

Übungsblatt 1

Abgabe bis 5. Mai 2021

Hinweise:

- Bitte bearbeitet die Übungsblätter möglichst in Zweiergruppen.
- Bitte schreibt eure Lösungen in einem sinnvollen Textsatzprogramm¹ oder fertigt zumindest **kontrastreiche** Scans (oder zumutbare Fotos) eurer **gut lesbaren** handschriftlichen Bearbeitungen an.

Aufgabe 1: F -Vertex-Deletion

5 Punkte

Sei F eine (endliche) Menge von Graphen. Wir nennen einen Graph G F -frei, wenn kein induzierter Subgraph von G isomorph zu einem der Graphen in F ist.

Für ein festes F besteht das Problem F -Vertex-Deletion darin, zu entscheiden ob es für einen gegebenen Graphen G und Parameter k möglich ist bis zu k Knoten aus G zu löschen, sodass G F -frei wird. Gib einen FPT Algorithmus mit Laufzeit $2^{O(k)} n^{O(1)}$ für dieses Problem an.

Hinweis: Die in der O -Notation versteckten Konstanten dürfen von F abhängen.

Aufgabe 2: 3-HITTING SET

10 Punkte

Eine Instanz von 3-HITTING SET besteht aus einer Familie von Mengen $\{S_1, \dots, S_n\}$ mit $|S_i| \leq 3$ über einer Grundmenge U (also $S_i \subseteq U$). Ziel ist es zu entscheiden, ob es eine Menge $H \subseteq U$ mit $|H| \leq k$ gibt, sodass $H \cap S_i \neq \emptyset$ für alle S_i . Gib einen beschränkten Suchbaum an, der einen Algorithmus mit Laufzeit $2,562^k \cdot n^{O(1)}$ für dieses Problem liefert.

¹z.B. \LaTeX

Aufgabe 3: MINIMUM-MAXIMAL MATCHING

10 Punkte

Beim MINIMUM-MAXIMAL MATCHING Problem soll für einen gegebenen Graphen G und einen Parameter k entschieden werden, ob G ein inklusions-maximales Matching mit höchstens k Kanten hat.

Teilaufgabe (a) Zeige, dass für ein inklusions-maximales Matching M der Größe k in G , die Menge der am Matching beteiligten Knoten $V(M)$ ein Vertex Cover der Größe $2k$ ergibt.

Teilaufgabe (b) Sei M ein inklusions-maximales Matching in G und sei $X \subseteq V(M)$ ein inklusions-minimales Vertex Cover in G . Sei außerdem M_1 ein größtmögliches matching von $G[X]$ und sei M_2 ein größtmögliches Matching von $G[V(G) \setminus V(M_1)]$. Zeige, dass $M_1 \cup M_2$ ein inklusions-maximales Matching der Größe höchstens $|M|$ in G ist.

Teilaufgabe (c) Gib einen Algorithmus mit Laufzeit $4^k n^{O(1)}$ für MINIMUM-MAXIMAL MATCHING an.

Aufgabe 4: VERTEX COVER mit beschränkten Suchbäumen 5 Punkte + 10 Bonus-Punkte

Euer Ziel in dieser Aufgabe ist es, minimale Vertex Cover für gegebene Graphen zu generieren. Implementiert dazu in einer Programmiersprache eurer Wahl (bevorzugt Java, Python oder C++) ein Programm, welches einen Graphen einliest und dazu ein minimales Vertex Cover berechnet. Nutzt dazu die Verfahren zu beschränkten Suchbäumen aus Vorlesung 3, um auf eine Laufzeit von $1.342^k \cdot n^{O(1)}$ zu kommen. Bonuspunkte gibt es für die Implementierung weiterer Regeln, welche ihr z.B. in wissenschaftlichen Arbeiten finden könnt.

Beschreibt in der PDF-Abgabe, welche Verfahren ihr implementiert habt und gebt eine Übersicht, welche Lösungsgrößen ihr für die Graphen auf der Vorlesungswebseite² erzielt habt. Gebt zusätzlich den Quellcode sowie eure gebildeten Lösungen (im unten beschriebenen Format) als eine ZIP-Datei ab.

Dateiformat: In der ersten Zeile stehen n und m , die Anzahl von Knoten und Kanten des Graphen. In den nächsten m Zeilen sind jeweils zwei Knoten angegeben, die durch eine ungerichtete Kante verbunden sind. Dabei sind die Knoten von 1 bis n durchnummeriert.

Dateiformat Ausgabe: In der ersten Zeile steht die Lösungsgröße k . In den folgenden k Zeilen steht jeweils die ID eines Knotens, der Teil des Covers ist.

²https://scale.iti.kit.edu/teaching/2021ss/param_algo/