Übungsblatt 3

Abgabe bis 9. Juni 2021

Aufgabe 1: Vertex Cover in bipartiten Graphen 7 + 7 = 16 Punkte

Teilaufgabe (a) Zeige, dass die LP-Relaxierung des ILPs zu Vertex Cover eine ganzzahlige optimale Lösung hat, wenn der Graph bipartit ist.

Hinweis: Zeige, dass die zugehörige Matrix total unimodular ist.

Teilaufgabe (b) Benutze den Dualitätssatz, um den Satz von Kőnig zu beweisen. Der Satz von Kőnig besagt, dass das minimale Vertex Cover und das maximale Matching in einem bipartiten Graphen die gleiche Kardinalität haben.

Aufgabe 2: Anwendung von Lenstra 5 + 11 = 16 Punkte

Erstelle eine geeignete ILP Formulierung um zu zeigen, dass folgende Probleme in FPT sind:

Variety Subset Sum: Gegeben eine Multimenge A von Zahlen in $\mathbb{N}$ ("Multi" heißt, Zahlen können mehrfach in A auftauchen) und ein Wert $b \in \mathbb{N}$. Gibt es eine Teilmultimenge $X \subseteq A$ mit $\sum_{x \in X} x = b$? Betrachte als Parameter die Anzahl unterschiedlicher Zahlen in A.

Makespan Scheduling: Gegeben $m \in \mathbb{N}$ Maschinen, n Jobs mit Bearbeitunszeiten $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ und eine Schranke für die maximale Bearbeitungsdauer $k \in \mathbb{N}$. Gibt es eine Verteilung der Jobs auf die Maschinen, sodass keine Maschine länger als k Zeit benötigt? (Ganz formal: Gibt es eine Abbildung $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ sodass $\sum_{j : f(j) = i} p_j \leq k$ für alle $1 \leq i \leq m$?)
Betrachte als Parameter die Schranke k auf die Bearbeitungsdauer.

Hinweis: Makespan Scheduling benötigt eine ähnliche Strategie wie das ILP für Closest String aus der Vorlesung.