

Übungsblatt 5

Abgabe bis 7. Juli 2021

Aufgabe 1: Verschiedenes zu Baumweite

5 + 5 Punkte

Teilaufgabe (a) Seien X_i , X_k und X_j Bags einer Baumzerlegung eines Graphen G , sodass X_k auf dem Pfad zwischen X_i und X_j liegt. Zeige, dass $X_i \setminus X_k$ durch X_k von $X_j \setminus X_i$ separiert wird.

Teilaufgabe (b) Sei G ein Graph mit Baumweite höchstens k mit n Knoten und m Kanten. Zeige, dass $m \leq n \cdot k$.

Aufgabe 2: Dominierende Mengen

10 Punkte

Eine Knotenmenge $D \subseteq V$ in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine *dominierende Menge*, wenn für jeden Knoten $v \in V$ gilt, dass v oder ein Nachbar von v in D enthalten ist. Das Problem CONNECTED DOMINATING SET besteht darin, eine möglichst kleine dominierende Menge D zu finden, sodass der von D induzierte Teilgraph zusammenhängend ist.

Gegeben sei ein Graph G zusammen mit einem Parameter k und einer Baumzerlegung der Weite k . Gib einen FPT-Algorithmus für diese Parametrisierung von CONNECTED DOMINATING SET an.

Hinweis: Benutze ein dynamisches Programm auf der Baumzerlegung. Die Verwendung von Courcelles Theorem ist nicht erlaubt.

Aufgabe 3: Baumweite planarer Graphen

10 Punkte

In planaren Graphen gilt die folgende Aussage.

Satz (Planar Separator Theorem). *In jedem planaren Graphen $G = (V, E)$ kann die Knotenmenge V in drei Teilmengen $S \uplus V_1 \uplus V_2 = V$ partitioniert werden, sodass*

- S separiert V_1 von V_2 (es gibt keine Kante von einem Knoten aus V_1 zu einem Knoten aus V_2),
- $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3}|V|$ und
- $|S| \leq 4\sqrt{n}$.

Zeige, dass planare Graphen mit n Knoten Baumweite $O(\sqrt{n})$ haben.