Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmische Geometrie

Lineare Programme & Schnitt von Halbebenen

Entwicklung einer Gussform

Gießverfahren (Fertigungsverfahren)

- wiederholten Herstellung eines Objekts
- flüssiges Material wird in die Gussform gegossen
- dort verfestigt es sich und wird wieder herausgenommen

Entwicklung einer Gussform

Gießverfahren (Fertigungsverfahren)

- wiederholten Herstellung eines Objekts
- flüssiges Material wird in die Gussform gegossen
- dort verfestigt es sich und wird wieder herausgenommen
- Verlorene Formen: werden beim herausnehmen zerstört
- Dauerformen: können erhalten werden

Entwicklung einer Gussform

Gießverfahren (Fertigungsverfahren)

- wiederholten Herstellung eines Objekts
- flüssiges Material wird in die Gussform gegossen
- dort verfestigt es sich und wird wieder herausgenommen
- Verlorene Formen: werden beim herausnehmen zerstört
- Dauerformen: können erhalten werden

Für welche Objekte gibt es Dauerformen?

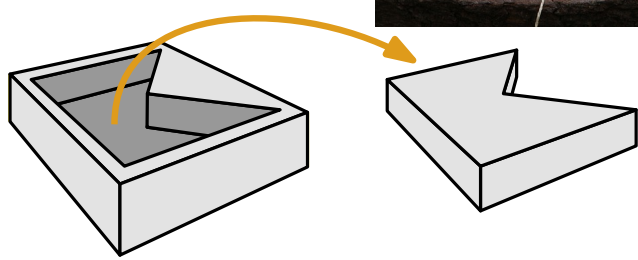
Entwicklung einer Gussform

Gießverfahren (Fertigungsverfahren)

- wiederholten Herstellung eines Objekts
- flüssiges Material wird in die Gussform gegossen
- dort verfestigt es sich und wird wieder herausgenommen
- Verlorene Formen: werden beim herausnehmen zerstört
- Dauerformen: können erhalten werden

Für welche Objekte gibt es Dauerformen?

- Annahme: Form besteht aus nur einem Teil



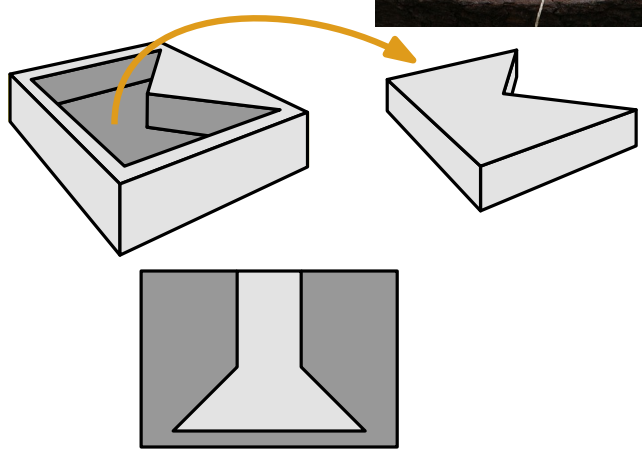
Entwicklung einer Gussform

Gießverfahren (Fertigungsverfahren)

- wiederholten Herstellung eines Objekts
- flüssiges Material wird in die Gussform gegossen
- dort verfestigt es sich und wird wieder herausgenommen
- Verlorene Formen: werden beim herausnehmen zerstört
- Dauerformen: können erhalten werden

Für welche Objekte gibt es Dauerformen?

- Annahme: Form besteht aus nur einem Teil
- herausnehmen des gegossenen Objekts ist nicht immer möglich

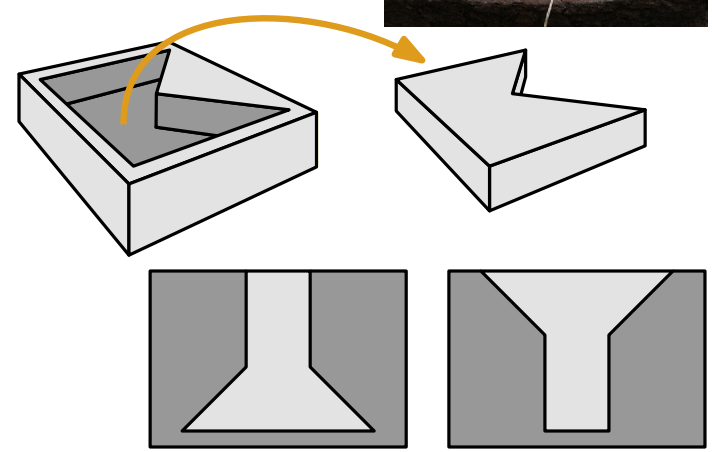


Entwicklung einer Gussform

Gießverfahren (Fertigungsverfahren)

- wiederholten Herstellung eines Objekts
- flüssiges Material wird in die Gussform gegossen
- dort verfestigt es sich und wird wieder herausgenommen
- Verlorene Formen: werden beim herausnehmen zerstört
- Dauerformen: können erhalten werden

Für welche Objekte gibt es Dauerformen?



- Annahme: Form besteht aus nur einem Teil
- herausnehmen des gegossenen Objekts ist nicht immer möglich
- eine andere Gussform für dasselbe Objekt funktioniert

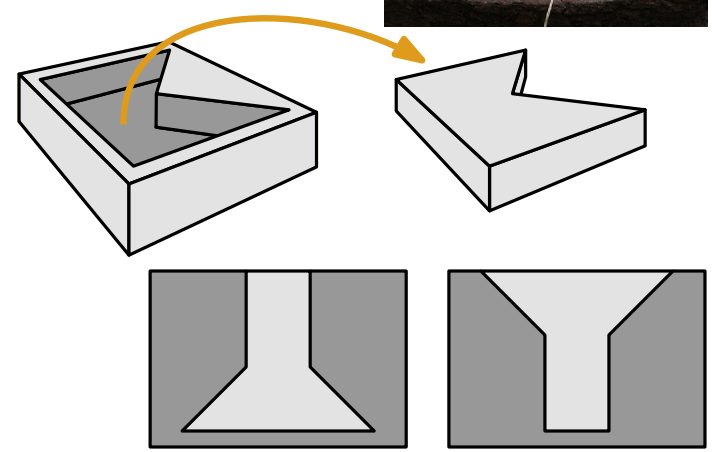
Entwicklung einer Gussform

Gießverfahren (Fertigungsverfahren)

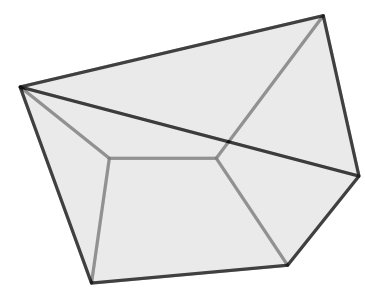
- wiederholten Herstellung eines Objekts
- flüssiges Material wird in die Gussform gegossen
- dort verfestigt es sich und wird wieder herausgenommen
- Verlorene Formen: werden beim herausnehmen zerstört
- Dauerformen: können erhalten werden

Für welche Objekte gibt es Dauerformen?

- Annahme: Form besteht aus nur einem Teil
- herausnehmen des gegossenen Objekts ist nicht immer möglich
- eine andere Gussform für dasselbe Objekt funktioniert

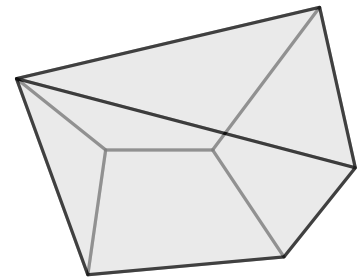


Problem: Gussform
Gegeben ein Polyeder P, gibt es eine Gussform für P, aus der P mittels einer Translation entfernt werden kann?



Erste Beobachtungen

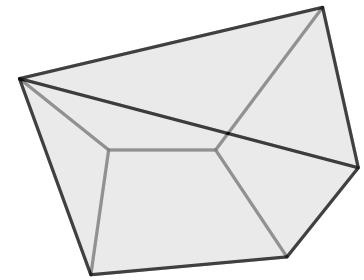
Problem: Gussform
Gegeben ein Polyeder P, gibt es eine Gussform für P, aus der P mittels einer Translation entfernt werden kann?



Welche Entscheidungen haben wir zu treffen?

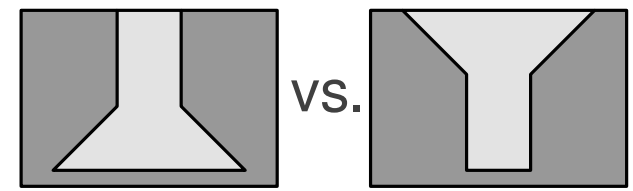
Erste Beobachtungen

Problem: Gussform
Gegeben ein Polyeder P, gibt es eine Gussform für P, aus der P mittels einer Translation entfernt werden kann?



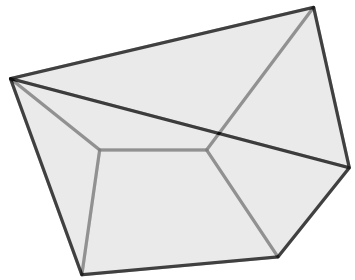
Welche Entscheidungen haben wir zu treffen?

- die Wahl er oberen Facette



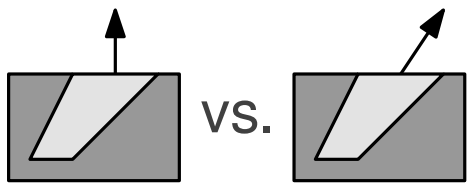
Erste Beobachtungen

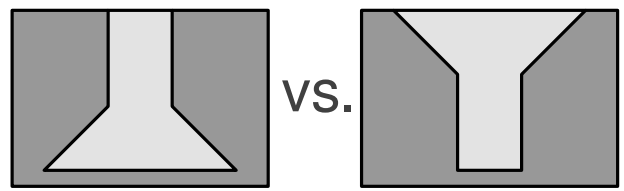
Problem: Gussform
Gegeben ein Polyeder P, gibt es eine Gussform für P, aus der P mittels einer Translation entfernt werden kann?



Welche Entscheidungen haben wir zu treffen?

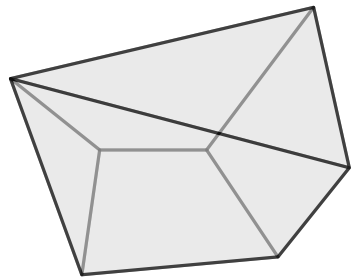
- die Wahl er oberen Facette
- die Richtung der Translation





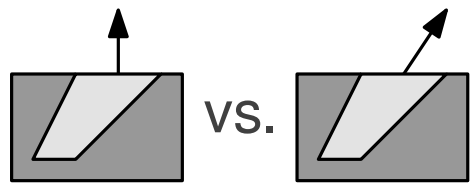
Erste Beobachtungen

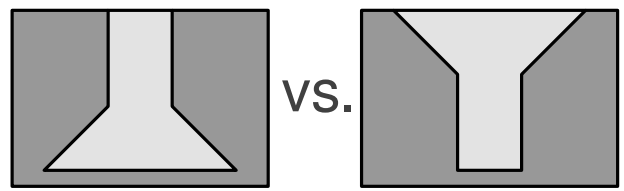
Problem: Gussform
Gegeben ein Polyeder P, gibt es eine Gussform für P, aus der P mittels einer Translation entfernt werden kann?



Welche Entscheidungen haben wir zu treffen?

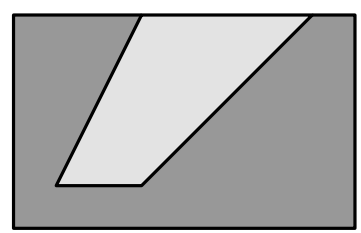
- die Wahl er oberen Facette
- die Richtung der Translation





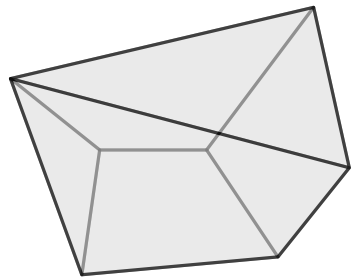
Vereinfachte Situation

- obere Facette schon ausgewählt $\Rightarrow$ Gussform steht fest



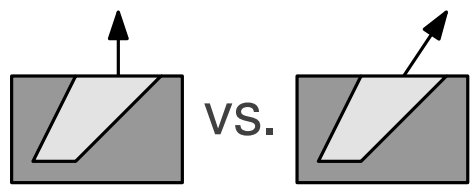
Erste Beobachtungen

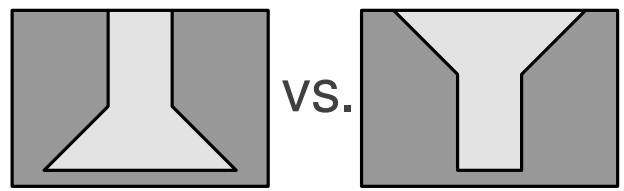
Problem: Gussform
Gegeben ein Polyeder P, gibt es eine Gussform für P, aus der P mittels einer Translation entfernt werden kann?



Welche Entscheidungen haben wir zu treffen?

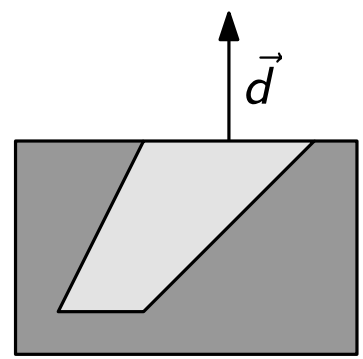
- die Wahl er oberen Facette
- die Richtung der Translation





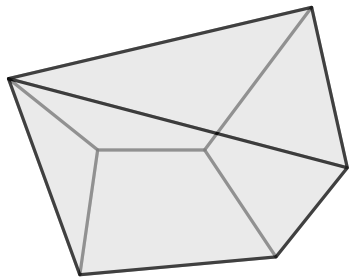
Vereinfachte Situation

- obere Facette schon ausgewählt $\Rightarrow$ Gussform steht fest
- Richtung der Translation: $\vec{d} = (d_x \quad d_y \quad d_z)^T \in \mathbb{R}^3$



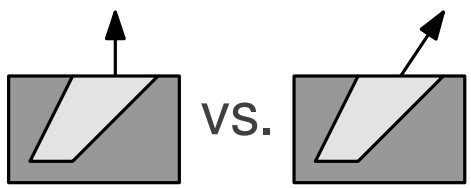
Erste Beobachtungen

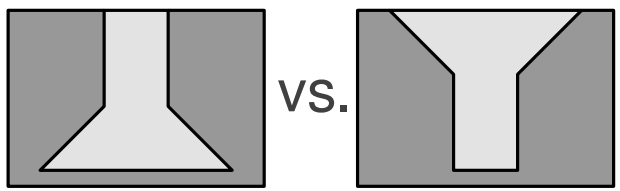
Problem: Gussform
Gegeben ein Polyeder P, gibt es eine Gussform für P, aus der P mittels einer Translation entfernt werden kann?



Welche Entscheidungen haben wir zu treffen?

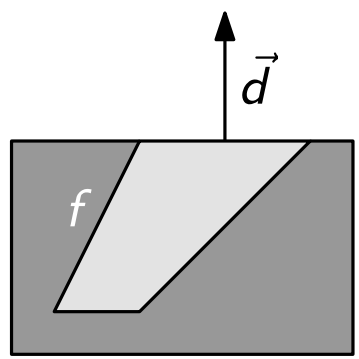
- die Wahl er oberen Facette
- die Richtung der Translation





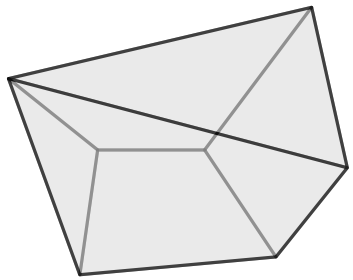
Vereinfachte Situation

- obere Facette schon ausgewählt $\Rightarrow$ Gussform steht fest
- Richtung der Translation: $\vec{d} = (d_x \quad d_y \quad d_z)^T \in \mathbb{R}^3$
- betrachte eine gewöhnliche Facette f (nicht die obere)



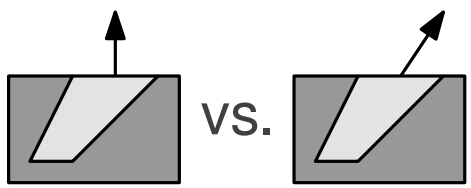
Erste Beobachtungen

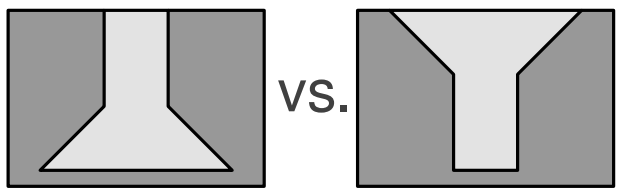
Problem: Gussform
Gegeben ein Polyeder P, gibt es eine Gussform für P, aus der P mittels einer Translation entfernt werden kann?



Welche Entscheidungen haben wir zu treffen?

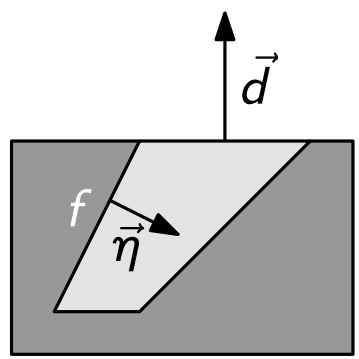
- die Wahl er oberen Facette
- die Richtung der Translation





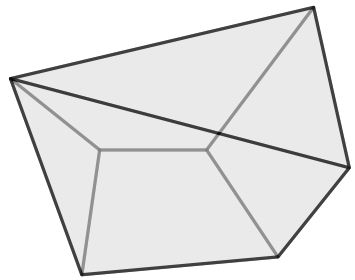
Vereinfachte Situation

- obere Facette schon ausgewählt $\Rightarrow$ Gussform steht fest
- Richtung der Translation: $\vec{d} = (d_x \quad d_y \quad d_z)^T \in \mathbb{R}^3$
- betrachte eine gewöhnliche Facette f (nicht die obere)
- sei $\vec{\eta}$ die innere Normale



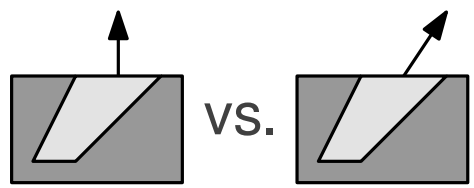
Erste Beobachtungen

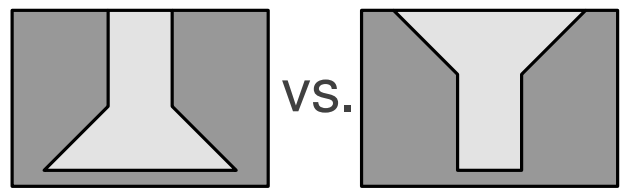
Problem: Gussform
Gegeben ein Polyeder P, gibt es eine Gussform für P, aus der P mittels einer Translation entfernt werden kann?



Welche Entscheidungen haben wir zu treffen?

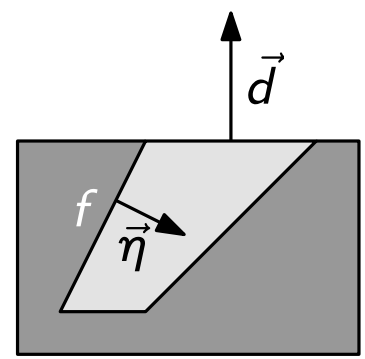
- die Wahl er oberen Facette
- die Richtung der Translation





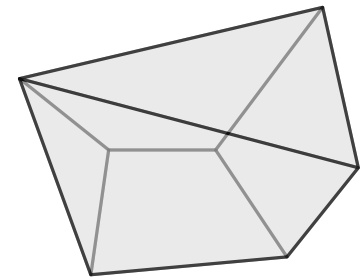
Vereinfachte Situation

- obere Facette schon ausgewählt $\Rightarrow$ Gussform steht fest
- Richtung der Translation: $\vec{d} = (d_x \quad d_y \quad d_z)^T \in \mathbb{R}^3$
- betrachte eine gewöhnliche Facette f (nicht die obere)
- sei $\vec{\eta}$ die innere Normale
- Problem: Winkel zwischen $\vec{d}$ und $\vec{\eta}$ ist größer 90°



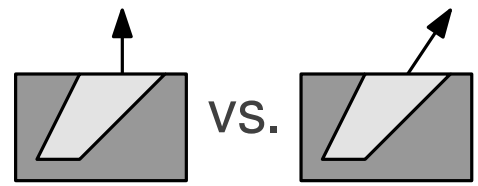
Erste Beobachtungen

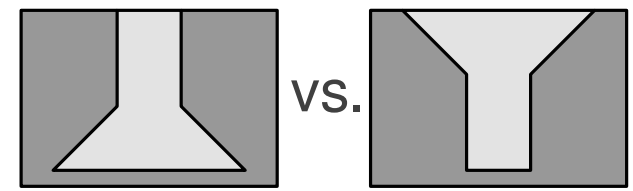
Problem: Gussform
Gegeben ein Polyeder P, gibt es eine Gussform für P, aus der P mittels einer Translation entfernt werden kann?



Welche Entscheidungen haben wir zu treffen?

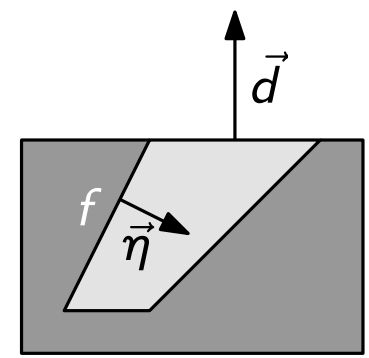
- die Wahl er oberen Facette
- die Richtung der Translation





Vereinfachte Situation

- obere Facette schon ausgewählt $\Rightarrow$ Gussform steht fest
- Richtung der Translation: $\vec{d} = (d_x \quad d_y \quad d_z)^T \in \mathbb{R}^3$
- betrachte eine gewöhnliche Facette f (nicht die obere)
- sei $\vec{\eta}$ die innere Normale
- Problem: Winkel zwischen $\vec{d}$ und $\vec{\eta}$ ist größer $90°$



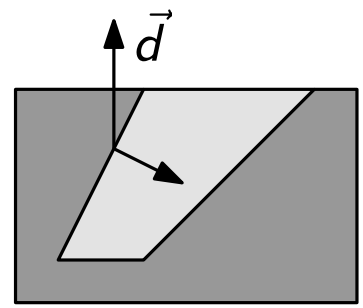
Lemma
P kann genau dann in Richtung $\vec{d}$ entfernt werden, wenn der Winkel zwischen $\vec{d}$ und der inneren Normalen jeder gewöhnlichen Facette $\leq 90°$ ist.

Gute und schlechte Translationen

Lemma
P kann genau dann in Richtung $\vec{d}$ entfernt werden, wenn der Winkel zwischen $\vec{d}$ und der inneren Normalen jeder gewöhnlichen Facette $\leq 90°$ ist.

Beweis

- Winkel $> 90° \Rightarrow$ kann nicht entfernt werden



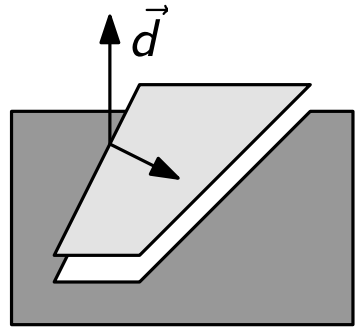
- Winkel $\leq 90° \Rightarrow$ kann entfernt werden

Gute und schlechte Translationen

Lemma
P kann genau dann in Richtung $\vec{d}$ entfernt werden, wenn der Winkel zwischen $\vec{d}$ und der inneren Normalen jeder gewöhnlichen Facette $\leq 90°$ ist.

Beweis

- Winkel $> 90° \Rightarrow$ kann nicht entfernt werden
  - scheitert schon zu Beginn der Translation
- Winkel $\leq 90° \Rightarrow$ kann entfernt werden

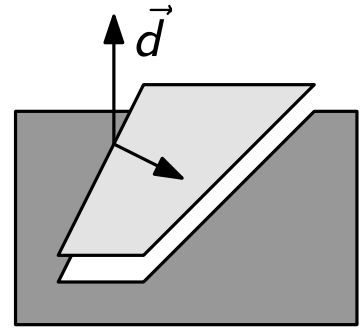


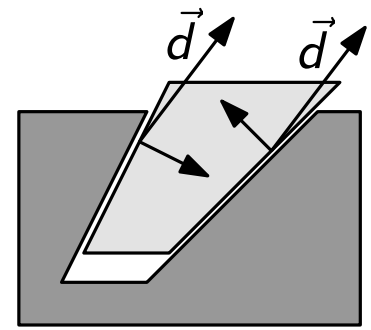
Gute und schlechte Translationen

Lemma
P kann genau dann in Richtung $\vec{d}$ entfernt werden, wenn der Winkel zwischen $\vec{d}$ und der inneren Normalen jeder gewöhnlichen Facette $\leq 90°$ ist.

Beweis

- Winkel $> 90° \Rightarrow$ kann nicht entfernt werden
  - scheitert schon zu Beginn der Translation
- Winkel $\leq 90° \Rightarrow$ kann entfernt werden
  - zu Beginn geht erstmal alles gut



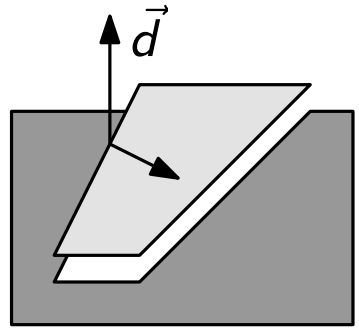


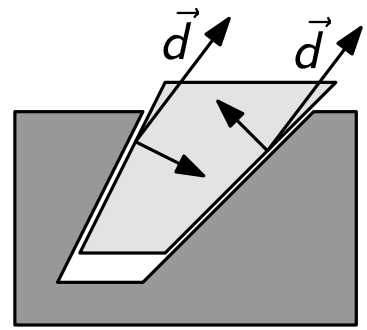
Gute und schlechte Translationen

Lemma
P kann genau dann in Richtung $\vec{d}$ entfernt werden, wenn der Winkel zwischen $\vec{d}$ und der inneren Normalen jeder gewöhnlichen Facette $\leq 90°$ ist.

Beweis

- Winkel $> 90° \Rightarrow$ kann nicht entfernt werden
  - scheitert schon zu Beginn der Translation
- Winkel $\leq 90° \Rightarrow$ kann entfernt werden
  - zu Beginn geht erstmal alles gut
  - Kann das Polyeder später nochmal mit der Gussform kollidieren?



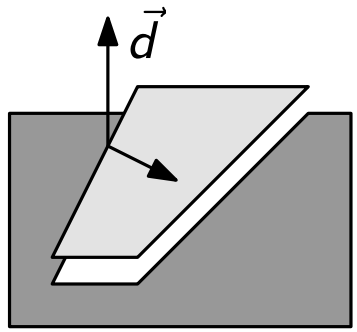


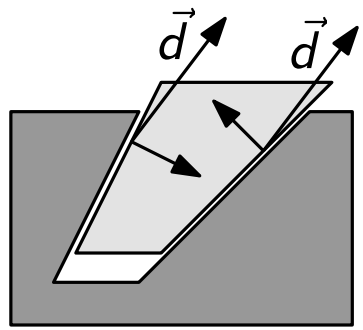
Gute und schlechte Translationen

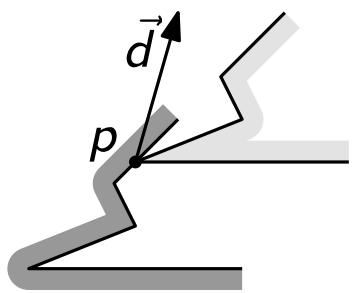
Lemma
P kann genau dann in Richtung $\vec{d}$ entfernt werden, wenn der Winkel zwischen $\vec{d}$ und der inneren Normalen jeder gewöhnlichen Facette $\leq 90°$ ist.

Beweis

- Winkel $> 90° \Rightarrow$ kann nicht entfernt werden
  - scheitert schon zu Beginn der Translation
- Winkel $\leq 90° \Rightarrow$ kann entfernt werden
  - zu Beginn geht erstmal alles gut
  - Kann das Polyeder später nochmal mit der Gussform kollidieren?
  - sei p der erste Punkt von P, der mit der Form kollidiert





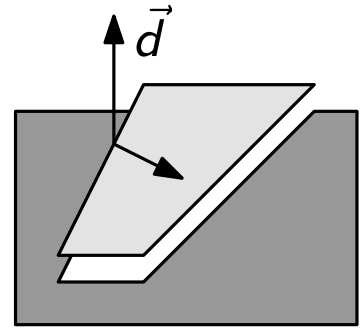


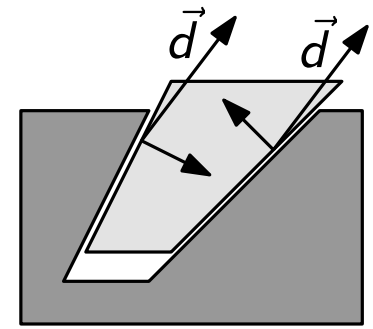
Gute und schlechte Translationen

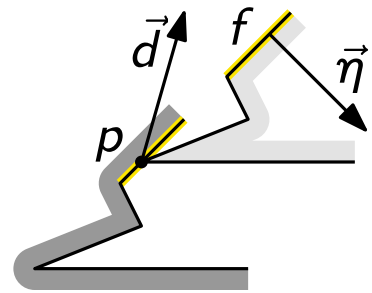
Lemma
P kann genau dann in Richtung $\vec{d}$ entfernt werden, wenn der Winkel zwischen $\vec{d}$ und der inneren Normalen jeder gewöhnlichen Facette $\leq 90°$ ist.

Beweis

- Winkel $> 90° \Rightarrow$ kann nicht entfernt werden
  - scheitert schon zu Beginn der Translation
- Winkel $\leq 90° \Rightarrow$ kann entfernt werden
  - zu Beginn geht erstmal alles gut
  - Kann das Polyeder später nochmal mit der Gussform kollidieren?
  - sei p der erste Punkt von P, der mit der Form kollidiert
  - sei f die zugehörige Facette von P mit innerer Normalen $\vec{\eta}$





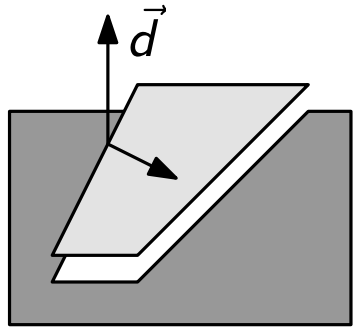


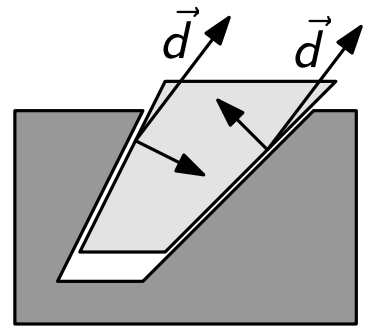
Gute und schlechte Translationen

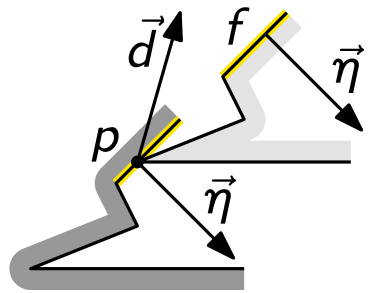
Lemma
P kann genau dann in Richtung $\vec{d}$ entfernt werden, wenn der Winkel zwischen $\vec{d}$ und der inneren Normalen jeder gewöhnlichen Facette $\leq 90°$ ist.

Beweis

- Winkel $> 90° \Rightarrow$ kann nicht entfernt werden
  - scheitert schon zu Beginn der Translation
- Winkel $\leq 90° \Rightarrow$ kann entfernt werden
  - zu Beginn geht erstmal alles gut
  - Kann das Polyeder später nochmal mit der Gussform kollidieren?
  - sei p der erste Punkt von P, der mit der Form kollidiert
  - sei f die zugehörige Facette von P mit innerer Normalen $\vec{\eta}$
  - Winkel zwischen $\vec{d}$ und $\vec{\eta}$: $> 90°$

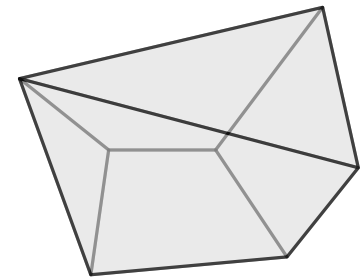






Was wollen wir eigentlich?

Problem: Gussform
Gegeben ein Polyeder P, gibt es eine Gussform für P, aus der P mittels einer Translation entfernt werden kann?

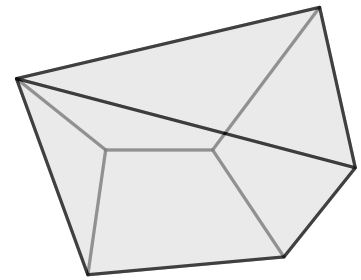


Ziel

- wähle obere Facette für P und eine Richtung $\vec{d} = (d_x \quad d_y \quad d_z)^T \in \mathbb{R}^3$
- sodass für jede innere Normale $\vec{\eta}$ einer gewöhnlichen Facette gilt: Winkel zwischen $\vec{d}$ und $\vec{\eta}$ ist maximal $90°$

Was wollen wir eigentlich?

Problem: Gussform
Gegeben ein Polyeder P, gibt es eine Gussform für P, aus der P mittels einer Translation entfernt werden kann?

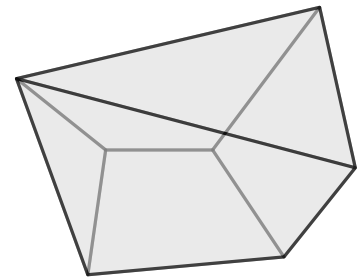


Ziel

- wähle obere Facette für P und eine Richtung $\vec{d} = (d_x \quad d_y \quad d_z)^T \in \mathbb{R}^3$
- sodass für jede innere Normale $\vec{\eta}$ einer gewöhnlichen Facette gilt: Winkel zwischen $\vec{d}$ und $\vec{\eta}$ ist maximal $90°$
- beachte: wir können $\vec{d_z} = 1$ annehmen Warum?

Was wollen wir eigentlich?

Problem: Gussform
Gegeben ein Polyeder P, gibt es eine Gussform für P, aus der P mittels einer Translation entfernt werden kann?



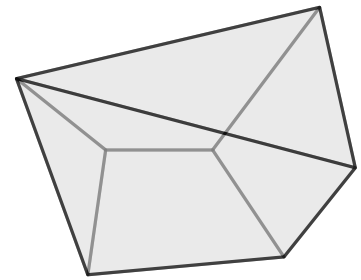
Ziel

- wähle obere Facette für P und eine Richtung $\vec{d} = (d_x \quad d_y \quad d_z)^T \in \mathbb{R}^3$
- sodass für jede innere Normale $\vec{\eta}$ einer gewöhnlichen Facette gilt: Winkel zwischen $\vec{d}$ und $\vec{\eta}$ ist maximal $90°$
- beachte: wir können $\vec{d_z} = 1$ annehmen Warum?

Erinnerung (Skalarprodukt): Winkel zwischen $\vec{d}$ und $\vec{\eta} \leq 90° \Leftrightarrow \vec{d} \cdot \vec{\eta} \geq 0$

Was wollen wir eigentlich?

Problem: Gussform
Gegeben ein Polyeder P, gibt es eine Gussform für P, aus der P mittels einer Translation entfernt werden kann?



Ziel

- wähle obere Facette für P und eine Richtung $\vec{d} = (d_x \quad d_y \quad d_z)^T \in \mathbb{R}^3$
- sodass für jede innere Normale $\vec{\eta}$ einer gewöhnlichen Facette gilt: Winkel zwischen $\vec{d}$ und $\vec{\eta}$ ist maximal $90°$
- beachte: wir können $\vec{d_z} = 1$ annehmen Warum?

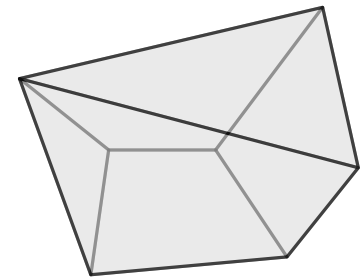
Erinnerung (Skalarprodukt): Winkel zwischen $\vec{d}$ und $\vec{\eta} \leq 90° \Leftrightarrow \vec{d} \cdot \vec{\eta} \geq 0$

Neuformulierung des Problems (für feste obere Facette)

- finde d_x und d_y

Was wollen wir eigentlich?

Problem: Gussform
Gegeben ein Polyeder P, gibt es eine Gussform für P, aus der P mittels einer Translation entfernt werden kann?



Ziel

- wähle obere Facette für P und eine Richtung $\vec{d} = (d_x \quad d_y \quad d_z)^T \in \mathbb{R}^3$
- sodass für jede innere Normale $\vec{\eta}$ einer gewöhnlichen Facette gilt: Winkel zwischen $\vec{d}$ und $\vec{\eta}$ ist maximal $90°$
- beachte: wir können $\vec{d_z} = 1$ annehmen Warum?

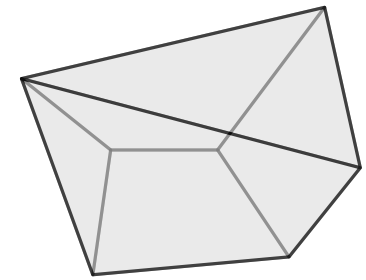
Erinnerung (Skalarprodukt): Winkel zwischen $\vec{d}$ und $\vec{\eta} \leq 90° \Leftrightarrow \vec{d} \cdot \vec{\eta} \geq 0$

Neuformulierung des Problems (für feste obere Facette)

- finde d_x und d_y
- sodass für jede gewöhnliche Facette gilt: $\eta_x \cdot d_x + \eta_y \cdot d_y + \eta_z \geq 0$

Was wollen wir eigentlich?

Problem: Gussform
Gegeben ein Polyeder P, gibt es eine Gussform für P, aus der P mittels einer Translation entfernt werden kann?



Ziel

- wähle obere Facette für P und eine Richtung $\vec{d} = (d_x \quad d_y \quad d_z)^T \in \mathbb{R}^3$
- sodass für jede innere Normale $\vec{\eta}$ einer gewöhnlichen Facette gilt: Winkel zwischen $\vec{d}$ und $\vec{\eta}$ ist maximal $90°$
- beachte: wir können $\vec{d_z} = 1$ annehmen Warum?

Erinnerung (Skalarprodukt): Winkel zwischen $\vec{d}$ und $\vec{\eta} \leq 90° \Leftrightarrow \vec{d} \cdot \vec{\eta} \geq 0$

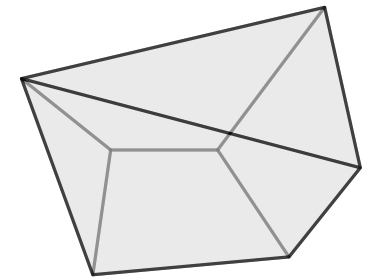
Neuformulierung des Problems (für feste obere Facette)

- finde d_x und d_y
- sodass für jede gewöhnliche Facette gilt: $\eta_x \cdot d_x + \eta_y \cdot d_y + \eta_z \geq 0$

$\rightarrow$ das ist ein lineares Programm (LP)

Was wollen wir eigentlich?

Problem: Gussform
Gegeben ein Polyeder P, gibt es eine Gussform für P, aus der P mittels einer Translation entfernt werden kann?



Ziel

- wähle obere Facette für P und eine Richtung $\vec{d} = (d_x \quad d_y \quad d_z)^T \in \mathbb{R}^3$
- sodass für jede innere Normale $\vec{\eta}$ einer gewöhnlichen Facette gilt: Winkel zwischen $\vec{d}$ und $\vec{\eta}$ ist maximal $90°$
- beachte: wir können $\vec{d_z} = 1$ annehmen Warum?

Erinnerung (Skalarprodukt): Winkel zwischen $\vec{d}$ und $\vec{\eta} \leq 90° \Leftrightarrow \vec{d} \cdot \vec{\eta} \geq 0$

Neuformulierung des Problems (für feste obere Facette)

- finde d_x und d_y
- sodass für jede gewöhnliche Facette gilt: $\eta_x \cdot d_x + \eta_y \cdot d_y + \eta_z \geq 0$

$\rightarrow$ das ist ein lineares Programm (LP) Ist die Ungleichung wirklich linear?

Lineare Programme

Lineare Programme

Allgemeines Form eines LPs

$$
\begin{aligned}
\text{maximiere} \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_d x_d \\
\text{sodass} \quad & a_{1,1} x_1 + \cdots + a_{1,d} x_d \leq b_1 \\
& a_{2,1} x_1 + \cdots + a_{2,d} x_d \leq b_2 \\
& \vdots \\
& a_{n,1} x_1 + \cdots + a_{n,d} x_d \leq b_n
\end{aligned}
$$

- Variablen $x_1, \ldots, x_d$
- $a_{i,j}$, b_i, c_i sind Konstanten
- eine Zielfunktion
- n Nebenbedingungen

Lineare Programme

Allgemeines Form eines LPs

$$
\begin{aligned}
\text{maximiere} \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_d x_d \\
\text{sodass} \quad & a_{1,1} x_1 + \cdots + a_{1,d} x_d \leq b_1 \\
& a_{2,1} x_1 + \cdots + a_{2,d} x_d \leq b_2 \\
& \vdots \\
& a_{n,1} x_1 + \cdots + a_{n,d} x_d \leq b_n
\end{aligned}
$$

- Variablen $x_1, \ldots, x_d$
- $a_{i,j}$, b_i, c_i sind Konstanten
- eine Zielfunktion
- n Nebenbedingungen
- d ist die Dimension des LPs

Lineare Programme

Allgemeines Form eines LPs

$$
\begin{aligned}
\text{maximiere} \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_d x_d \\
\text{sodass} \quad & a_{1,1} x_1 + \cdots + a_{1,d} x_d \leq b_1 \\
& a_{2,1} x_1 + \cdots + a_{2,d} x_d \leq b_2 \\
& \vdots \\
& a_{n,1} x_1 + \cdots + a_{n,d} x_d \leq b_n
\end{aligned}
$$

- Variablen $x_1, \ldots, x_d$
- $a_{i,j}$, b_i, c_i sind Konstanten
- eine Zielfunktion
- n Nebenbedingungen
- d ist die Dimension des LPs
- Theorie: polynomiell lösbar
- Praxis: effiziente Algorithmen (Simplex)

Lineare Programme

Allgemeines Form eines LPs

$$
\begin{aligned}
\text{maximiere} \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_d x_d \\
\text{sodass} \quad & a_{1,1} x_1 + \cdots + a_{1,d} x_d \leq b_1 \\
& a_{2,1} x_1 + \cdots + a_{2,d} x_d \leq b_2 \\
& \vdots \\
& a_{n,1} x_1 + \cdots + a_{n,d} x_d \leq b_n
\end{aligned}
$$

- Variablen $x_1, \ldots, x_d$
- $a_{i,j}$, b_i, c_i sind Konstanten
- eine Zielfunktion
- n Nebenbedingungen
- d ist die Dimension des LPs
- Theorie: polynomiell lösbar
- Praxis: effiziente Algorithmen (Simplex)

Unser konkretes LP

Lineare Programme

Allgemeines Form eines LPs

$$\begin{aligned} \text{maximiere} \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_d x_d \\ \text{sodass} \quad & a_{1,1} x_1 + \cdots + a_{1,d} x_d \leq b_1 \\ & a_{2,1} x_1 + \cdots + a_{2,d} x_d \leq b_2 \\ & \vdots \\ & a_{n,1} x_1 + \cdots + a_{n,d} x_d \leq b_n \end{aligned}$$

- Variablen $x_1, \ldots, x_d$
- $a_{i,j}$, b_i, c_i sind Konstanten
- eine Zielfunktion
- n Nebenbedingungen
- d ist die Dimension des LPs
- Theorie: polynomiell lösbar
- Praxis: effiziente Algorithmen (Simplex)

Unser konkretes LP

- Variablen $d_x, d_y \rightarrow$ Dimension ist 2
- Nebenbedingung für jede Facette: $\eta_x \cdot d_x + \eta_y \cdot d_y + \eta_z \geq 0$

Lineare Programme

Allgemeines Form eines LPs

$$\begin{aligned} \text{maximiere} \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_d x_d \\ \text{sodass} \quad & a_{1,1} x_1 + \cdots + a_{1,d} x_d \leq b_1 \\ & a_{2,1} x_1 + \cdots + a_{2,d} x_d \leq b_2 \\ & \vdots \\ & a_{n,1} x_1 + \cdots + a_{n,d} x_d \leq b_n \end{aligned}$$

- Variablen $x_1, \ldots, x_d$
- $a_{i,j}$, b_i, c_i sind Konstanten
- eine Zielfunktion
- n Nebenbedingungen
- d ist die Dimension des LPs
- Theorie: polynomiell lösbar
- Praxis: effiziente Algorithmen (Simplex)

Unser konkretes LP

- Variablen $d_x, d_y \rightarrow$ Dimension ist 2
- Nebenbedingung für jede Facette: $\eta_x \cdot d_x + \eta_y \cdot d_y + \eta_z \geq 0$
- keine Zielfunktion

Lineare Programme

Allgemeines Form eines LPs

$$\begin{aligned} \text{maximiere} \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_d x_d \\ \text{sodass} \quad & a_{1,1} x_1 + \cdots + a_{1,d} x_d \leq b_1 \\ & a_{2,1} x_1 + \cdots + a_{2,d} x_d \leq b_2 \\ & \vdots \\ & a_{n,1} x_1 + \cdots + a_{n,d} x_d \leq b_n \end{aligned}$$

- Variablen $x_1, \ldots, x_d$
- $a_{i,j}$, b_i, c_i sind Konstanten
- eine Zielfunktion
- n Nebenbedingungen
- d ist die Dimension des LPs
- Theorie: polynomiell lösbar
- Praxis: effiziente Algorithmen (Simplex)

Unser konkretes LP

- Variablen $d_x, d_y \rightarrow$ Dimension ist 2
- Nebenbedingung für jede Facette: $\eta_x \cdot d_x + \eta_y \cdot d_y + \eta_z \geq 0$
- keine Zielfunktion

Algorithmus für das Gussform-Problem

Lineare Programme

Allgemeines Form eines LPs

$$\begin{aligned} \text{maximiere} \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_d x_d \\ \text{sodass} \quad & a_{1,1} x_1 + \cdots + a_{1,d} x_d \leq b_1 \\ & a_{2,1} x_1 + \cdots + a_{2,d} x_d \leq b_2 \\ & \vdots \\ & a_{n,1} x_1 + \cdots + a_{n,d} x_d \leq b_n \end{aligned}$$

- Variablen $x_1, \ldots, x_d$
- $a_{i,j}$, b_i, c_i sind Konstanten
- eine Zielfunktion
- n Nebenbedingungen
- d ist die Dimension des LPs
- Theorie: polynomiell lösbar
- Praxis: effiziente Algorithmen (Simplex)

Unser konkretes LP

- Variablen $d_x, d_y \rightarrow$ Dimension ist 2
- Nebenbedingung für jede Facette: $\eta_x \cdot d_x + \eta_y \cdot d_y + \eta_z \geq 0$
- keine Zielfunktion

Algorithmus für das Gussform-Problem

- wähle jede der n Facette einmal als obere Facette
- für jede obere Facette löse ein 2-dim. LP mit n Nebenbedingungen

Lineare Programme

Allgemeines Form eines LPs

$$\begin{aligned} \text{maximiere} \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_d x_d \\ \text{sodass} \quad & a_{1,1} x_1 + \cdots + a_{1,d} x_d \leq b_1 \\ & a_{2,1} x_1 + \cdots + a_{2,d} x_d \leq b_2 \\ & \vdots \\ & a_{n,1} x_1 + \cdots + a_{n,d} x_d \leq b_n \end{aligned}$$

- Variablen $x_1, \ldots, x_d$
- $a_{i,j}$, b_i, c_i sind Konstanten
- eine Zielfunktion
- n Nebenbedingungen
- d ist die Dimension des LPs
- Theorie: polynomiell lösbar
- Praxis: effiziente Algorithmen (Simplex)

Unser konkretes LP

- Variablen $d_x, d_y \rightarrow$ Dimension ist 2
- Nebenbedingung für jede Facette: $\eta_x \cdot d_x + \eta_y \cdot d_y + \eta_z \geq 0$
- keine Zielfunktion

Algorithmus für das Gussform-Problem

- wähle jede der n Facette einmal als obere Facette
- für jede obere Facette löse ein 2-dim. LP mit n Nebenbedingungen

Ziel im Folgenden

- schnellerer Algo für das Lösen 2-dimensionaler LPs

Finde die optimale Lösung

maximiere: $x_1 + x_2$

sodass:

$$x_1 \geq 0 \qquad (P)$$
$$x_2 \geq 0 \qquad (A)$$
$$x_2 - x_1 \leq 1 \qquad (U)$$
$$x_1 + 6x_2 \leq 15 \qquad (S)$$
$$4x_1 - x_2 \leq 10 \qquad (E)$$

2D LPs

Beispiel

maximiere: $x_1 + x_2$

sodass: $x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

$x_2 - x_1 \leq 1$

$x_1 + 6x_2 \leq 15$

$4x_1 - x_2 \leq 10$

2D LPs

Beispiel

maximiere: $x_1 + x_2$

sodass: $x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

$x_2 - x_1 \leq 1$

$x_1 + 6x_2 \leq 15$

$4x_1 - x_2 \leq 10$

Geometrische Interpretation

2D LPs

Beispiel

maximiere: $x_1 + x_2$

sodass: $x_1 \geq 0$

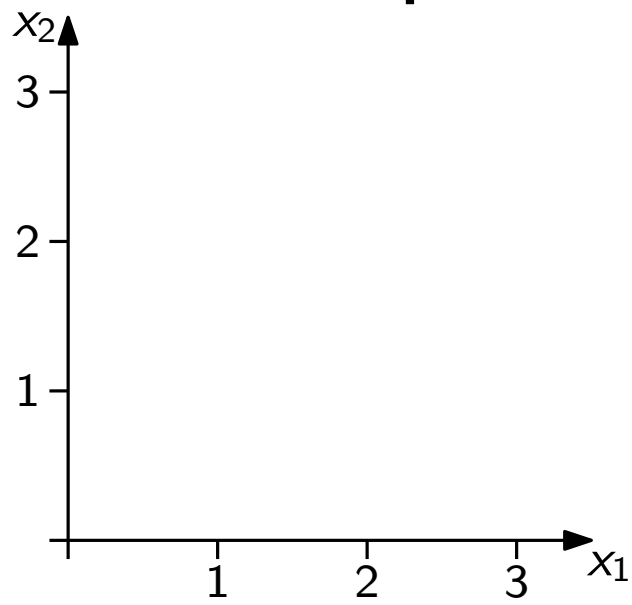
$x_2 \geq 0$

$x_2 - x_1 \leq 1$

$x_1 + 6x_2 \leq 15$

$4x_1 - x_2 \leq 10$

Geometrische Interpretation



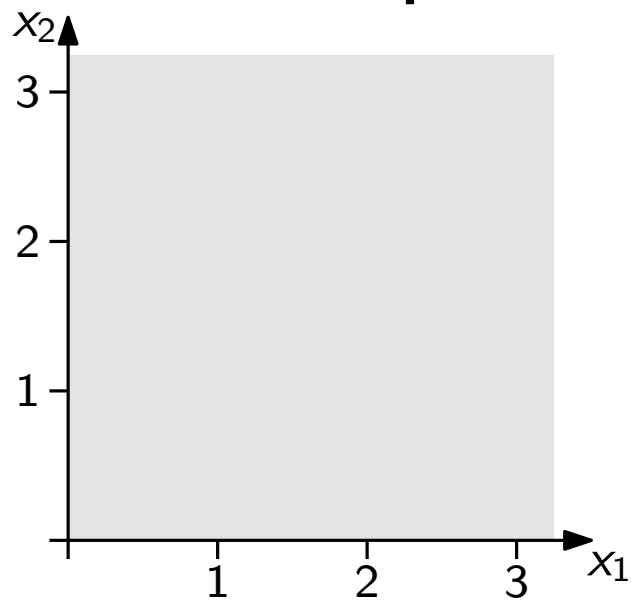
2D LPs

Beispiel

maximiere: $x_1 + x_2$

sodass:
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_2 - x_1 \leq 1$$
$$x_1 + 6x_2 \leq 15$$
$$4x_1 - x_2 \leq 10$$

Geometrische Interpretation



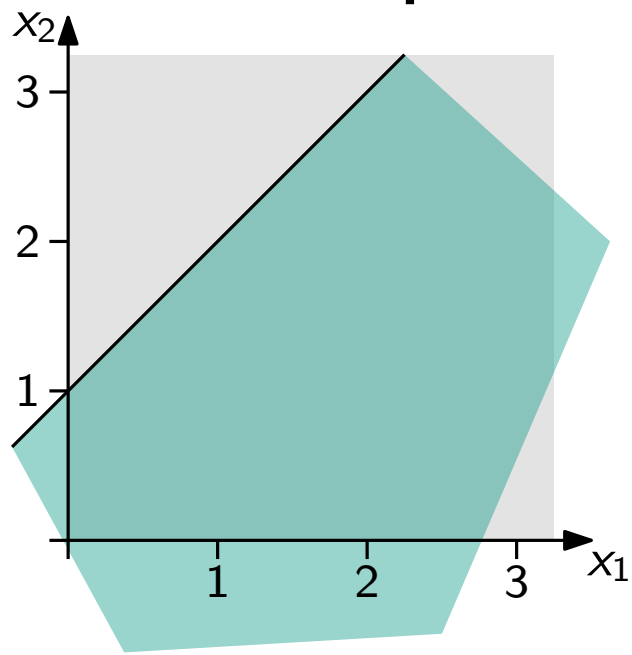
2D LPs

Beispiel

maximiere: $x_1 + x_2$

sodass:
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_2 - x_1 \leq 1$$
$$x_1 + 6x_2 \leq 15$$
$$4x_1 - x_2 \leq 10$$

Geometrische Interpretation



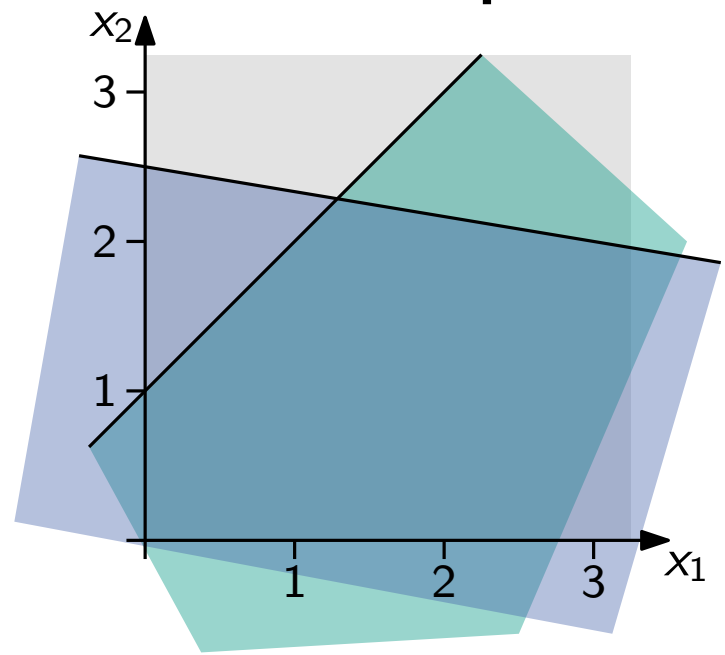
2D LPs

Beispiel

maximiere: $x_1 + x_2$

sodass:
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_2 - x_1 \leq 1$$
$$x_1 + 6x_2 \leq 15$$
$$4x_1 - x_2 \leq 10$$

Geometrische Interpretation



2D LPs

Beispiel

maximiere: $x_1 + x_2$

sodass:

$x_1 \geq 0$

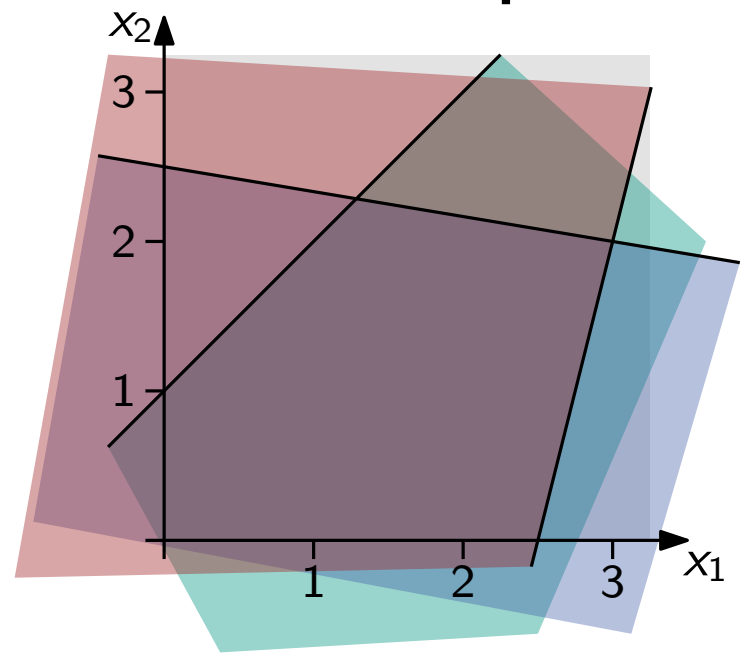
$x_2 \geq 0$

$x_2 - x_1 \leq 1$

$x_1 + 6x_2 \leq 15$

$4x_1 - x_2 \leq 10$

Geometrische Interpretation



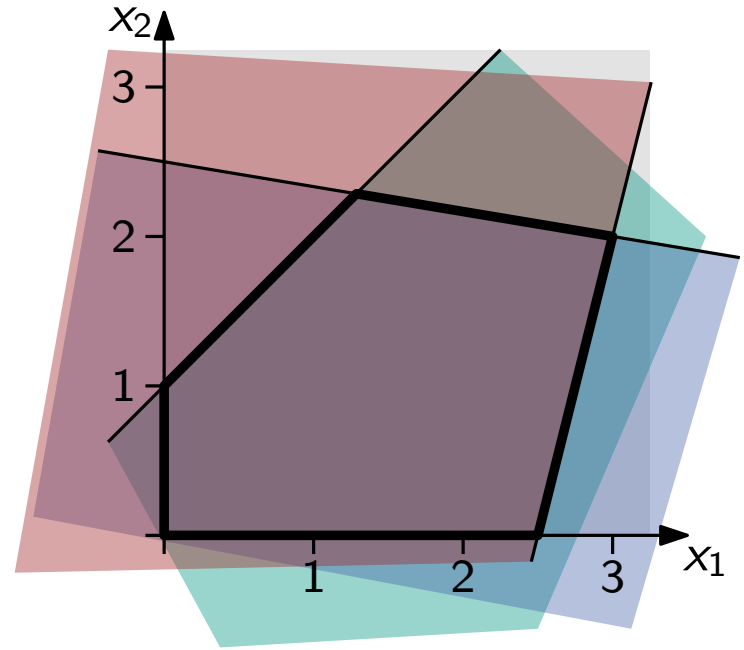
2D LPs

Beispiel

maximiere: $x_1 + x_2$

sodass:
$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$
$x_2 - x_1 \leq 1$
$x_1 + 6x_2 \leq 15$
$4x_1 - x_2 \leq 10$

Geometrische Interpretation



2D LPs

Beispiel

maximiere: $x_1 + x_2$

sodass: $x_1 \geq 0$

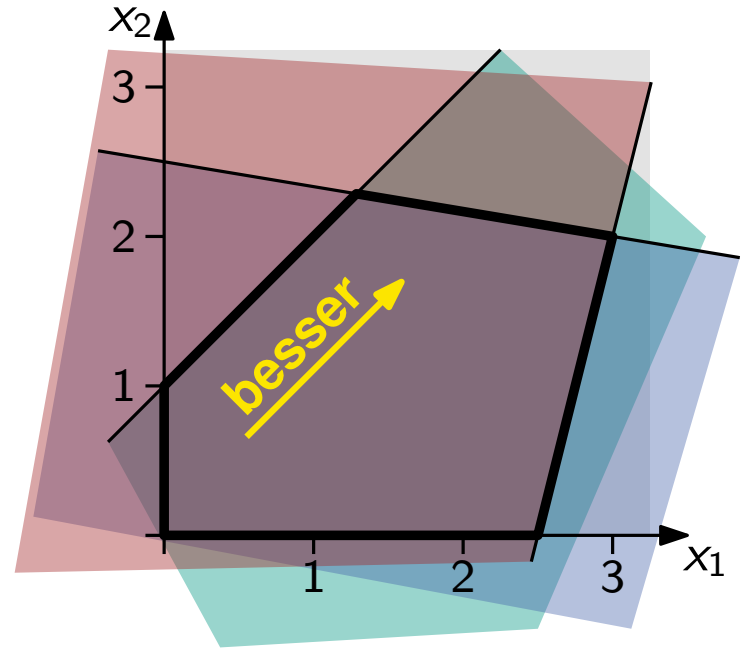
$x_2 \geq 0$

$x_2 - x_1 \leq 1$

$x_1 + 6x_2 \leq 15$

$4x_1 - x_2 \leq 10$

Geometrische Interpretation



2D LPs

Beispiel

maximiere: $x_1 + x_2$

sodass: $x_1 \geq 0$

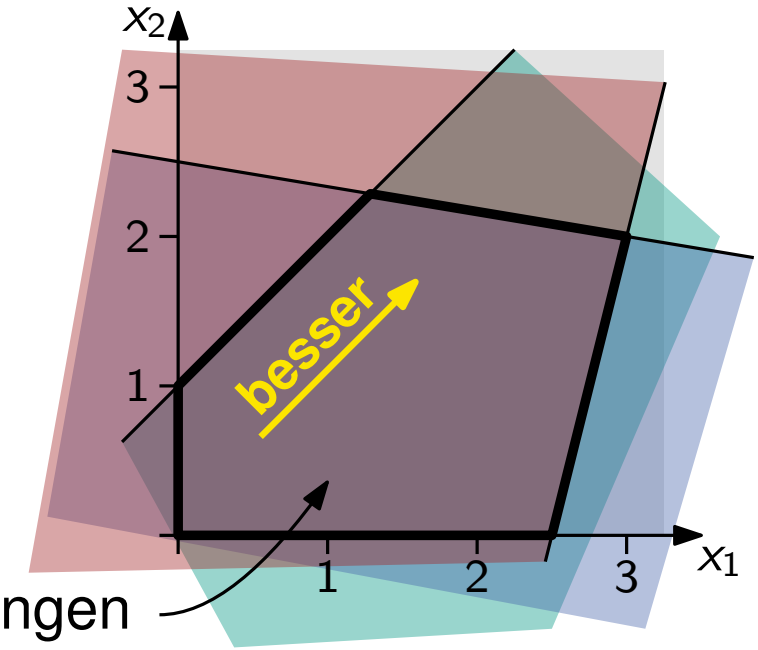
$x_2 \geq 0$

$x_2 - x_1 \leq 1$

$x_1 + 6x_2 \leq 15$

$4x_1 - x_2 \leq 10$

Geometrische Interpretation



gültige Lösungen

2D LPs

Beispiel

maximiere: $x_1 + x_2$

sodass: $x_1 \geq 0$

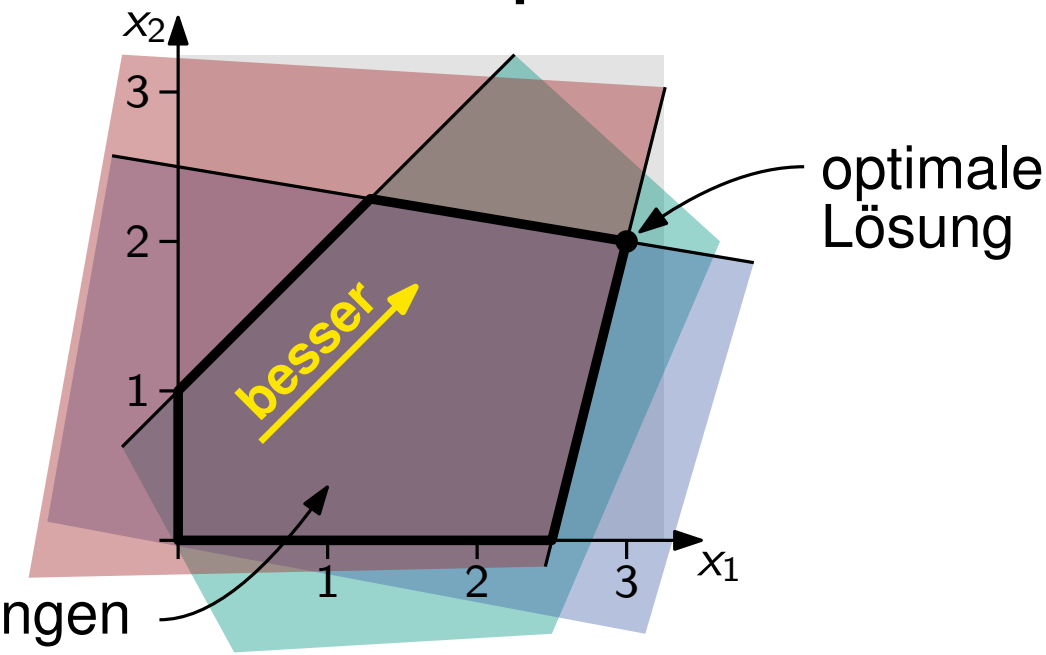
$x_2 \geq 0$

$x_2 - x_1 \leq 1$

$x_1 + 6x_2 \leq 15$

$4x_1 - x_2 \leq 10$

Geometrische Interpretation



2D LPs

Beispiel

maximiere: $x_1 + x_2$

sodass: $x_1 \geq 0$

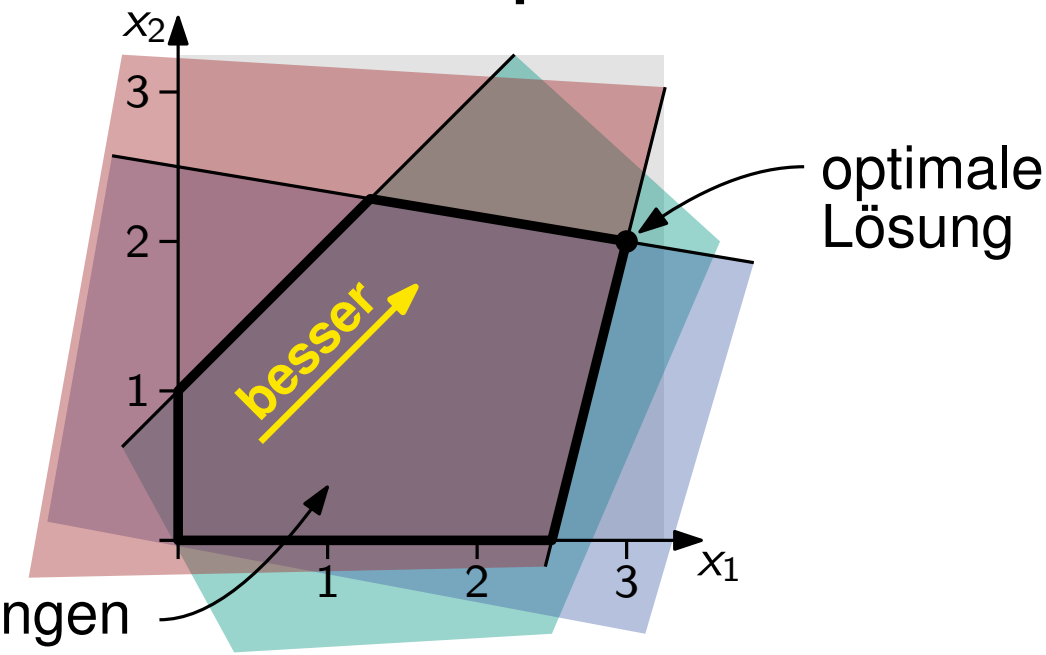
$x_2 \geq 0$

$x_2 - x_1 \leq 1$

$x_1 + 6x_2 \leq 15$

$4x_1 - x_2 \leq 10$

Geometrische Interpretation



Lösbarkeit

- LP ist **unlösbar (infeasible)**, wenn es keine gültige Lösung gibt

2D LPs

Beispiel

maximiere: $x_1 + x_2$

sodass: $x_1 \geq 0$

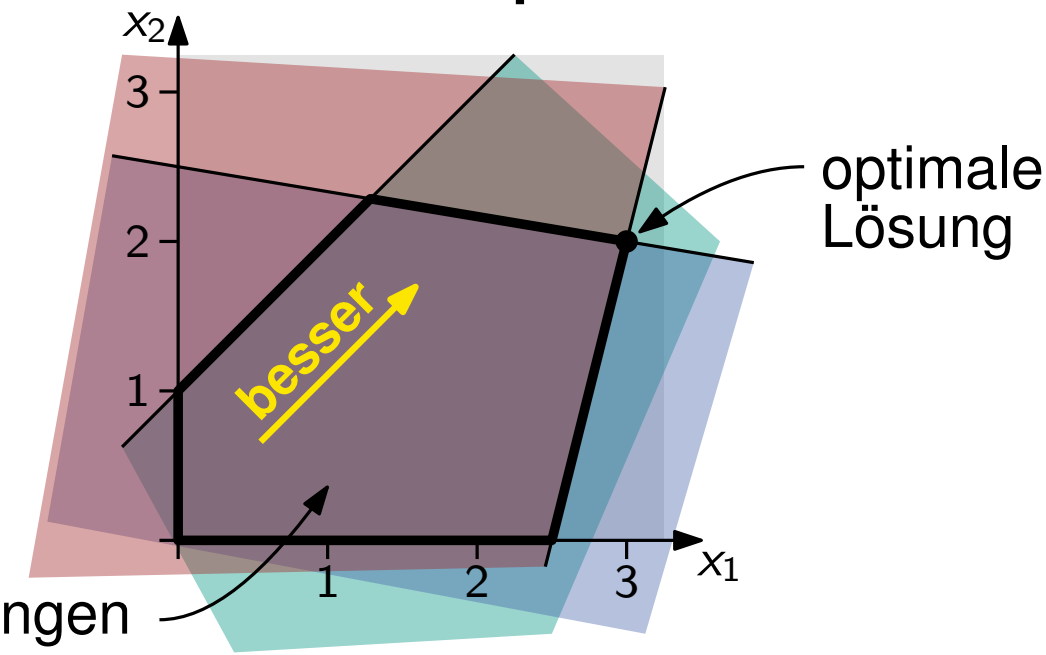
$x_2 \geq 0$

$x_2 - x_1 \leq 1$

$x_1 + 6x_2 \leq 15$

$4x_1 - x_2 \leq 10$

Geometrische Interpretation



Lösbarkeit

- LP ist **unlösbar (infeasible)**, wenn es keine gültige Lösung gibt
- LP ist **unbeschränkt (unbounded)**, wenn es beliebig gute gültige Lösungen gibt (Optimierungsfunktion wird beliebig groß)

2D LPs

Beispiel

maximiere: $x_1 + x_2$

sodass: $x_1 \geq 0$

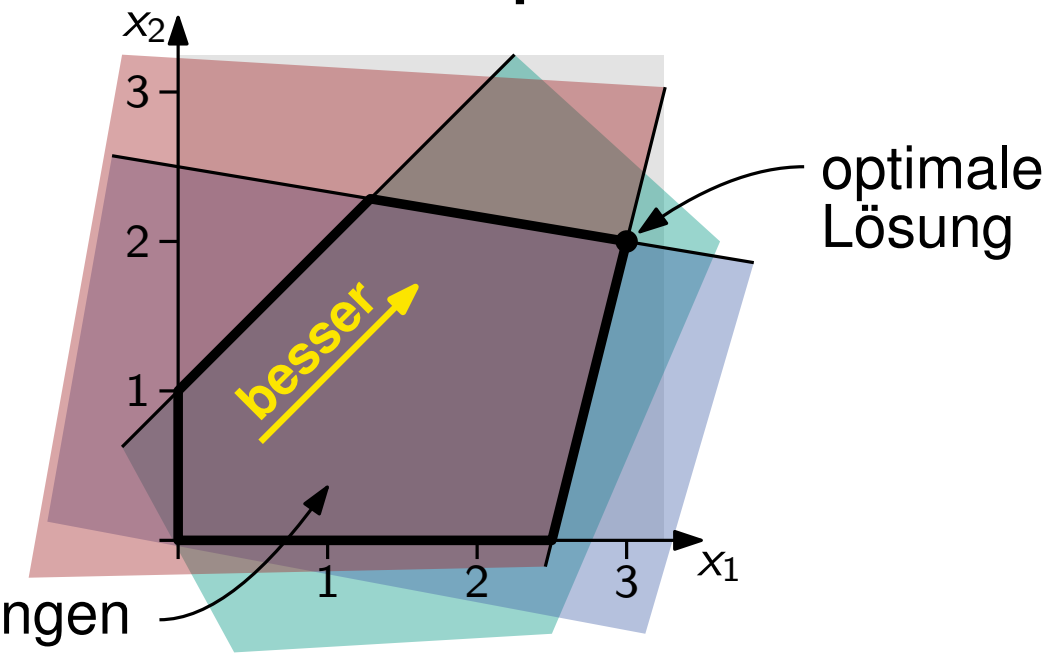
$x_2 \geq 0$

$x_2 - x_1 \leq 1$

$x_1 + 6x_2 \leq 15$

$4x_1 - x_2 \leq 10$

Geometrische Interpretation



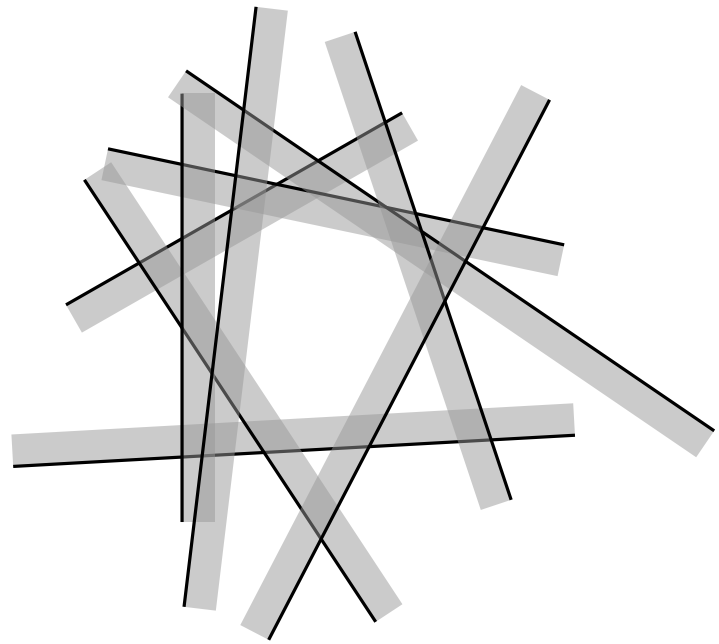
Lösbarkeit

- LP ist **unlösbar (infeasible)**, wenn es keine gültige Lösung gibt
- LP ist **unbeschränkt (unbounded)**, wenn es beliebig gute gültige Lösungen gibt (Optimierungsfunktion wird beliebig groß)

Problem: Schnitt von Halbebenen
Gegeben n Halbebenen, berechne den Schnitt dieser Halbebenen.

Schnitt von Halbebenen

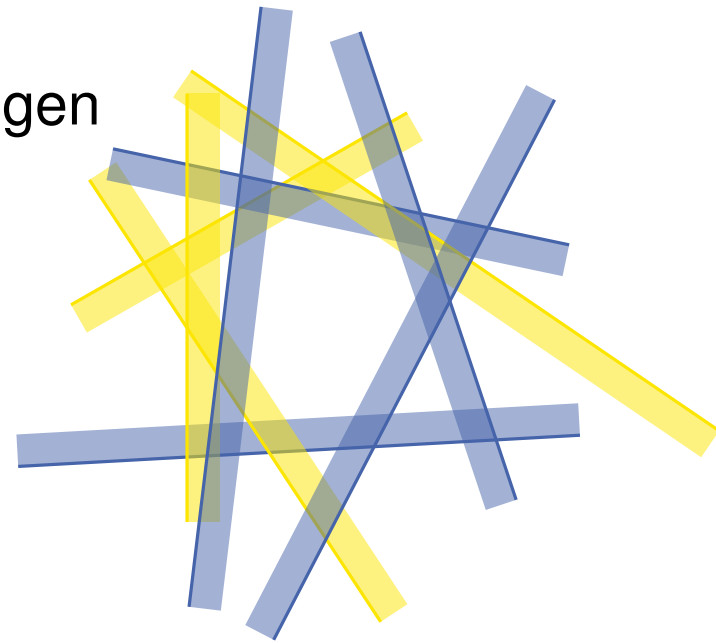
Plan: Teile und herrsche



Schnitt von Halbebenen

Plan: Teile und herrsche

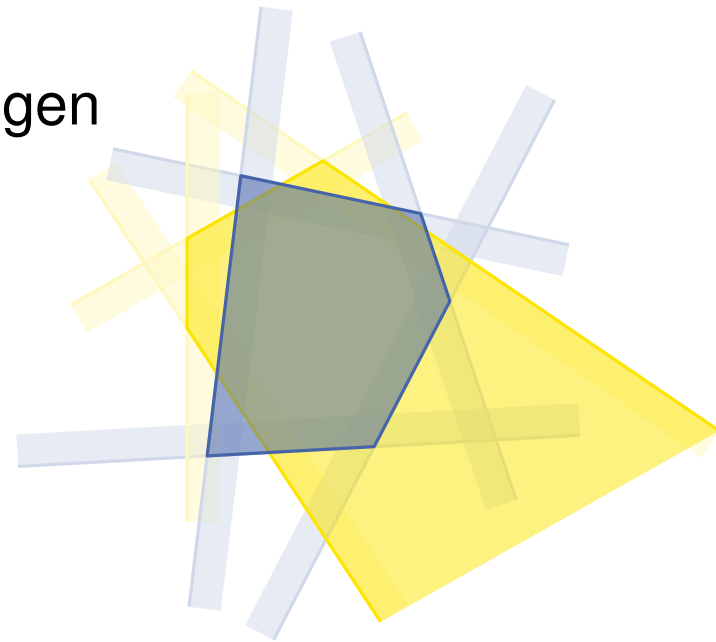
- teile Halbebenen in etwa gleich große Teilmengen



Schnitt von Halbebenen

Plan: Teile und herrsche

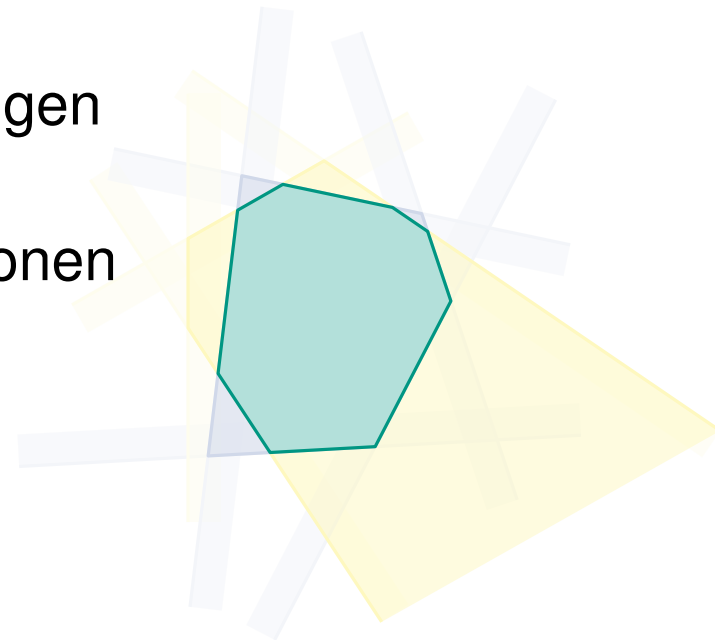
- teile Halbebenen in etwa gleich große Teilmengen
- berechne Schnitt für jede der Teilmengen



Schnitt von Halbebenen

Plan: Teile und herrsche

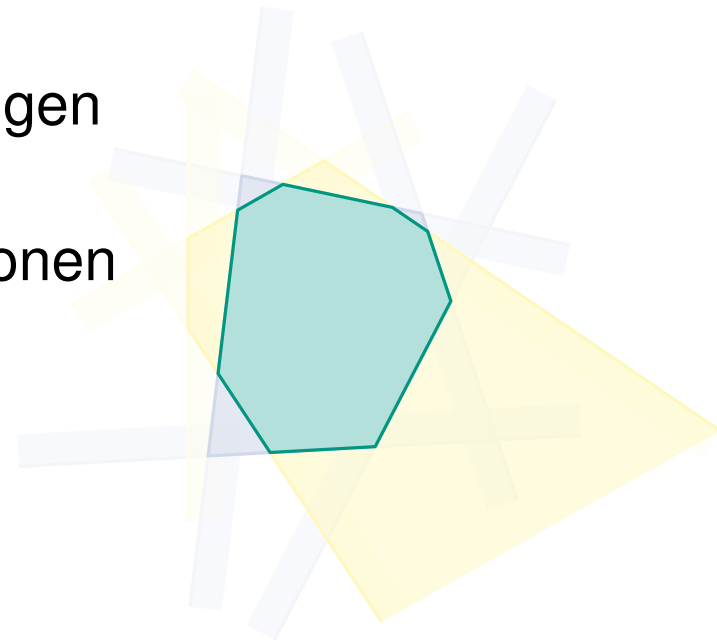
- teile Halbebenen in etwa gleich große Teilmengen
- berechne Schnitt für jede der Teilmengen
- berechne Schnitt der zwei resultierenden Regionen



Schnitt von Halbebenen

Plan: Teile und herrsche

- teile Halbebenen in etwa gleich große Teilmengen
- berechne Schnitt für jede der Teilmengen
- berechne Schnitt der zwei resultierenden Regionen

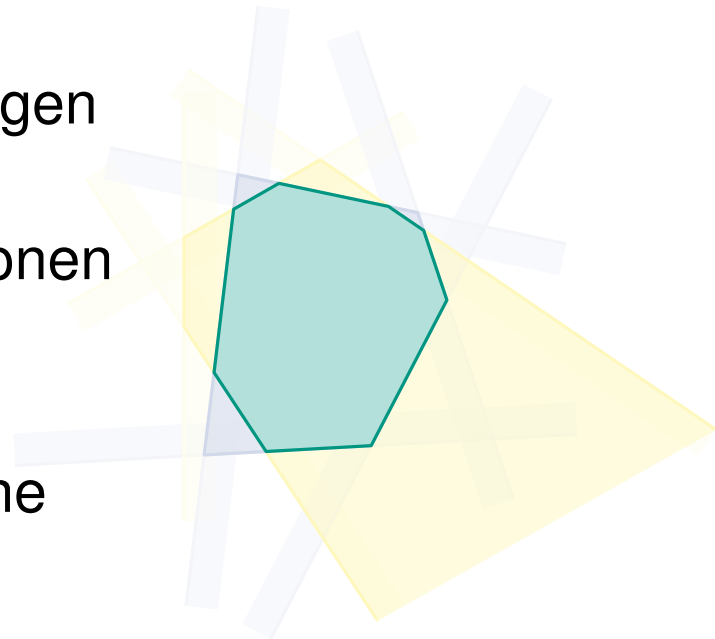


Berechnung des Schnitts

Schnitt von Halbebenen

Plan: Teile und herrsche

- teile Halbebenen in etwa gleich große Teilmengen
- berechne Schnitt für jede der Teilmengen
- berechne Schnitt der zwei resultierenden Regionen



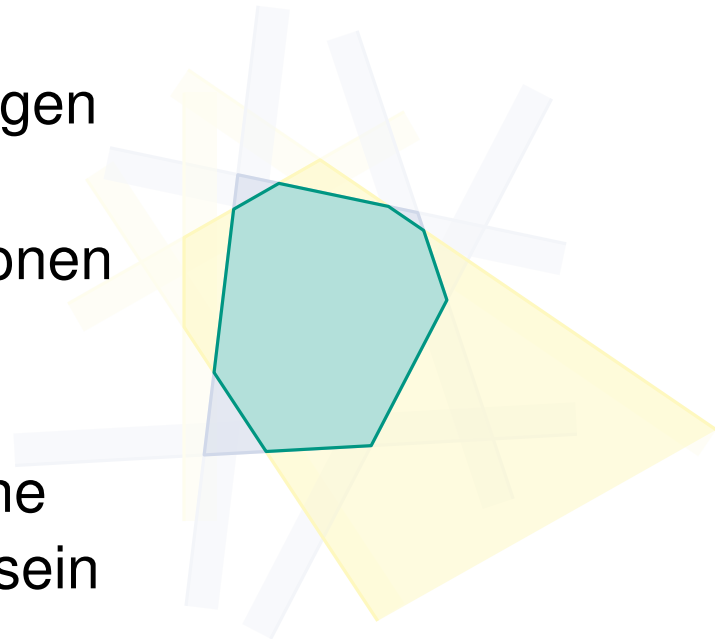
Berechnung des Schnitts

- im Prinzip der Schnitt zweier konvexer Polygone

Schnitt von Halbebenen

Plan: Teile und herrsche

- teile Halbebenen in etwa gleich große Teilmengen
- berechne Schnitt für jede der Teilmengen
- berechne Schnitt der zwei resultierenden Regionen



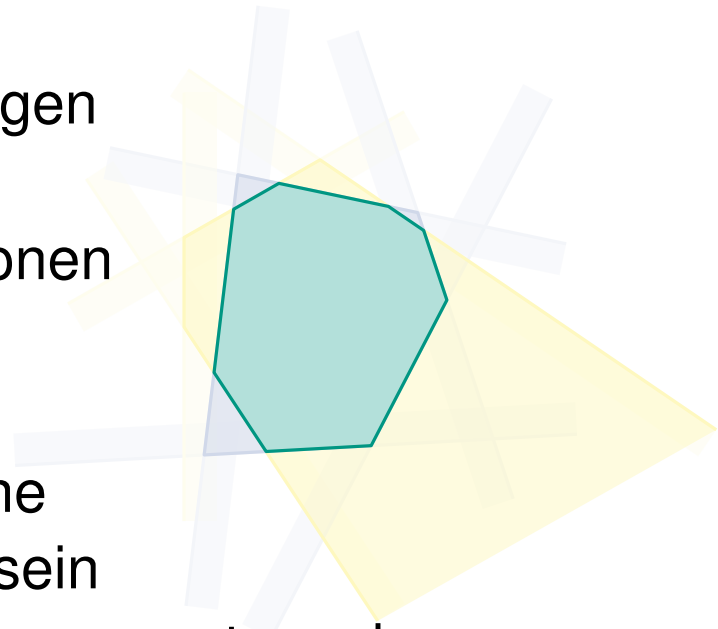
Berechnung des Schnitts

- im Prinzip der Schnitt zweier konvexer Polygone
- Unterschied: Regionen können unbeschränkt sein

Schnitt von Halbebenen

Plan: Teile und herrsche

- teile Halbebenen in etwa gleich große Teilmengen
- berechne Schnitt für jede der Teilmengen
- berechne Schnitt der zwei resultierenden Regionen



Berechnung des Schnitts

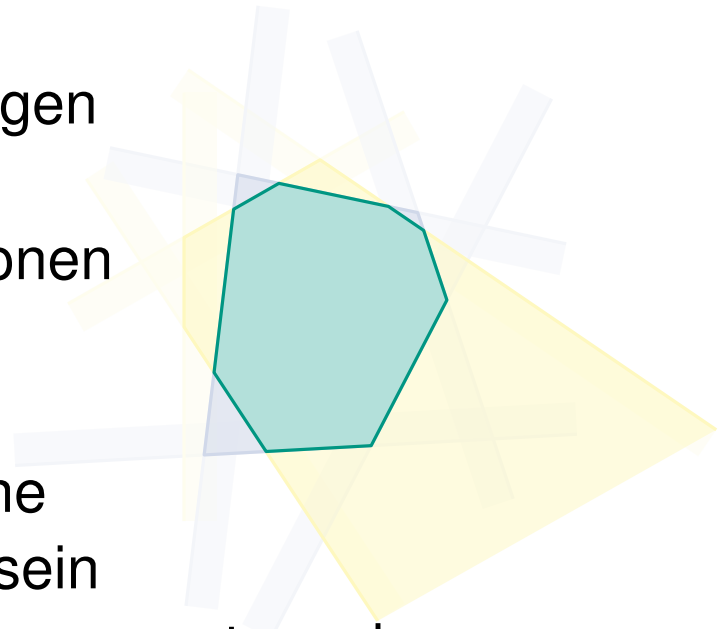
- im Prinzip der Schnitt zweier konvexer Polygone
- Unterschied: Regionen können unbeschränkt sein
- Sweep-Line Algorithmus kann entsprechend angepasst werden

  $\rightarrow$ Laufzeit $O(n \log n)$

Schnitt von Halbebenen

Plan: Teile und herrsche

- teile Halbebenen in etwa gleich große Teilmengen
- berechne Schnitt für jede der Teilmengen
- berechne Schnitt der zwei resultierenden Regionen



Berechnung des Schnitts

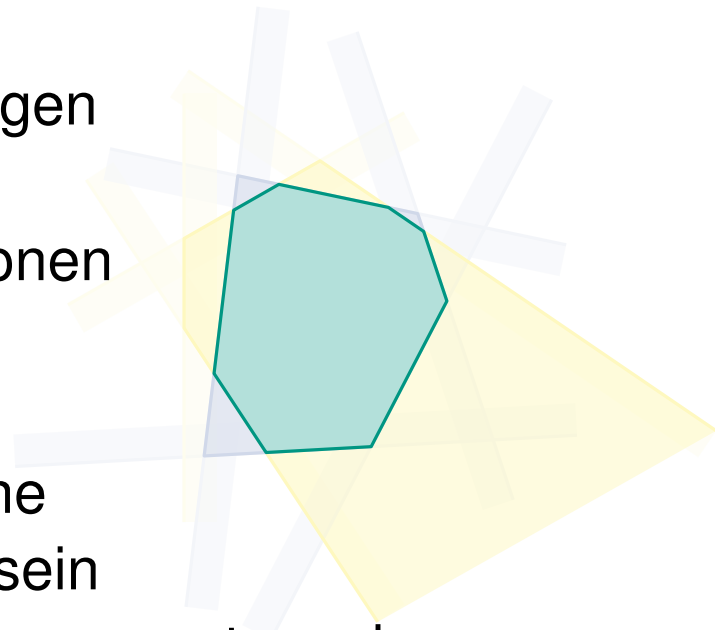
- im Prinzip der Schnitt zweier konvexer Polygone
- Unterschied: Regionen können unbeschränkt sein
- Sweep-Line Algorithmus kann entsprechend angepasst werden

  $\rightarrow$ Laufzeit $O(n \log n)$ Warum nicht $O((n+k)\log n)$?

Schnitt von Halbebenen

Plan: Teile und herrsche

- teile Halbebenen in etwa gleich große Teilmengen
- berechne Schnitt für jede der Teilmengen
- berechne Schnitt der zwei resultierenden Regionen



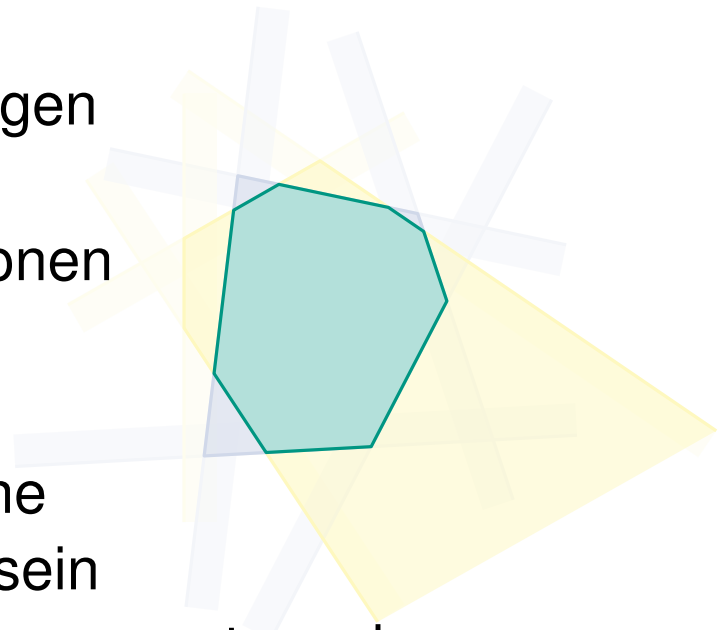
Berechnung des Schnitts

- im Prinzip der Schnitt zweier konvexer Polygone
- Unterschied: Regionen können unbeschränkt sein
- Sweep-Line Algorithmus kann entsprechend angepasst werden
  $\rightarrow$ Laufzeit $O(n \log n)$ Warum nicht $O((n+k)\log n)$?
- Ausnutzung der Konvexität beim Schnitt $\rightarrow$ Laufzeit $O(n)$

Schnitt von Halbebenen

Plan: Teile und herrsche

- teile Halbebenen in etwa gleich große Teilmengen
- berechne Schnitt für jede der Teilmengen
- berechne Schnitt der zwei resultierenden Regionen

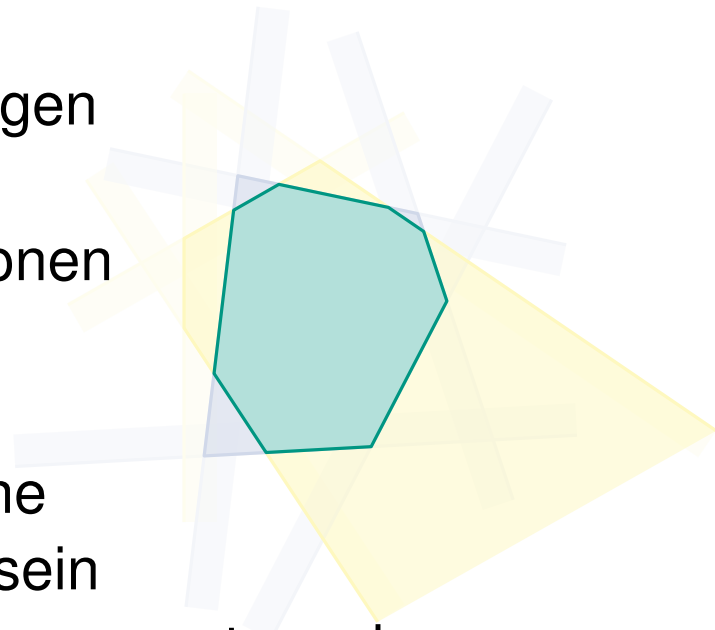


Berechnung des Schnitts

- im Prinzip der Schnitt zweier konvexer Polygone
- Unterschied: Regionen können unbeschränkt sein
- Sweep-Line Algorithmus kann entsprechend angepasst werden
  $\rightarrow$ Laufzeit $O(n \log n)$ Warum nicht $O((n+k)\log n)$?
- Ausnutzung der Konvexität beim Schnitt $\rightarrow$ Laufzeit $O(n)$

Gesamtlaufzeit:

Schnitt von Halbebenen



Plan: Teile und herrsche

- teile Halbebenen in etwa gleich große Teilmengen
- berechne Schnitt für jede der Teilmengen
- berechne Schnitt der zwei resultierenden Regionen

Berechnung des Schnitts

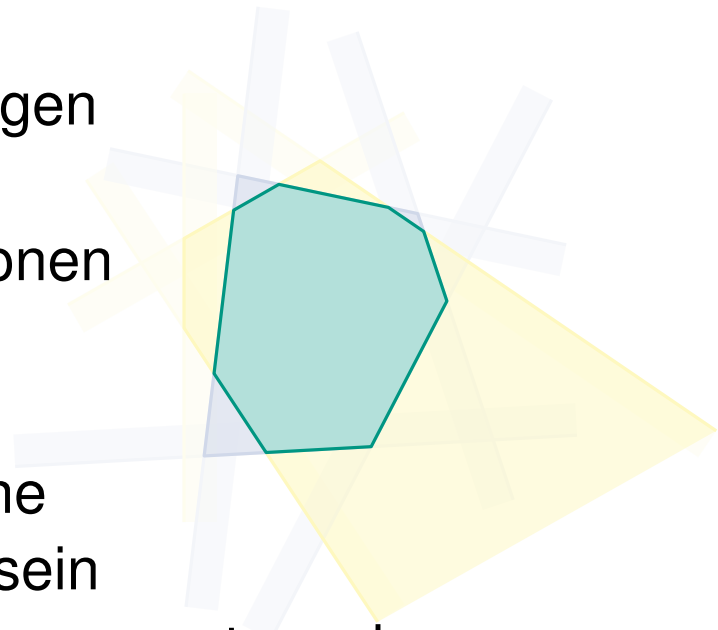
- im Prinzip der Schnitt zweier konvexer Polygone
- Unterschied: Regionen können unbeschränkt sein
- Sweep-Line Algorithmus kann entsprechend angepasst werden
  $\rightarrow$ Laufzeit $O(n \log n)$ Warum nicht $O((n+k)\log n)$?
- Ausnutzung der Konvexität beim Schnitt $\rightarrow$ Laufzeit $O(n)$

Gesamtlaufzeit: $T(n) = O(n) + 2T(n/2)$

Schnitt von Halbebenen

Plan: Teile und herrsche

- teile Halbebenen in etwa gleich große Teilmengen
- berechne Schnitt für jede der Teilmengen
- berechne Schnitt der zwei resultierenden Regionen

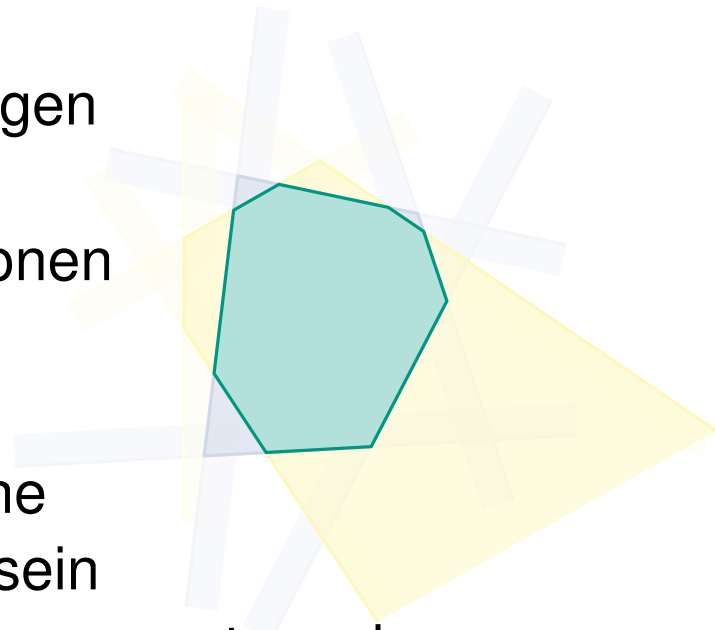


Berechnung des Schnitts

- im Prinzip der Schnitt zweier konvexer Polygone
- Unterschied: Regionen können unbeschränkt sein
- Sweep-Line Algorithmus kann entsprechend angepasst werden
  $\rightarrow$ Laufzeit $O(n \log n)$ Warum nicht $O((n+k)\log n)$?
- Ausnutzung der Konvexität beim Schnitt $\rightarrow$ Laufzeit $O(n)$

Gesamtlaufzeit: $T(n) = O(n) + 2T(n/2) \Rightarrow O(n \log n)$

Schnitt von Halbebenen



Plan: Teile und herrsche

- teile Halbebenen in etwa gleich große Teilmengen
- berechne Schnitt für jede der Teilmengen
- berechne Schnitt der zwei resultierenden Regionen

Berechnung des Schnitts

- im Prinzip der Schnitt zweier konvexer Polygone
- Unterschied: Regionen können unbeschränkt sein
- Sweep-Line Algorithmus kann entsprechend angepasst werden
  $\rightarrow$ Laufzeit $O(n \log n)$ Warum nicht $O((n+k)\log n)$?
- Ausnutzung der Konvexität beim Schnitt $\rightarrow$ Laufzeit $O(n)$

Gesamtlaufzeit: $T(n) = O(n) + 2T(n/2) \Rightarrow O(n \log n)$

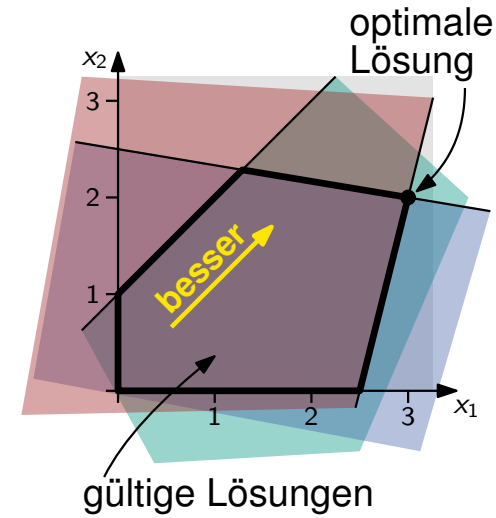
Geht es besser?

- verwandt zur Berechnung der Konvexen Hülle (via Dualität)
- untere Schranke: $\Omega(n \log n)$

Inkrementeller Algorithmus für 2D LPs

Beobachtung

- wir müssen die gültige Region nicht explizit berechnen
- es genügt ein gültiger Punkt, der die Zielfunktion maximiert



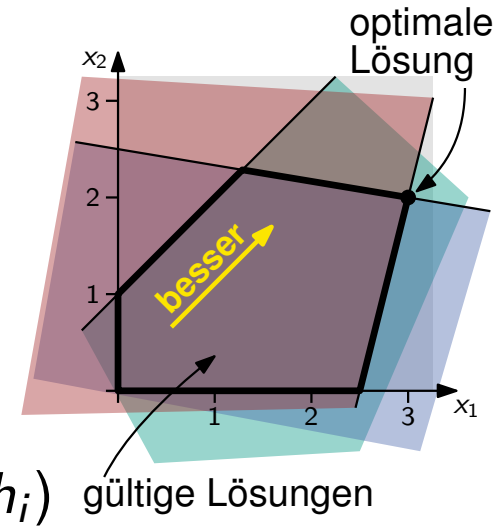
Inkrementeller Algorithmus für 2D LPs

Beobachtung

- wir müssen die gültige Region nicht explizit berechnen
- es genügt ein gültiger Punkt, der die Zielfunktion maximiert

Inkrementeller Ansatz

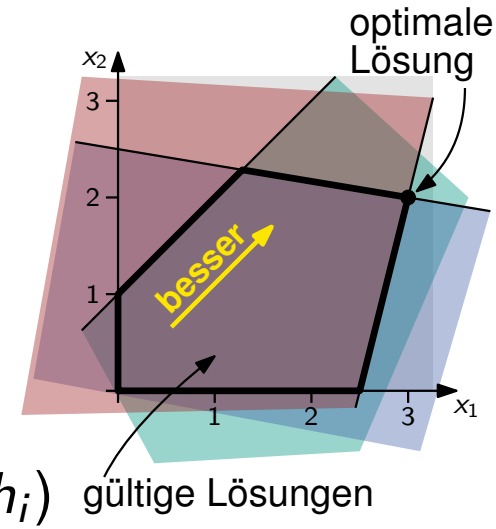
- seien $h_1, \ldots, h_n$ die Halbebenen (Nebenbedingungen)
- sei $C_i = h_1 \cap h_2 \cap \cdots \cap h_i$ (gültige Region bzgl. $h_1, \ldots, h_i$)



Inkrementeller Algorithmus für 2D LPs

Beobachtung

- wir müssen die gültige Region nicht explizit berechnen
- es genügt ein gültiger Punkt, der die Zielfunktion maximiert



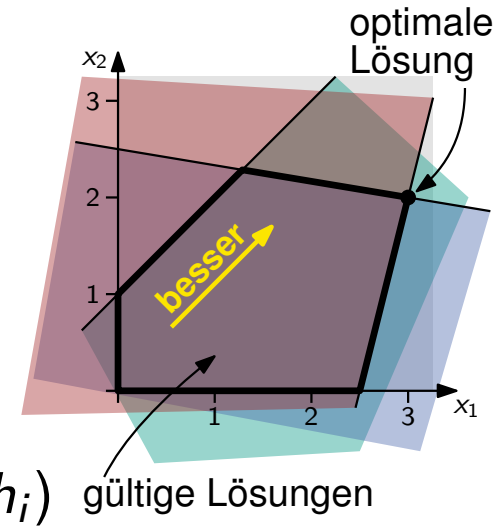
Inkrementeller Ansatz

- seien $h_1, \ldots, h_n$ die Halbebenen (Nebenbedingungen)
- sei $C_i = h_1 \cap h_2 \cap \cdots \cap h_i$ (gültige Region bzgl. $h_1, \ldots, h_i$)
- Annahme: wir kennen einen optimalen Punkt $v_{i-1} \in C_{i-1}$
- Ziel: finde optimalen Punkt $v_i \in C_i$

Inkrementeller Algorithmus für 2D LPs

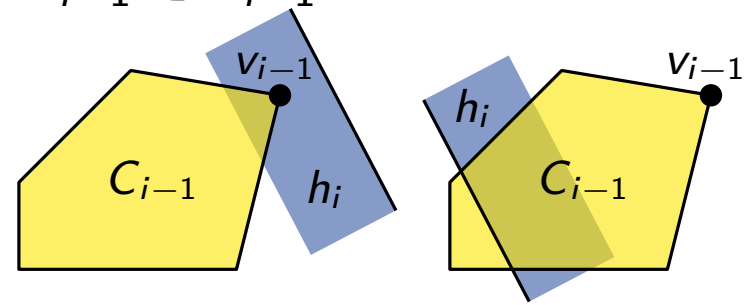
Beobachtung

- wir müssen die gültige Region nicht explizit berechnen
- es genügt ein gültiger Punkt, der die Zielfunktion maximiert



Inkrementeller Ansatz

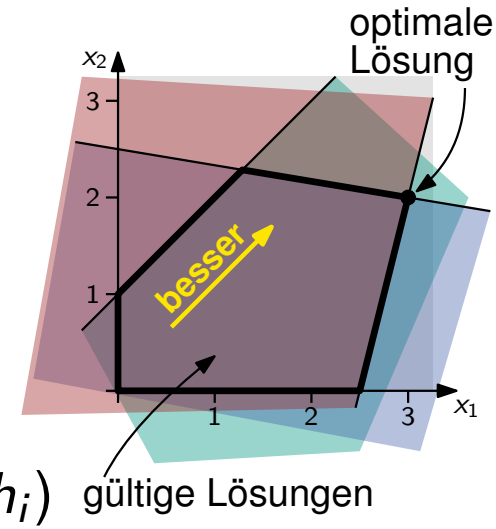
- seien $h_1, \ldots, h_n$ die Halbebenen (Nebenbedingungen)
- sei $C_i = h_1 \cap h_2 \cap \cdots \cap h_i$ (gültige Region bzgl. $h_1, \ldots, h_i$)
- Annahme: wir kennen einen optimalen Punkt $v_{i-1} \in C_{i-1}$
- Ziel: finde optimalen Punkt $v_i \in C_i$
- Fall 1: $v_{i-1} \in C_i$



Inkrementeller Algorithmus für 2D LPs

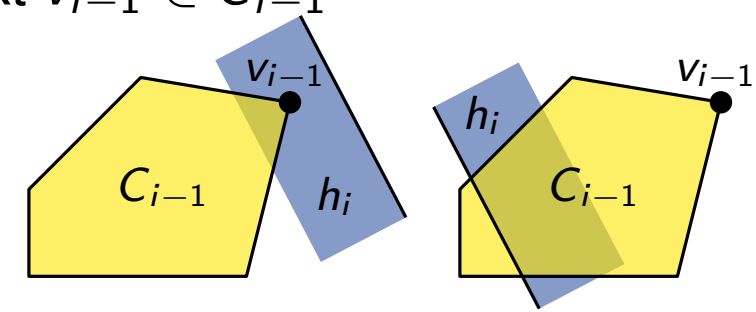
Beobachtung

- wir müssen die gültige Region nicht explizit berechnen
- es genügt ein gültiger Punkt, der die Zielfunktion maximiert



Inkrementeller Ansatz

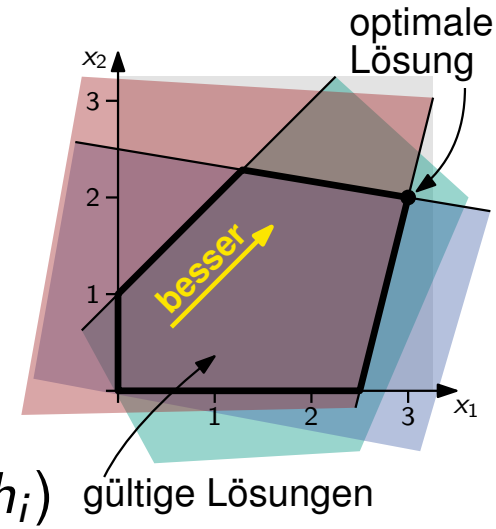
- seien $h_1, \ldots, h_n$ die Halbebenen (Nebenbedingungen)
- sei $C_i = h_1 \cap h_2 \cap \cdots \cap h_i$ (gültige Region bzgl. $h_1, \ldots, h_i$)
- Annahme: wir kennen einen optimalen Punkt $v_{i-1} \in C_{i-1}$
- Ziel: finde optimalen Punkt $v_i \in C_i$
- Fall 1: $v_{i-1} \in C_i$
  - v_{i-1} ist auch optimal in C_i (da $C_i \subseteq C_{i-1}$)



Inkrementeller Algorithmus für 2D LPs

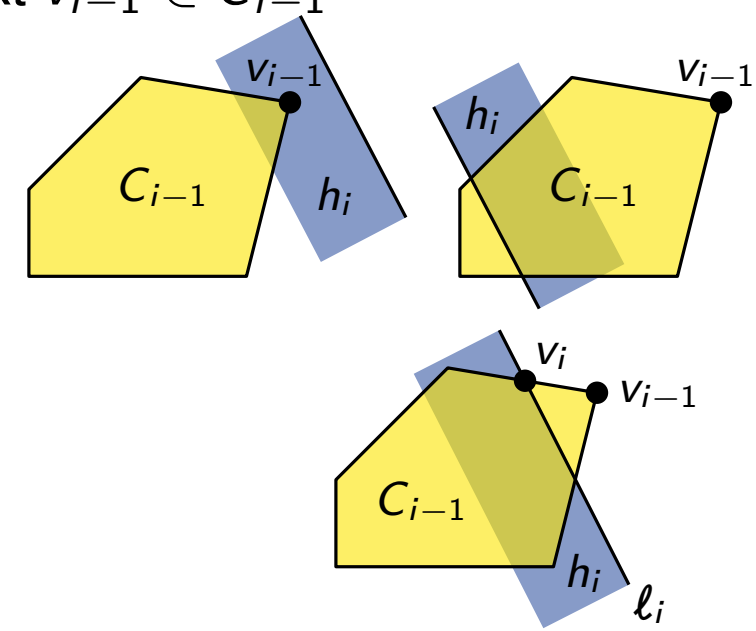
Beobachtung

- wir müssen die gültige Region nicht explizit berechnen
- es genügt ein gültiger Punkt, der die Zielfunktion maximiert



Inkrementeller Ansatz

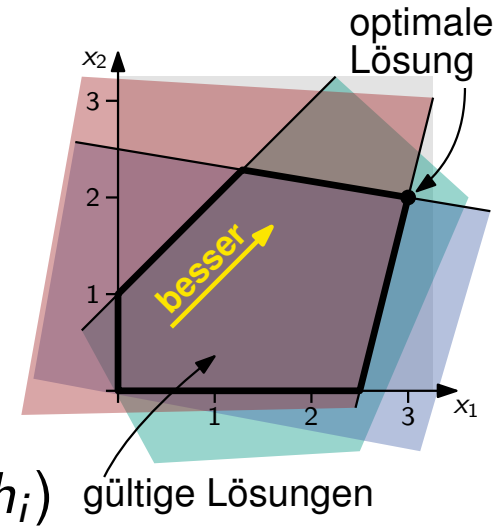
- seien $h_1, \ldots, h_n$ die Halbebenen (Nebenbedingungen)
- sei $C_i = h_1 \cap h_2 \cap \cdots \cap h_i$ (gültige Region bzgl. $h_1, \ldots, h_i$)
- Annahme: wir kennen einen optimalen Punkt $v_{i-1} \in C_{i-1}$
- Ziel: finde optimalen Punkt $v_i \in C_i$
- Fall 1: $v_{i-1} \in C_i$
  - v_{i-1} ist auch optimal in C_i (da $C_i \subseteq C_{i-1}$)
- Fall 2: $v_{i-1} \notin C_i$



Inkrementeller Algorithmus für 2D LPs

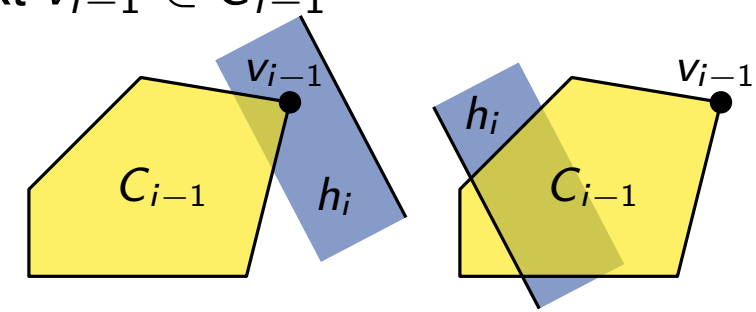
Beobachtung

- wir müssen die gültige Region nicht explizit berechnen
- es genügt ein gültiger Punkt, der die Zielfunktion maximiert

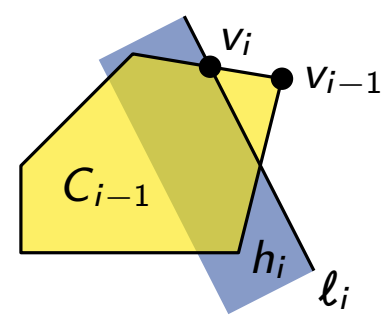


Inkrementeller Ansatz

- seien $h_1, \ldots, h_n$ die Halbebenen (Nebenbedingungen)
- sei $C_i = h_1 \cap h_2 \cap \cdots \cap h_i$ (gültige Region bzgl. $h_1, \ldots, h_i$)
- Annahme: wir kennen einen optimalen Punkt $v_{i-1} \in C_{i-1}$
- Ziel: finde optimalen Punkt $v_i \in C_i$
- Fall 1: $v_{i-1} \in C_i$
  - v_{i-1} ist auch optimal in C_i (da $C_i \subseteq C_{i-1}$)
- Fall 2: $v_{i-1} \notin C_i$
  - v_i liegt auf der Begrenzungslinie ℓ_i von h_i



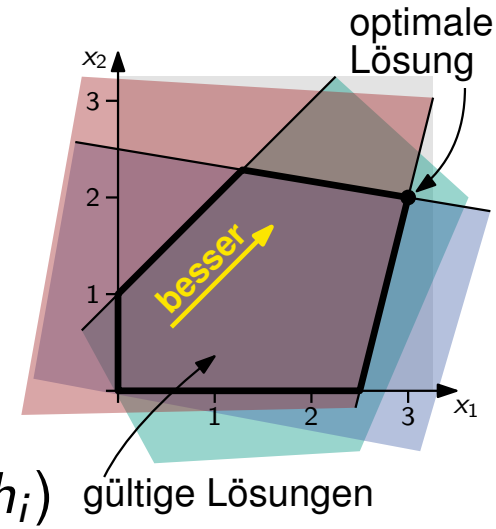
Warum?



Inkrementeller Algorithmus für 2D LPs

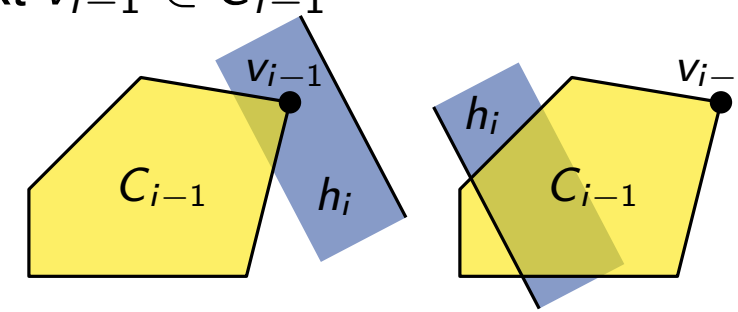
Beobachtung

- wir müssen die gültige Region nicht explizit berechnen
- es genügt ein gültiger Punkt, der die Zielfunktion maximiert

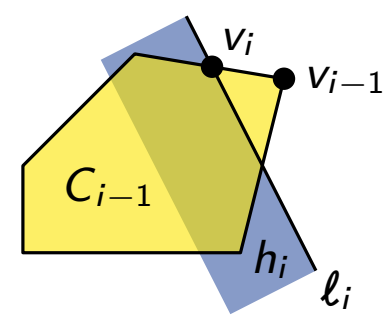


Inkrementeller Ansatz

- seien $h_1, \ldots, h_n$ die Halbebenen (Nebenbedingungen)
- sei $C_i = h_1 \cap h_2 \cap \cdots \cap h_i$ (gültige Region bzgl. $h_1, \ldots, h_i$)
- Annahme: wir kennen einen optimalen Punkt $v_{i-1} \in C_{i-1}$
- Ziel: finde optimalen Punkt $v_i \in C_i$
- Fall 1: $v_{i-1} \in C_i$
  - v_{i-1} ist auch optimal in C_i (da $C_i \subseteq C_{i-1}$)
- Fall 2: $v_{i-1} \notin C_i$
  - v_i liegt auf der Begrenzungslinie ℓ_i von h_i
  - das ist im Prinzip ein 1D LP mit i Nebenbedingungen



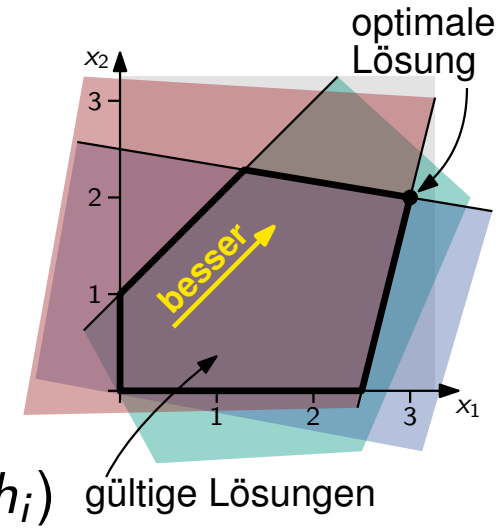
Warum?



Inkrementeller Algorithmus für 2D LPs

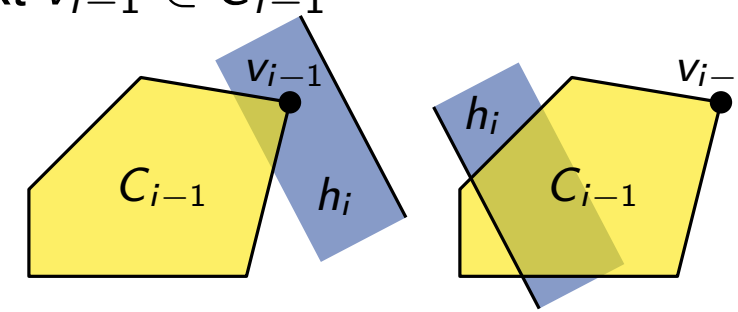
Beobachtung

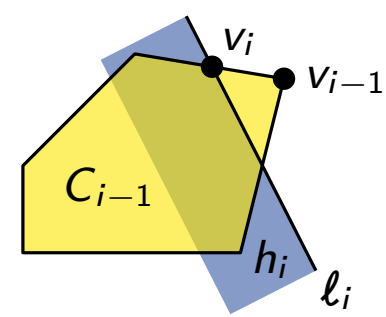
- wir müssen die gültige Region nicht explizit berechnen
- es genügt ein gültiger Punkt, der die Zielfunktion maximiert



Inkrementeller Ansatz

- seien $h_1, \ldots, h_n$ die Halbebenen (Nebenbedingungen)
- sei $C_i = h_1 \cap h_2 \cap \cdots \cap h_i$ (gültige Region bzgl. $h_1, \ldots, h_i$)
- Annahme: wir kennen einen optimalen Punkt $v_{i-1} \in C_{i-1}$
- Ziel: finde optimalen Punkt $v_i \in C_i$
- Fall 1: $v_{i-1} \in C_i$
  - v_{i-1} ist auch optimal in C_i (da $C_i \subseteq C_{i-1}$)
- Fall 2: $v_{i-1} \notin C_i$
  - v_i liegt auf der Begrenzungslinie ℓ_i von h_i **Warum?**
  - das ist im Prinzip ein 1D LP mit i Nebenbedingungen
  - können wir in $O(i)$ Zeit lösen **Wie?**





Inkrementeller Algorithmus für 2D LPs

Offene Fragen

- Wie fangen wir an?
- Was interessiert uns ein $O(n^2)$ Algorithmus?

Inkrementeller Algorithmus für 2D LPs

Offene Fragen

- Wie fangen wir an?
- Was interessiert uns ein $O(n^2)$ Algorithmus?

Wie fangen wir an?

- Problem: zu Beginn ist die gültige Region C_0 unbeschränkt
- einen „optimalen Punkt“ gibt es nicht

Inkrementeller Algorithmus für 2D LPs

Offene Fragen

- Wie fangen wir an?
- Was interessiert uns ein $O(n^2)$ Algorithmus?

Wie fangen wir an?

- Problem: zu Beginn ist die gültige Region C_0 unbeschränkt
- einen „optimalen Punkt“ gibt es nicht
- ggf. ist sogar C_n unbeschränkt $\rightarrow$ nicht nur zu Beginn problematisch

Inkrementeller Algorithmus für 2D LPs

Offene Fragen

- Wie fangen wir an?
- Was interessiert uns ein $O(n^2)$ Algorithmus?

Wie fangen wir an?

- Problem: zu Beginn ist die gültige Region C_0 unbeschränkt
- einen „optimalen Punkt“ gibt es nicht
- ggf. ist sogar C_n unbeschränkt $\rightarrow$ nicht nur zu Beginn problematisch
- Lösung: siehe Übung

Inkrementeller Algorithmus für 2D LPs

Offene Fragen

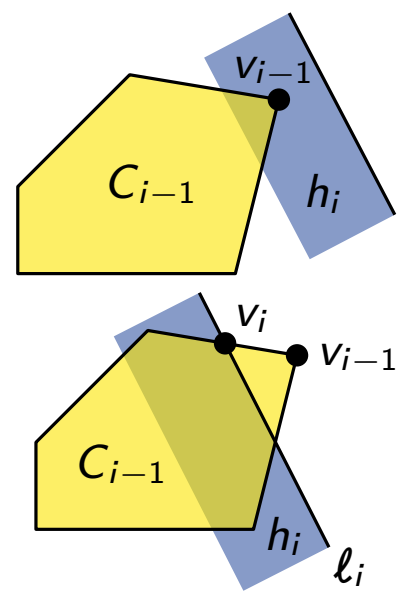
- Wie fangen wir an?
- Was interessiert uns ein $O(n^2)$ Algorithmus?

Wie fangen wir an?

- Problem: zu Beginn ist die gültige Region C_0 unbeschränkt
- einen „optimalen Punkt“ gibt es nicht
- ggf. ist sogar C_n unbeschränkt $\rightarrow$ nicht nur zu Beginn problematisch
- Lösung: siehe Übung

Was interessiert uns ein $O(n^2)$ Algorithmus?

- Fall $v_{i-1} \in C_i$ ist billig (setzte einfach $v_i = v_{i-1}$)
- Fall $v_{i-1} \notin C_i$ ist teuer ($O(i)$ zur Berechnung von v_i)



Inkrementeller Algorithmus für 2D LPs

Offene Fragen

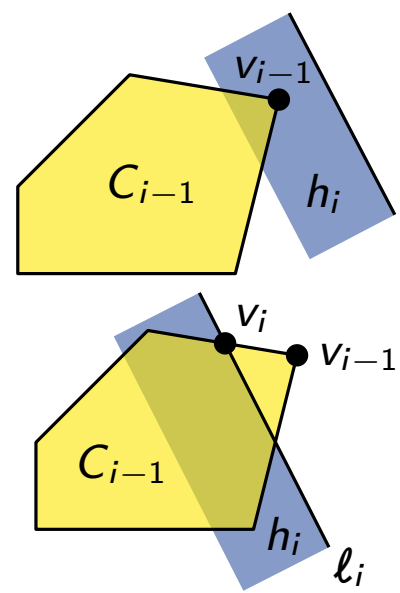
- Wie fangen wir an?
- Was interessiert uns ein $O(n^2)$ Algorithmus?

Wie fangen wir an?

- Problem: zu Beginn ist die gültige Region C_0 unbeschränkt
- einen „optimalen Punkt“ gibt es nicht
- ggf. ist sogar C_n unbeschränkt $\rightarrow$ nicht nur zu Beginn problematisch
- Lösung: siehe Übung

Was interessiert uns ein $O(n^2)$ Algorithmus?

- Fall $v_{i-1} \in C_i$ ist billig (setzte einfach $v_i = v_{i-1}$)
- Fall $v_{i-1} \notin C_i$ ist teuer ($O(i)$ zur Berechnung von v_i)
- Hoffnung: $v_{i-1} \notin C_i$ tritt nur selten ein



Inkrementeller Algorithmus für 2D LPs

Offene Fragen

- Wie fangen wir an?
- Was interessiert uns ein $O(n^2)$ Algorithmus?

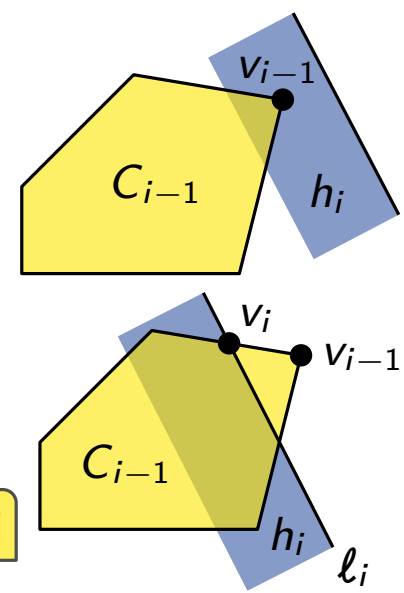
Wie fangen wir an?

- Problem: zu Beginn ist die gültige Region C_0 unbeschränkt
- einen „optimalen Punkt“ gibt es nicht
- ggf. ist sogar C_n unbeschränkt $\rightarrow$ nicht nur zu Beginn problematisch
- Lösung: siehe Übung

Was interessiert uns ein $O(n^2)$ Algorithmus?

- Fall $v_{i-1} \in C_i$ ist billig (setzte einfach $v_i = v_{i-1}$)
- Fall $v_{i-1} \notin C_i$ ist teuer ($O(i)$ zur Berechnung von v_i)
- Hoffnung: $v_{i-1} \notin C_i$ tritt nur selten ein
- es gibt Ordnung $h_1, \ldots, h_n$, sodass $v_{i-1} \in C_i$ für $i \geq 3$

Warum?



Inkrementeller Algorithmus für 2D LPs

Offene Fragen

- Wie fangen wir an?
- Was interessiert uns ein $O(n^2)$ Algorithmus?

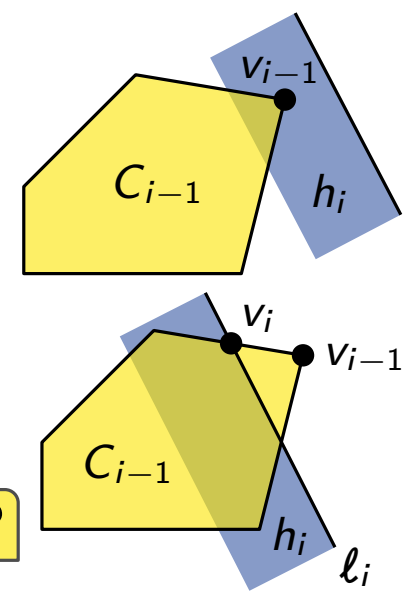
Wie fangen wir an?

- Problem: zu Beginn ist die gültige Region C_0 unbeschränkt
- einen „optimalen Punkt“ gibt es nicht
- ggf. ist sogar C_n unbeschränkt $\rightarrow$ nicht nur zu Beginn problematisch
- Lösung: siehe Übung

Was interessiert uns ein $O(n^2)$ Algorithmus?

- Fall $v_{i-1} \in C_i$ ist billig (setzte einfach $v_i = v_{i-1}$)
- Fall $v_{i-1} \notin C_i$ ist teuer ($O(i)$ zur Berechnung von v_i)
- Hoffnung: $v_{i-1} \notin C_i$ tritt nur selten ein
- es gibt Ordnung $h_1, \ldots, h_n$, sodass $v_{i-1} \in C_i$ für $i \geq 3$
- diese Ordnung finden ist nicht so einfach

Warum?



Inkrementeller Algorithmus für 2D LPs

Offene Fragen

- Wie fangen wir an?
- Was interessiert uns ein $O(n^2)$ Algorithmus?

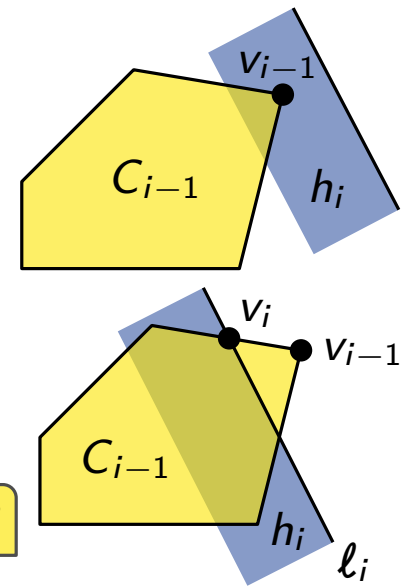
Wie fangen wir an?

- Problem: zu Beginn ist die gültige Region C_0 unbeschränkt
- einen „optimalen Punkt“ gibt es nicht
- ggf. ist sogar C_n unbeschränkt $\rightarrow$ nicht nur zu Beginn problematisch
- Lösung: siehe Übung

Was interessiert uns ein $O(n^2)$ Algorithmus?

- Fall $v_{i-1} \in C_i$ ist billig (setzte einfach $v_i = v_{i-1}$)
- Fall $v_{i-1} \notin C_i$ ist teuer ($O(i)$ zur Berechnung von v_i)
- Hoffnung: $v_{i-1} \notin C_i$ tritt nur selten ein
- es gibt Ordnung $h_1, \ldots, h_n$, sodass $v_{i-1} \in C_i$ für $i \geq 3$
- diese Ordnung finden ist nicht so einfach
- aber: die meisten Ordnungen sind gut

Warum?



Inkrementeller Algorithmus für 2D LPs

Offene Fragen

- Wie fangen wir an?
- Was interessiert uns ein $O(n^2)$ Algorithmus?

Wie fangen wir an?

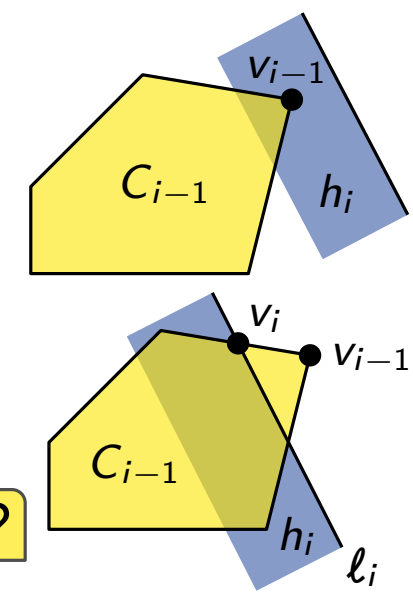
- Problem: zu Beginn ist die gültige Region C_0 unbeschränkt
- einen „optimalen Punkt“ gibt es nicht
- ggf. ist sogar C_n unbeschränkt $\rightarrow$ nicht nur zu Beginn problematisch
- Lösung: siehe Übung

Was interessiert uns ein $O(n^2)$ Algorithmus?

- Fall $v_{i-1} \in C_i$ ist billig (setzte einfach $v_i = v_{i-1}$)
- Fall $v_{i-1} \notin C_i$ ist teuer ($O(i)$ zur Berechnung von v_i)
- Hoffnung: $v_{i-1} \notin C_i$ tritt nur selten ein
- es gibt Ordnung $h_1, \ldots, h_n$, sodass $v_{i-1} \in C_i$ für $i \geq 3$
- diese Ordnung finden ist nicht so einfach

Warum?

- aber: die meisten Ordnungen sind gut $\rightarrow$ zufällige Ordnung



Randomisierter inkrementeller Algorithmus

Erwartete Laufzeit

- die Laufzeit ist eine Zufallsvariable (im Folgenden mit X bezeichnet)

Randomisierter inkrementeller Algorithmus

Erwartete Laufzeit

- die Laufzeit ist eine Zufallsvariable (im Folgenden mit X bezeichnet)
- weitere Zufallsvariablen: X_i ist die Laufzeit in Iteration i
- dann gilt:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Randomisierter inkrementeller Algorithmus

Erwartete Laufzeit

- die Laufzeit ist eine Zufallsvariable (im Folgenden mit X bezeichnet)
- weitere Zufallsvariablen: X_i ist die Laufzeit in Iteration i
- dann gilt:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

Randomisierter inkrementeller Algorithmus

Erwartete Laufzeit

- die Laufzeit ist eine Zufallsvariable (im Folgenden mit X bezeichnet)
- weitere Zufallsvariablen: X_i ist die Laufzeit in Iteration i
- dann gilt:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$$

Randomisierter inkrementeller Algorithmus

Erwartete Laufzeit

- die Laufzeit ist eine Zufallsvariable (im Folgenden mit X bezeichnet)
- weitere Zufallsvariablen: X_i ist die Laufzeit in Iteration i
- dann gilt:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$$

Erwartete Zeit in Iteration i: $\mathbb{E}[X_i] =$

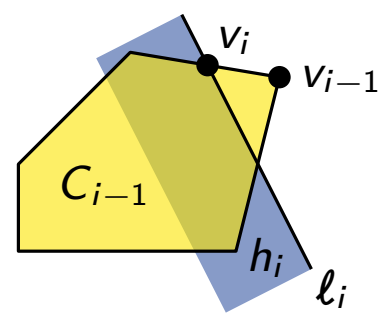
Randomisierter inkrementeller Algorithmus

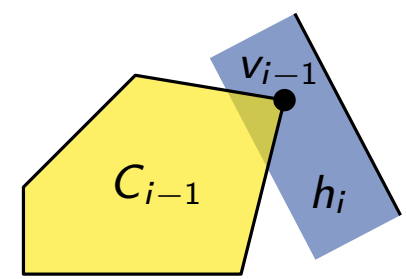
Erwartete Laufzeit

- die Laufzeit ist eine Zufallsvariable (im Folgenden mit X bezeichnet)
- weitere Zufallsvariablen: X_i ist die Laufzeit in Iteration i
- dann gilt:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$$

Erwartete Zeit in Iteration i: $\mathbb{E}[X_i] =$





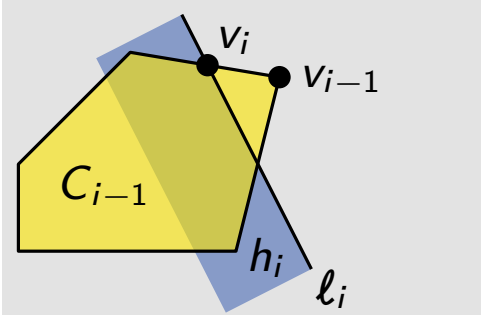
Randomisierter inkrementeller Algorithmus

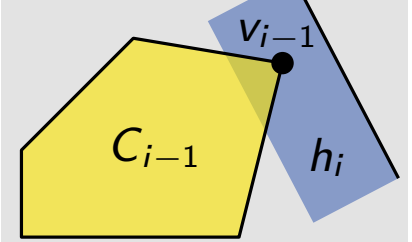
Erwartete Laufzeit

- die Laufzeit ist eine Zufallsvariable (im Folgenden mit X bezeichnet)
- weitere Zufallsvariablen: X_i ist die Laufzeit in Iteration i
- dann gilt:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$$

Erwartete Zeit in Iteration i: $\mathbb{E}[X_i] = P(v_{i-1} \notin C_i) \cdot O(i) + O(1)$





Randomisierter inkrementeller Algorithmus

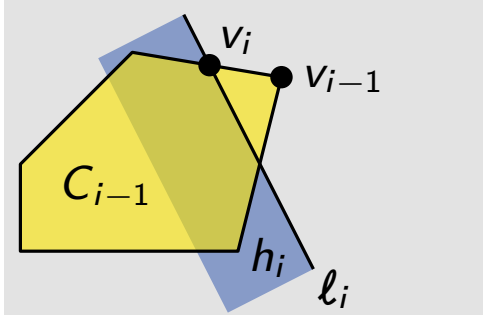
Erwartete Laufzeit

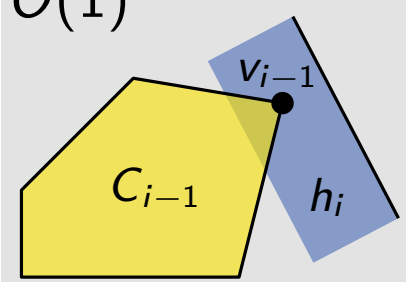
- die Laufzeit ist eine Zufallsvariable (im Folgenden mit X bezeichnet)
- weitere Zufallsvariablen: X_i ist die Laufzeit in Iteration i
- dann gilt:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$$

Erwartete Zeit in Iteration i: $\mathbb{E}[X_i] = P(v_{i-1} \notin C_i) \cdot O(i) + O(1)$

Was ist $P(v_{i-1} \notin C_i)$?





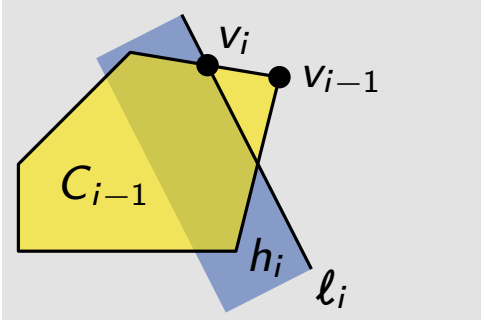
Randomisierter inkrementeller Algorithmus

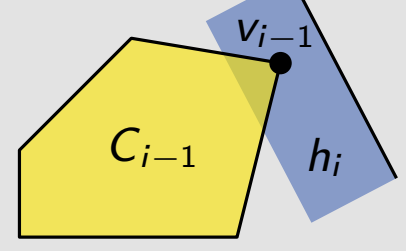
Erwartete Laufzeit

- die Laufzeit ist eine Zufallsvariable (im Folgenden mit X bezeichnet)
- weitere Zufallsvariablen: X_i ist die Laufzeit in Iteration i
- dann gilt:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$$

Erwartete Zeit in Iteration i: $\mathbb{E}[X_i] = P(v_{i-1} \notin C_i) \cdot O(i) + O(1)$





Was ist $P(v_{i-1} \notin C_i)$?

- es gilt: $v_{i-1} \notin C_i \Leftrightarrow v_i \neq v_{i-1}$

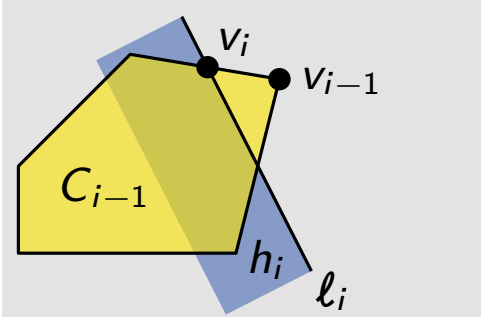
Randomisierter inkrementeller Algorithmus

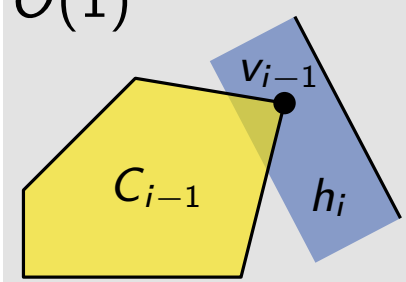
Erwartete Laufzeit

- die Laufzeit ist eine Zufallsvariable (im Folgenden mit X bezeichnet)
- weitere Zufallsvariablen: X_i ist die Laufzeit in Iteration i
- dann gilt:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$$

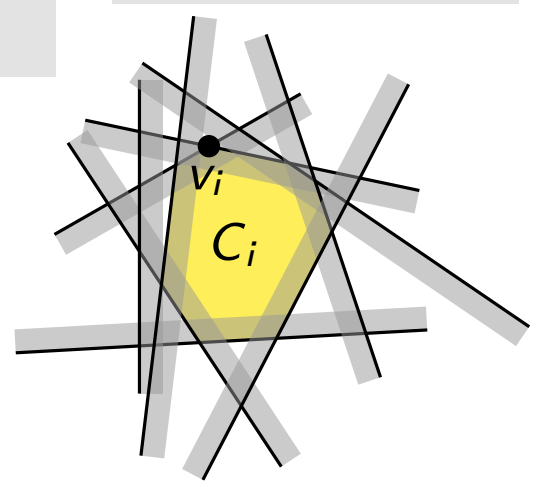
Erwartete Zeit in Iteration i: $\mathbb{E}[X_i] = P(v_{i-1} \notin C_i) \cdot O(i) + O(1)$





Was ist $P(v_{i-1} \notin C_i)$?

- es gilt: $v_{i-1} \notin C_i \Leftrightarrow v_i \neq v_{i-1}$
- umgekehrte Betrachtungsweise
  - gehe von C_i zu C_{i-1} (entferne h_i)



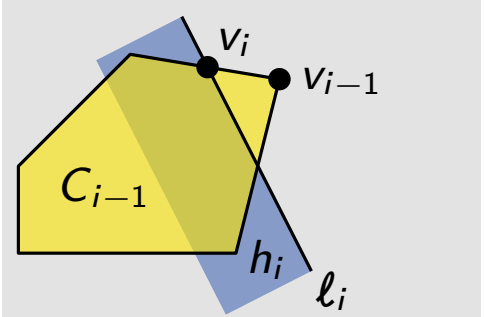
Randomisierter inkrementeller Algorithmus

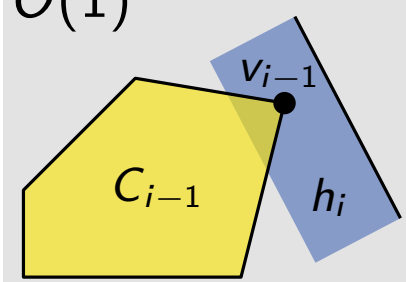
Erwartete Laufzeit

- die Laufzeit ist eine Zufallsvariable (im Folgenden mit X bezeichnet)
- weitere Zufallsvariablen: X_i ist die Laufzeit in Iteration i
- dann gilt:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$$

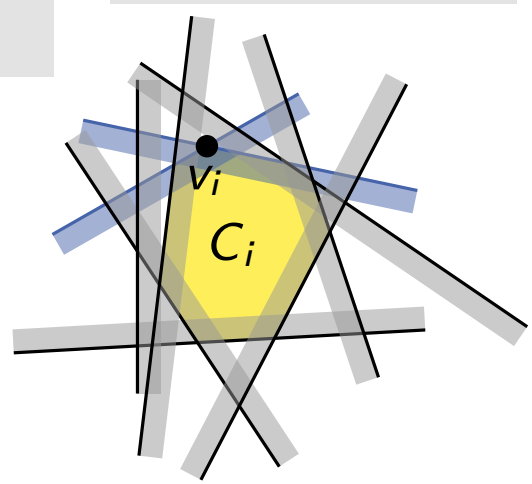
Erwartete Zeit in Iteration i: $\mathbb{E}[X_i] = P(v_{i-1} \notin C_i) \cdot O(i) + O(1)$





Was ist $P(v_{i-1} \notin C_i)$?

- es gilt: $v_{i-1} \notin C_i \Leftrightarrow v_i \neq v_{i-1}$
- umgekehrte Betrachtungsweise
  - gehe von C_i zu C_{i-1} (entferne h_i)
  - dann gilt: $v_{i-1} \neq v_i \Rightarrow \ell_i$ ist eine der zwei Geraden, die v_i enthält



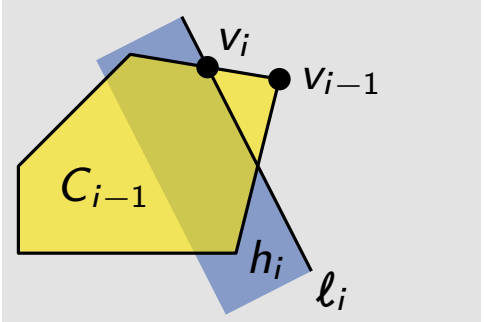
Randomisierter inkrementeller Algorithmus

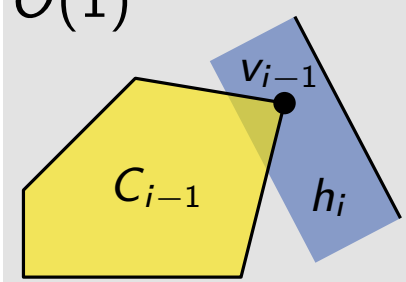
Erwartete Laufzeit

- die Laufzeit ist eine Zufallsvariable (im Folgenden mit X bezeichnet)
- weitere Zufallsvariablen: X_i ist die Laufzeit in Iteration i
- dann gilt:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$$

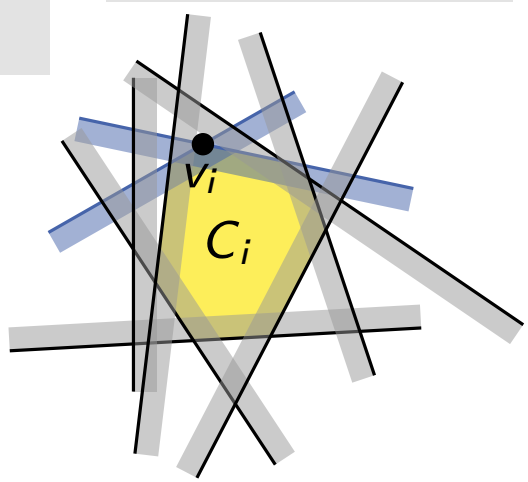
Erwartete Zeit in Iteration i: $\mathbb{E}[X_i] = P(v_{i-1} \notin C_i) \cdot O(i) + O(1)$





Was ist $P(v_{i-1} \notin C_i)$?

- es gilt: $v_{i-1} \notin C_i \Leftrightarrow v_i \neq v_{i-1}$
- umgekehrte Betrachtungsweise
  - gehe von C_i zu C_{i-1} (entferne h_i)
  - dann gilt: $v_{i-1} \neq v_i \Rightarrow \ell_i$ ist eine der zwei Geraden, die v_i enthält
  - Wahrscheinlichkeit dafür: $\frac{2}{i}$



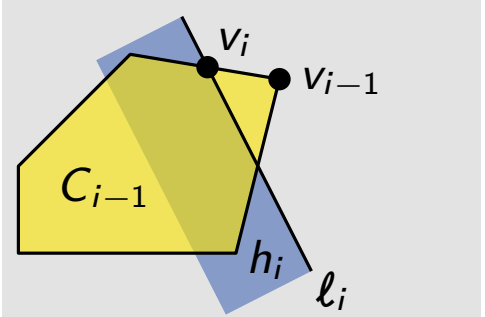
Randomisierter inkrementeller Algorithmus

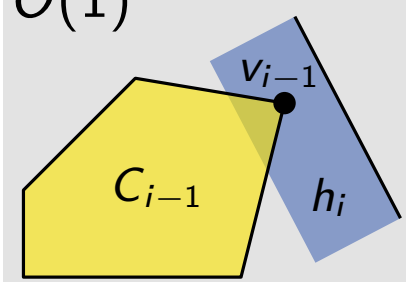
Erwartete Laufzeit

- die Laufzeit ist eine Zufallsvariable (im Folgenden mit X bezeichnet)
- weitere Zufallsvariablen: X_i ist die Laufzeit in Iteration i
- dann gilt:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$$

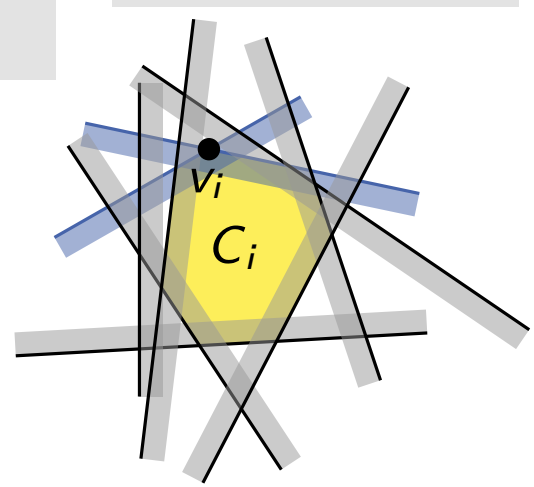
Erwartete Zeit in Iteration i: $\mathbb{E}[X_i] = P(v_{i-1} \notin C_i) \cdot O(i) + O(1)$





Was ist $P(v_{i-1} \notin C_i)$?

- es gilt: $v_{i-1} \notin C_i \Leftrightarrow v_i \neq v_{i-1}$
- umgekehrte Betrachtungsweise
  - gehe von C_i zu C_{i-1} (entferne h_i)
  - dann gilt: $v_{i-1} \neq v_i \Rightarrow \ell_i$ ist eine der zwei Geraden, die v_i enthält
  - Wahrscheinlichkeit dafür: $\frac{2}{i}$
- also: $P(v_i \neq v_{i-1}) \leq \frac{2}{i}$



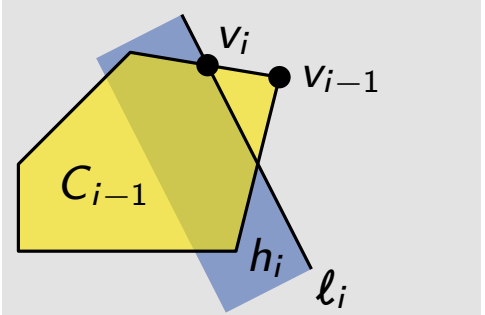
Randomisierter inkrementeller Algorithmus

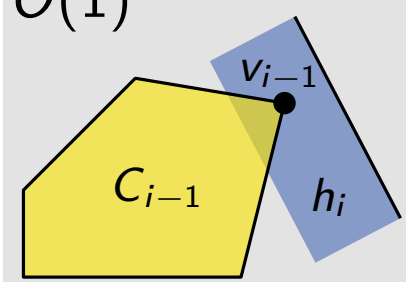
Erwartete Laufzeit

- die Laufzeit ist eine Zufallsvariable (im Folgenden mit X bezeichnet)
- weitere Zufallsvariablen: X_i ist die Laufzeit in Iteration i
- dann gilt:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$$

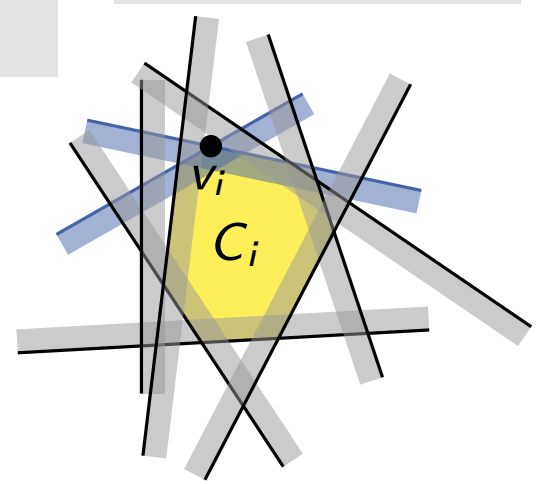
Erwartete Zeit in Iteration i: $\mathbb{E}[X_i] = P(v_{i-1} \notin C_i) \cdot O(i) + O(1)$





Was ist $P(v_{i-1} \notin C_i)$?

- es gilt: $v_{i-1} \notin C_i \Leftrightarrow v_i \neq v_{i-1}$
- umgekehrte Betrachtungsweise
  - gehe von C_i zu C_{i-1} (entferne h_i)
  - dann gilt: $v_{i-1} \neq v_i \Rightarrow \ell_i$ ist eine der zwei Geraden, die v_i enthält
  - Wahrscheinlichkeit dafür: $\frac{2}{i}$
- also: $P(v_i \neq v_{i-1}) \leq \frac{2}{i}$ Warum $\leq$?



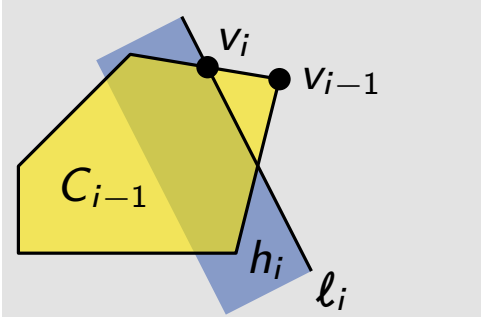
Randomisierter inkrementeller Algorithmus

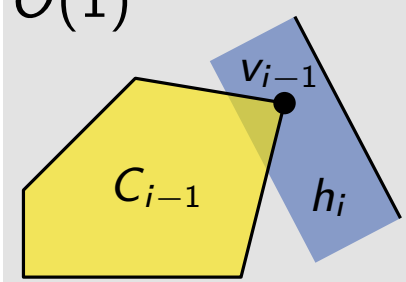
Erwartete Laufzeit

- die Laufzeit ist eine Zufallsvariable (im Folgenden mit X bezeichnet)
- weitere Zufallsvariablen: X_i ist die Laufzeit in Iteration i
- dann gilt:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$$

Erwartete Zeit in Iteration i: $\mathbb{E}[X_i] = P(v_{i-1} \notin C_i) \cdot O(i) + O(1)$

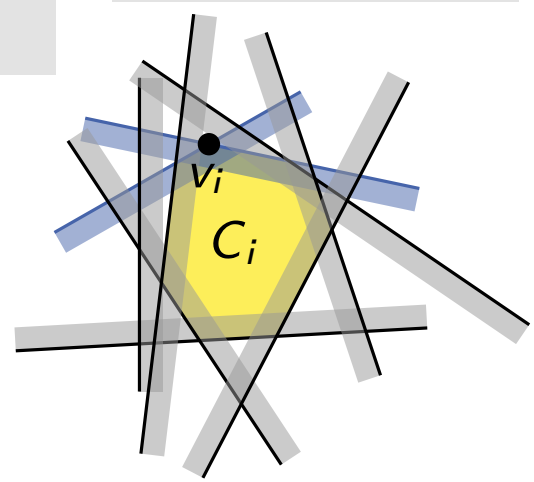




Was ist $P(v_{i-1} \notin C_i)$?

- es gilt: $v_{i-1} \notin C_i \Leftrightarrow v_i \neq v_{i-1}$
- umgekehrte Betrachtungsweise
  - gehe von C_i zu C_{i-1} (entferne h_i)
  - dann gilt: $v_{i-1} \neq v_i \Rightarrow \ell_i$ ist eine der zwei Geraden, die v_i enthält
  - Wahrscheinlichkeit dafür: $\frac{2}{i}$
- also: $P(v_i \neq v_{i-1}) \leq \frac{2}{i}$ Warum $\leq$?

$\Rightarrow \mathbb{E}[X_i] \in O(1) \Rightarrow \mathbb{E}[X] \in O(n)$



Zusammenfassung

Heute gesehen

- Berechnung einer 3D-Gussform $\rightarrow$ Formulierung als 2D-LP

Zusammenfassung

Heute gesehen

- Berechnung einer 3D-Gussform $\rightarrow$ Formulierung als 2D-LP
- 2D-LP $\rightarrow$ Formulierung als Schnitt von Halbebenen

Zusammenfassung

Heute gesehen

- Berechnung einer 3D-Gussform $\rightarrow$ Formulierung als 2D-LP
- 2D-LP $\rightarrow$ Formulierung als Schnitt von Halbebenen
- Berechnung des Schnitts von Halbebenen: $O(n \log n)$-Algorithmus

Zusammenfassung

Heute gesehen

- Berechnung einer 3D-Gussform $\rightarrow$ Formulierung als 2D-LP
- 2D-LP $\rightarrow$ Formulierung als Schnitt von Halbebenen
- Berechnung des Schnitts von Halbebenen: $O(n \log n)$-Algorithmus
- Lösung eines 2D-LPs: randomisierter Algo mit erwarteter Laufzeit $O(n)$

Zusammenfassung

Heute gesehen

- Berechnung einer 3D-Gussform $\rightarrow$ Formulierung als 2D-LP
- 2D-LP $\rightarrow$ Formulierung als Schnitt von Halbebenen
- Berechnung des Schnitts von Halbebenen: $O(n \log n)$-Algorithmus
- Lösung eines 2D-LPs: randomisierter Algo mit erwarteter Laufzeit $O(n)$

Was gibt es sonst noch?

- randomisierte Algo für 2D-LPs funktioniert auch für höhere Dimensionen

Zusammenfassung

Heute gesehen

- Berechnung einer 3D-Gussform $\rightarrow$ Formulierung als 2D-LP
- 2D-LP $\rightarrow$ Formulierung als Schnitt von Halbebenen
- Berechnung des Schnitts von Halbebenen: $O(n \log n)$-Algorithmus
- Lösung eines 2D-LPs: randomisierter Algo mit erwarteter Laufzeit $O(n)$

Was gibt es sonst noch?

- randomisierte Algo für 2D-LPs funktioniert auch für höhere Dimensionen
  - Laufzeit: weiterhin erwartet $O(n)$, wenn d konstant
  - wächst superexponentiell in d

Zusammenfassung

Heute gesehen

- Berechnung einer 3D-Gussform $\rightarrow$ Formulierung als 2D-LP
- 2D-LP $\rightarrow$ Formulierung als Schnitt von Halbebenen
- Berechnung des Schnitts von Halbebenen: $O(n \log n)$-Algorithmus
- Lösung eines 2D-LPs: randomisierter Algo mit erwarteter Laufzeit $O(n)$

Was gibt es sonst noch?

- randomisierte Algo für 2D-LPs funktioniert auch für höhere Dimensionen
  - Laufzeit: weiterhin erwartet $O(n)$, wenn d konstant
  - wächst superexponentiell in d
- diese Art der Randomisierung funktioniert für viele geometrische Probleme