachte Bijektion zwischen Winkeln bei a und b , sowie Winkeln bei c und d der geflippten Kante
- Behauptung: die Winkel bei ab sind jeweils kleiner als ihr zugehöriger Winkel bei cd

Welche Kanten sind verboten?

Lemma

Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Beweis



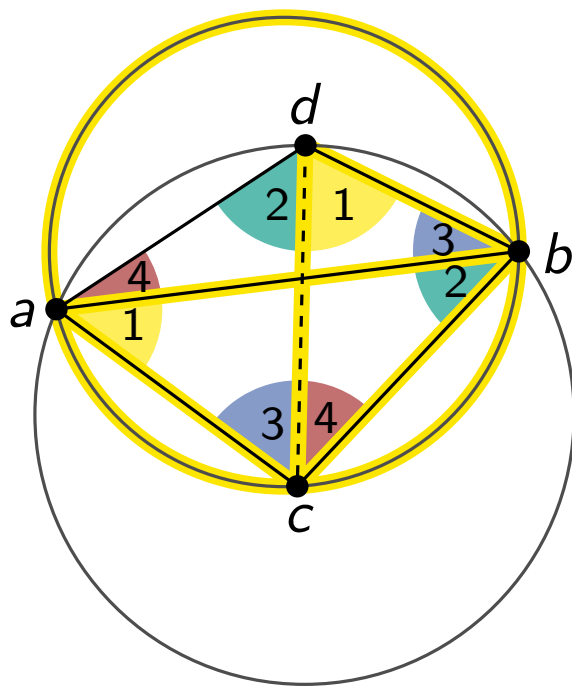
- beachte: der Umkreis um $\triangle abd$ enthält dann c
- betrachte Bijektion zwischen Winkeln bei a und b , sowie Winkeln bei c und d der geflippten Kante
- Behauptung: die Winkel bei ab sind jeweils kleiner als ihr zugehöriger Winkel bei cd
- folgt aus Satz des Thales, wenn man sich die richtigen Dreiecke anschaut

Welche Kanten sind verboten?

Lemma

Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Beweis



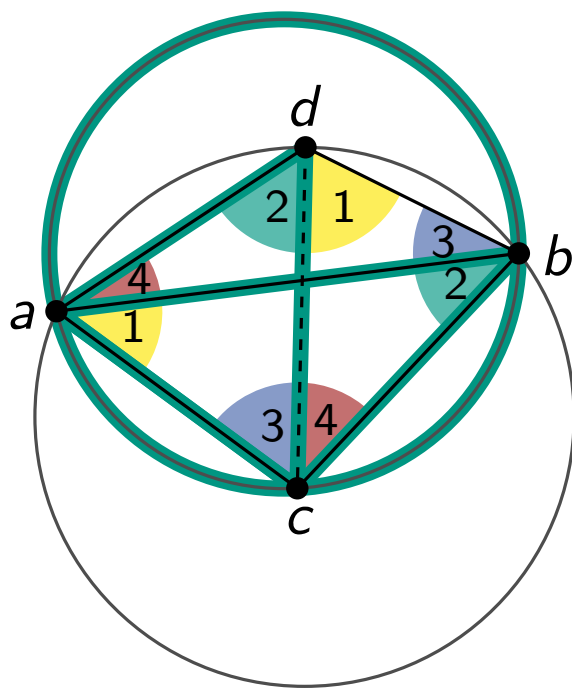
- beachte: der Umkreis um $\triangle abd$ enthält dann c
- betrachte Bijektion zwischen Winkeln bei a und b , sowie Winkeln bei c und d der geflippten Kante
- Behauptung: die Winkel bei ab sind jeweils kleiner als ihr zugehöriger Winkel bei cd
- folgt aus Satz des Thales, wenn man sich die richtigen Dreiecke anschaut

Welche Kanten sind verboten?

Lemma

Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Beweis



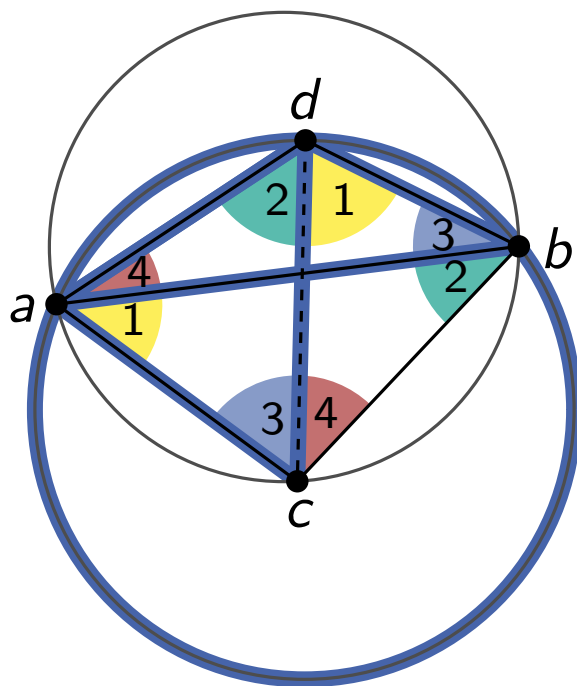
- beachte: der Umkreis um $\triangle abd$ enthält dann c
- betrachte Bijektion zwischen Winkeln bei a und b , sowie Winkeln bei c und d der geflippten Kante
- Behauptung: die Winkel bei ab sind jeweils kleiner als ihr zugehöriger Winkel bei cd
- folgt aus Satz des Thales, wenn man sich die richtigen Dreiecke anschaut

Welche Kanten sind verboten?

Lemma

Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Beweis



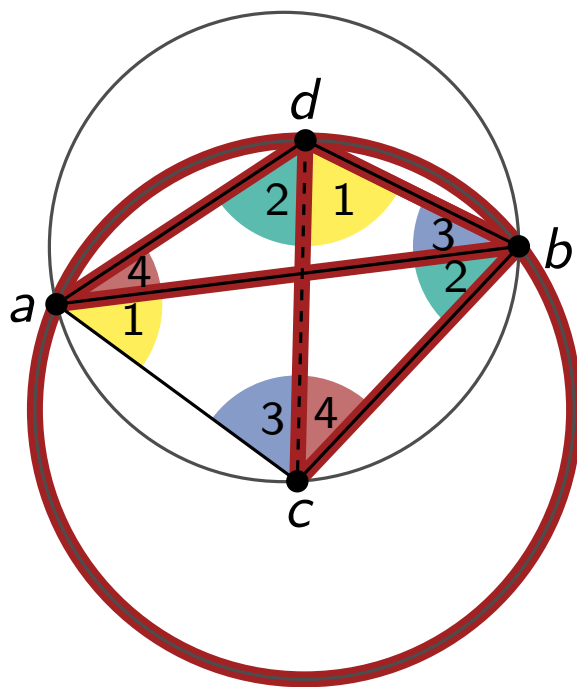
- beachte: der Umkreis um $\triangle abd$ enthält dann c
- betrachte Bijektion zwischen Winkeln bei a und b , sowie Winkeln bei c und d der geflippten Kante
- Behauptung: die Winkel bei ab sind jeweils kleiner als ihr zugehöriger Winkel bei cd
- folgt aus Satz des Thales, wenn man sich die richtigen Dreiecke anschaut

Welche Kanten sind verboten?

Lemma

Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Beweis



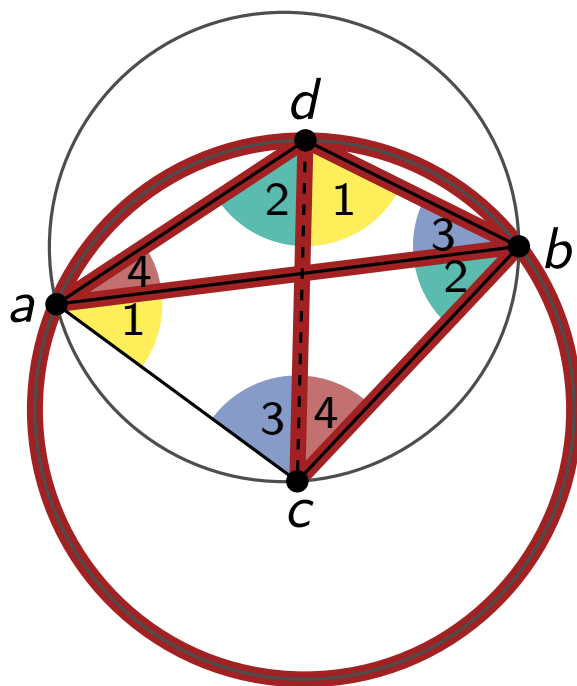
- beachte: der Umkreis um $\triangle abd$ enthält dann c
- betrachte Bijektion zwischen Winkeln bei a und b , sowie Winkeln bei c und d der geflippten Kante
- Behauptung: die Winkel bei ab sind jeweils kleiner als ihr zugehöriger Winkel bei cd
- folgt aus Satz des Thales, wenn man sich die richtigen Dreiecke anschaut

Welche Kanten sind verboten?

Lemma

Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Beweis



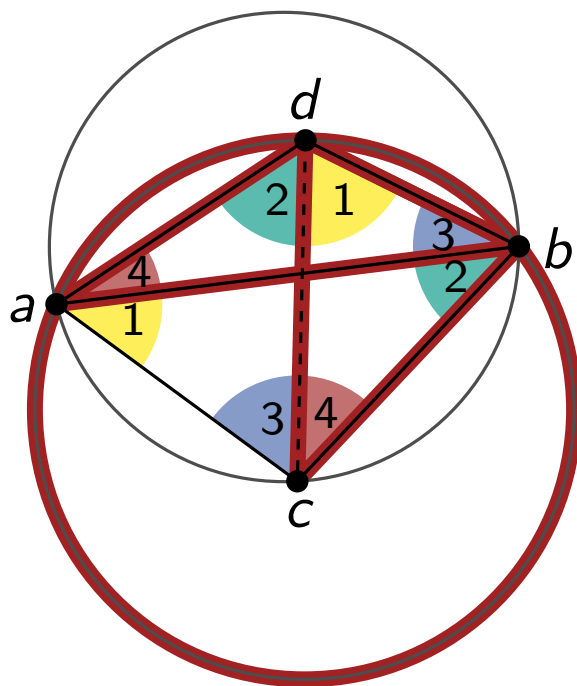
- beachte: der Umkreis um $\triangle abd$ enthält dann c
 - betrachte Bijektion zwischen Winkeln bei a und b , sowie Winkeln bei c und d der geflippten Kante
 - Behauptung: die Winkel bei ab sind jeweils kleiner als ihr zugehöriger Winkel bei cd
 - folgt aus Satz des Thales, wenn man sich die richtigen Dreiecke anschaut
- $\Rightarrow$ minimaler Winkel an cd größer
 $\Rightarrow ab$ ist verboten

Welche Kanten sind verboten?

Lemma

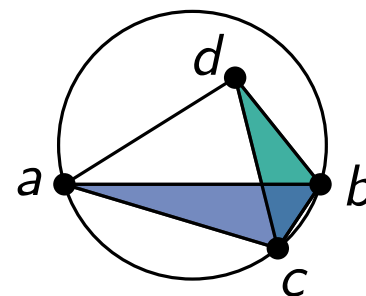
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Beweis



- beachte: der Umkreis um $\triangle abd$ enthält dann c
- betrachte Bijektion zwischen Winkeln bei a und b , sowie Winkeln bei c und d der geflippten Kante
- Behauptung: die Winkel bei ab sind jeweils kleiner als ihr zugehöriger Winkel bei cd
- folgt aus Satz des Thales, wenn man sich die richtigen Dreiecke anschaut
- ⇒ minimaler Winkel an cd größer
- ⇒ ab ist verboten

- Umkehrung folgt im Prinzip analog durch Betrachtung des minimalen Winkels



Verbotene Kanten und leere Umkreise

Lemma

Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Theorem

Eine Triangulierung enthält eine verbotene Kante genau dann, wenn der Umkreis eines Dreiecks einen Knoten enthält.

Verbotene Kanten und leere Umkreise

Lemma

Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Theorem

Eine Triangulierung enthält eine verbotene Kante genau dann, wenn der Umkreis eines Dreiecks einen Knoten enthält.

Beweis

■ verbotene Kante $\Rightarrow$ Umkreis enthält Knoten: folgt aus dem Lemma

Verbotene Kanten und leere Umkreise

Lemma

Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Theorem

Eine Triangulierung enthält eine verbotene Kante genau dann, wenn der Umkreis eines Dreiecks einen Knoten enthält.

Beweis

- verbotene Kante $\Rightarrow$ Umkreis enthält Knoten: folgt aus dem Lemma
- todo: keine verbotene Kante $\Rightarrow$ kein Umkreis enthält Knoten

Verbotene Kanten und leere Umkreise

Lemma

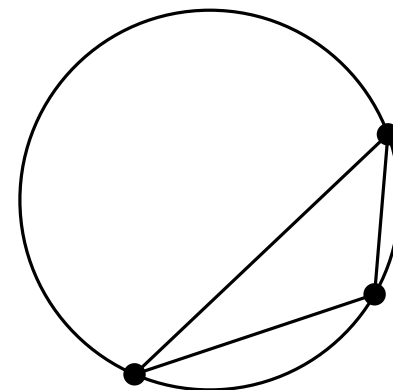
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Theorem

Eine Triangulierung enthält eine verbotene Kante genau dann, wenn der Umkreis eines Dreiecks einen Knoten enthält.

Beweis

- verbotene Kante $\Rightarrow$ Umkreis enthält Knoten: folgt aus dem Lemma
- todo: keine verbotene Kante $\Rightarrow$ kein Umkreis enthält Knoten
- betrachte Umkreis eines Dreiecks



Verbotene Kanten und leere Umkreise

Lemma

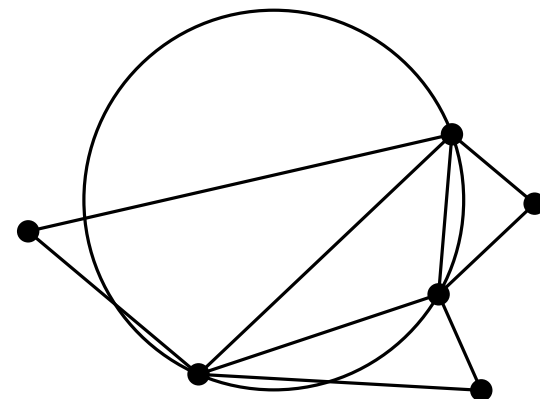
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Theorem

Eine Triangulierung enthält eine verbotene Kante genau dann, wenn der Umkreis eines Dreiecks einen Knoten enthält.

Beweis

- verbotene Kante $\Rightarrow$ Umkreis enthält Knoten: folgt aus dem Lemma
- todo: keine verbotene Kante $\Rightarrow$ kein Umkreis enthält Knoten
- betrachte Umkreis eines Dreiecks
- Lemma: die drei benachbarte Knoten liegen außen



Verbotene Kanten und leere Umkreise

Lemma

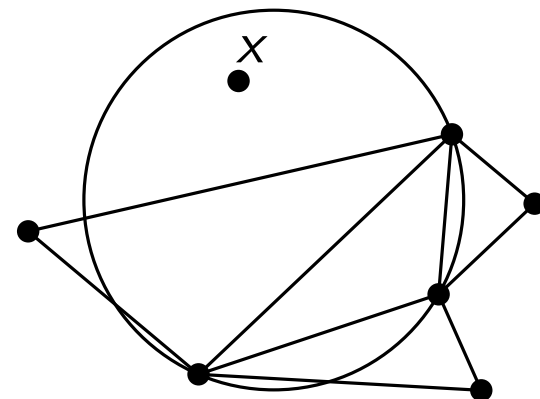
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Theorem

Eine Triangulierung enthält eine verbotene Kante genau dann, wenn der Umkreis eines Dreiecks einen Knoten enthält.

Beweis

- verbotene Kante $\Rightarrow$ Umkreis enthält Knoten: folgt aus dem Lemma
- todo: keine verbotene Kante $\Rightarrow$ kein Umkreis enthält Knoten
- betrachte Umkreis eines Dreiecks
- Lemma: die drei benachbarte Knoten liegen außen
- Problem: unbenachbarter Knoten x



Verbotene Kanten und leere Umkreise

Lemma

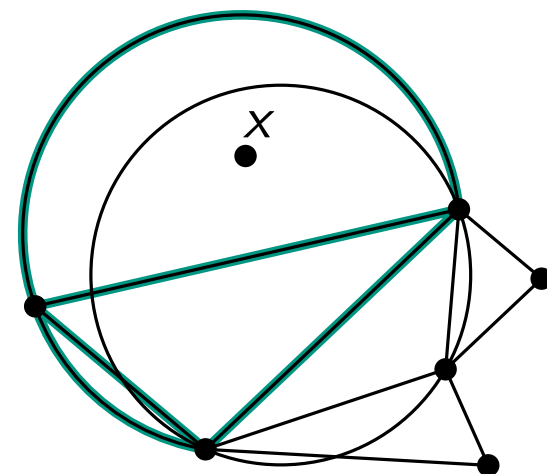
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Theorem

Eine Triangulierung enthält eine verbotene Kante genau dann, wenn der Umkreis eines Dreiecks einen Knoten enthält.

Beweis

- verbotene Kante $\Rightarrow$ Umkreis enthält Knoten: folgt aus dem Lemma
- todo: keine verbotene Kante $\Rightarrow$ kein Umkreis enthält Knoten
- betrachte Umkreis eines Dreiecks
- Lemma: die drei benachbarte Knoten liegen außen
- Problem: unbenachbarter Knoten x
- Idee:
 - betrachte **Dreieck näher an x**
 - **Umkreis** enthält x noch immer
 - iteriere $\rightarrow$ irgendwann haben wir x als Nachbar



Verbotene Kanten und leere Umkreise

Lemma

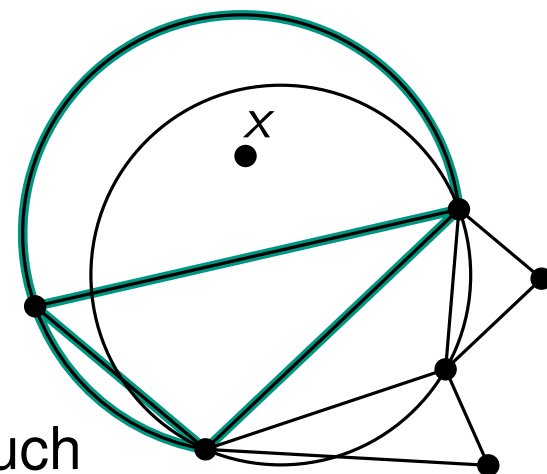
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Theorem

Eine Triangulierung enthält eine verbotene Kante genau dann, wenn der Umkreis eines Dreiecks einen Knoten enthält.

Beweis

- verbotene Kante $\Rightarrow$ Umkreis enthält Knoten: folgt aus dem Lemma
- todo: keine verbotene Kante $\Rightarrow$ kein Umkreis enthält Knoten
- betrachte Umkreis eines Dreiecks
- Lemma: die drei benachbarte Knoten liegen außen
- Problem: unbenachbarter Knoten x
- Idee:
 - betrachte **Dreieck näher an x**
 - **Umkreis** enthält x noch immer
 - iteriere $\rightarrow$ irgendwann haben wir x als Nachbar
- formaler: betrachte Extremsituation, zeige Widerspruch



Verbotene Kanten und leere Umkreise

Lemma

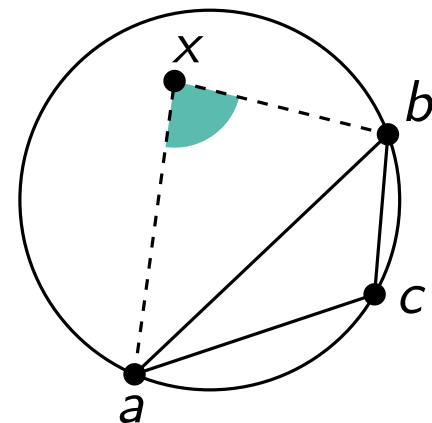
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Theorem

Eine Triangulierung enthält eine verbotene Kante genau dann, wenn der Umkreis eines Dreiecks einen Knoten enthält.

Beweis

- verbotene Kante $\Rightarrow$ Umkreis enthält Knoten: folgt aus dem Lemma
- todo: keine verbotene Kante $\Rightarrow$ kein Umkreis enthält Knoten
- Annahme: Umkreis um $\triangle abc$ enthält x , mit $\angle axb$ maximal



Verbotene Kanten und leere Umkreise

Lemma

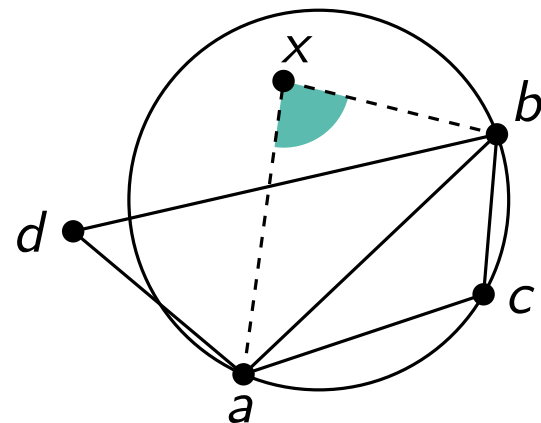
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Theorem

Eine Triangulierung enthält eine verbotene Kante genau dann, wenn der Umkreis eines Dreiecks einen Knoten enthält.

Beweis

- verbotene Kante $\Rightarrow$ Umkreis enthält Knoten: folgt aus dem Lemma
- todo: keine verbotene Kante $\Rightarrow$ kein Umkreis enthält Knoten
- Annahme: Umkreis um $\triangle abc$ enthält x , mit $\angle axb$ maximal
- betrachte anders Dreieck $\triangle abd$ an ab



Verbotene Kanten und leere Umkreise

Lemma

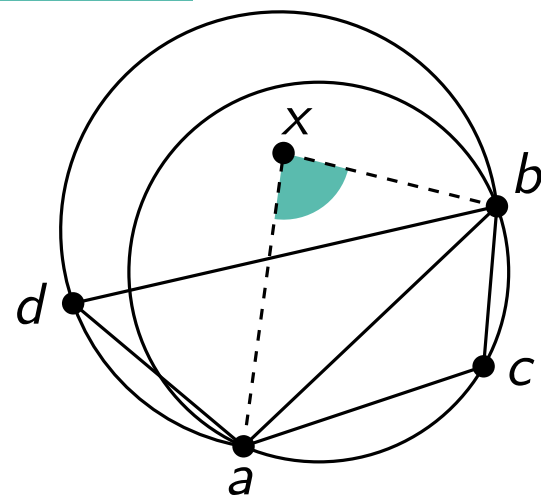
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Theorem

Eine Triangulierung enthält eine verbotene Kante genau dann, wenn der Umkreis eines Dreiecks einen Knoten enthält.

Beweis

- verbotene Kante $\Rightarrow$ Umkreis enthält Knoten: folgt aus dem Lemma
- todo: keine verbotene Kante $\Rightarrow$ kein Umkreis enthält Knoten
- Annahme: Umkreis um $\triangle abc$ enthält x , mit $\angle axb$ maximal
- betrachte anders Dreieck $\triangle abd$ an ab
- Umkreis von $\triangle abd$ enthält ebenfalls x



Verbotene Kanten und leere Umkreise

Lemma

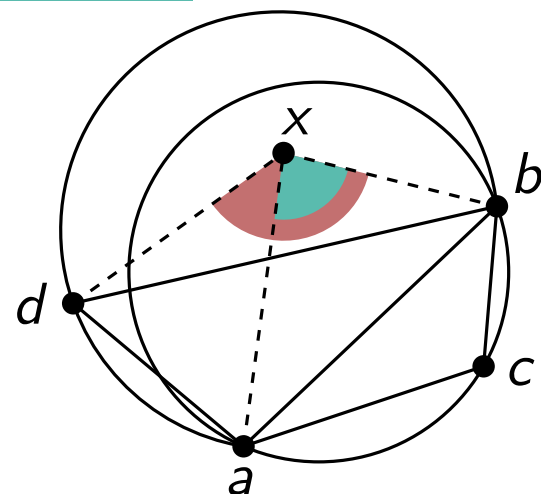
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Theorem

Eine Triangulierung enthält eine verbotene Kante genau dann, wenn der Umkreis eines Dreiecks einen Knoten enthält.

Beweis

- verbotene Kante $\Rightarrow$ Umkreis enthält Knoten: folgt aus dem Lemma
- todo: keine verbotene Kante $\Rightarrow$ kein Umkreis enthält Knoten
- Annahme: Umkreis um $\triangle abc$ enthält x , mit $\angle axb$ maximal
- betrachte anders Dreieck $\triangle abd$ an ab
- Umkreis von $\triangle abd$ enthält ebenfalls x
- $\angle dxb$ ist größer als $\angle axb$ $\rightarrow$ Widerspruch
(oder $\angle axd$)



Lokal maximale Triangulierung

Bisher gesehen

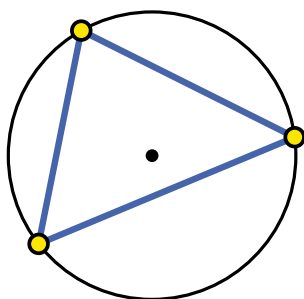
- es gibt keine verbotene Kante
 - die Triangulierung ist lokal maximal
 - der Umkreis jedes Dreiecks enthält keinen Knoten
- } äquivalent

Lokal maximale Triangulierung

Bisher gesehen

- es gibt keine verbotene Kante
 - die Triangulierung ist lokal maximal
 - der Umkreis jedes Dreiecks enthält keinen Knoten
- } äquivalent

Für lokal optimale Triangulierungen folgt

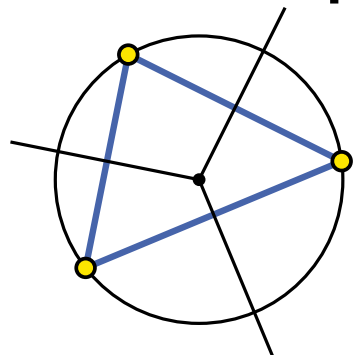


Lokal maximale Triangulierung

Bisher gesehen

- es gibt keine verbotene Kante
 - die Triangulierung ist lokal maximal
 - der Umkreis jedes Dreiecks enthält keinen Knoten
- } äquivalent

Für lokal optimale Triangulierungen folgt



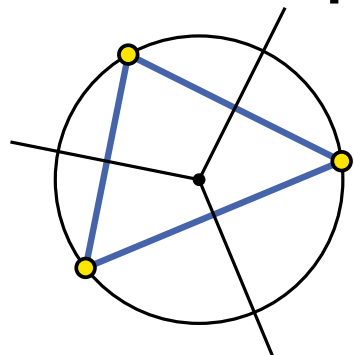
- für jedes Dreieck ist der Umkreis-Mittelpunkt ein Voronoi-Knoten

Lokal maximale Triangulierung

Bisher gesehen

- es gibt keine verbotene Kante
 - die Triangulierung ist lokal maximal
 - der Umkreis jedes Dreiecks enthält keinen Knoten
- } äquivalent

Für lokal optimale Triangulierungen folgt



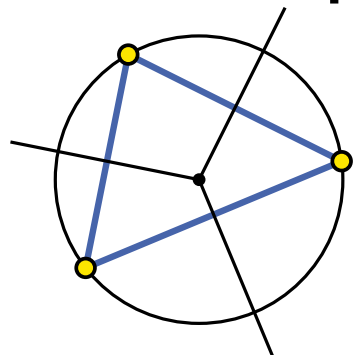
- für jedes Dreieck ist der Umkreis-Mittelpunkt ein Voronoi-Knoten
- die Kanten des Dreiecks entsprechen den Voronoi-Kanten inzident zum Voronoi-Knoten

Lokal maximale Triangulierung

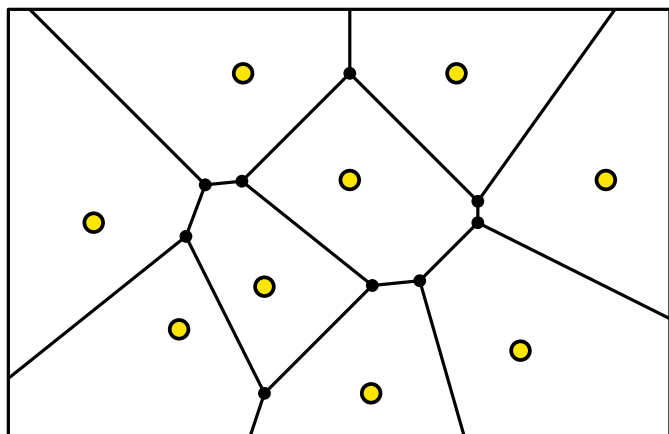
Bisher gesehen

- es gibt keine verbotene Kante
 - die Triangulierung ist lokal maximal
 - der Umkreis jedes Dreiecks enthält keinen Knoten
- } äquivalent

Für lokal optimale Triangulierungen folgt



- für jedes Dreieck ist der Umkreis-Mittelpunkt ein Voronoi-Knoten
 - die Kanten des Dreiecks entsprechen den Voronoi-Kanten inzident zum Voronoi-Knoten
- ⇒ wir erhalten den Dualgraph des Voronoi-Diagramms

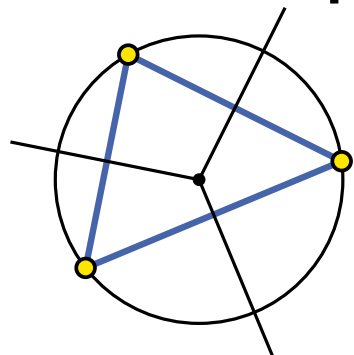


Lokal maximale Triangulierung

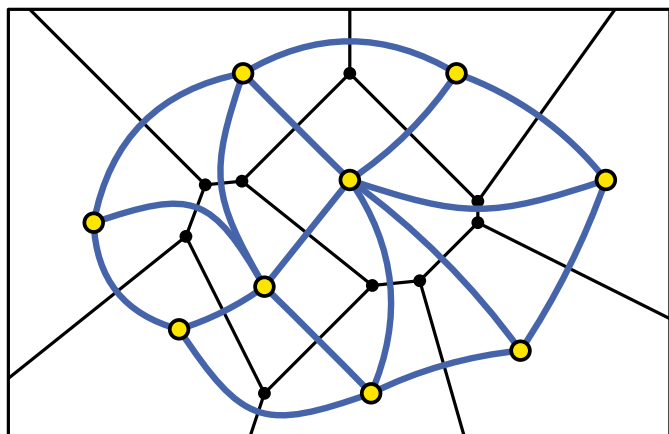
Bisher gesehen

- es gibt keine verbotene Kante
 - die Triangulierung ist lokal maximal
 - der Umkreis jedes Dreiecks enthält keinen Knoten
- } äquivalent

Für lokal optimale Triangulierungen folgt



- für jedes Dreieck ist der Umkreis-Mittelpunkt ein Voronoi-Knoten
 - die Kanten des Dreiecks entsprechen den Voronoi-Kanten inzident zum Voronoi-Knoten
- ⇒ wir erhalten den Dualgraph des Voronoi-Diagramms

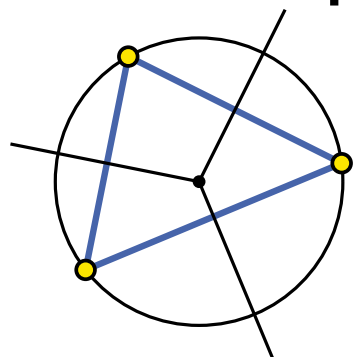


Lokal maximale Triangulierung

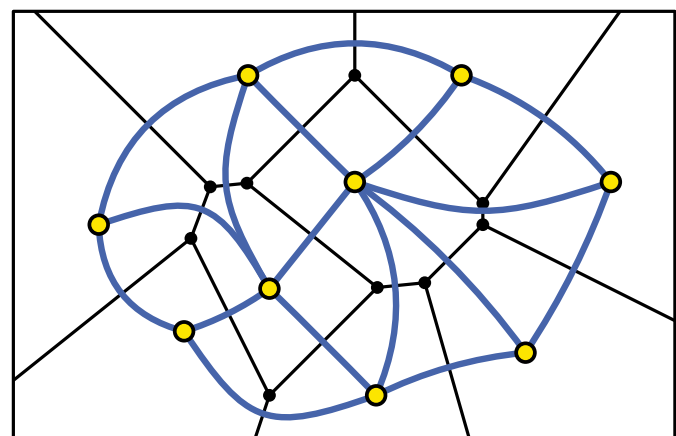
Bisher gesehen

- es gibt keine verbotene Kante
 - die Triangulierung ist lokal maximal
 - der Umkreis jedes Dreiecks enthält keinen Knoten
- } äquivalent

Für lokal optimale Triangulierungen folgt



- für jedes Dreieck ist der Umkreis-Mittelpunkt ein Voronoi-Knoten
 - die Kanten des Dreiecks entsprechen den Voronoi-Kanten inzident zum Voronoi-Knoten
- ⇒ wir erhalten den Dualgraph des Voronoi-Diagramms



Umgekehrt gilt für den Dualgraph

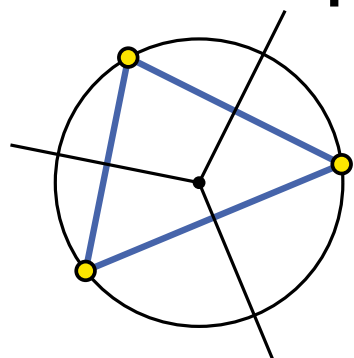
- bildet eine Triangulierung
- (Annahme: keine vier Knoten auf dem gleichen Kreis)

Lokal maximale Triangulierung

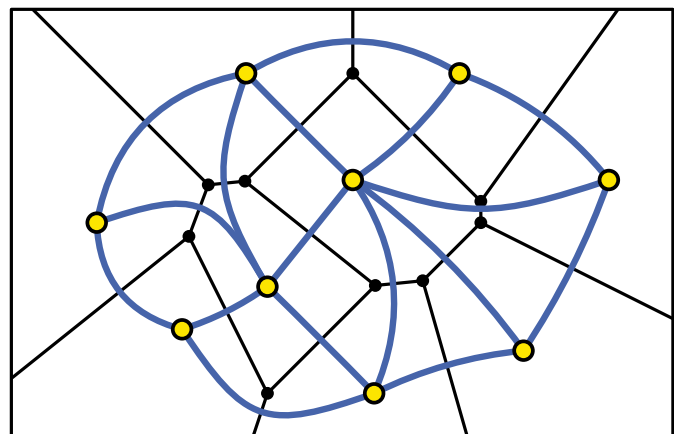
Bisher gesehen

- es gibt keine verbotene Kante
 - die Triangulierung ist lokal maximal
 - der Umkreis jedes Dreiecks enthält keinen Knoten
- } äquivalent

Für lokal optimale Triangulierungen folgt



- für jedes Dreieck ist der Umkreis-Mittelpunkt ein Voronoi-Knoten
 - die Kanten des Dreiecks entsprechen den Voronoi-Kanten inzident zum Voronoi-Knoten
- ⇒ wir erhalten den Dualgraph des Voronoi-Diagramms



Umgekehrt gilt für den Dualgraph

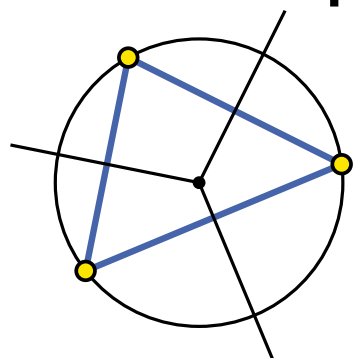
- bildet eine Triangulierung
(Annahme: keine vier Knoten auf dem gleichen Kreis)
- Umkreis jeder Facette enthält keinen Knoten
⇒ lokal optimale Triangulierung

Lokal maximale Triangulierung

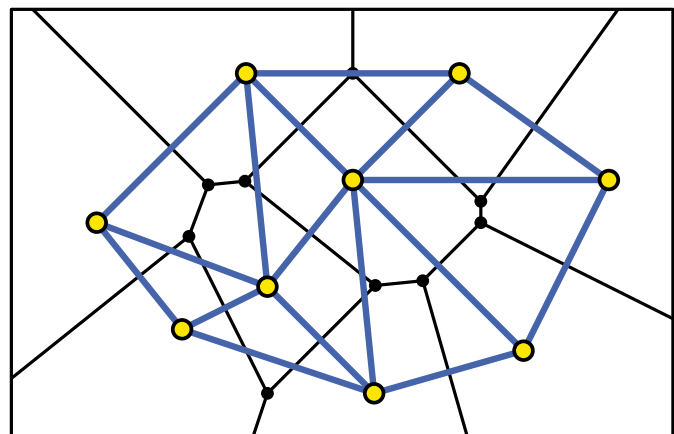
Bisher gesehen

- es gibt keine verbotene Kante
 - die Triangulierung ist lokal maximal
 - der Umkreis jedes Dreiecks enthält keinen Knoten
- } äquivalent

Für lokal optimale Triangulierungen folgt



- für jedes Dreieck ist der Umkreis-Mittelpunkt ein Voronoi-Knoten
 - die Kanten des Dreiecks entsprechen den Voronoi-Kanten inzident zum Voronoi-Knoten
- ⇒ wir erhalten den Dualgraph des Voronoi-Diagramms



Umgekehrt gilt für den Dualgraph

- bildet eine Triangulierung
(Annahme: keine vier Knoten auf dem gleichen Kreis)
- Umkreis jeder Facette enthält keinen Knoten
⇒ lokal optimale Triangulierung

Müssen wir nicht noch zeigen, dass es keine Kantenkreuzungen gibt?

Delaunay-Triangulierung

Der Dualgraph des Voronoi-Diagramms heißt **Delaunay-Triangulierung**.

Delaunay-Triangulierung

Der Dualgraph des Voronoi-Diagramms heißt **Delaunay-Triangulierung**.

Gerade gesehen

- die Delaunay-Triangulierung ist lokal maximal
- wenn $\mathcal{T}$ lokal maximal ist, dann ist $\mathcal{T}$ die Delaunay-Triangulierung

Delaunay-Triangulierung

Der Dualgraph des Voronoi-Diagramms heißt **Delaunay-Triangulierung**.

Gerade gesehen

- die Delaunay-Triangulierung ist lokal maximal
- wenn $\mathcal{T}$ lokal maximal ist, dann ist $\mathcal{T}$ die Delaunay-Triangulierung

Daraus folgt

- die lokal maximale Triangulierung ist eindeutig (nämlich die Delaunay-Triang.)

Delaunay-Triangulierung

Der Dualgraph des Voronoi-Diagramms heißt **Delaunay-Triangulierung**.

Gerade gesehen

- die Delaunay-Triangulierung ist lokal maximal
- wenn $\mathcal{T}$ lokal maximal ist, dann ist $\mathcal{T}$ die Delaunay-Triangulierung

Daraus folgt

- die lokal maximale Triangulierung ist eindeutig (nämlich die Delaunay-Triang.)
- die Delaunay-Triangulierung ist also global maximal

Delaunay-Triangulierung

Der Dualgraph des Voronoi-Diagramms heißt **Delaunay-Triangulierung**.

Gerade gesehen

- die Delaunay-Triangulierung ist lokal maximal
- wenn $\mathcal{T}$ lokal maximal ist, dann ist $\mathcal{T}$ die Delaunay-Triangulierung

Daraus folgt

- die lokal maximale Triangulierung ist eindeutig (nämlich die Delaunay-Triang.)
- die Delaunay-Triangulierung ist also global maximal
- sie kann in $O(n \log n)$ berechnet werden (Beach-Line Algo)

Delaunay-Triangulierung

Der Dualgraph des Voronoi-Diagramms heißt **Delaunay-Triangulierung**.

Gerade gesehen

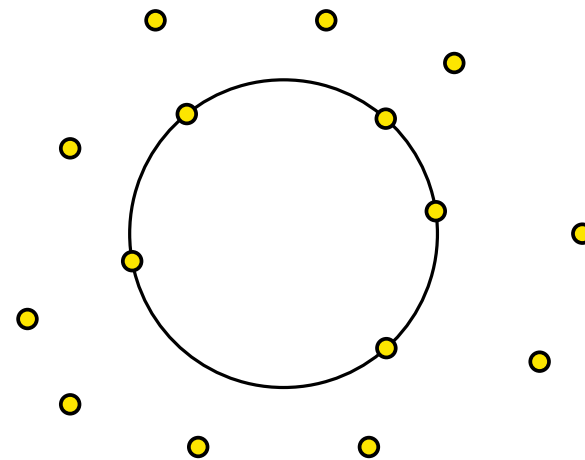
- die Delaunay-Triangulierung ist lokal maximal
- wenn $\mathcal{T}$ lokal maximal ist, dann ist $\mathcal{T}$ die Delaunay-Triangulierung

Daraus folgt

- die lokal maximale Triangulierung ist eindeutig (nämlich die Delaunay-Triang.)
- die Delaunay-Triangulierung ist also global maximal
- sie kann in $O(n \log n)$ berechnet werden

(Beach-Line Algo)

Mehrere Punkte auf einem Kreis



Delaunay-Triangulierung

Der Dualgraph des Voronoi-Diagramms heißt **Delaunay-Triangulierung**.

Gerade gesehen

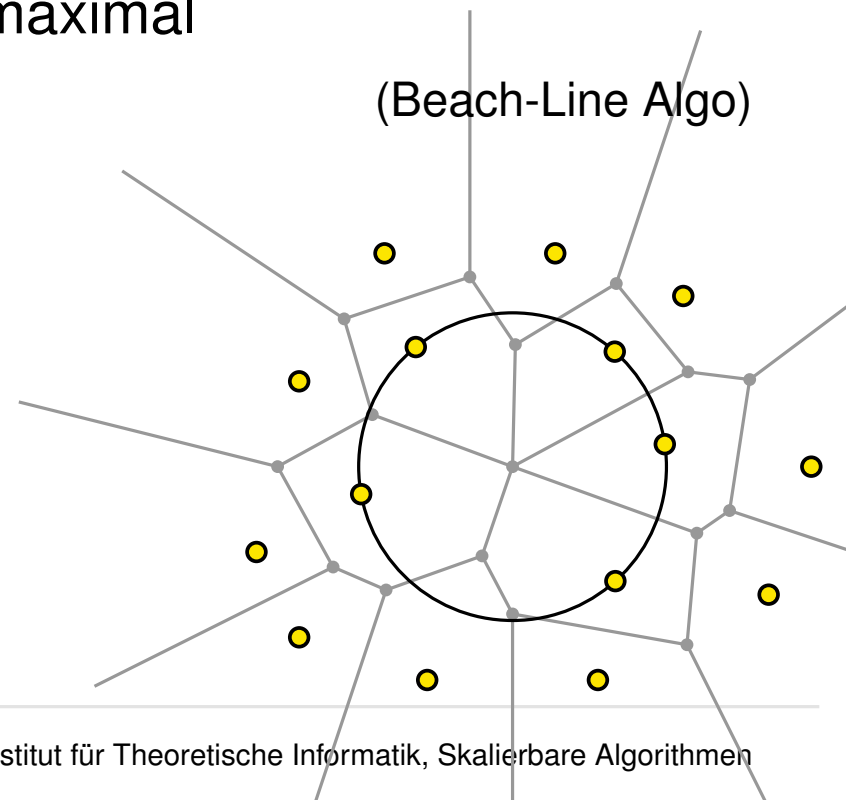
- die Delaunay-Triangulierung ist lokal maximal
- wenn $\mathcal{T}$ lokal maximal ist, dann ist $\mathcal{T}$ die Delaunay-Triangulierung

Daraus folgt

- die lokal maximale Triangulierung ist eindeutig (nämlich die Delaunay-Triang.)
- die Delaunay-Triangulierung ist also global maximal
- sie kann in $O(n \log n)$ berechnet werden

Mehrere Punkte auf einem Kreis

- Voronoi-Knoten hat höheren Grad



Delaunay-Triangulierung

Der Dualgraph des Voronoi-Diagramms heißt **Delaunay-Triangulierung**.

Gerade gesehen

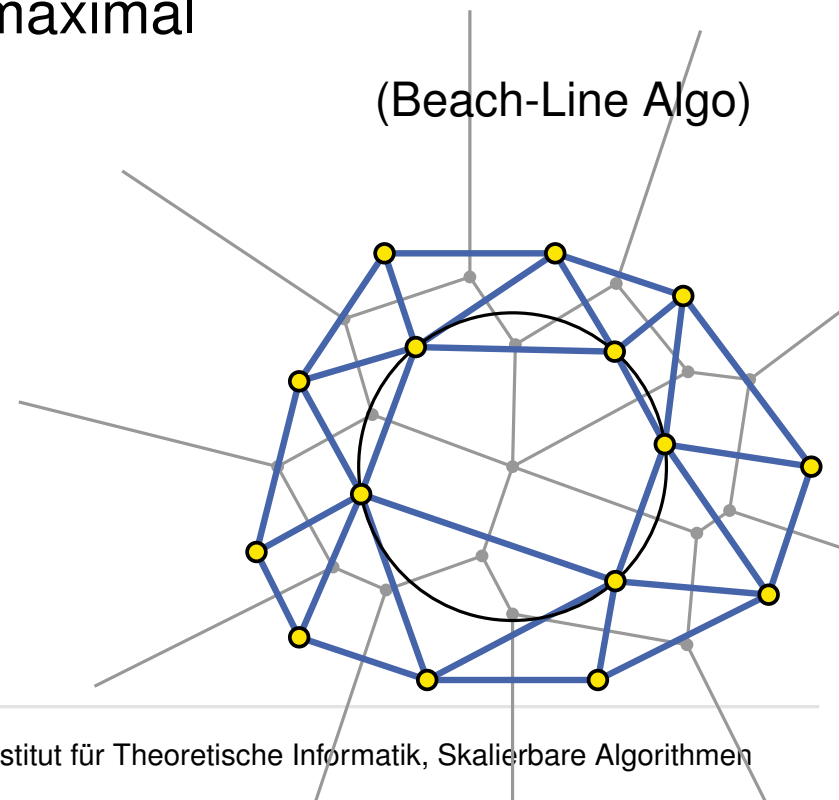
- die Delaunay-Triangulierung ist lokal maximal
- wenn $\mathcal{T}$ lokal maximal ist, dann ist $\mathcal{T}$ die Delaunay-Triangulierung

Daraus folgt

- die lokal maximale Triangulierung ist eindeutig (nämlich die Delaunay-Triang.)
- die Delaunay-Triangulierung ist also global maximal
- sie kann in $O(n \log n)$ berechnet werden

Mehrere Punkte auf einem Kreis

- Voronoi-Knoten hat höheren Grad
- Dualgraph ist keine Triangulierung



Delaunay-Triangulierung

Der Dualgraph des Voronoi-Diagramms heißt **Delaunay-Triangulierung**.

Gerade gesehen

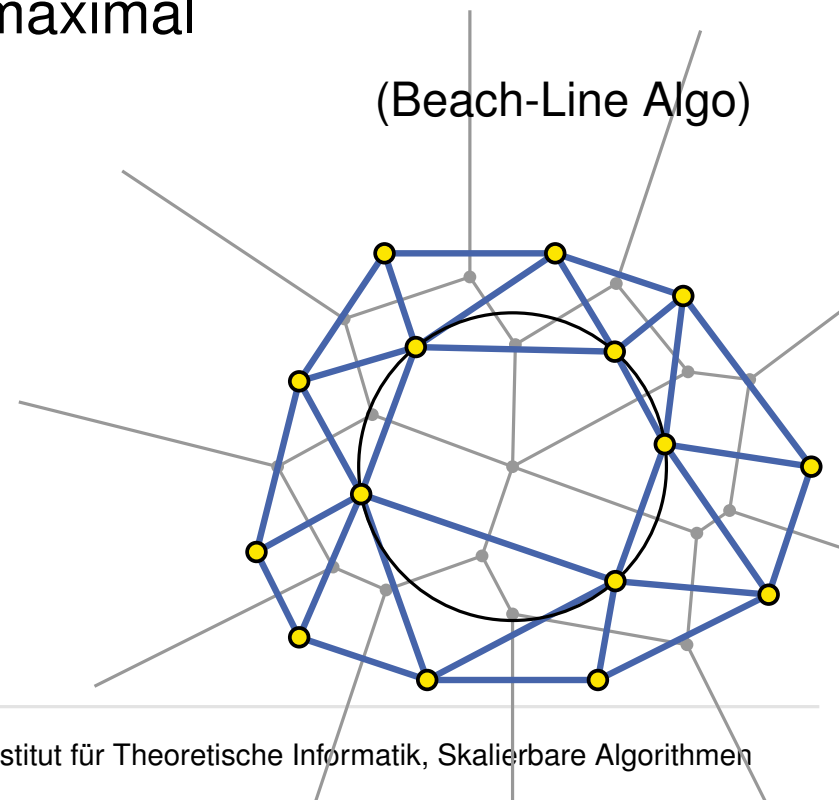
- die Delaunay-Triangulierung ist lokal maximal
- wenn $\mathcal{T}$ lokal maximal ist, dann ist $\mathcal{T}$ die Delaunay-Triangulierung

Daraus folgt

- die lokal maximale Triangulierung ist eindeutig (nämlich die Delaunay-Triang.)
- die Delaunay-Triangulierung ist also global maximal
- sie kann in $O(n \log n)$ berechnet werden

Mehrere Punkte auf einem Kreis

- Voronoi-Knoten hat höheren Grad
- Dualgraph ist keine Triangulierung
- es gibt mehrere Delaunay-Triangulierungen



Delaunay-Triangulierung

Der Dualgraph des Voronoi-Diagramms heißt **Delaunay-Triangulierung**.

Gerade gesehen

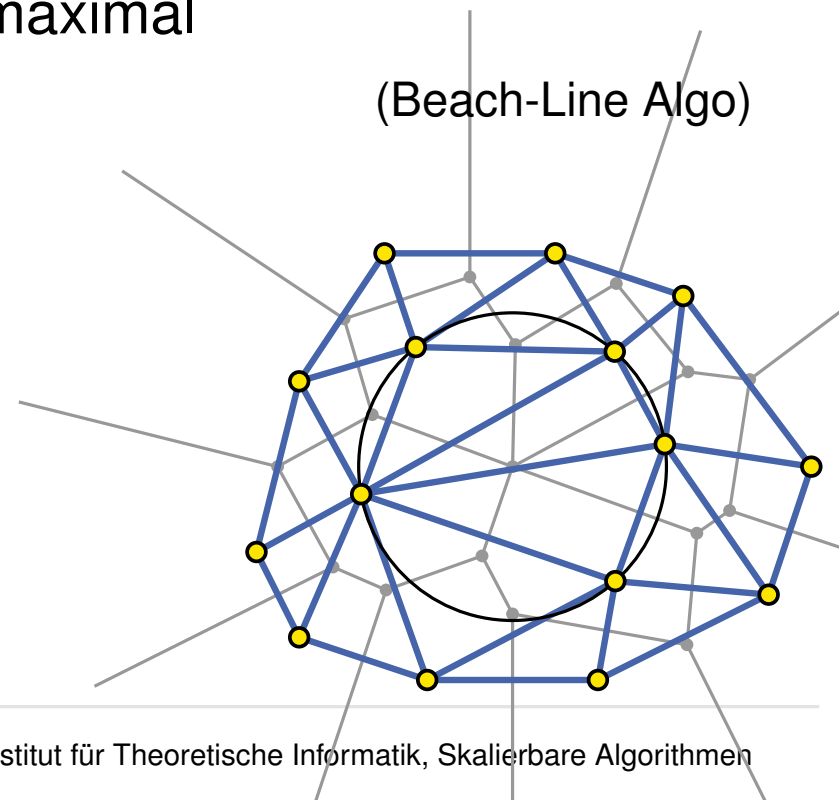
- die Delaunay-Triangulierung ist lokal maximal
- wenn $\mathcal{T}$ lokal maximal ist, dann ist $\mathcal{T}$ die Delaunay-Triangulierung

Daraus folgt

- die lokal maximale Triangulierung ist eindeutig (nämlich die Delaunay-Triang.)
- die Delaunay-Triangulierung ist also global maximal
- sie kann in $O(n \log n)$ berechnet werden

Mehrere Punkte auf einem Kreis

- Voronoi-Knoten hat höheren Grad
- Dualgraph ist keine Triangulierung
- es gibt mehrere Delaunay-Triangulierungen



Delaunay-Triangulierung

Der Dualgraph des Voronoi-Diagramms heißt **Delaunay-Triangulierung**.

Gerade gesehen

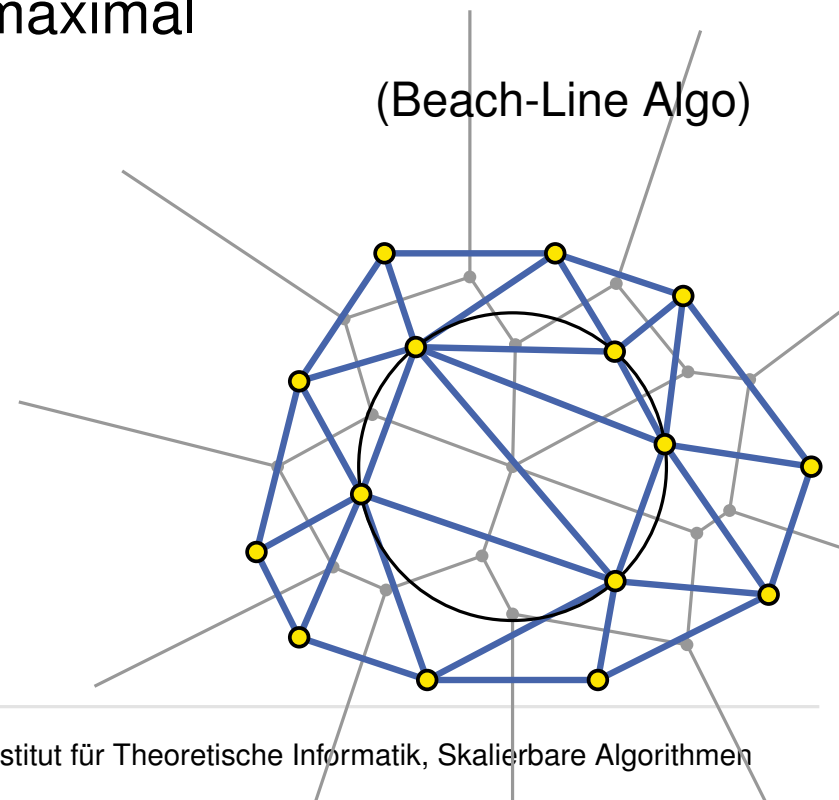
- die Delaunay-Triangulierung ist lokal maximal
- wenn $\mathcal{T}$ lokal maximal ist, dann ist $\mathcal{T}$ die Delaunay-Triangulierung

Daraus folgt

- die lokal maximale Triangulierung ist eindeutig (nämlich die Delaunay-Triang.)
- die Delaunay-Triangulierung ist also global maximal
- sie kann in $O(n \log n)$ berechnet werden

Mehrere Punkte auf einem Kreis

- Voronoi-Knoten hat höheren Grad
- Dualgraph ist keine Triangulierung
- es gibt mehrere Delaunay-Triangulierungen



Delaunay-Triangulierung

Der Dualgraph des Voronoi-Diagramms heißt **Delaunay-Triangulierung**.

Gerade gesehen

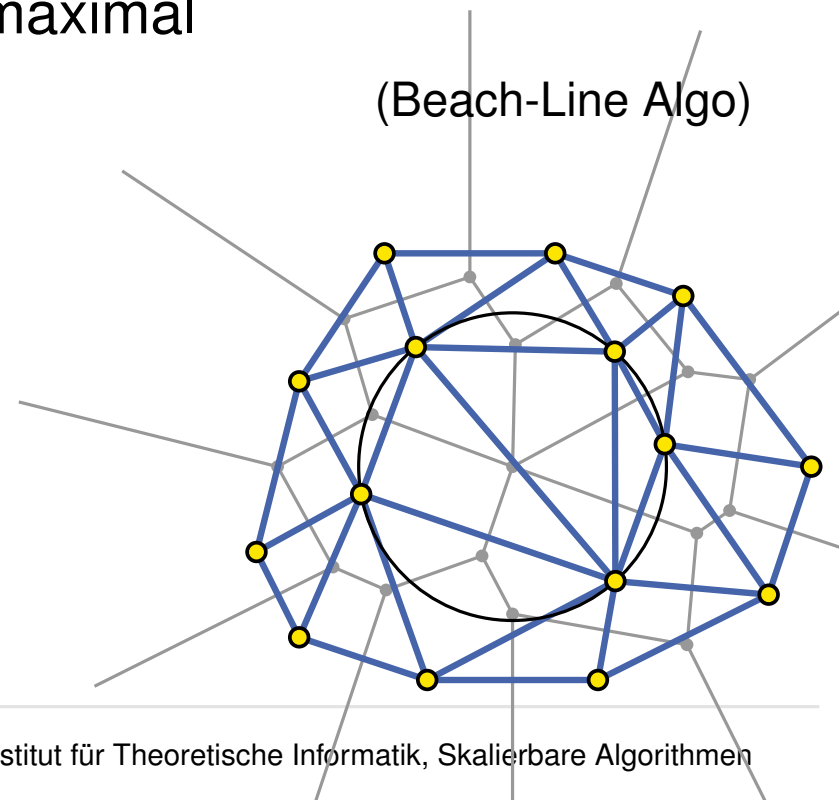
- die Delaunay-Triangulierung ist lokal maximal
- wenn $\mathcal{T}$ lokal maximal ist, dann ist $\mathcal{T}$ die Delaunay-Triangulierung

Daraus folgt

- die lokal maximale Triangulierung ist eindeutig (nämlich die Delaunay-Triang.)
- die Delaunay-Triangulierung ist also global maximal
- sie kann in $O(n \log n)$ berechnet werden

Mehrere Punkte auf einem Kreis

- Voronoi-Knoten hat höheren Grad
- Dualgraph ist keine Triangulierung
- es gibt mehrere Delaunay-Triangulierungen



Delaunay-Triangulierung

Der Dualgraph des Voronoi-Diagramms heißt **Delaunay-Triangulierung**.

Gerade gesehen

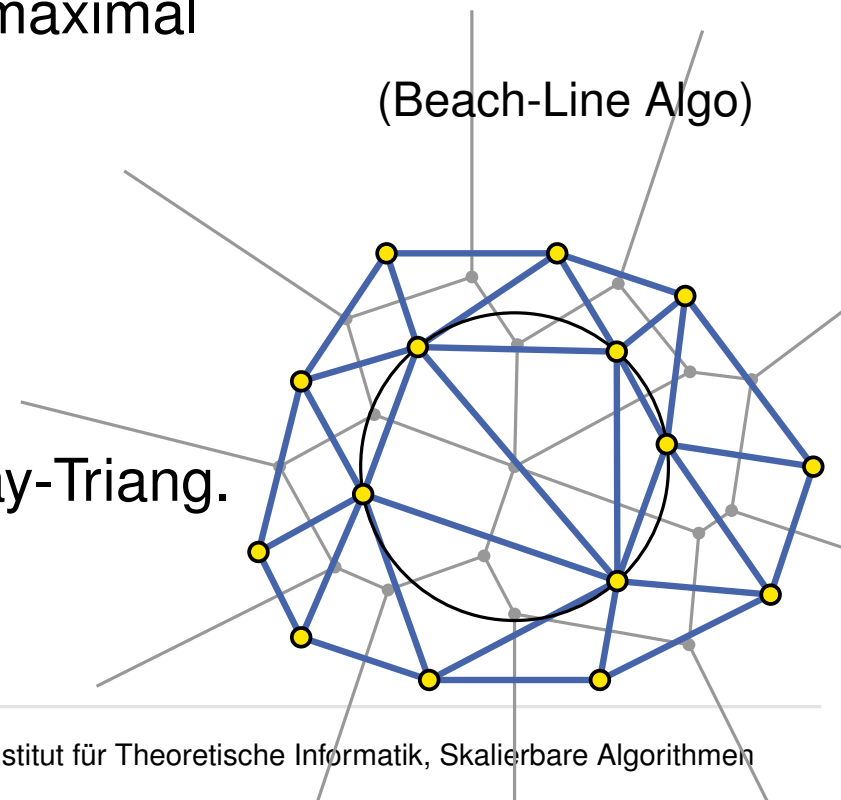
- die Delaunay-Triangulierung ist lokal maximal
- wenn $\mathcal{T}$ lokal maximal ist, dann ist $\mathcal{T}$ die Delaunay-Triangulierung

Daraus folgt

- die lokal maximale Triangulierung ist eindeutig (nämlich die Delaunay-Triang.)
- die Delaunay-Triangulierung ist also global maximal
- sie kann in $O(n \log n)$ berechnet werden

Mehrere Punkte auf einem Kreis

- Voronoi-Knoten hat höheren Grad
- Dualgraph ist keine Triangulierung
- es gibt mehrere Delaunay-Triangulierungen
- jede lokal maximale Triang. ist eine Delaunay-Triang.
- nicht alle sind global maximal



Delaunay-Triangulierung

Der Dualgraph des Voronoi-Diagramms heißt **Delaunay-Triangulierung**.

Gerade gesehen

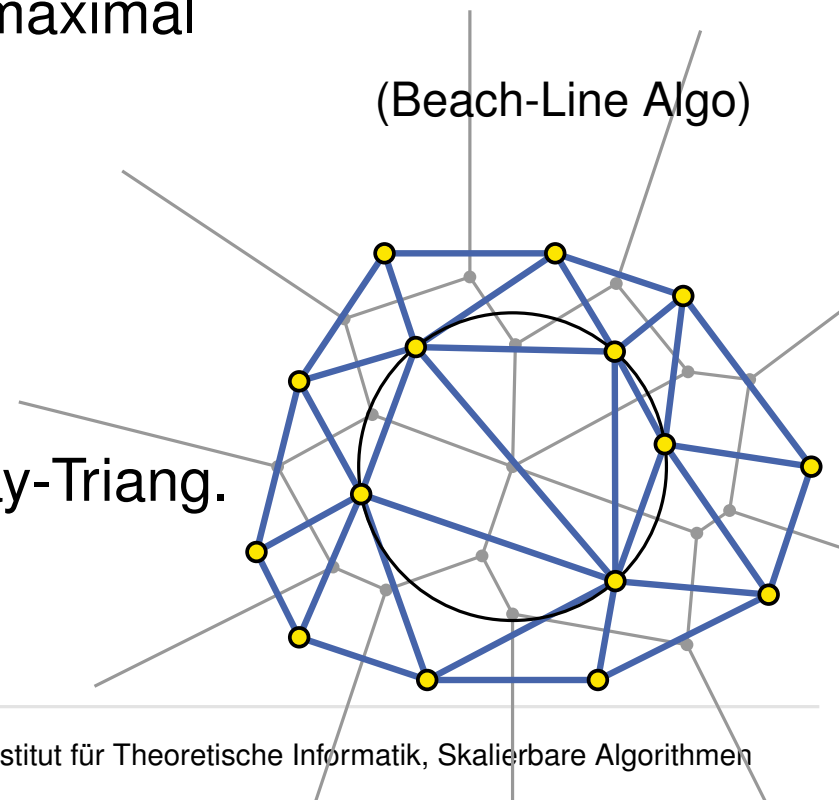
- die Delaunay-Triangulierung ist lokal maximal
- wenn $\mathcal{T}$ lokal maximal ist, dann ist $\mathcal{T}$ die Delaunay-Triangulierung

Daraus folgt

- die lokal maximale Triangulierung ist eindeutig (nämlich die Delaunay-Triang.)
- die Delaunay-Triangulierung ist also global maximal
- sie kann in $O(n \log n)$ berechnet werden

Mehrere Punkte auf einem Kreis

- Voronoi-Knoten hat höheren Grad
- Dualgraph ist keine Triangulierung
- es gibt mehrere Delaunay-Triangulierungen
- jede lokal maximale Triang. ist eine Delaunay-Triang.
- nicht alle sind global maximal
- mehr dazu in der Übung



Zusammenfassung

Heute gesehen

- die Delaunay-Triangulierung hat schöne Eigenschaften
 - lexikographisch maximaler Winkelvektor
 - Dualgraph zum Voronoi-Diagramm

Zusammenfassung

Heute gesehen

- die Delaunay-Triangulierung hat schöne Eigenschaften
 - lexikographisch maximaler Winkelvektor
 - Dualgraph zum Voronoi-Diagramm
- Beweistechnik: lokales Optimum eindeutig $\Rightarrow$ muss globales Optimum sein

Zusammenfassung

Heute gesehen

- die Delaunay-Triangulierung hat schöne Eigenschaften
 - lexikographisch maximaler Winkelvektor
 - Dualgraph zum Voronoi-Diagramm
- Beweistechnik: lokales Optimum eindeutig $\Rightarrow$ muss globales Optimum sein

Was gibt es sonst noch?

- die Delaunay-Triangulierung hat weitere schöne Eigenschaften (Beispiel: MST ist Teil der Triangulierung)

Zusammenfassung

Heute gesehen

- die Delaunay-Triangulierung hat schöne Eigenschaften
 - lexikographisch maximaler Winkelvektor
 - Dualgraph zum Voronoi-Diagramm
- Beweistechnik: lokales Optimum eindeutig $\Rightarrow$ muss globales Optimum sein

Was gibt es sonst noch?

- die Delaunay-Triangulierung hat weitere schöne Eigenschaften (Beispiel: MST ist Teil der Triangulierung)
- weitere Optimierungskriterien für Triangulierungen: Minimierung der Gesamtkantenlänge ist beispielsweise NP-schwer

Zusammenfassung

Heute gesehen

- die Delaunay-Triangulierung hat schöne Eigenschaften
 - lexikographisch maximaler Winkelvektor
 - Dualgraph zum Voronoi-Diagramm
- Beweistechnik: lokales Optimum eindeutig $\Rightarrow$ muss globales Optimum sein

Was gibt es sonst noch?

- die Delaunay-Triangulierung hat weitere schöne Eigenschaften (Beispiel: MST ist Teil der Triangulierung)
- weitere Optimierungskriterien für Triangulierungen: Minimierung der Gesamtkantenlänge ist beispielsweise NP-schwer
- Voronoi-Diagramme und Delaunay-Triangulierungen in Ipe:
<https://github.com/otfried/ipe-wiki/wiki/QVoronoi>

Prüfungstermin

Februar	7				11	letzte Vorlesungswoche
	14				18	
	21				25	
März	28				4	
	7				11	
	14				18	
	21				25	
	28				1	
April	4				8	
	11				15 Karfreitag	
	18 Ostern				22	
						erste Vorlesungswoche

Sonstiges

Montag

- Aktivsession: wir werden uns verschiedene Papiere anschauen
- also: Gerät zum Lesen von Papieren mitbringen

Sonstiges

Montag

- Aktivsession: wir werden uns verschiedene Papiere anschauen
- also: Gerät zum Lesen von Papieren mitbringen

Jetzt

- Evaluation