

## Übungsblatt 5

Abgabe bis 7. Juli 2021

### Aufgabe 1: Verschiedenes zu Baumweite 5 + 5 Punkte

**Teilaufgabe (a)** Seien  $X_i$ ,  $X_k$  und  $X_j$  Bags einer Baumzerlegung eines Graphen  $G$ , sodass  $X_k$  auf dem Pfad zwischen  $X_i$  und  $X_j$  liegt. Zeige, dass  $X_i \setminus X_k$  durch  $X_k$  von  $X_j \setminus X_i$  separiert wird.

**Teilaufgabe (b)** Sei  $G$  ein Graph mit Baumweite höchstens  $k$  mit  $n$  Knoten und  $m$  Kanten. Zeige, dass  $m \leq n \cdot k$ .

### Aufgabe 2: Dominierende Mengen 10 Punkte

Eine Knotenmenge  $D \subseteq V$  in einem Graphen  $G = (V, E)$  ist eine *dominierende Menge*, wenn für jeden Knoten  $v \in V$  gilt, dass  $v$  oder ein Nachbar von  $v$  in  $D$  enthalten ist. Das Problem CONNECTED DOMINATING SET besteht darin, eine möglichst kleine dominierende Menge  $D$  zu finden, sodass der von  $D$  induzierte Teilgraph zusammenhängend ist.

Gegeben sei ein Graph  $G$  zusammen mit einem Parameter  $k$  und einer Baumzerlegung der Weite  $k$ . Gib einen FPT-Algorithmus für diese Parametrisierung von CONNECTED DOMINATING SET an.

*Hinweis:* Benutze ein dynamisches Programm auf der Baumzerlegung. Die Verwendung von Courcelles Theorem ist nicht erlaubt.

### Aufgabe 3: Baumweite planarer Graphen 10 Punkte

In planaren Graphen gilt die folgende Aussage.

**Satz** (Planar Separator Theorem). *In jedem planaren Graphen  $G = (V, E)$  kann die Knotenmenge  $V$  in drei Teilmengen  $S \cup V_1 \cup V_2 = V$  partitioniert werden, sodass*

- $S$  separiert  $V_1$  von  $V_2$  (es gibt keine Kante von einem Knoten aus  $V_1$  zu einem Knoten aus  $V_2$ ),
- $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3}|V|$  und
- $|S| \leq 4\sqrt{n}$ .

Zeige, dass planare Graphen mit  $n$  Knoten Baumweite  $O(\sqrt{n})$  haben.