Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmische Geometrie

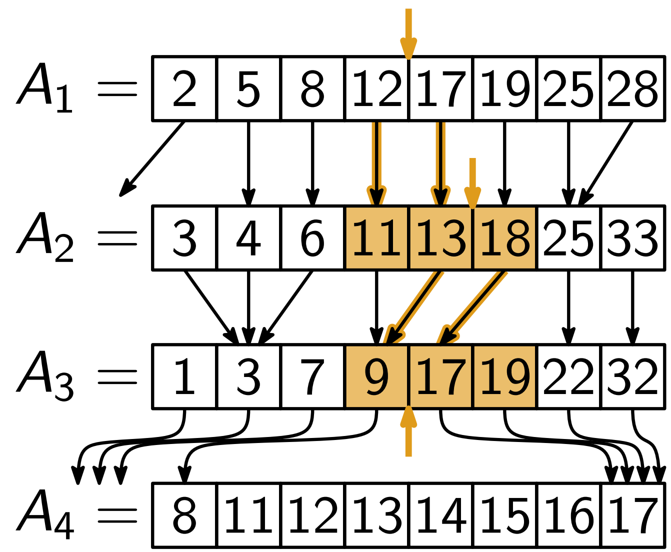
Orthogonale Bereichsanfragen – Fractional Cascading

Suche in vielen Arrays

Situation

- betrachte ℓ sortierte Arrays $A_1, \dots, A_\ell$ mit jeweils $\leq n$ Elementen
- finde die Position von einem x in allen Arrays
- Offensichtliche Lösung: $O(\ell \log n)$
- letzte Woche: $O(\ell + \log n)$ falls $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_\ell$

Beispielanfrage: $x = 14$



Geht $\ell + \log n$ auch im Allgemeinen?

- Idee: wie letzte Woche
  - suche x in A_1
  - finde x in $A_2, \dots, A_\ell$ mittels Zeiger
- Problem: Position von x in A_i lässt ggf. keine Rückschlüsse auf Position in A_{i+1} zu

Beobachtung

- $A_i \supseteq A_{i+1} \Rightarrow$ Position in A_{i+1} kann aus Position in A_i abgelesen werden
- A_i enthält viele Elemente aus $A_{i+1} \Rightarrow$ grobe Position ablesbar
- Idee: füge ein paar Elemente aus A_{i+1} in A_i ein

Fractional Cascading

Geteilte Elemente

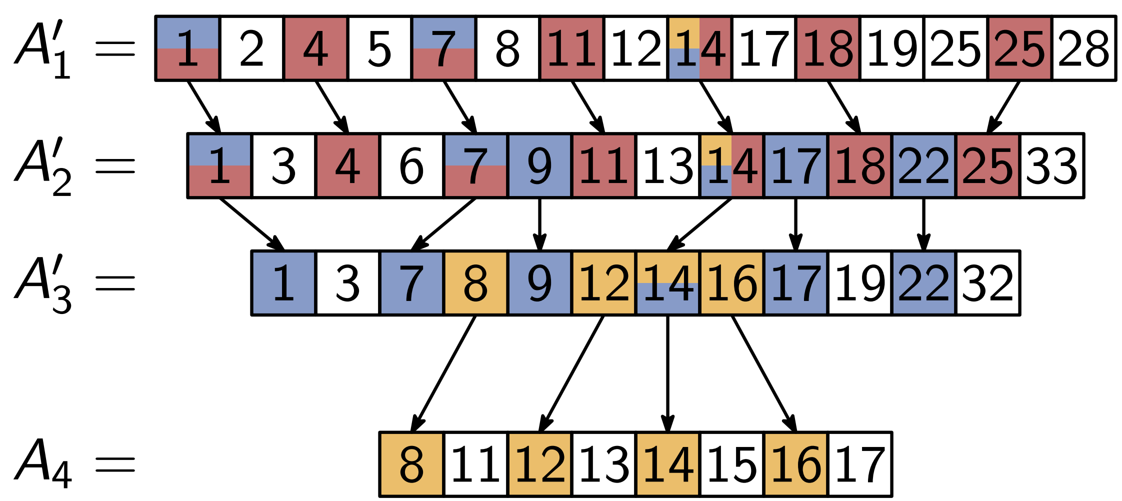
- neues Array A'_3: füge jedes zweite Element aus A_4 in A_3 ein
- speichere Zeiger zu Kopien
- Zeiger in A'_3: von Elementen aus $A'_3 \setminus A_4$ zu Vorgänger/Nachfolger aus A_4
  $\Rightarrow$ Position in A'_3 liefert Position in A_4 (± 1)
- Zeiger in A'_3: von Elementen aus A_4 zu Vorgänger/Nachfolger aus $A'_3 \setminus A_4$
  $\Rightarrow$ Position in A'_3 liefert Position in A_3
- kaskadiere den Prozess für alle vorherigen A_i

$A_1 = \boxed{2 \mid 5 \mid 8 \mid 12 \mid 17 \mid 19 \mid 25 \mid 28}$

$A_2 = \boxed{3 \mid 4 \mid 6 \mid 11 \mid 13 \mid 18 \mid 25 \mid 33}$

$A_3 = \boxed{1 \mid 3 \mid 7 \mid 9 \mid 17 \mid 19 \mid 22 \mid 32}$

$A_4 = \boxed{8 \mid 11 \mid 12 \mid 13 \mid 14 \mid 15 \mid 16 \mid 17}$



Fractional Cascading – Laufzeit

Kosten für die Suche

- eine Suche in $A'_1 \to O(\log(|A'_1|))$
- $O(1)$ für jedes nachfolgende Array $\to O(\ell)$
- Gesamtlaufzeit: $O(\ell + \log(|A'_1|))$

Wie groß wird A'_1?

(Annahme: $|A_i| = n$ für alle i)

- $|A'_{\ell-1}| = (\frac{1}{2} + 1)n$
- $|A'_{\ell-2}| = (\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1)n$
- $|A'_{\ell-3}| = (\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1)n$
- $|A'_1| \leq 2n$ $\quad\Rightarrow$ Suche geht in $O(\ell + \log n)$

Speicherverbrauch

- nur ein konstanter Faktor Overhead
- stimmt auch wenn nicht alle Arrays gleich groß sind

Vorberechnung

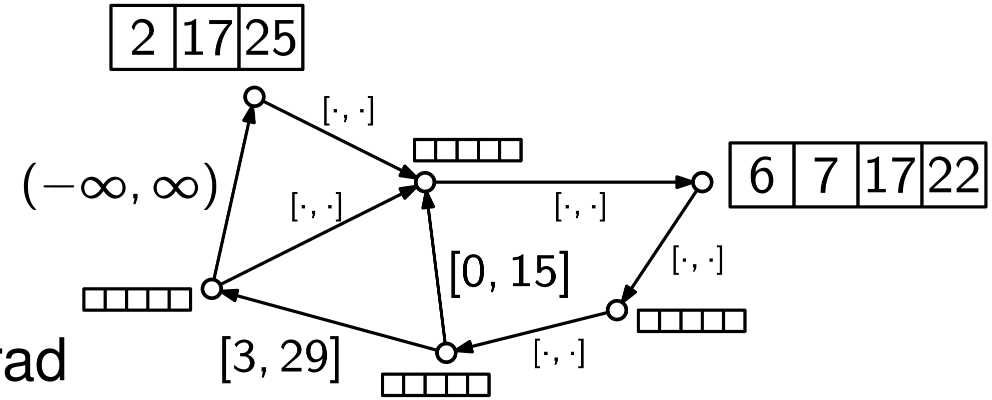
- linear in der Eingabegröße

Wie?

Fractional Cascading – etwas allgemeiner

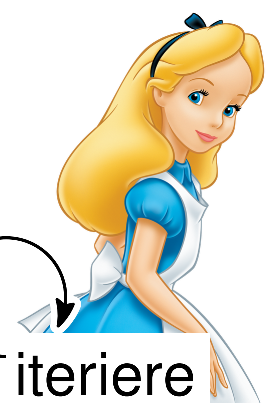
Ausgangssituation

- gerichteter Graph $G = (V, E)$
- pro Knoten v: sortiertes Array A_v
- pro Kante e: ein Intervall I_e
- für jede Zahl x und $v \in V$ ist der Grad von v bzgl. Kanten e mit $x \in I_e$ konstant



Ein Spiel zwischen Alice und Bob

- darf Datenstrukturen vorberechnen
- beantwortet die Frage
- beantwortet die Frage



iteriere

- sucht sich eine Zahl x aus
- sucht sich ein $u \in V$ aus
- fragt wo x in A_u liegt
- wählt Kante uv mit $x \in I_{uv}$
- fragt wo x in A_v liegt

Ähnlich wie bei dem Pfad erhält man

(ohne Beweis)

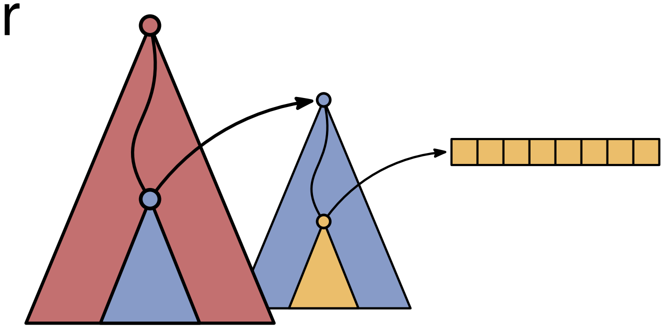
- Vorberechnung: $O(s)$ Zeit und $O(s)$ Platz
- Anfrage: $O(\log s)$ für die erste, danach $O(1)$

($s =$ Gesamtgröße der Arrays)

Zurück zu den Bereichsanfragen

Karlsruher Institut für Technologie

2-D: $O(n \log n)$ Vorberechnung/Speicher und $O(\log n + k)$ pro Anfrage
jede weiter Dimension: kostet einen $\log n$ Faktor



Genauere Laufzeitbetrachtung des 3D-Falls

- Anfrage: $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$
  Richtung: x y z
- binärer Suchbaum für x-Richtung
- jeder Knoten des x-Baums enthält 2D-DS (auf der zugehörigen Punktemenge)
- suche nach $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ in den 2D-Datenstrukturen für $O(\log n)$ Knoten
  - binärer Suchbaum für y-Richtung
  - nach z sortiertes Array für jeden Knoten im y-Baum
  - suche nach $[a_3, b_3]$ im z-Array der y-Wurzel $\rightarrow O(\log n)$
  - laufe y-Baum runter (suche $[a_2, b_2]$, verfolge $[a_3, b_3]$) $\rightarrow O(\log n)$
- Gesamtlaufzeit: $O(\log n \cdot \log n + \log n \cdot \log n)$
- $\log n \cdot \log n$ werden wir „leicht“ los:
  - suche nach $[a_3, b_3]$ im z-Array der x-Wurzel
  - verfolge $[a_3, b_3]$ beim runterlaufen im x-Baum

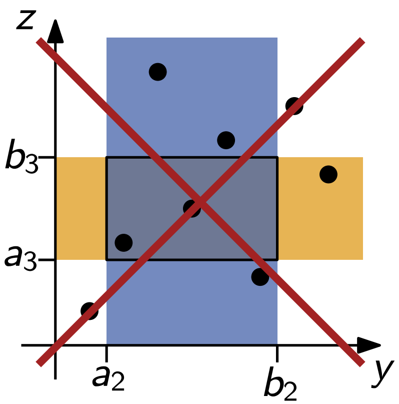
Ziel im Folgenden:
reduziere im 2D-Fall $\log n + \log n$ auf $\log n$
(einmal nach z suchen)

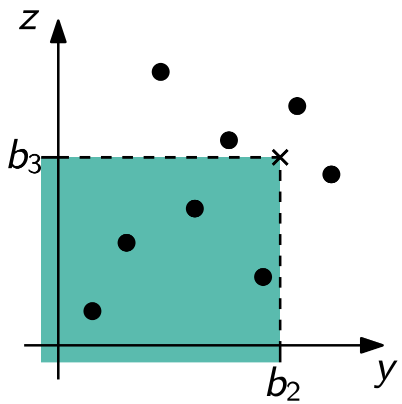
Halbe 2D-Bereichsanfragen

Halbe Bereichsanfragen sind halb so schwer

- Ziel: baue Datenstruktur, die alle Punkte in $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ findet (statt $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$)

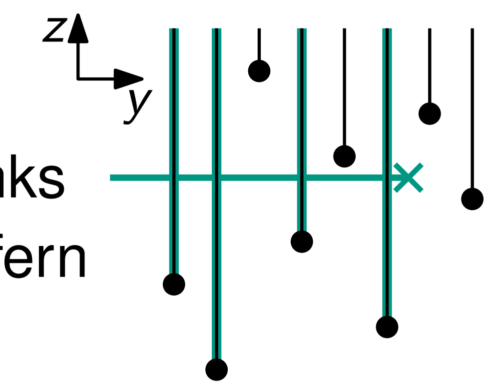
Ziel im Folgenden:
reduziere im 2D-Fall $\log n + \log n$ auf $\log n$
(einmal nach z suchen)





Alternative Sichtweise

- schieße Strahlen von den Punkten nach oben
- Strahl von $\langle b_2, b_3 \rangle$ nach links
- kreuzende Strahlen liefern gewünschte Punkte

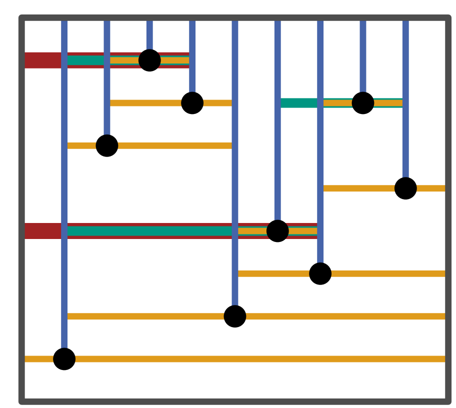


Finde die kreuzenden Strahlen

- sammle die kreuzenden Strahlen von links auf
- pro Schritt: eine Suche in z-Richtung
- wir laufen quasi von Zelle zu Zelle
- jede Zelle kennt die Zellen rechts von sich, sortiert nach z

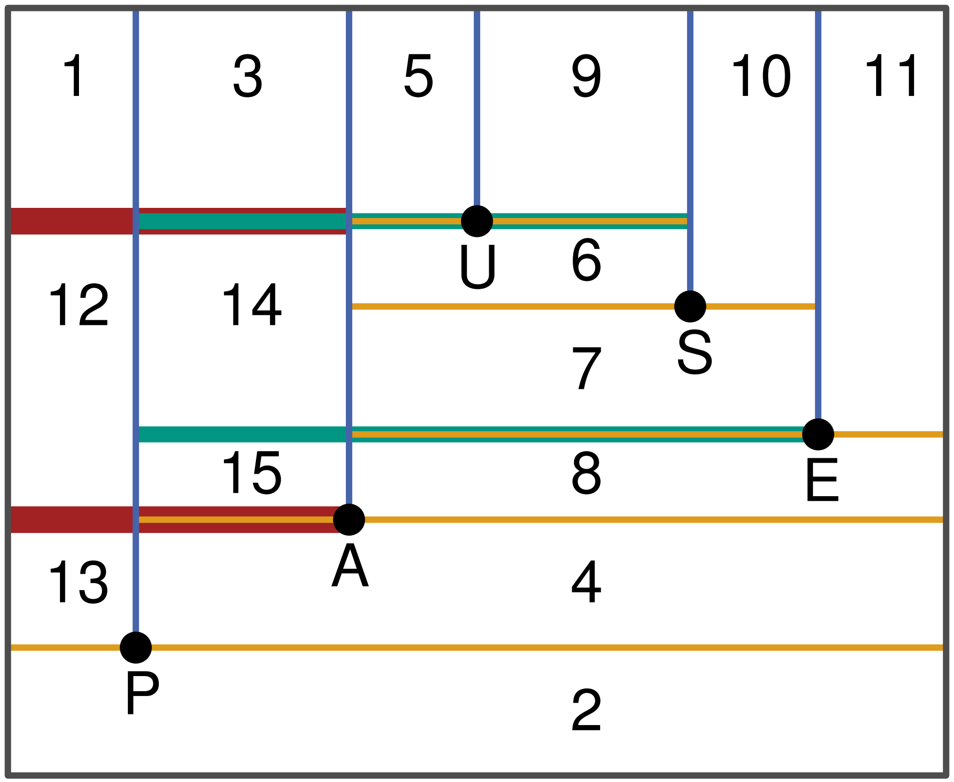
$\Rightarrow O(k \log n)$, wenn wir jedes mal suchen

Schaffen wir $\log n + k$? **Fractional Cascading! Beispiel:**



Zähle die Zellen

Wie viele Zellen erhalten wir (mit und ohne fractional cascading)?

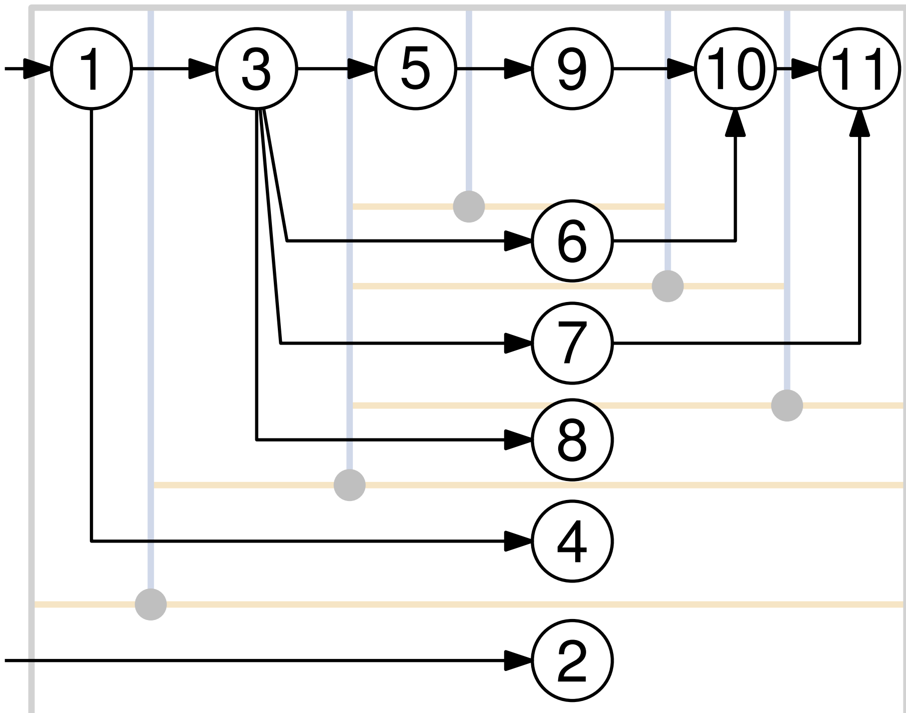


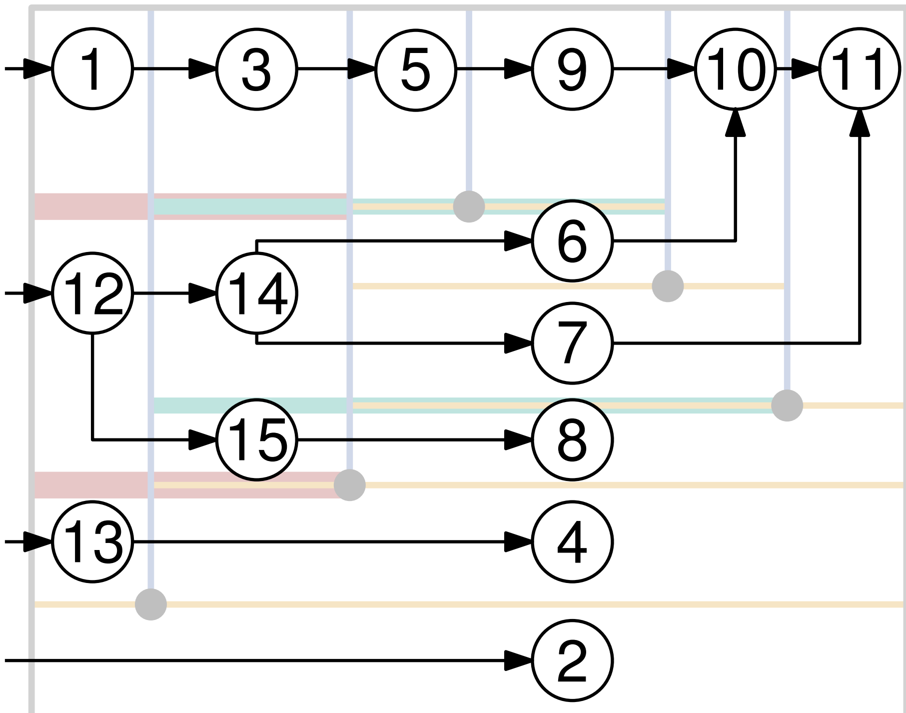
Allgemeines Framework vs. konkrete Situation

Zielführende Denkweise

- mentaler Shortcut: mehrfache Suche nach der gleichen Zahl
  $\rightarrow$ fractional cascading hilft vermutlich
- konkrete Situation: problemspezifische Argumentation oft einfacher als es in das fractional-cascading-Framework zu pressen

Unser Beispiel von eben





Halbe 3D-Bereichsanfragen

Gerade gesehen

- Anfragen der Form $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ in $O(\log n + k)$ **(DS1)**

  Ausgabegröße

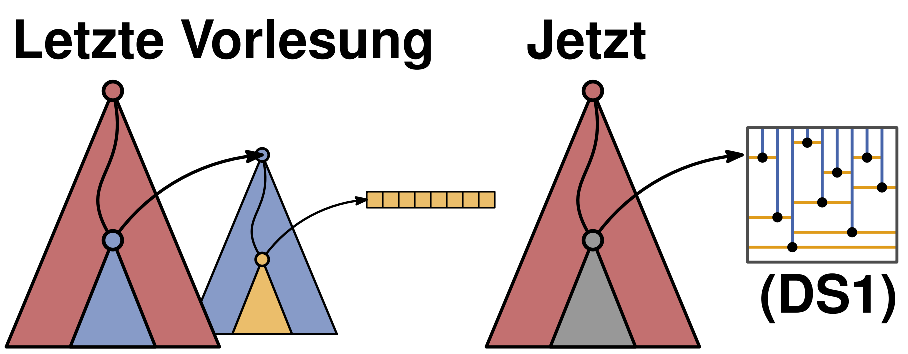
  eine Suche in z-Richtung

Jetzt

- Anfragen der Form $[a_1, b_1] \times (-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$

Wir wissen schon, wie das geht. . .

- binärer Suchbaum für x-Richtung
- jeder Knoten speichert eine **(DS1)** mit den entsprechenden Punkten



Muss ich jetzt nicht in $O(\log n)$ vielen (DS1) suchen?

- ja, aber. . . **Fractional Cascading!**
- suche einmal in z-Richtung in der x-Wurzel
- verfolge die z-Position beim runterlaufen im x-Baum
- in **(DS1)** spart man sich die erste Suche $\Rightarrow$ Gesamtlaufzeit $O(\log n + k)$

Zwei Halbe ergeben ein Ganzes

Lemma **(DS2)**
Für n Punkte in $\mathbb{R}^3$ können $[a_1, b_1] \times (-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$-Anfragen nach $O(n \log n)$ Vorber. mit $O(n \log n)$ Speicher in $O(\log n + k)$ Zeit beantworten.

Vorgehen im Folgenden

- nutze **(DS2)** als black box
- finde Transformation, die aus $(-\infty, b_2]$ ein $[a_2, b_2]$ macht
- nutze dabei y-invertierte Variante von **(DS2)** für Anfragen der Form $[a_2, \infty)$

Können wir nicht einfach den Schnitt der Anfragen berechnen?
$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] = [a_1, b_1] \times (-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3] \cap [a_1, b_1] \times [a_2, \infty) \times [a_3, \infty)$

Lemma **(DS3)**
Für n Punkte in $\mathbb{R}^3$ können wir $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times (-\infty, b_3]$-Anfragen nach $O(n \log^2 n)$ Vorber. mit $O(n \log^2 n)$ Speicher in $O(\log n + k)$ Zeit beantworten.

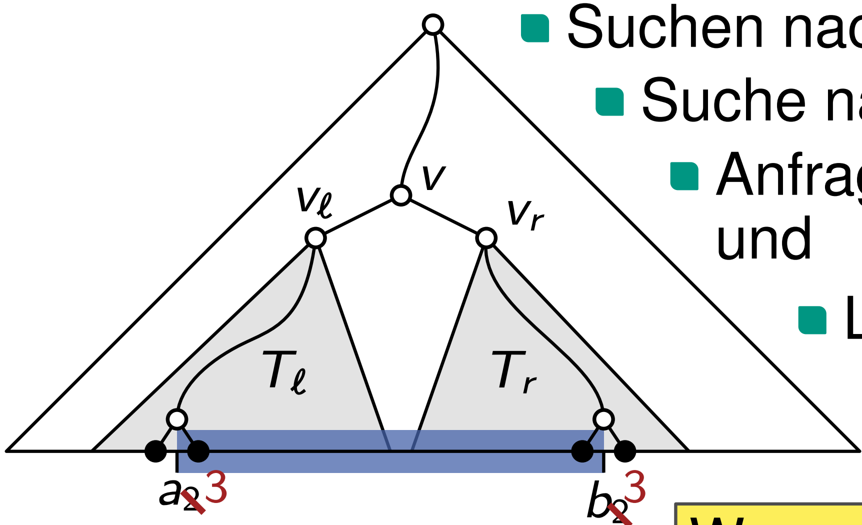
Theorem **(DS4)**
Für n Punkte in $\mathbb{R}^3$ können wir $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$-Anfragen nach $O(n \log^3 n)$ Vorber. mit $O(n \log^3 n)$ Speicher in $O(\log n + k)$ Zeit beantworten.

Intervall in ~~y~~ z-Richtung

Vereinfachte Sichtweise

- ignoriere x- und ~~z~~ y-Richtung
- **(DS~~2~~ 3)** erlaubt uns Anfragen der Form $[a_{\cancel{2}3}, \infty)$ und $(-\infty, b_{\cancel{2}3}]$
- Ziel: baue neue Datenstruktur, die Anfragen der Form $[a_{\cancel{2}3}, b_{\cancel{2}3}]$ erlaubt

Binärer Suchbaum in ~~y~~ z-Richtung



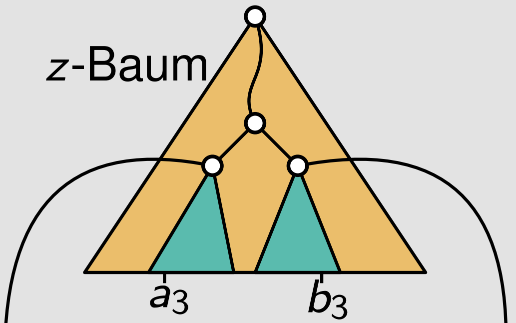
- Suchen nach $a_{\cancel{2}3}$ und $b_{\cancel{2}3}$ trennen sich an Knoten v
  - Suche nach $a_{\cancel{2}3}$: $\to v_\ell$, Suche nach $b_{\cancel{2}3}$: $\to v_r$
    - Anfragen an **(DS2)**: $[a_{\cancel{2}3}, \infty)$ auf Punkten in T_ℓ und $(-\infty, b_{\cancel{2}3}]$ auf Punkten in T_r
      - Laufzeit: $O(\underbrace{\log n}_{\text{suche in } \cancel{y}\, z\text{-Baum}} + \underbrace{\log n + k}_{\text{zwei Anfragen in } \mathbf{(DS\cancel{2}3)}})$
        - Speicherplatz: $O(\log n) \cdot$ (Platz für **DS~~2~~3**)

Warum?

~~Lemma~~ Theorem **(DS~~3~~4)**

Für n Punkte in $\mathbb{R}^3$ können wir $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times (\cancel{-\infty}\, a_3, b_3]$-Anfragen nach $O(n \log^{\cancel{2}3} n)$ Vorber. mit $O(n \log^{\cancel{2}3} n)$ Speicher in $O(\log n + k)$ Zeit beantworten.

The Big Picture

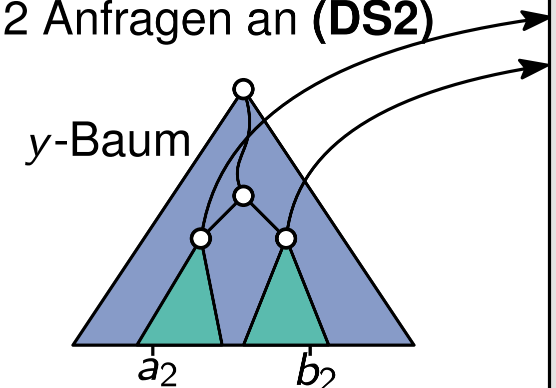


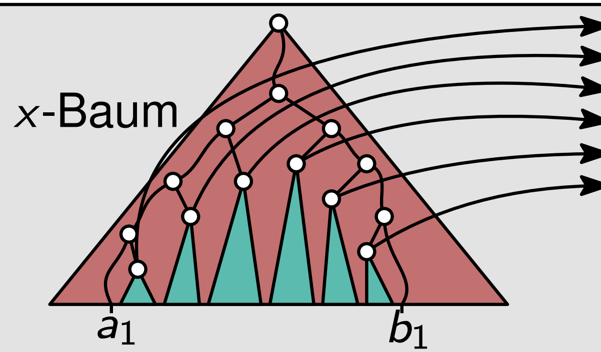
(DS4) $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$
Vorber.: $O(n \log^3 n)$
Speicher: $O(n \log^3 n)$
Anfrage: $O(\log n + k)$

- suche nach a_3, b_3 in z-Baum
- Suche teilt sich: 2 Anfragen an **(DS3)**

(DS3) $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times (-\infty, b_3]$
Vorber.: $O(n \log^2 n)$
Speicher: $O(n \log^2 n)$
Anfrage: $O(\log n + k)$

- suche nach a_2, b_2 in y-Baum
- Suche teilt sich: 2 Anfragen an **(DS2)**



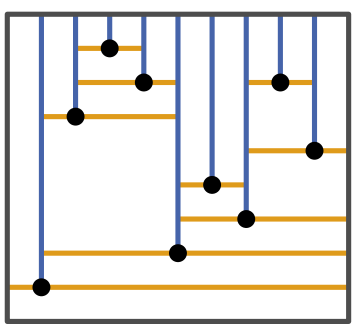


(DS2) $[a_1, b_1] \times (-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$
Vorber.: $O(n \log n)$
Speicher: $O(n \log n)$
Anfrage: $O(\log n + k)$

- suche nach z in Wurzel
- laufe x-Baum runter; folge z
- in den x-Teilbäumen: Anfrage an **(DS1)** (mit z-Startpos.)

(DS1) $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$
Anfrage: $O(k)$
Vorber.: $O(n)$ (wenn Punkte sortiert)
Speicher: $O(n)$

- z-Startposition bekannt
- laufe in y-Richtung; folge z
- gibt geschnittene Strahlen aus



Zusammenfassung

Heute gesehen

- fractional cascading: nur einmal Suchen und dann Zeigern folgen ist besser als immer neu zu suchen
- Vereinfachung von Bereichsanfragen: $(-\infty, b]$ statt $[a, b]$
- schöne geometrische Lösung für $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$
- Transformation, die aus $(-\infty, b]$ ein $[a, b]$ macht

Theorem **((DS4) $d \geq 3$)**
Für n Punkte in $\mathbb{R}^d$ können wir Bereichsanfragen nach $O(n \log^d n)$ Vorberechnung mit $O(n \log^d n)$ Speicher in $O(\log^{d-2} n + k)$ Zeit beantworten.

Was gibt es sonst noch

- diverse Anwendungen für fractional cascading
- dynamische Varianten: Punkte löschen und einfügen
- $O(\log n \cdot (\log n / \log \log n)^{d-3} + k)$ Anfragen
  $O(n \cdot (\log n / \log \log n)^{d-3})$ Speicher
- noch bessere Schranken im Word-RAM-Modell