

# Algorithmische Geometrie

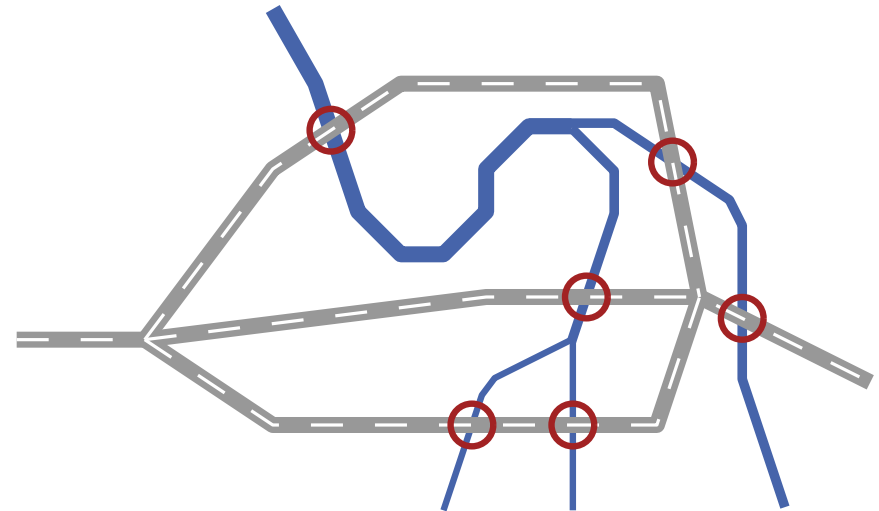
## Linienchnitt



# Linienchnitt: Motivation

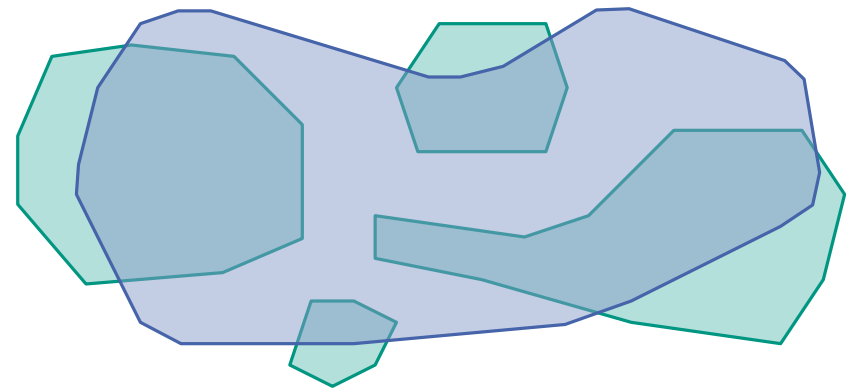
## Wo sind Brücken?

- **gegeben:** Straßen und Flüsse  
(jeweils als Menge von Strecken)
- **Ziel:** finde alle Brücken



## Tannenwälder mit viel Niederschlag

- **gegeben:** Tannenwälder und Regionen mit mehr als 1500mm Niederschlag  
(jeweils als Polygone)
- **Ziel:** berechne den Schnitt der beiden



### Problem: Linienchnitt

Gegeben  $n$  Strecken, berechne alle Schnittpunkte zwischen ihnen.

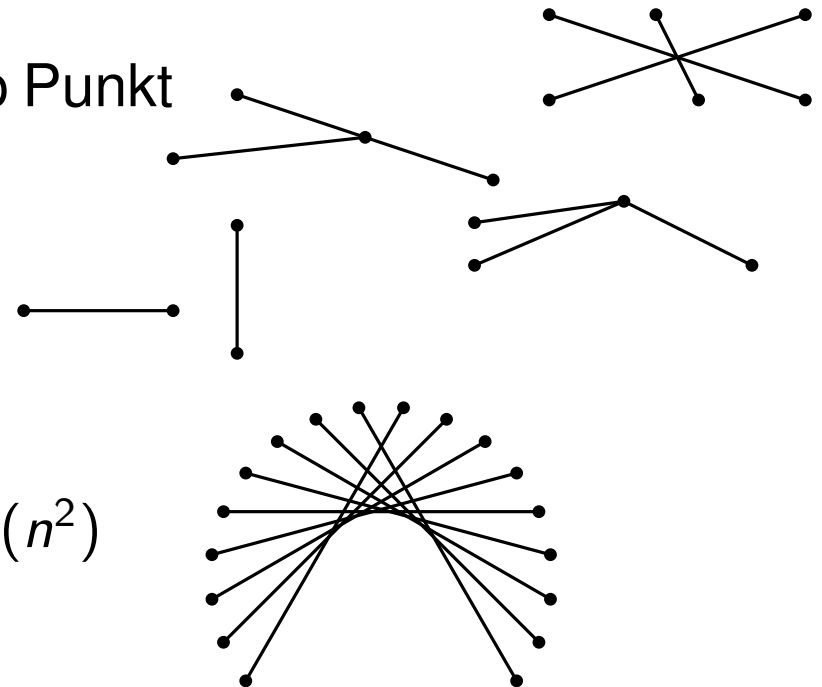
# Erste Beobachtungen

## Problem: Linienschnitt

Gegeben  $n$  Strecken, berechne alle Schnittpunkte zwischen ihnen.

### Annahme: allgemeine Lage

- maximal zwei Strecken schneiden sich pro Punkt
- kein Endpunkt auf einer anderen Strecke
- keine übereinstimmenden Endpunkte
- keine horizontalen/vertikalen Strecken



### Trivialer Algorithmus

- teste jedes Streckenpaar auf Schnitt  $\rightarrow O(n^2)$
- besser geht es nicht

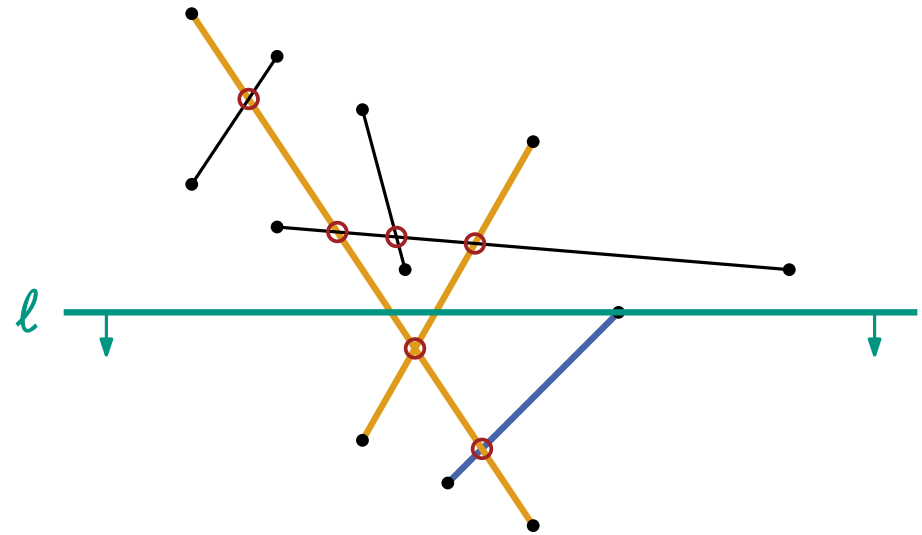
### Mögliche Verbesserung (trotz unterer Schranke)

- Ziel: wenige Schnittpunkte  $\Rightarrow$  bessere Laufzeit
- Laufzeit abhängig von Ausgabegröße  $\rightarrow$  ausgabesensitiver Algorithmus

# Ein einfacher Sweep-Line Algorithmus

## Idee

- vergleiche Strecken nicht, wenn eine komplett über der anderen liegt
- schiebe **horizontale Gerade  $\ell$**  von oben nach unten
- **neue Strecke**  $\rightarrow$  teste auf Schnitt mit allen **von  $\ell$  geschnittenen Strecken**



## Sweep-Line: etwas formaler

- Sweep-Line Status
  - aktueller Zustand des Sweeps
  - hier: Menge  $S_\ell$  der Strecken, die  $\ell$  schneiden
- Event-Queue
  - zukünftige Positionen der Sweep-Line, an denen spannendes passiert (typischerweise die Positionen, an denen sich der Status ändert)
  - hier: Start- und Endpunkte der Strecken
- Event-Handler; hier:
  - Endpunkt der Strecke  $s \rightarrow$  setze  $S_\ell = S_\ell - s$
  - Startpunkt  $\rightarrow$  teste  $s$  auf Schnitt mit Strecken in  $S_\ell$  und setze  $S_\ell = S_\ell + s$

# Ein einfacher Sweep-Line Algorithmus

## Algorithmus FINDESCHNITTPUNKTE( $S$ )

*Eingabe.* Streckenmenge  $S$

*Ausgabe.* alle Schnittpunkten; jeweils mit den dazugehörigen Strecken

$Q$  = nach  $y$ -Koord. sortierte Liste aller Streckenendpunkte // Event-Queue

$S_\ell$  = leere Liste // Sweep-Line Status

**solange**  $Q \neq \emptyset$

$p = \min\{Q\}$  und  $Q = Q - p$

  BEHANDLEEVENTPUNKT( $p$ ) // Event-Handler

BEHANDLEEVENTPUNKT( $p$ )

$s$  = Strecke mit Endpunkt  $p$

**wenn**  $s \in S_\ell$  // Strecke endet

$S_\ell = S_\ell - s$

**sonst** // Strecke startet

**für alle**  $s' \in S_\ell$

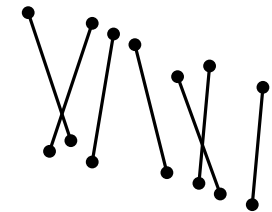
**wenn**  $s \cap s' \neq \emptyset$  **gib**  $(s \cap s', s, s')$  **aus**

$S_\ell = S_\ell + s$

**Problem:** langsam ( $O(n^2)$ ), wenn  $|S_\ell|$  meistens groß ist

**Beobachtung:** schneidende Strecken sind irgendwann benachbart (auf der Sweep-Line)

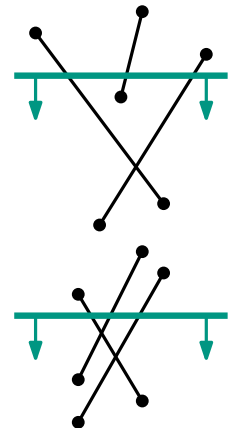
**Lösung:** vergleiche nur benachbarte Strecken



# Vergleich benachbarter Strecken

## Was ändert sich?

- Sweep-Line Status: von  $\ell$  geschnittene Strecken in sortierter Form
- Event-Handler
  - Streckenstart: Schnittpunkt nur mit benachbarten
  - Streckenstart: Sortierung erhalten beim Einfügen
  - Streckenende: Schnittpunkt für neu benachbarten
  - Schnittpunkt: Reihenfolge der schneidenden Strecken ändern und Schnittpunkt für neu benachbarte
  - Schnittpunkt gefunden: Schnittpunkt in Event-Queue einfügen



## Welche Datenstrukturen?

- Sweep-Line Status: einfügen, löschen, Vorgänger, Nachfolger
  - binärer Suchbaum:  $O(\log n)$  (z.B. AVL-Baum, rot-schwarz Baum)
- Event-Queue: einfügen, Minimum finden/entfernen, suchen
  - binärer Suchbaum:  $O(\log n)$

Warum kein Heap?  
(Fibonacci-/Hollow-Heap)

Warum brauchen wir „suchen“ für die Queue?

# Verbesserter Sweep-Line Algorithmus

## Algorithmus FINDESCHNITTPUNKTE( $S$ )

Eingabe. Streckenmenge  $S$

Ausgabe. alle Schnittpunkte  
(mit den dazugehörigen Strecken)

```

Q = leere Queue // Event-Queue
für pq ∈ S
  Q = Q + p + q
T = binärer Suchbaum // Status
solange Q ≠ ∅
  p = min{Q} und Q = Q - p
  BEHANDLEVENT(p) // Event-Handler
  
```

### FINDENEUESEVENT( $s^-, s^+, p$ )

```

q = s^- ∩ s^+ // Schnittpunkt
wenn q ≠ ∅ und p_y < q_y // nach der
  // aktuellen
  wenn q ∉ Q // Position der
    Q = Q + q // Sweep-Line
  
```

Laufzeit?

## BEHANDLEVENT( $p$ )

wenn  $p$  ist Endpunkt einer Strecke

$s =$  Strecke mit Endpunkt  $p$

wenn  $s \in T$  // Streckenende

$s^- =$  Vorgänger von  $s$  in  $T$

$s^+ =$  Nachfolger von  $s$  in  $T$

FINDENEUESEVENT( $s^-, s^+, p$ )

$T = T - s$

sonst // Streckenstart

$T = T + s$

$s^- =$  Vorgänger von  $s$  in  $T$

$s^+ =$  Nachfolger von  $s$  in  $T$

FINDENEUESEVENT( $s^-, s, p$ )

FINDENEUESEVENT( $s^+, s, p$ )

sonst // Schnittpunkt

$s, s' =$  Strecken mit Schnitt  $p$  ( $s < s'$  in  $T$ )

**gib** ( $p, s, s'$ ) **aus**

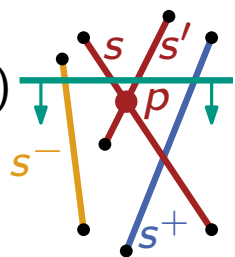
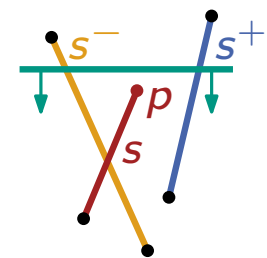
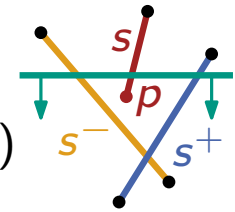
vertausche  $s$  und  $s'$  in  $T$  ( $s' < s$ )

$s^- =$  Vorgänger von  $s'$  in  $T$

$s^+ =$  Nachfolger von  $s$  in  $T$

FINDENEUESEVENT( $s^-, s', p$ )

FINDENEUESEVENT( $s^+, s, p$ )



# Verbesserter Sweep-Line Algorithmus

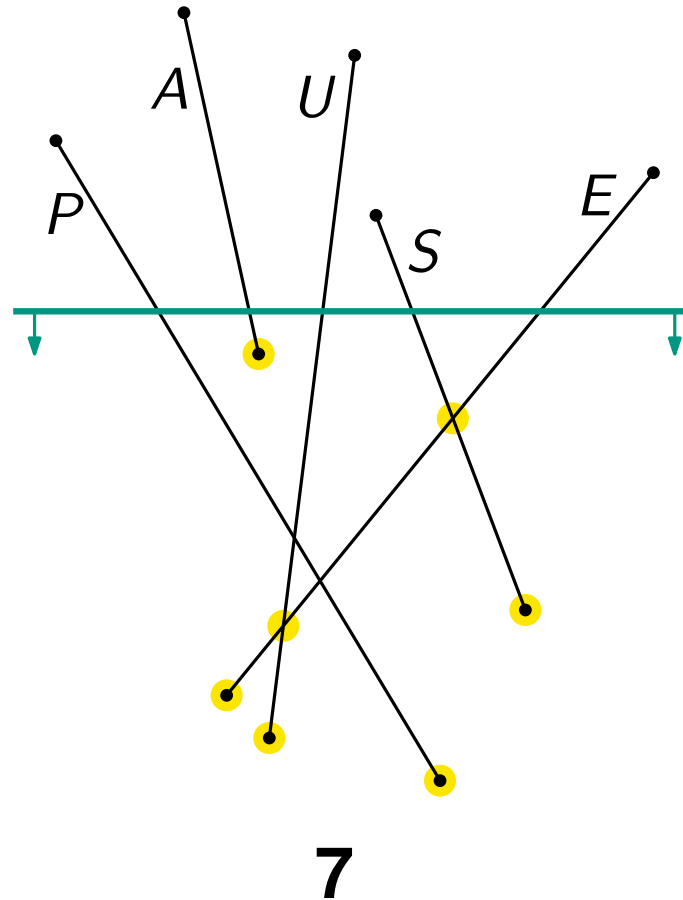
## Theorem

**Annahme:** allgemeine Lage

Die  $k$  Schnittpunkte von  $n$  Strecken sowie die sich schneidenden Streckenpaaren können in  $O((n + k) \log n)$  berechnet werden.



# Wie viele Events enthält die Event-Queue aktuell?



# Robustheit

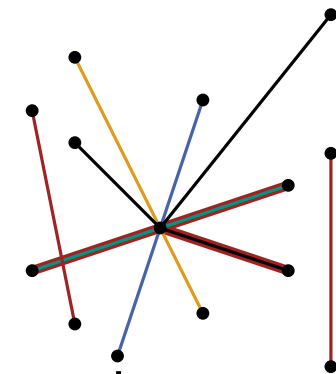
## Theorem

**Annahme:** allgemeine Lage

Die  $k$  Schnittpunkte von  $n$  Strecken sowie die sich schneidenden Streckenpaaren können in  $O((n + k) \log n)$  berechnet werden.

**Problem:** mehrere Ereignisse an einem Eventpunkt

- drei mögliche Ereignisse pro Eventpunkt
  - Startpunkt einer (oder mehrerer) Strecke
  - Endpunkt einer (oder mehrerer) Strecke
  - Schnittpunkt von Strecken
- Plan: behandle alle Ereignisse an einem Eventpunkt gemeinsam
- Strecken, die bei  $p$  starten/enden/schneiden:  $\text{start}(p)/\text{end}(p)/\text{schnitt}(p)$
- $\text{start}(p)$  muss explizit bei  $p$  gespeichert sein
- $\text{end}(p)$  und  $\text{schnitt}(p)$  ergeben sich aus dem Sweep-Line Status  $T$  **Wie?**
- Aktualisierung des Sweep-Line Zustands  $T$ 
  - lösche  $\text{end}(p) \cup \text{schnitt}(p)$  **Horizontale Strecken?**
  - füge  $\text{schnitt}(p) \cup \text{start}(p)$  ein (entsprechend Sortierung kurz nach  $p$ )
- behandle hinterher neu benachbarte Kanten



# Robuster Sweep-Line Algorithmus

BEHANDLEVENT( $p$ )

$\text{start}(p)$  = Strecken die bei  $p$  starten

// mit  $p$  in  $Q$  gespeichert

$\text{end}(p)$ ,  $\text{schnitt}(p)$  = Strecken, die bei  $p$  enden/sich schneiden // konsequentiv in  $T$

wenn  $|\text{start}(p) \cup \text{end}(p) \cup \text{schnitt}(p)| > 1$

**gib**  $p$  (mit  $\text{start}(p) \cup \text{end}(p) \cup \text{schnitt}(p)$ ) **aus**

lösche  $\text{end}(p) \cup \text{schnitt}(p)$  aus  $T$

füge  $\text{schnitt}(p) \cup \text{start}(p)$  in  $T$  ein

wenn  $\text{start}(p) \cup \text{schnitt}(p) = \emptyset$

$s^-$  = Vorgänger von  $p$  in  $T$

$s^+$  = Nachfolger von  $p$  in  $T$

FINDENEUESEVENT( $s^-, s^+, p$ )

**else**

$s^-$  = linkeste Strecke in  $\text{start}(p) \cup \text{schnitt}(p)$

$s^+$  = rechteste Strecke in  $\text{start}(p) \cup \text{schnitt}(p)$

$\hat{s}^-$  = Vorgänger von  $s^-$  in  $T$

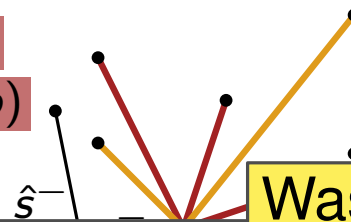
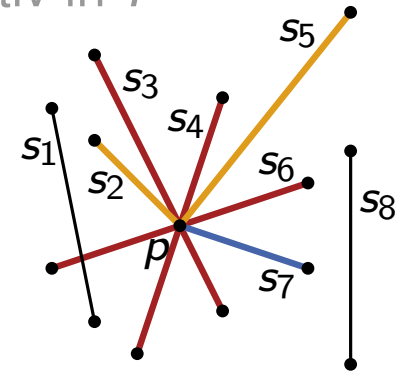
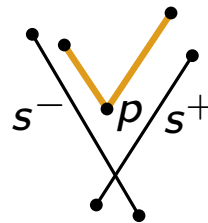
$\hat{s}^+$  = Nachfolger von  $s^+$  in  $T$

FINDENEUESEVENT( $s^-, \hat{s}^-$ )

FINDENEUESEVENT( $s^+, \hat{s}^+$ )

$T: s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_8 \rightarrow s_1 s_8$

$T: s_1 s_8 \rightarrow s_1 s_6 s_4 s_3 s_7 s_8$



Was ist noch zu zeigen?

## Theorem

Die  $k$  Schnittpunkte von  $n$  Strecken sowie die sich schneidenden Streckenpaaren können in  $O((n + k) \log n)$  berechnet werden.

# Laufzeitanalyse

## Theorem

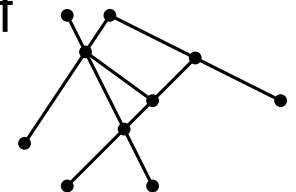
Die  $k$  Schnittpunkte von  $n$  Strecken sowie die sich schneidenden Streckenpaaren können in  $O((n + k) \log n)$  berechnet werden.

## Beweis (Laufzeit)

- Initialisierung: füge  $2n$  Eventpunkte in die Queue ein  $O(n \log n)$
- Queue-Operationen bei einem Eventpunkt  $O((n + k) \log n)$ 
  - Minimum in der Queue finden und entfernen  $O(\log n)$
  - bis zu zwei Einfügeoperationen (in FINDENEUESEVENT)  $O(\log n)$
- Operationen auf dem Sweep-Line Status bei einem Eventpunkt  $p$ 
  - hängt von der Anzahl schneidender Strecken  $m(p)$  ab
  - insgesamt  $O(m(p))$  Operationen  $O(m(p) \log n)$

**Gesamtlaufzeit:**  $(n + k) \log n + m \log n$  mit  $m = \sum_p m(p)$  **Gilt  $m \in O(n + k)$ ?**

- fasse Strecken-Arrangement als planarer Graph  $G = (V, E)$  auf
- $|V| \leq 2n + k$  und  $2|E| = m$
- in planaren Graphen gilt:  $|E| \leq 3|V| - 6 \Rightarrow m \in O(n + k)$



# Speicherverbrauch

## Warum interessiert uns das?

- der Speicherverbrauch ist oft deutlich kritischer als die Laufzeit
- auf einen Algorithmus mit Laufzeit  $O(n^2)$  kann man warten
- $O(n^2)$  Speicherverbrauch ist oft nicht praktikabel

## Wie groß ist der Sweep-Line Status?

- enthält maximal  $n$  Strecken  $\rightarrow O(n)$

## Wie groß ist die Event-Queue?

- offensichtliche Schranke:  $n + k$
- Schnittpunkte können vor Abarbeitung lange in der Queue sein
- mögliche Verbesserung: halte nur Schnittpunkte in der Queue, die zu benachbarten Strecken im Sweep-Line Status gehören  $\rightarrow O(n)$

# Zurück zum Anfang

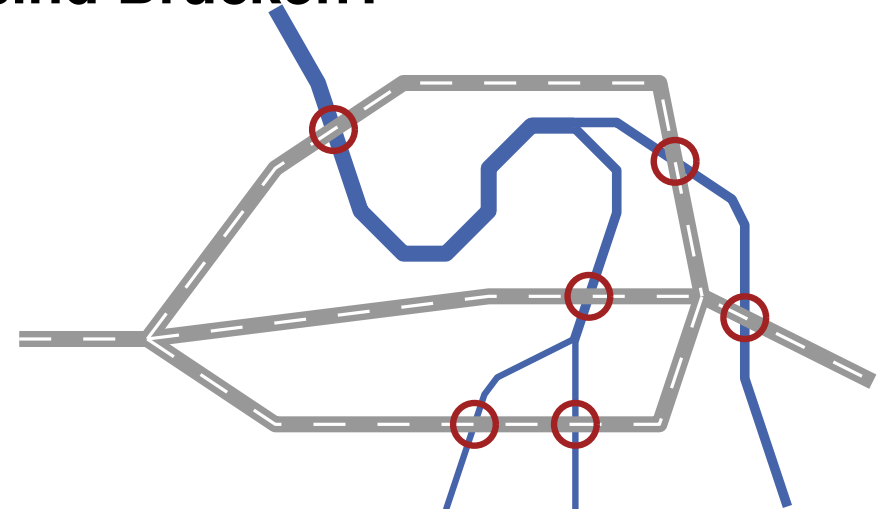
## Haben wir unser Ziel erreicht?

- wir können die Brücken finden
- den Schnitt von Polygonen können wir noch nicht berechnen

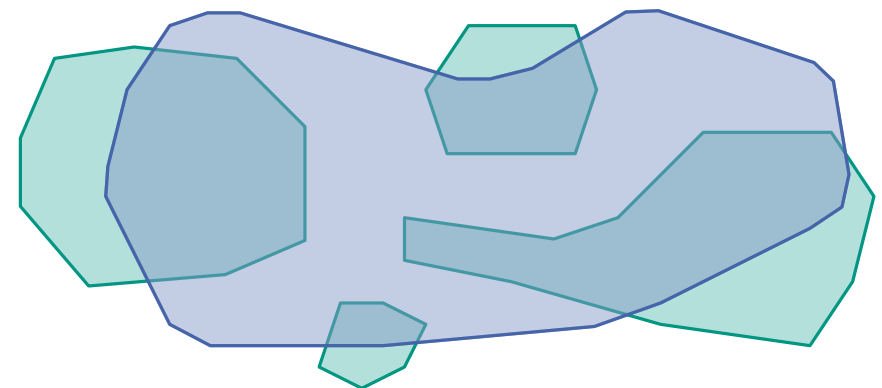
## Im Folgenden

- Datenstruktur, die hilft den Schnitt von Polygonen zu berechnen
- Durchführung des Schnitts: Übung

## Wo sind Brücken?



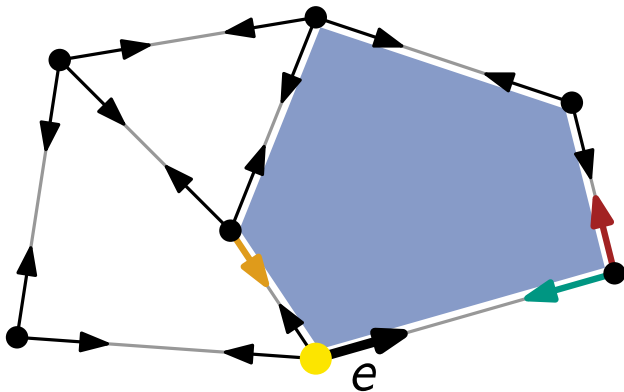
## Tannenwälder mit viel Niederschlag



# Doppelt-verkettete Kantenliste

## Doppelt-verkettete Kantenliste

- jede Kante hat 2 inzidente Knoten → speichere jede Kante doppelt



### Für jede „Halbkante“ $e$

- zugehöriger Knoten: `origin(e)`
- Kante am anderen Endpunkt: `twin(e)`
- inzidente Facette (links): `face(e)`
- nächste/vorherige Kante dieser Facette: `next(e)`, `prev(e)`

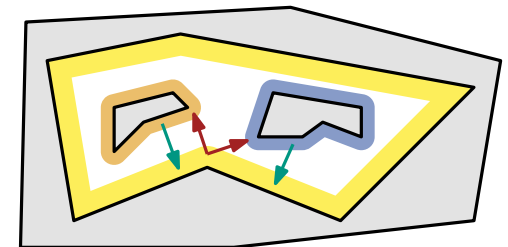
- für Knoten  $v$  / Facette  $f$  eine angrenzende Kante `edge(v)` / `edge(f)`

## Abgeleitete Operationen

- im Uhrzeigersinn nächste Kante nach  $e$  um  $v$ : `next(twin(e))`
- gegen den Uhrzeigersinn nächste Kante nach  $e$  um  $v$ : `twin(prev(e))`

## Mehrere Zusammenhangskomponenten

- zunächst: Struktur für jede Komponenten getrennt
- innere Facette  $f$ : Liste `children(f)` von Kindfacetten
- äußere Facette  $f$ : Elternfacette `parent(f)`



# Zusammenfassung

## Heute gesehen

- Ausgabesensitiver Algorithmus Schnitt von  $n$  Strecken: Laufzeit  $O((n + k) \log n)$  bei  $k$  Schnittpunkten
- Sweep-Line als allgemeine Technik
- initiale Vereinfachung durch Ausschließen von Sonderfällen lohnt sich
- doppelt-verkettete Kantenliste

## Was gibt es sonst noch?

- Erweiterung auf „Map-Overlay“: Überlagerung geometrischer Graphen
- Boolesche Operationen auf Polygonen
- untere Schranke:  $\Omega(n \log n + k)$
- kann tatsächlich in  $O(n \log n + k)$  Zeit mit  $O(n)$  Platzbedarf gelöst werden
- Erweiterungen für den Sweep-Line-Ansatz
  - die Sweep-Line kann sich auch anders bewegen (z.B. rotieren)
  - die Sweep-Line muss keine Gerade sein