Algorithmische Geometrie
Wintersemester 2021/2022
Thomas Bläsius & Marcus Wilhelm

Karlsruher Institut für Technologie

Übungsblatt 4

Abgabe bis 20. Dezember 2021

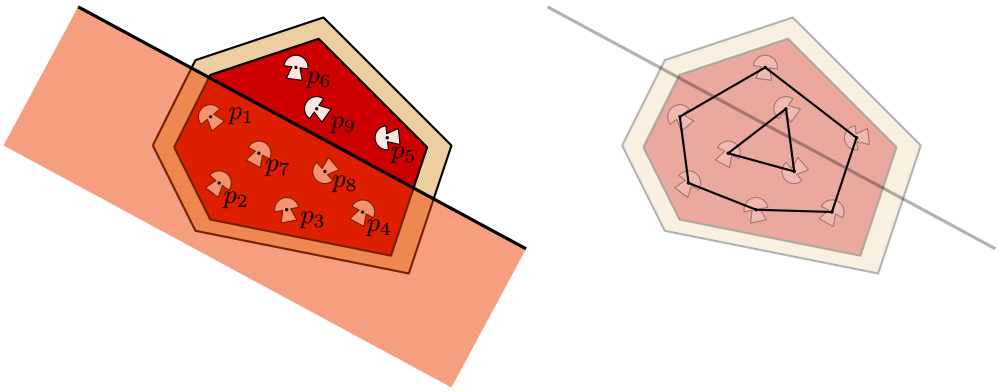
Aufgabe 1: Pizza-Guillotine Teil 2

5 + 5 = 10 Punkte

Die Pizza-Guillotine hat nun den Betrieb aufgenommen und die jüngste algorithmische Verbesserung wurde in den Betriebsablauf eingebaut: nach linearer Vorberechnungszeit (Eckpunkte der Pizza in Array speichern) kann mittels einer angepassten binären Suche nach jeder zufälligen Neuausrichtung der Klinge in logarithmischer Zeit ermittelt werden wo die Klinge die Pizza (ein konvexes Polygon) trifft.

Teilaufgabe (a) Um mehr Zeit zu sparen, sollen nun Ofen und Klinge kombiniert werden, sodass die Pizza während des Schnitts auch gleich gebacken wird! Aus Kostengründen kann allerdings nur eine Seite der Klinge mit der Ofenfunktion ausgestattet werden.

Damit die n Zutaten auf der Pizza, deren Positionen durch die Punkte $p_1, \dots, p_n$ definiert sind, der Hitze nicht mehrfach ausgesetzt werden, muss bei jedem möglichen Schnitt festgestellt werden, welche k Zutaten auf der Ofen-Seite der Klinge liegen.

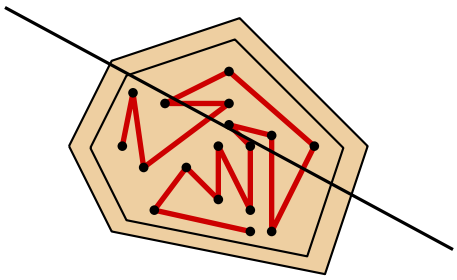


Gebt einen Algorithmus an, der (unter Zuhilfenahme des Algorithmus aus Teil 1) nach $\mathcal{O}(n)$ Vorberechnungszeit jedes Mal in $\mathcal{O}(\log(n) + k)$ Zeit die k Zutaten bestimmen kann, die auf der Ofen-Seite der Klinge liegen.

***Hinweis**: Ihr dürft annehmen, dass ihr als Eingabe die **verschachtelte konvexe Hülle** der Punkte $p_1, \dots, p_n$ bekommt. Diese erhält man, wenn man erst die konvexe Hülle aller Punkte und danach iterativ die konvexe Hülle der Punkte bestimmt, die nicht Teil einer vorherigen konvexen Hülle waren.*

Teilaufgabe (b) Ein letzte Baustelle in diesem (sonst optimalen) Vorgehen ist die Lebensdauer der Klinge, welche durch den Säuregehalt der Tomatensoße stark beeinträchtigt wird. Es soll nun ausgenutzt werden, dass die Tomatensoße auf der Pizza "verteilt" wird, indem ein Roboter die Soße in Form eines Polygonzuges, bestehend aus n Punkten, auf den Teig gibt. Wenn die Klinge zu viele Berührungen mit der Soße hätte, muss mittels Reset eine neue Ausrichtung probiert werden.

Gebt einen Algorithmus an, der (unter Zuhilfenahme des Algorithmus aus Teilaufgabe (a)) nach $\mathcal{O}(n \log n)$ Vorberechnungszeit in $\mathcal{O}((k+1)\log(n/(k+1)))$ Zeit die k Schnittpunkte der Klinge mit dem Polygonzug bestimmt.



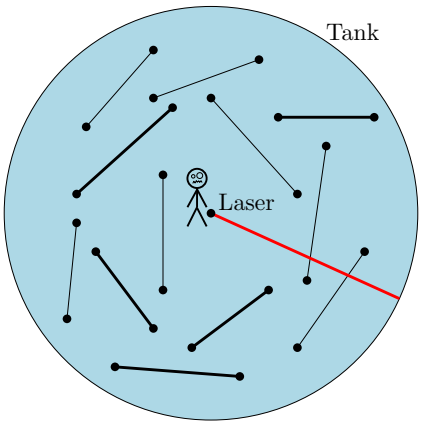
Aufgabe 2: Mission: Impossible **5 Punkte**

Die Luft wird knapp! Agent *T. Ethan Suche* vom Geheimdienst *TCS* findet sich in einer prekären Situation wieder. Sein böser Zwillingsbruder *Brighton* hat ihn mitten in einen zylinderförmigen Tank gesteckt, der komplett mit Wasser gefüllt ist. Zum Glück hat er einen Laser (getarnt als Whiteboard-Marker), der die Wand des Tanks durchbrechen und den Agenten retten könnte. Leider ist der Agent von n Glasscheiben umgeben, deren Stärke die Kraft des Lasers beeinträchtigen.

Vor Panik rotiert der Agent den Laser alle $\mathcal{O}(\log(n) + k)$ Sekunden zu einem zufällig gewählten Winkel, wobei k die Anzahl der Scheiben ist, die der Laser in der aktuellen Ausrichtung treffen würde. Nach einer Neuausrichtung muss T. Ethan entscheiden, ob er den Laser aktiviert. Da ein Laser in Whiteboard-Marker Form nur über eine sehr kleine Batterie verfügt, hat er nur eine einzige Chance, um den Laser an der richtigen Stelle einzuschalten.

Zum Glück hatte unser Agent $\mathcal{O}(n \log n)$ Vorberechnungszeit und $\mathcal{O}(n)$ Speicher, in der er zwar die Positionen der Glasscheiben studieren konnte, deren Stärke aber nicht! Für einen gegebenen Winkel muss er nun die Summe der Stärken der getroffenen Scheiben bestimmen um zu entscheiden, ob der Laser die Wand des Tanks erreichen würde.

Wie hat T. Ethan die Vorberechnungszeit genutzt? Und wie kann er nun schnell genug herausfinden, welche k Scheiben der Laser in einer gegebenen Position schneiden würde, bevor ihn die Panik überkommt und er zur nächsten Position rotiert?



Aufgabe 3: Anderthalbe Bereichsanfragen **5 Punkte**

Gegeben seien n Punkte in der Ebene. Eine anderthalbe Bereichsanfrage ist definiert durch $x_1, x_2, y \in \mathbb{R}$ und fragt die Teilmenge der Punkte an, die im Intervall $[x_1, x_2] \times [y, \infty]$ liegen. Gebt einen Algorithmus an, der nach $\mathcal{O}(n \log n)$ Vorberechnungszeit mit $\mathcal{O}(n)$ Speicher anderthalbe Bereichsanfragen in $\mathcal{O}(\log(n) + k)$ Zeit beantworten kann. Dabei ist k die Anzahl der Punkte, die im angefragten Bereich liegen.