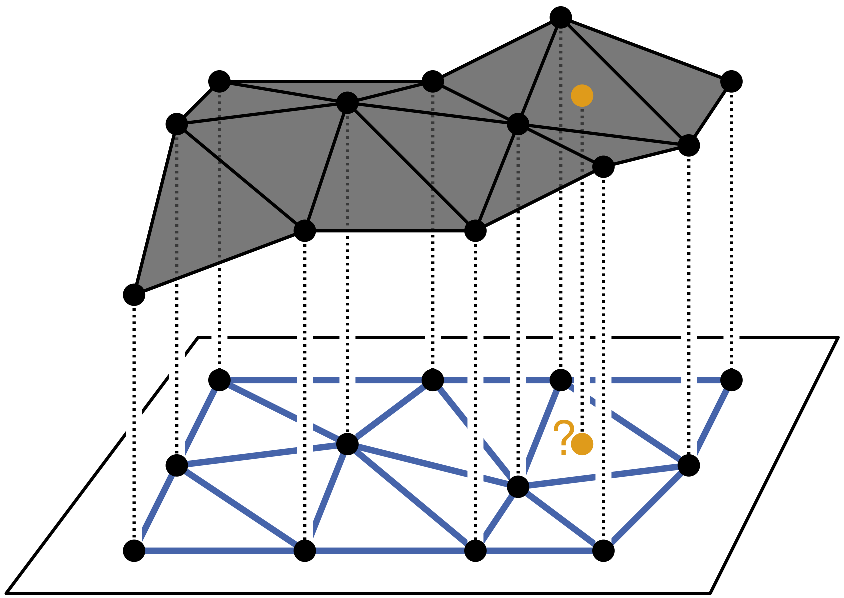
Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmische Geometrie

Höheninterpolation & Delaunay-Triangulierung

Höheninterpolation

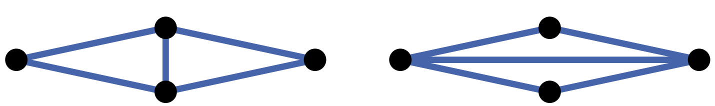
Messpunkte einer Terrain-Höhenmessung



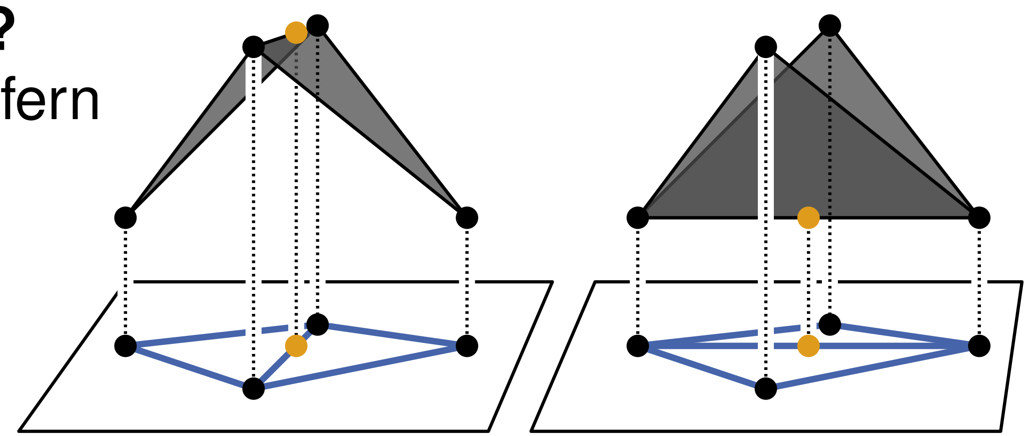
- Wie hoch liegt ein nicht gemessener Punkt?
- trianguliere die Punkte in der Ebene
- → Triangulierung der 3D-Messpunkte
- lies Höhe des angefragten Punktes aus der Triangulierung ab

Was ist eine gute Triangulierung?

- verschiedene Triangulierungen liefern sehr unterschiedliche Ergebnisse
- Ziel: vermeide dünne Dreiecke



gut schlecht

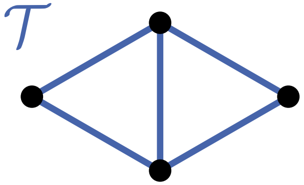


Gute und Schlechte Triangulierungen

Winkel-Vektor

- betrachte Triangulierung $\mathcal{T}$ einer Punktemenge mit m Dreiecken
- Innenwinkel der Dreiecke, aufsteigend sortiert: $\alpha_1, \dots, \alpha_{3m}$
- Winkel-Vektor: $\alpha(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{3m})$

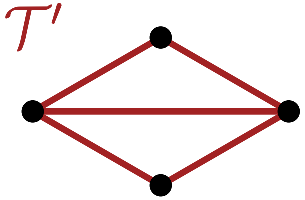
$\mathcal{T}$



$\alpha(\mathcal{T}) = (60°, 60°, 60°, 60°, 60°, 60°)$

$\alpha(\mathcal{T}') = (30°, 30°, 30°, 30°, 120°, 120°)$

$\mathcal{T}'$



- wir ordnen die Winkel-Vektoren lexikographisch
- also $\alpha(\mathcal{T}) > \alpha(\mathcal{T}') \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \dots, 3m\}\colon a_i > a'_i$ und $\forall j < i\colon a_j = a'_j$

Optimale Triangulierungen

- Triangulierung ist optimal, wenn sie maximal ist (bzgl. dieser Ordnung)
  (also $\mathcal{T}$ optimal $\Leftrightarrow \mathcal{T} \geq \mathcal{T}'$ für alle Triangulierungen $\mathcal{T}'$)

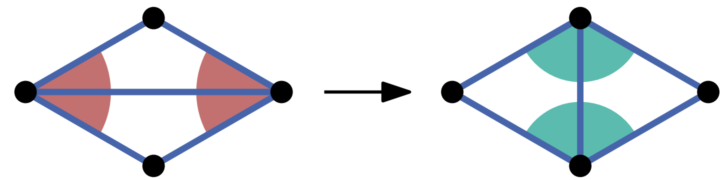
Im Folgenden

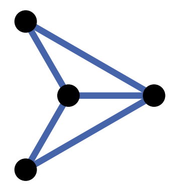
- Woran erkennen wir eine optimale Triangulierung?
- Können wir eine optimale Triangulierung berechnen?
- Ist die optimale Triangulierung eindeutig?

Verbotene Kanten

Idee
- verbessere Triangulierung schrittweise durch lokale Veränderungen
- dadurch erreicht man ein lokales Maximum
- Hoffnung: das ist auch ein globales Maximum

Kanten-Flip
- entferne eine (innere) Kante
- füge die andere Diagonale ein





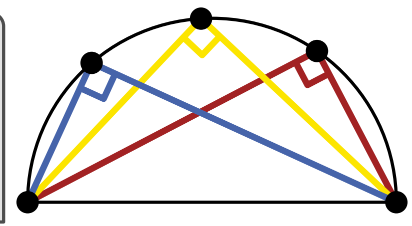
Beobachtung
- ist nicht für jede Kante möglich
- wir interessieren uns für die vier Winkel an der geflippten Kante
- Kante ist verboten, wenn ihr Flip den minimalen dieser Winkel vergrößert
- sei e in $\mathcal{T}$ verboten und sei $\mathcal{T}' = \mathrm{flip}(\mathcal{T}, e)$; dann gilt $\alpha(\mathcal{T}') > \alpha(\mathcal{T})$

Finde ein lokales Maximum
- solange es eine verbotene Kante gibt: flippe diese

Warum terminiert das?

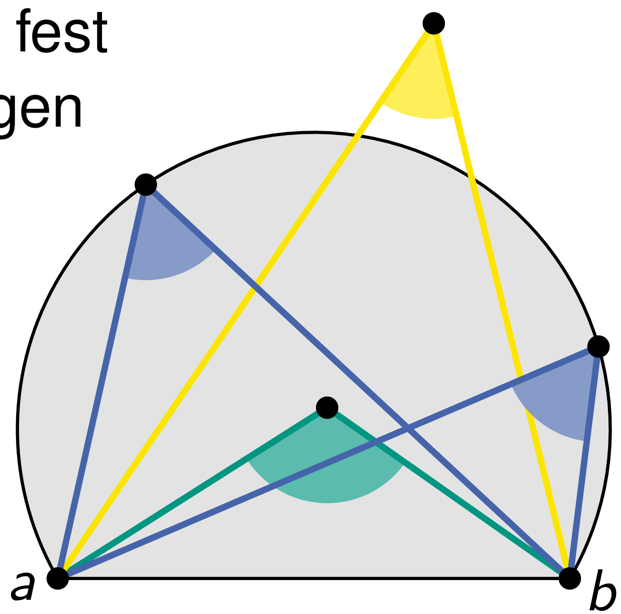
Satz des Thales

Satz des Thales
Die Strecken von einem Punkt auf einem Kreis zu den Endpunkten eines Durchmessers bilden einen rechten Winkel.



Verallgemeinerung

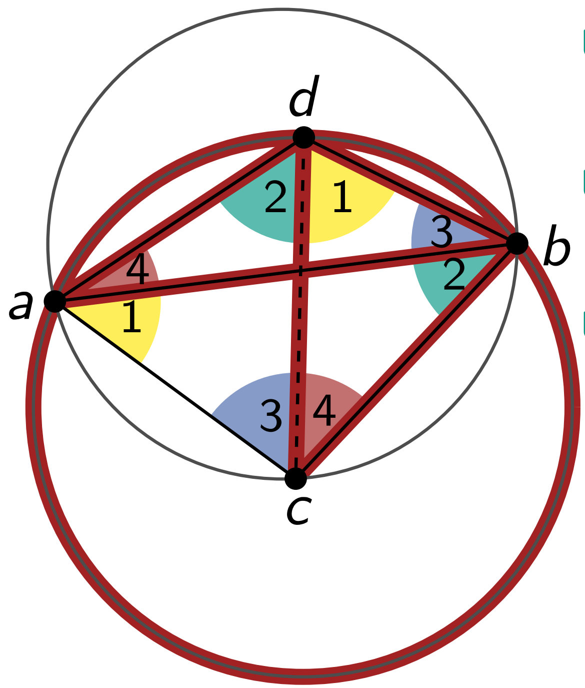
- halte eine beliebige Sehne eines Kreises fest (Endpunkte: a und b)
- halte außerdem eines der beiden Kreissegmente fest
- die Strecken von jedem Punkt auf dem Kreisbogen zu a und b haben denselben Winkel
- für Punkte innerhalb ist der Winkel größer
- für Punkte außerhalb ist der Winkel kleiner (auf derselben Seite von ab)



Welche Kanten sind verboten?

Lemma
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

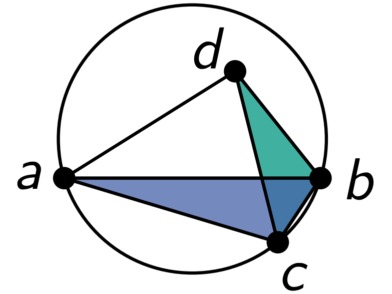
Beweis



- beachte: der Umkreis um $\triangle abd$ enthält dann c
- betrachte Bijektion zwischen Winkeln bei a und b, sowie Winkeln bei c und d der geflippten Kante
- Behauptung: die Winkel bei ab sind jeweils kleiner als ihr zugehöriger Winkel bei cd
- folgt aus Satz des Thales, wenn man sich die richtigen Dreiecke anschaut

$\Rightarrow$ minimaler Winkel an cd größer
$\Rightarrow$ ab ist verboten

- Umkehrung folgt im Prinzip analog durch Betrachtung des minimalen Winkels



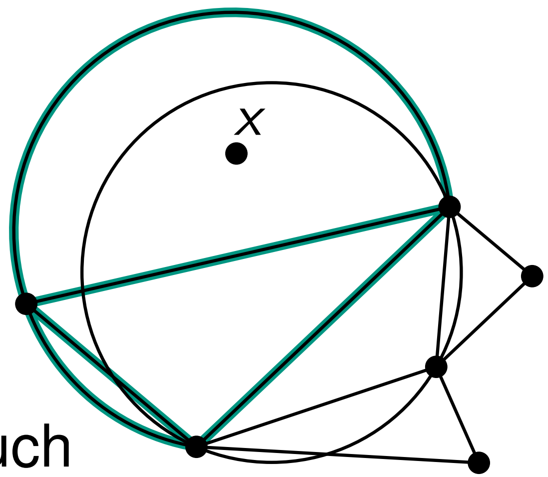
Verbotene Kanten und leere Umkreise

Lemma
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Theorem
Eine Triangulierung enthält eine verbotene Kante genau dann, wenn der Umkreis eines Dreiecks einen Knoten enthält.

Beweis

- verbotene Kante $\Rightarrow$ Umkreis enthält Knoten: folgt aus dem Lemma
- todo: keine verbotene Kante $\Rightarrow$ kein Umkreis enthält Knoten
- betrachte Umkreis eines Dreiecks
- Lemma: die drei benachbarte Knoten liegen außen
- Problem: unbenachbarter Knoten x
- Idee:
  - betrachte Dreieck näher an x
  - Umkreis enthält x noch immer
  - iteriere $\rightarrow$ irgendwann haben wir x als Nachbar
- formaler: betrachte Extremsiutation, zeige Widerspruch



Verbotene Kanten und leere Umkreise

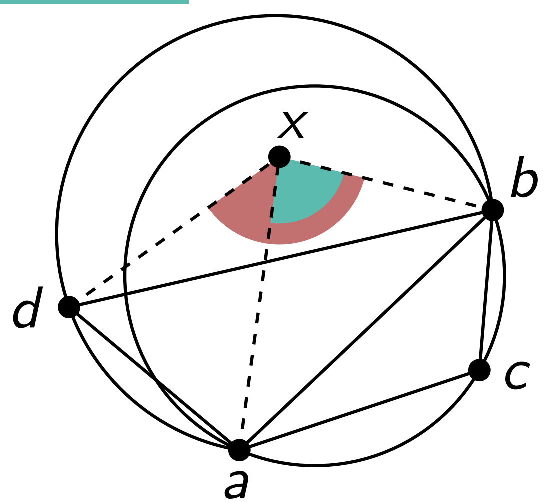
Lemma
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Theorem
Eine Triangulierung enthält eine verbotene Kante genau dann, wenn der Umkreis eines Dreiecks einen Knoten enthält.

Beweis

- verbotene Kante $\Rightarrow$ Umkreis enthält Knoten: folgt aus dem Lemma
- todo: keine verbotene Kante $\Rightarrow$ kein Umkreis enthält Knoten
- Annahme: Umkreis um $\triangle abc$ enthält x, mit $\angle axb$ maximal
- betrachte anders Dreieck $\triangle abd$ an ab
- Umkreis von $\triangle abd$ enthält ebenfalls x
- $\angle dxb$ ist größer als $\angle axb$ $\rightarrow$ Widerspruch

(oder $\angle axd$)



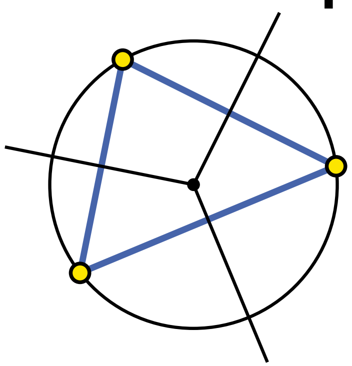
Lokal maximale Triangulierung

Bisher gesehen

- es gibt keine verbotene Kante
- die Triangulierung ist lokal maximal
- der Umkreis jedes Dreiecks enthält keinen Knoten

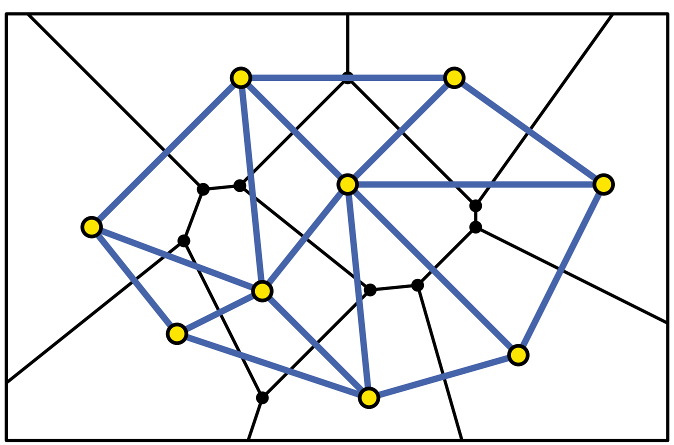
äquivalent

Für lokal optimale Triangulierungen folgt



- für jedes Dreieck ist der Umkreis-Mittelpunkt ein Voronoi-Knoten
- die Kanten des Dreiecks entsprechen den Voronoi-Kanten inzident zum Voronoi-Knoten

$\Rightarrow$ wir erhalten den Dualgraph des Voronoi-Diagramms



Umgekehrt gilt für den Dualgraph

- bildet eine Triangulierung
  (Annahme: keine vier Knoten auf dem gleichen Kreis)
- Umkreis jeder Facette enthält keinen Knoten
  $\Rightarrow$ lokal optimale Triangulierung

Müssen wir nicht noch zeigen, dass es keine Kantenkreuzungen gibt?

Delaunay-Triangulierung

Der Dualgraph des Voronoi-Diagramms heißt **Delaunay-Triangulierung**.

Gerade gesehen

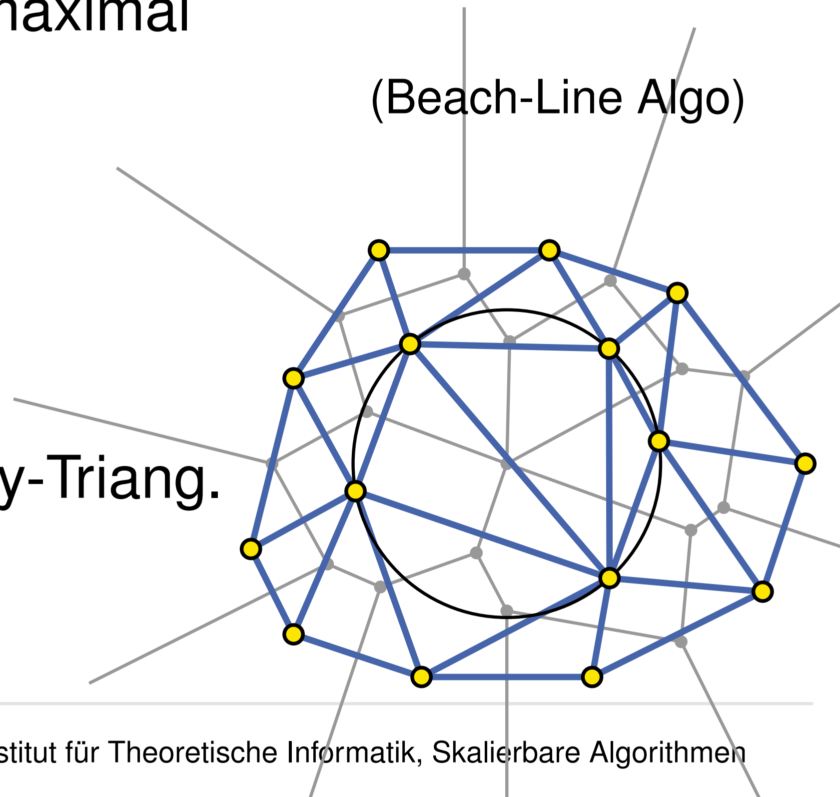
- die Delaunay-Triangulierung ist lokal maximal
- wenn $\mathcal{T}$ lokal maximal ist, dann ist $\mathcal{T}$ die Delaunay-Triangulierung

Daraus folgt

- die lokal maximale Triangulierung ist eindeutig (nämlich die Delaunay-Traing.)
- die Delaunay-Triangulierung ist also global maximal
- sie kann in $O(n \log n)$ berechnet werden (Beach-Line Algo)

Mehrere Punkte auf einem Kreis

- Voronoi-Knoten hat höheren Grad
- Dualgraph ist keine Triangulierung
- es gibt mehrere Delaunay-Triangulierungen
- jede lokal maximale Triang. ist eine Delaunay-Triang.
- nicht alle sind global maximal
- mehr dazu in der Übung



Zusammenfassung

Heute gesehen

- die Delaunay-Triangulierung hat schöne Eigenschaften
  - lexikographisch maximaler Winkelvektor
  - Dualgraph zum Voronoi-Diagramm
- Beweistechnik: lokales Optimum eindeutig $\Rightarrow$ muss globales Optimum sein

Was gibt es sonst noch?

- die Delaunay-Triangulierung hat weitere schöne Eigenschaften (Beispiel: MST ist Teil der Triangulierung)
- weitere Optimierungskriterien für Triangulierungen: Minimierung der Gesamtkantenlänge ist beispielsweise NP-schwer
- Voronoi-Diagramme und Delaunay-Triangulierungen in Ipe:

  https://github.com/otfried/ipe-wiki/wiki/QVoronoi

Prüfungstermin

	7				11	letzte Vorlesungswoche
Februar	14				18	
	21				25	
	28				4	
	7				11	
März	14				18	
	21				25	
	28				1	
	4				8	
April	11				15 Karfreitag	
	18 Ostern				22	erste Vorlesungswoche

Sonstiges

Montag

- Aktivsession: wir werden uns verschiedene Papiere anschauen
- also: Gerät zum Lesen von Papieren mitbringen

Jetzt

- Evaluation