Karlsruher Institut für Technologie

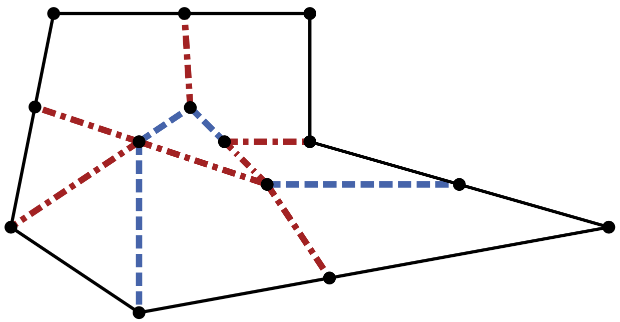
Algorithmische Geometrie

Faltbarkeit – Origami und Co

Flache Faltmuster

Gegeben

- ein geometrischer Graph
- jede innere Kante ist entweder mit Berg oder Tal gekennzeichnet



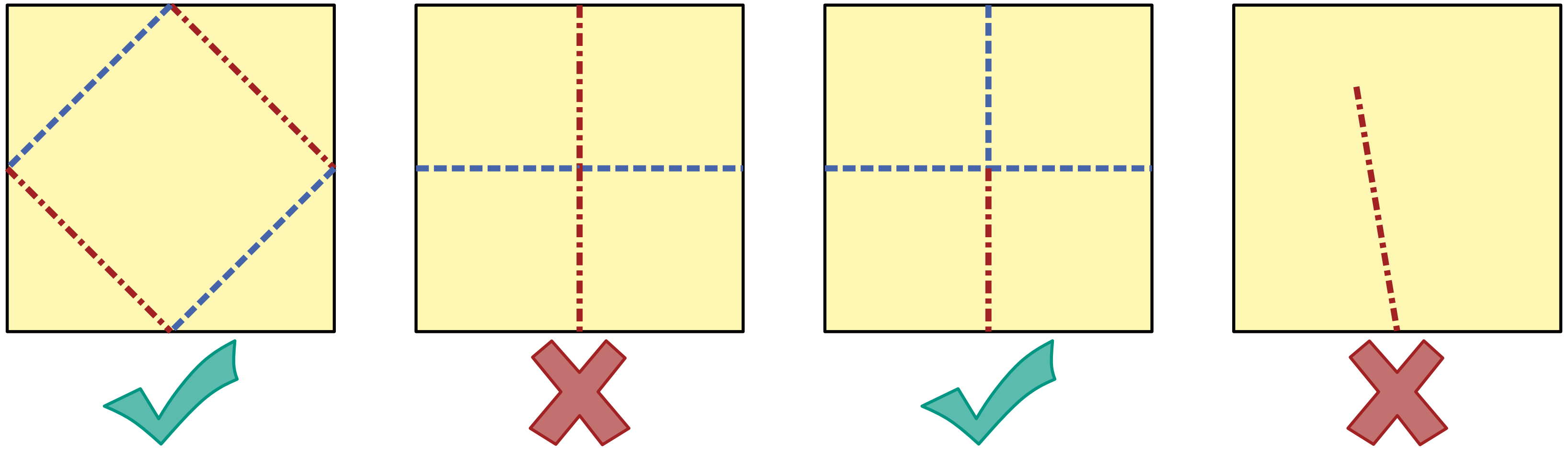
Interpretation

- Rand der äußere Facette ist ein Blatt Papier (im Folgenden meist ein Quadrat)
- der geometrische Graph ist ein **Faltmuster**
- Faltrichtung ist durch **Berg/Tal-Zuweisung** gegeben

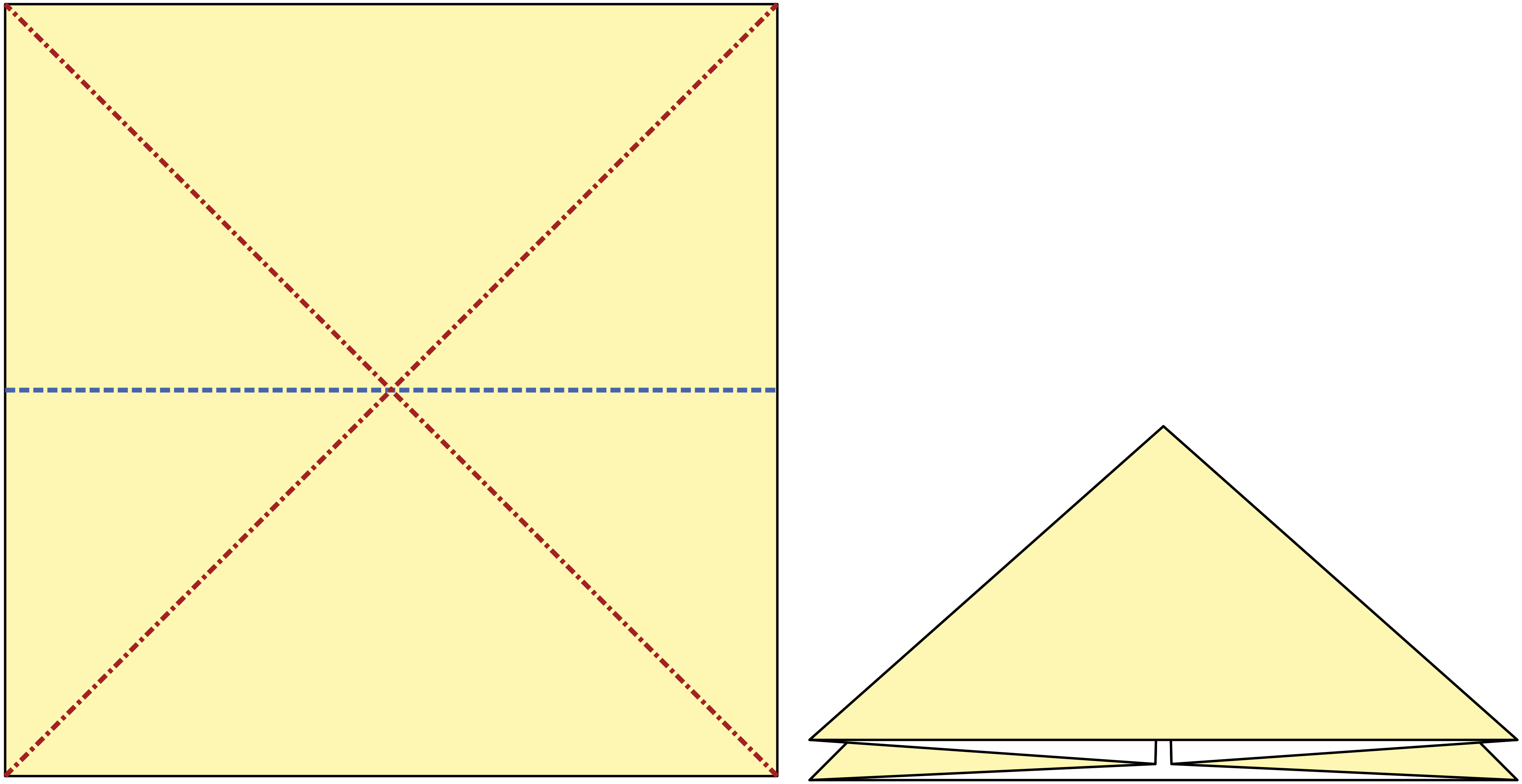
$\left.\right\}$ **Berg/Tal-Muster**

Problem: Ist das Berg/Tal-Muster flach faltbar?

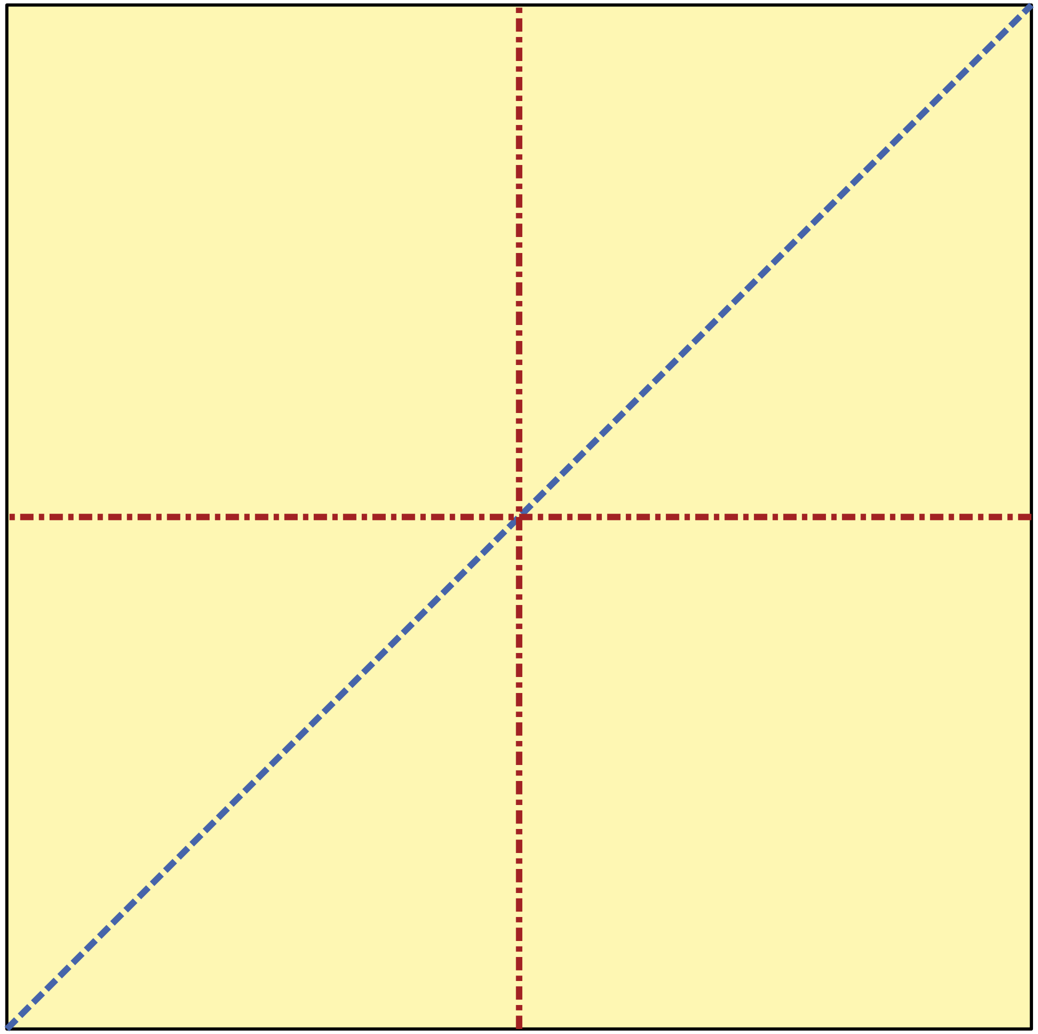
Beispiele

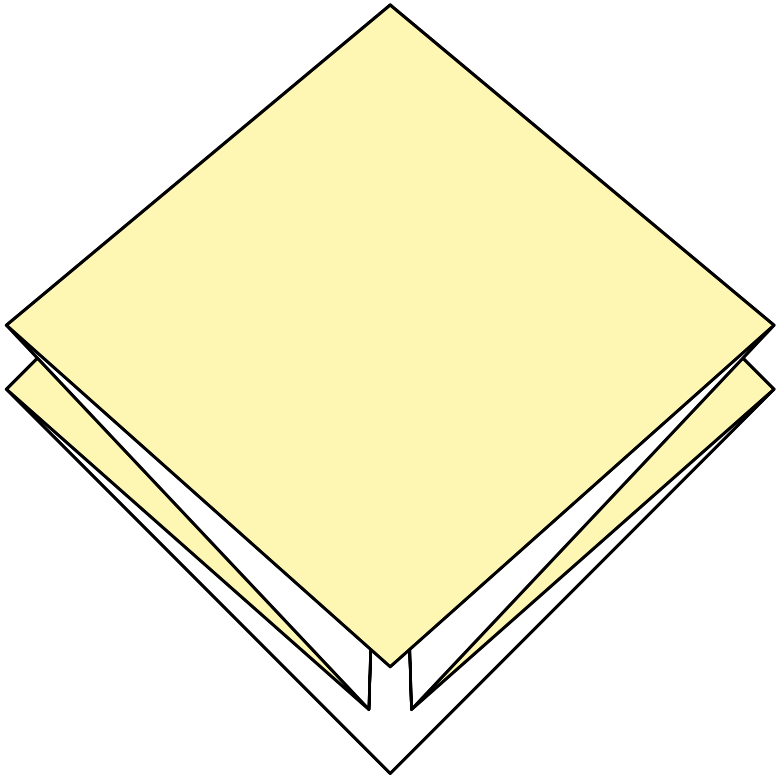


Ist das Berg/Tal-Muster flach faltbar?

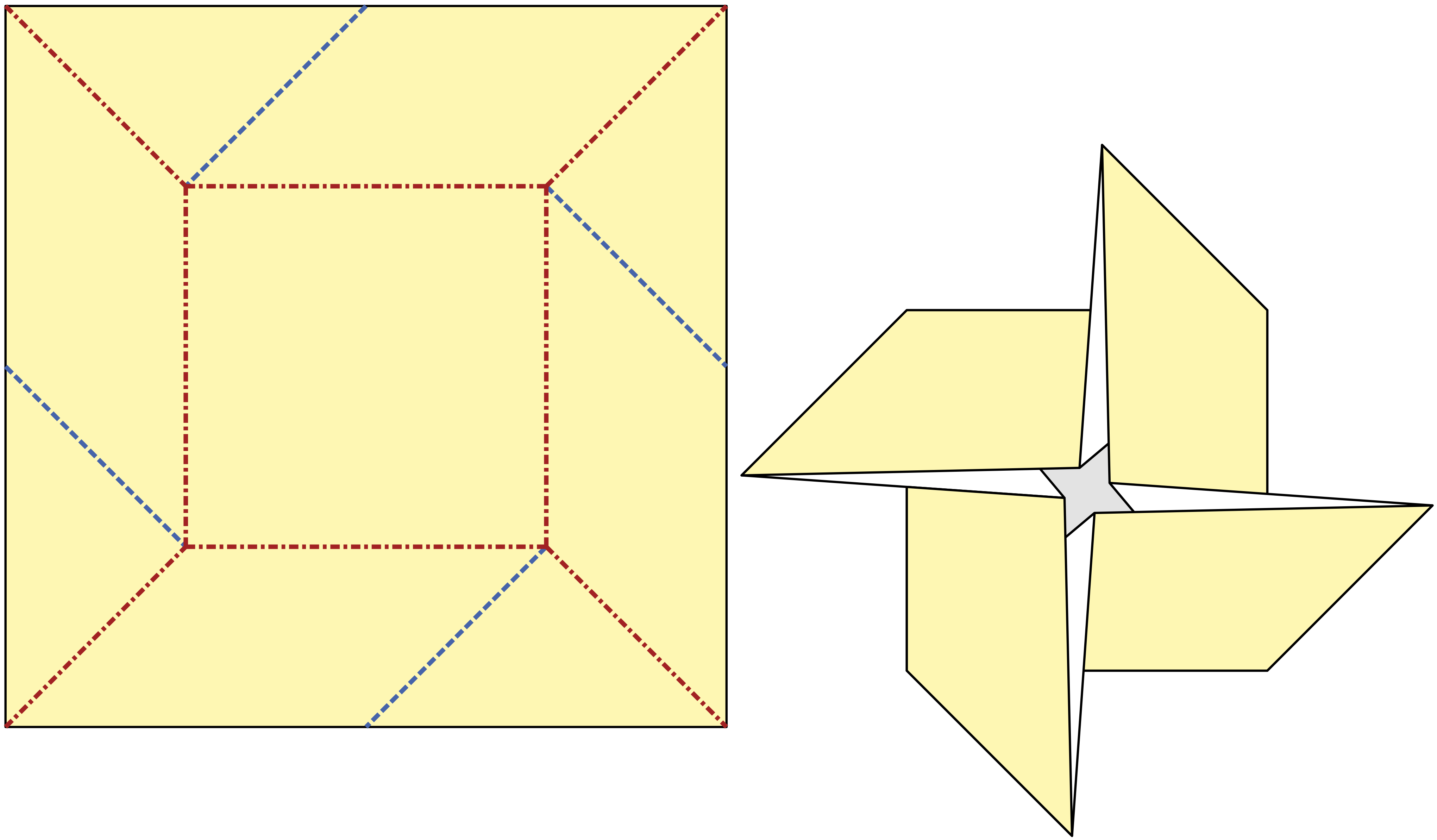


Ist das Berg/Tal-Muster flach faltbar?

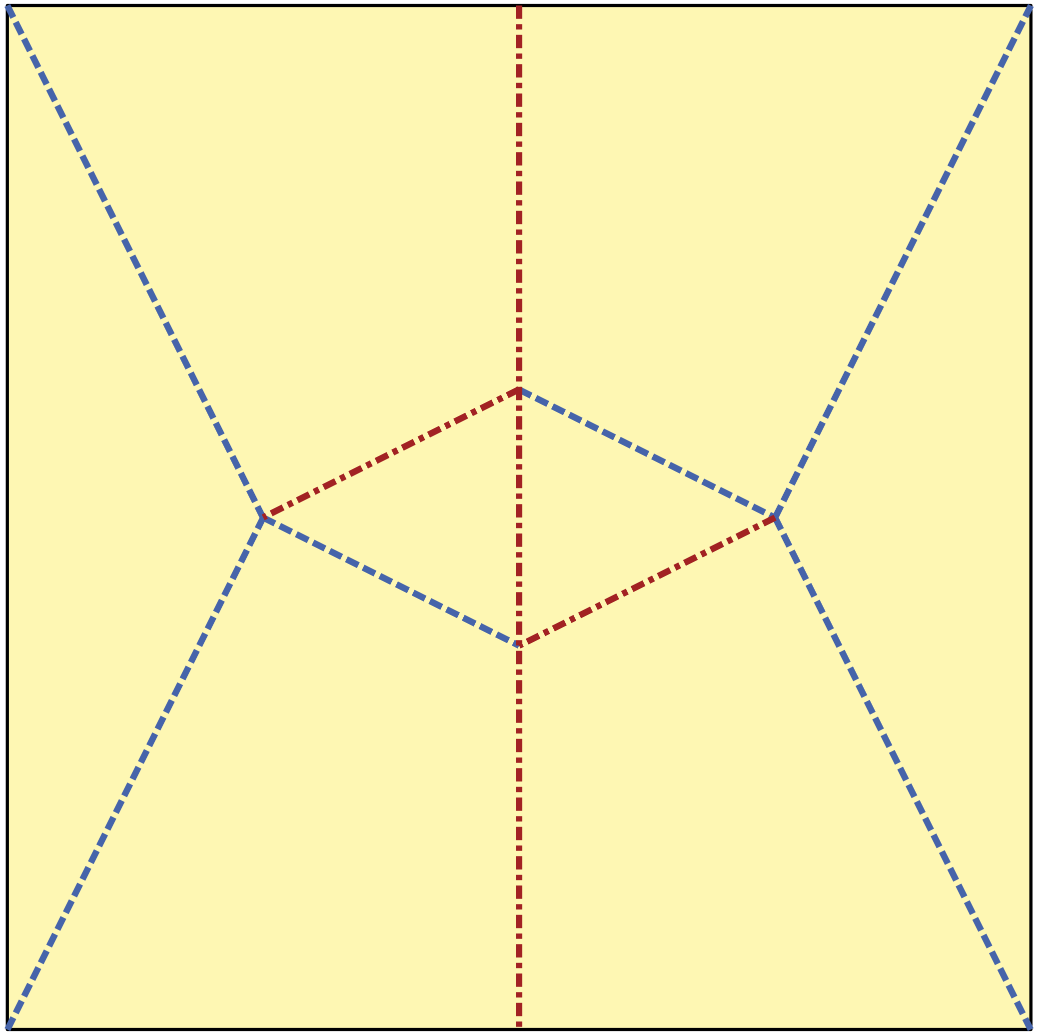


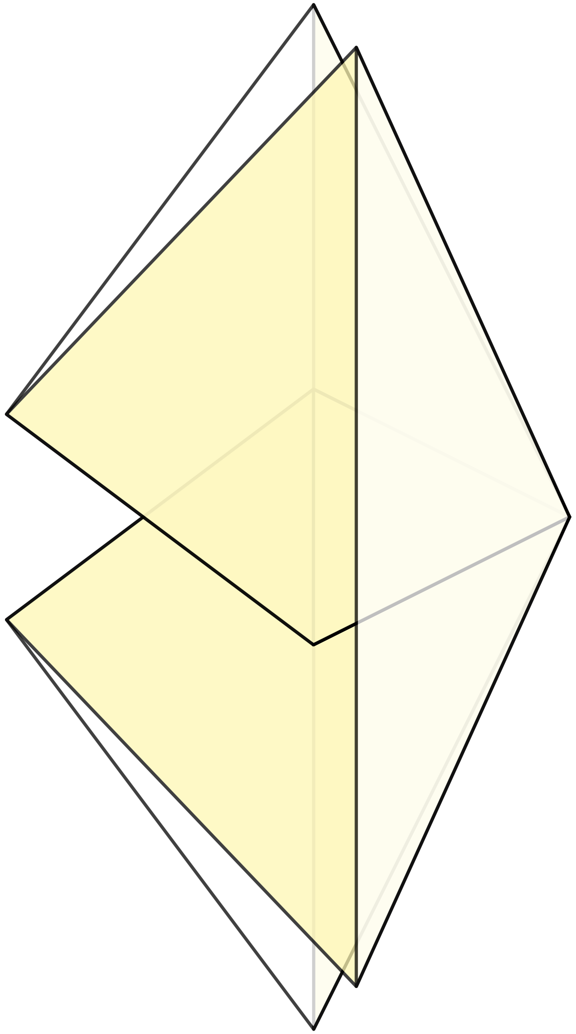


Ist das Berg/Tal-Muster flach faltbar?

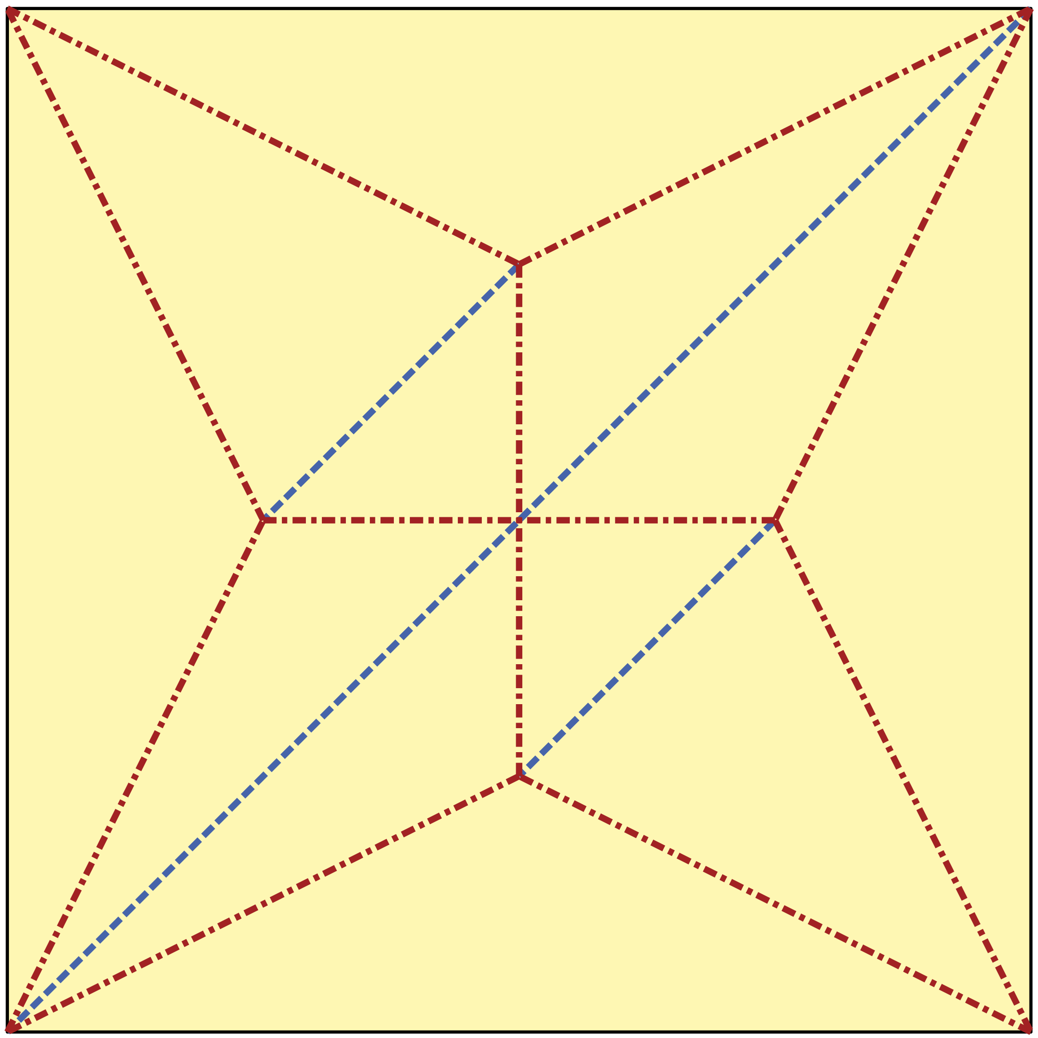


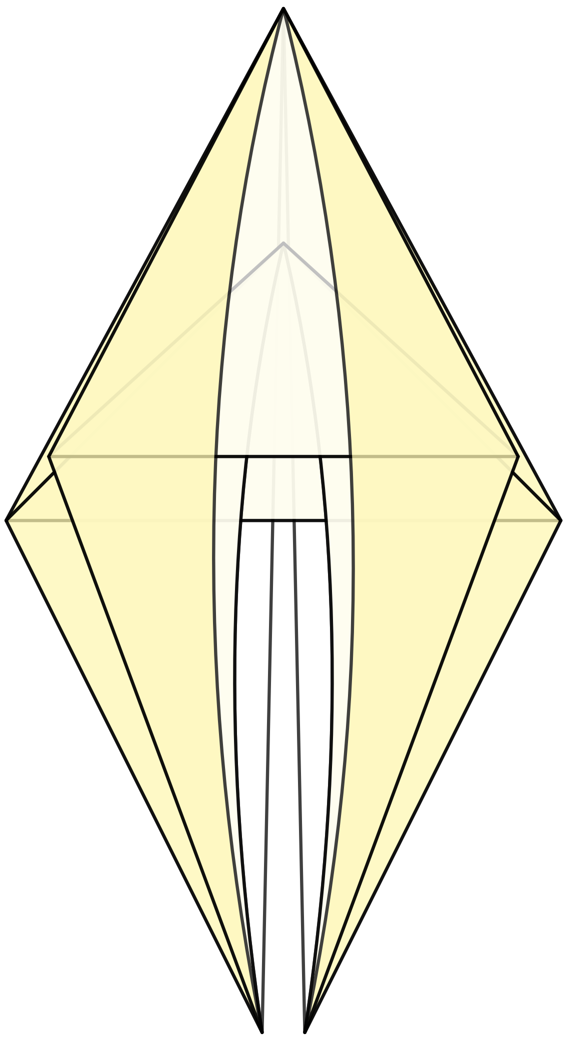
Ist das Berg/Tal-Muster flach faltbar?





Ist das Berg/Tal-Muster flach faltbar?





halber Kranich

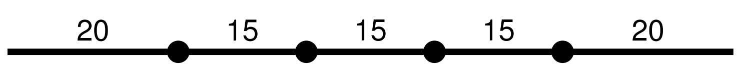
Das ist alles viel zu schwer!

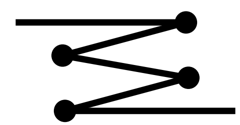
Zwei Problemvarianten

- Gegeben ein Berg/Tal-Muster, ist es flach faltbar?
- Gegeben ein Faltmuster, gibt es eine Berg/Tal-Zuweisung, sodass es flach faltbar ist?

Etwas einfacher: 1D-Fall $\rightarrow$ unser „Papier“ ist dann eine Strecke

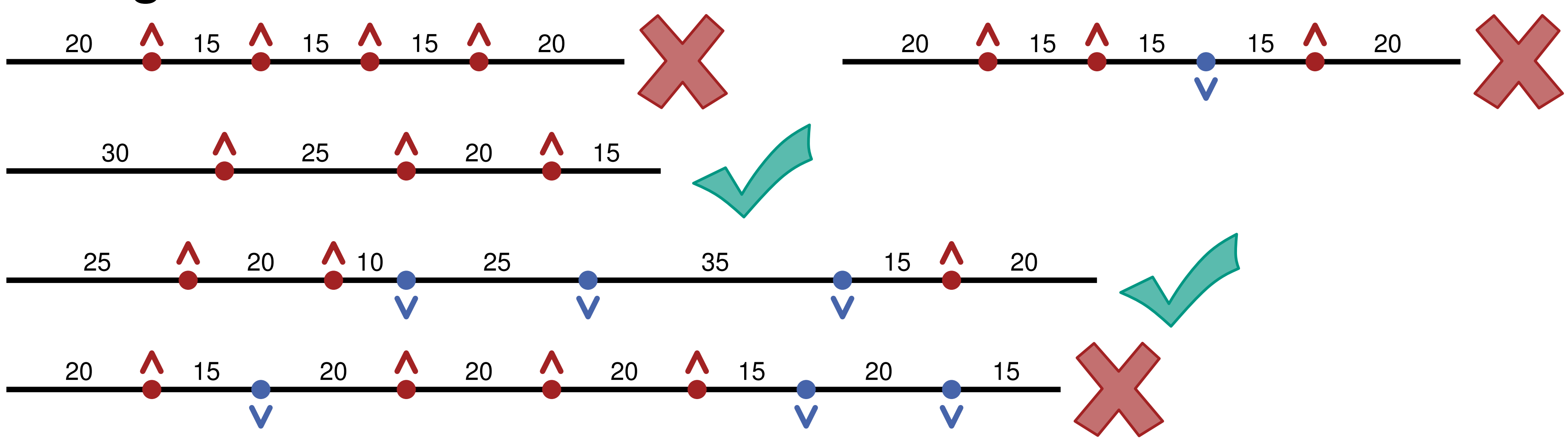
1D Faltmuster





zick-zack geht immer

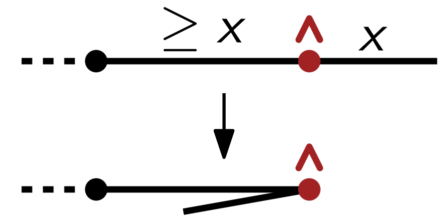
1D Berg/Tal-Muster



Reduktionsregeln

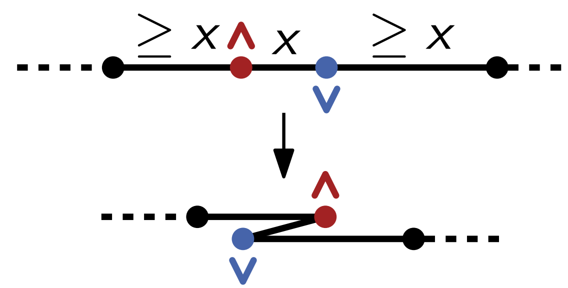
End-Fold

- Bed.: erstes/letztes Stück kleiner ($\leq$) als der Nachbar
- Reduktion: falte ersten/letzten Knoten



Crimp

- Bedingung: inneres Stück mit einem Berg- und einem Tal-Knoten und größeren Nachbarn
- Reduktion: falte beide anliegenden Knoten



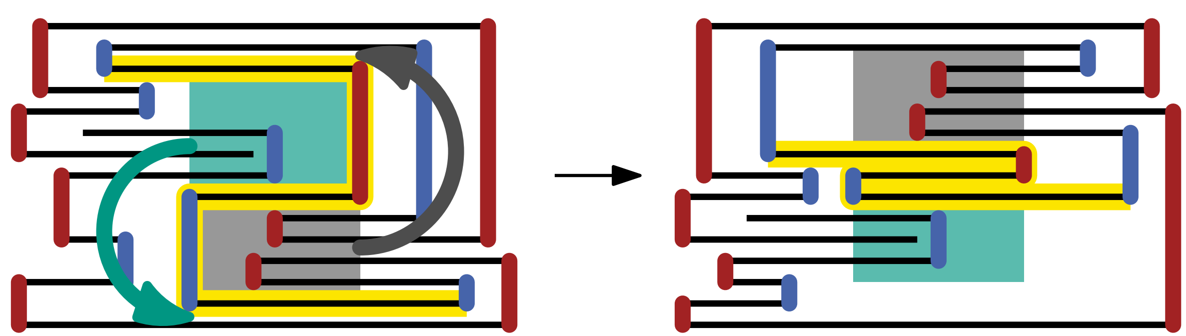
Lemma **(Safety first!)**

Die Reduktionsregeln „End-Fold“ und „Crimp“ sind sicher.

(Wenn ein Berg/Tal-Muster flach faltbar ist, dann ist auch das aus der Anwendung der Reduktionsregel resultierende Berg/Tal-Muster flach faltbar.)

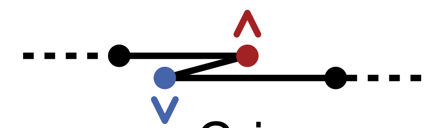
Beweis

- **End-Fold:** offensichtlich
- **Crimp:** Beweis durch Bild



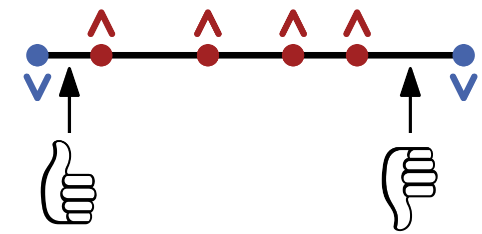
Reduktionen bis zum Schluss

Theorem **(faltbar ⇒ Reduktion)**
Berg/Tal-Muster flach faltbar ⇒ es gibt ein End-Fold oder Crimp.



Beweisplan

- kurze Stücke mit einem Berg- und einem Tal-Knoten sind gut
- betrachte inklusions-maximales Sequenz, mit nur Berg- bzw. nur Tal-Knoten
- links-kurz: erstes Stück ist kürzer als zweites
- rechts-kurz: letztes Stück ist kürzer als vorletztes



Lemma **(faltbar ⇒ kurze Grenzkanten)**
Flach faltbar ⇒ jede solche maximale Sequenz ist links- oder rechts-kurz.

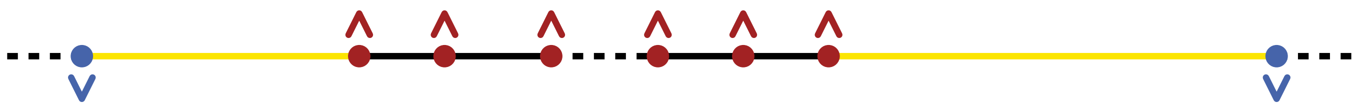
Lemma **(kurze Grenzkanten ⇒ Reduktion)**
Jede solche maximale Sequenz ist links- oder rechts-kurz ⇒ es gibt ein End-Fold oder Crimp.

Kurze Kanten überall

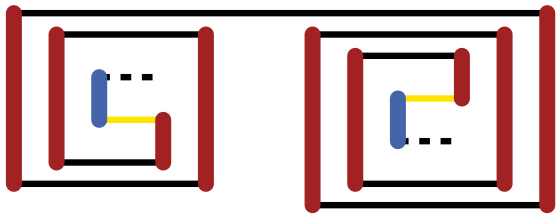
Lemma **(faltbar ⇒ kurze Grenzkanten)**
Flach faltbar ⇒ jede solche maximale Sequenz ist links- oder rechts-kurz.

Beweis

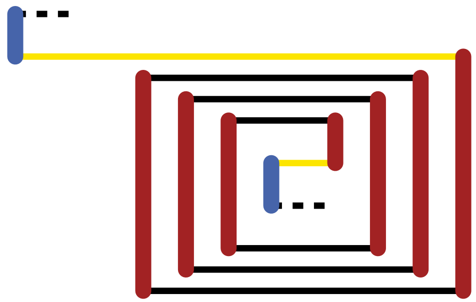
- betrachte maximale Sequenz, die weder links- noch rechts-kurz ist



- wir kommen aus der Spirale nicht mehr raus



- Sequenz ist links- oder rechts-kurz (und eines der beiden reicht auch)

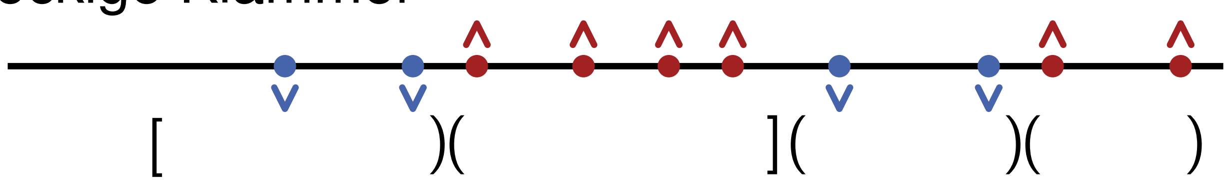


Eine Reduktion geht immer

Lemma **(kurze Grenzkanten ⇒ Reduktion)**
Jede solche maximale Sequenz ist links- oder rechts-kurz ⇒ es gibt ein End-Fold oder Crimp.

Beweis

- beschreibe jede maximale Sequenz durch ein Klammerpaar
  - Anfang: Klammer auf
  - Ende: Klammer zu
  - kurz (auf dieser Seite): runde Klammer
  - nicht kurz: eckige Klammer
- Beispiel:



- „(“ am Anfang ⇒ End-Fold
- „)“ am Ende ⇒ End-Fold
- „)(“ ⇒ Crimp

Was erhält man, wenn keine Reduktion möglich ist?

[ ) [ ) [ ) -----)

kein End-Fold — auf einer Seite kurz — kein Crimp — auf einer Seite kurz — kein Crimp — auf einer Seite kurz — End-Fold

Zusammenfassung: 1D Origami

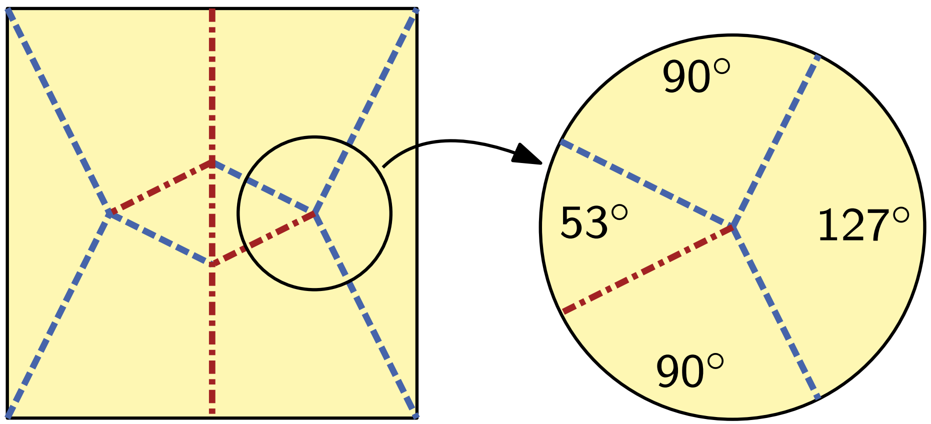
Lemma **(Safety first!)**
Die Reduktionsregeln „End-Fold“ und „Crimp“ sind sicher.
(Wenn ein Berg/Tal-Muster flach faltbar ist, dann ist auch das aus der Anwendung der Reduktionsregel resultierende Berg/Tal-Muster flach faltbar.)

Theorem **(faltbar $\Rightarrow$ Reduktion)**
Berg/Tal-Muster flach faltbar $\Rightarrow$ es gibt ein End-Fold oder Crimp.

Algorithmus zur Erkennung flach faltbarer 1D Berg-/Tal-Muster

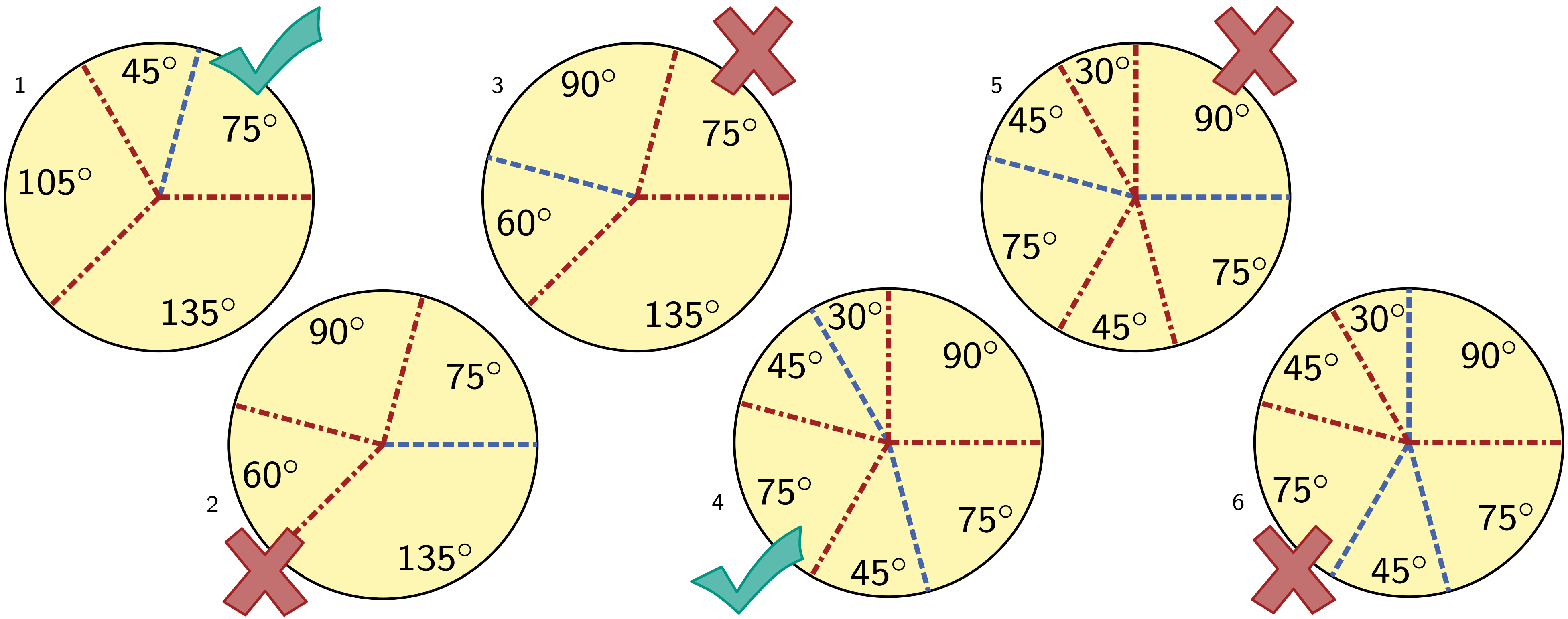
- solange End-Fold oder Crimp möglich, führe End-Fold oder Crimp aus
- Resultat ist flach gefaltet $\Rightarrow$ flach faltbar
- Resultat ist noch nicht flach gefaltet $\Rightarrow$ nicht flach faltbar
- Laufzeit: $O(n) \rightarrow$ siehe Übung

2D Origami (mit einem Knoten)



Notewendige Bedingung

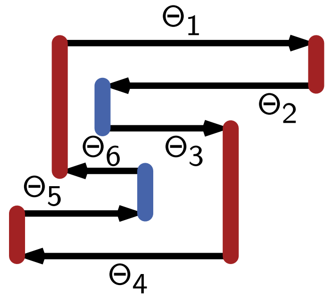
- Berg/Tal-Muster faltbar
  $\Rightarrow$ jeder Knoten lokal faltbar
- Welche 1-Knoten Berg-/Tal-Muster sind flach faltbar?



Faltmuster mit einem Knoten

Beobachtungen

- Ähnlichkeit zu 1D-Fall: Sequenz von Winkeln $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$
- unser Papier ist jetzt ein Kreis, statt einer Strecke
- nicht jedes Faltmuster ist flach faltbar (im Gegensatz zum 1D-Fall)



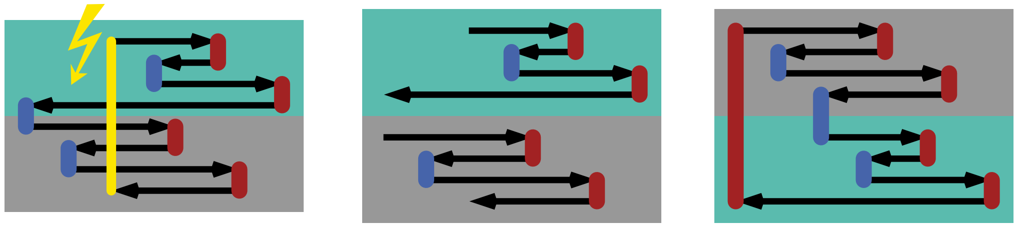
Notewendige Bedingung für das Faltmuster

- Richtung der Kreisbögen alternieren $\Rightarrow$ n ist gerade
- $\Theta_1 + \Theta_3 + \cdots + \Theta_{n-1} = \Theta_2 + \Theta_4 + \cdots + \Theta_n = 180^\circ$

Theorem
Ein Faltmuster hat eine flach faltbare Berg/Tal-Zuweisung genau dann, wenn die Summe der geraden und der ungeraden Winkel je 180° ist.

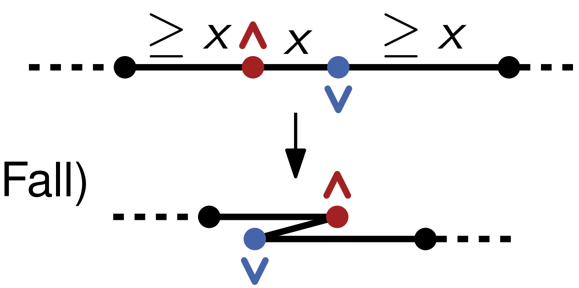
Beweis

- versuche zunächst Zick-Zack
- zerschneide an linkestem Punkt
- vertausche Reihenfolge
- füge wieder zusammen



Berg/Tal-Muster mit einem Knoten

Sichere Reduktion



- definiere Crimp wie im 1D-Fall
- Reduktionsregel ist sicher (selbes Argument wie in 1D-Fall)
- End-Folds gibt es natürlich nicht mehr

Flach faltbar $\Rightarrow$ Crimp

- gilt weiterhin, außer wenn wir nur zwei (gleich große) Winkel haben
- Beweisidee:
  - wähle Sequenz gleich großer Winkel mit größeren Nachbarn

  - nur Berg-Knoten bzw. nur Tal-Knoten $\Rightarrow$ nicht flach faltbar
  - Wechsel zwischen Berg und Tal $\Rightarrow$ Crimp

Theorem
Wenn Berg/Tal-Muster mit einem Knoten flach faltbar ist, dann gibt es ein Crimp. Außerdem führt jede Folge von Crimps zu einer flachen Faltung.

Bonusbeobachtung: flach faltbar $\Rightarrow \#\text{Berge} - \#\text{Täler} = \pm 2$

Zusammenfassung

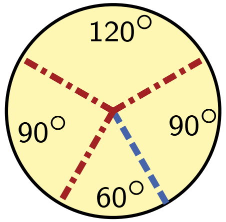
Heute gesehen

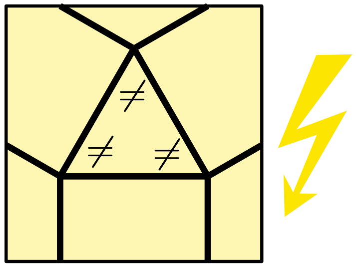
- 1D Faltmuster: immer faltbar
- 1D Berg/Tal-Muster
  - Reduktionsregeln: Crimp und End-Fold
  - flach faltbar $\Rightarrow$ Crimp oder End-Fold
- 1-Knoten 2D Faltmuster
  - flach faltbar $\Leftrightarrow \Theta_1 + \Theta_3 + \cdots + \Theta_{n-1} = \Theta_2 + \Theta_4 + \cdots + \Theta_n = 180^\circ$
- 1-Knoten 2D Berg/Tal-Muster
  - Reduktionsregel: Crimp
  - flach faltbar $\Rightarrow$ Crimp

Was gibt es sonst noch?

- testen ob ein Faltmuster flach faltbar ist: NP-schwer
- Berg/Tal-Muster flach falten: NP-schwer
- lokale Faltbarkeit: $O(n)$

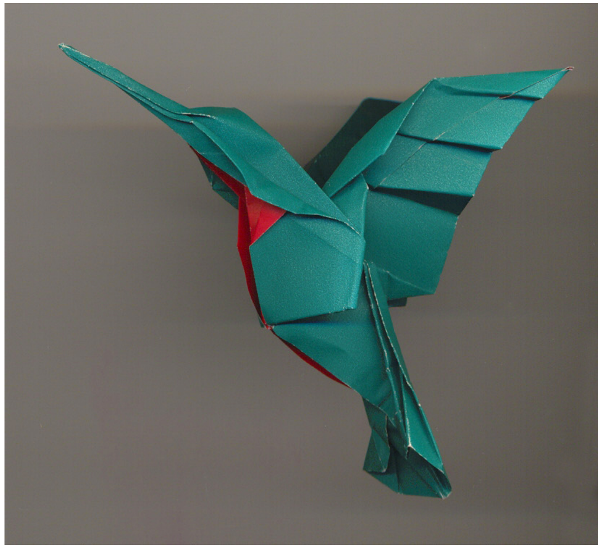
  (finde Berg/Tal-Zuweisung, sodass jeder Knoten für sich flach faltbar ist)



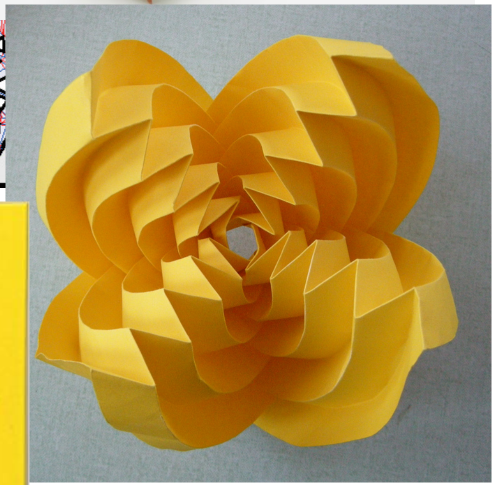


Was gibt es sonst noch?

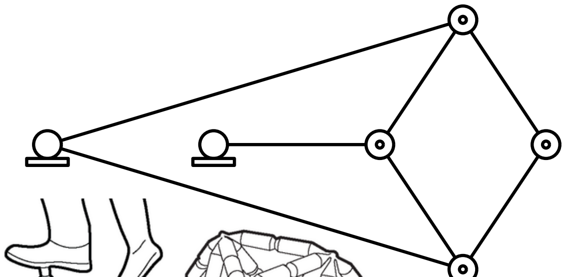
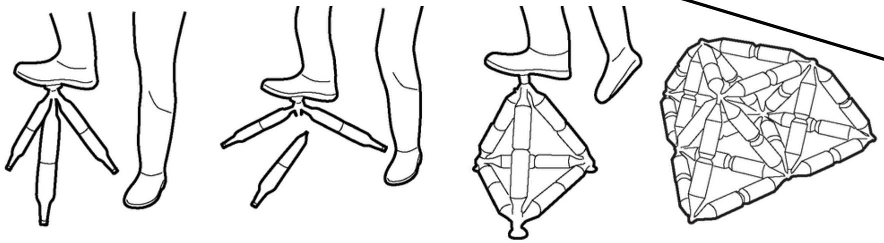
Origami alles ist faltbar (für verschiedene Definition von „Alles“)

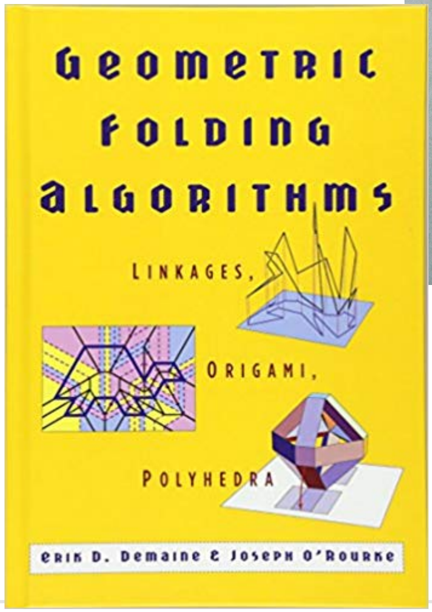






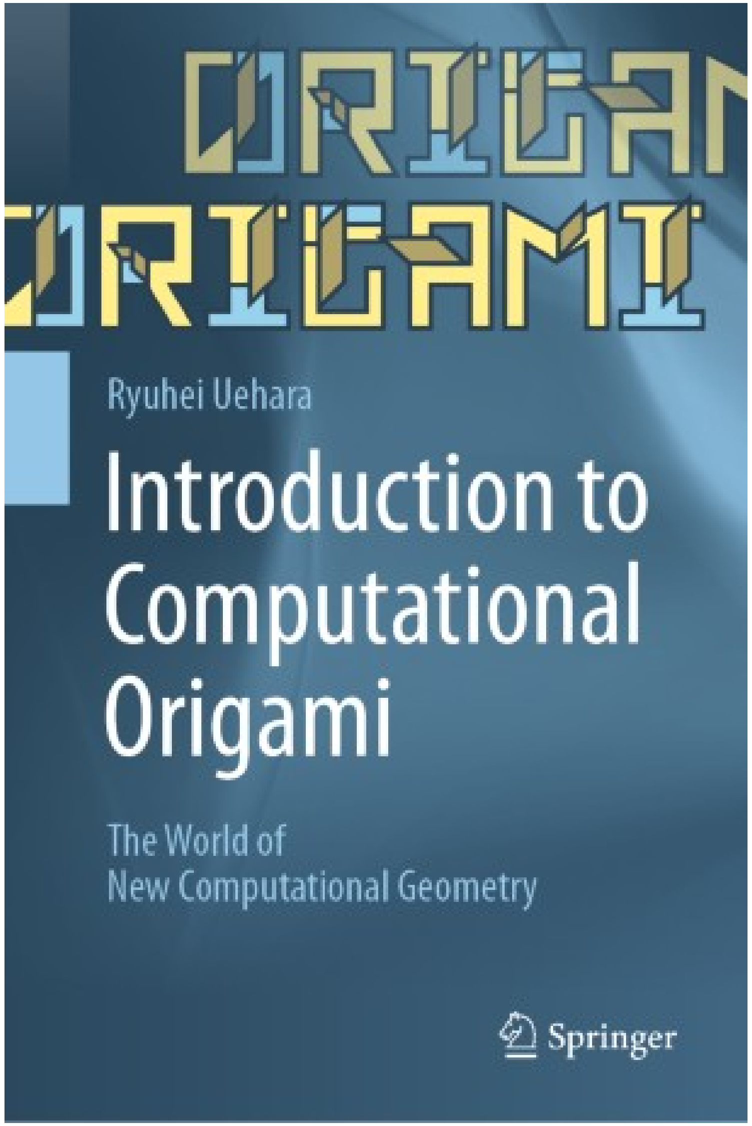
1D-Verknüpfungen

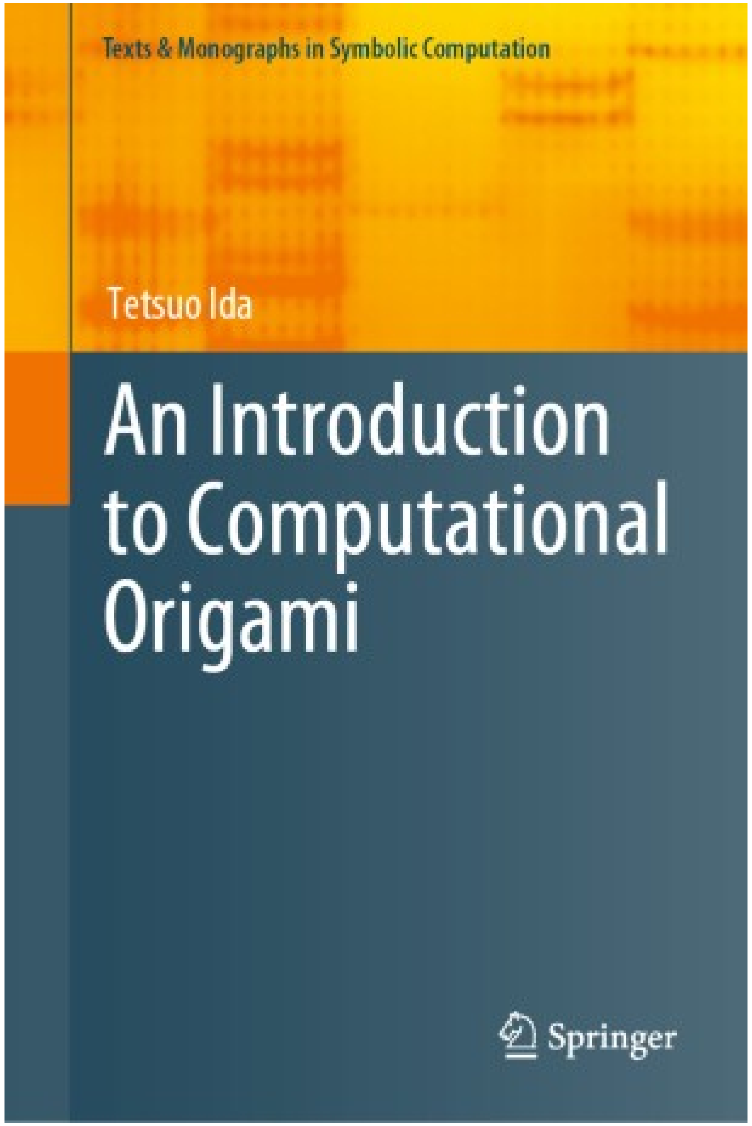


Fold-and-Cut → Montag

Weitere Bücher



https://link.springer.com/book/10.1007/978-981-15-4470-5



https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-59189-6