

# Parametrisierte Algorithmen

## Zusammenfassung



# Wiederholung: Relaxiertes GRID TILING

## Problem: GRID TILING WITH $\leq$

$([n] = [1, n])$

Gegeben sei eine  $k \times k$  Matrix an Mengen  $S_{i,j}$ , wobei  $S_{i,j} \subseteq [n] \times [n]$ . Wähle für jede Zelle ein  $s_{i,j} \in S_{i,j}$ , sodass für jede Spalte bzw. Zeile die ersten bzw. zweiten Koordinaten nicht-absteigend sortiert sind.

## Beispiel

- $k = 3$  und  $n = 5$

## Beachte

- die Instanzen von GRID TILING und GRID TILING WITH  $\leq$  sind gleich
- jede Lösung von GRID TILING löst auch GRID TILING WITH  $\leq$ , aber nicht umgekehrt
- das heißt aber nicht, dass GRID TILING WITH  $\leq$  leichter zu lösen ist

$S_{1,1}$ (1, 1) (3, 1) (2, 4)	$S_{1,2}$ (5, 1) (1, 4) (5, 3)	$S_{1,3}$ (1, 1) (2, 4) (3, 3)
$S_{2,1}$ (2, 2) (1, 4)	$S_{2,2}$ (3, 1) (1, 2)	$S_{2,3}$ (2, 2) (2, 3)
$S_{3,1}$ (1, 3) (2, 3) (3, 3)	$S_{3,2}$ (1, 1) (1, 3)	$S_{3,3}$ (2, 3) (5, 3)

## Theorem

(ohne Beweis)

ETH impliziert, dass es keinen  $f(k) \cdot n^{o(k)}$ -Algorithmus für GRID TILING WITH  $\leq$  gibt (außerdem ist es  $W[1]$ -schwer).

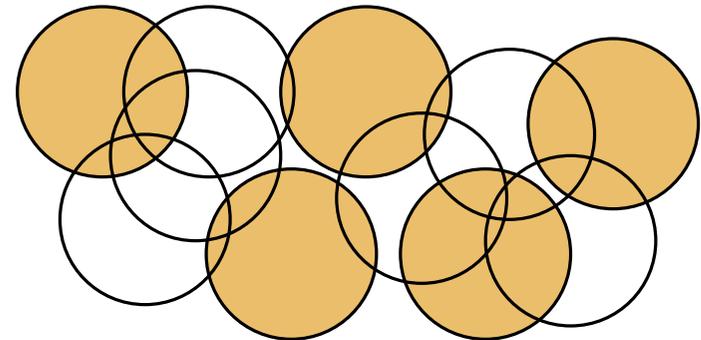
# Nachtrag: Unabhängige Einheitskreise

## Problem: UNIT DISK INDEPENDENT SET

Gegeben sei eine Menge von Kreisen mit Radius 1 und ein Parameter  $k$ .  
Gibt es unter ihnen  $k$  disjunkte Kreise?

### Beispiel

- gibt es  $k = 6$  disjunkte Kreise?
- nein, 5 ist das Maximum



### Beachte

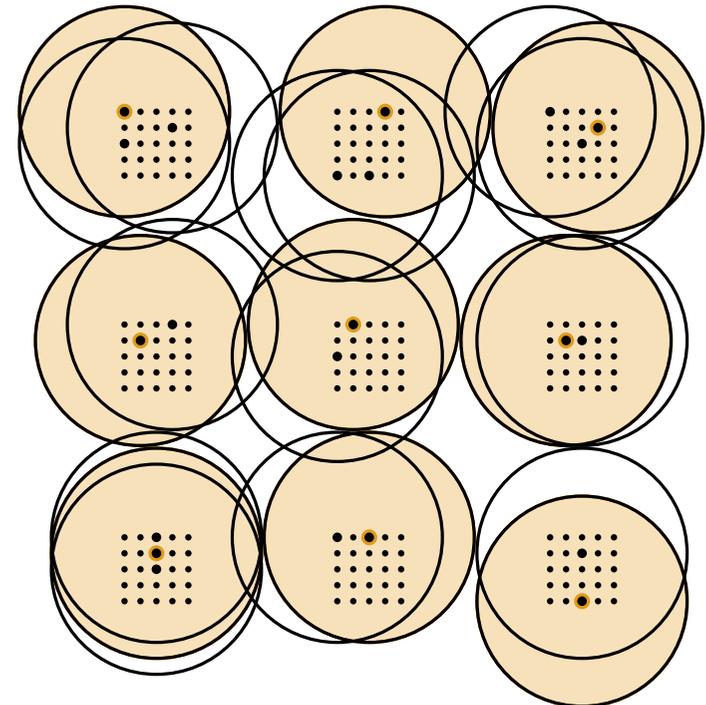
- äquivalent zu INDEPENDENT SET eingeschränkt auf „unit disk graphs“
- also potentiell echt leichter als INDEPENDENT SET
- tatsächlich: UNIT DISK INDEPENDENT SET kann in  $n^{O(\sqrt{k})}$  gelöst werden  
(untere Schranke für allgemeines IS (basierend auf ETH):  $n^{\Omega(k)}$ )

### Ziel im Folgenden

- zeige, dass es auch nicht besser geht (untere Schranke:  $n^{\Omega(\sqrt{k})}$ )
- reduziere von GRID TILING WITH  $\leq$

# Nachtrag: Untere Schranke für UNIT DISK IS

$S_{1,1}$ (1, 1) (3, 1) (2, 4)	$S_{1,2}$ (5, 1) (1, 4) (5, 3)	$S_{1,3}$ (1, 1) (2, 4) (3, 3)
$S_{2,1}$ (2, 2) (1, 4)	$S_{2,2}$ (3, 1) (1, 2)	$S_{2,3}$ (2, 2) (2, 3)
$S_{3,1}$ (1, 3) (2, 3) (3, 3)	$S_{3,2}$ (1, 1) (1, 3)	$S_{3,3}$ (2, 3) (5, 3)



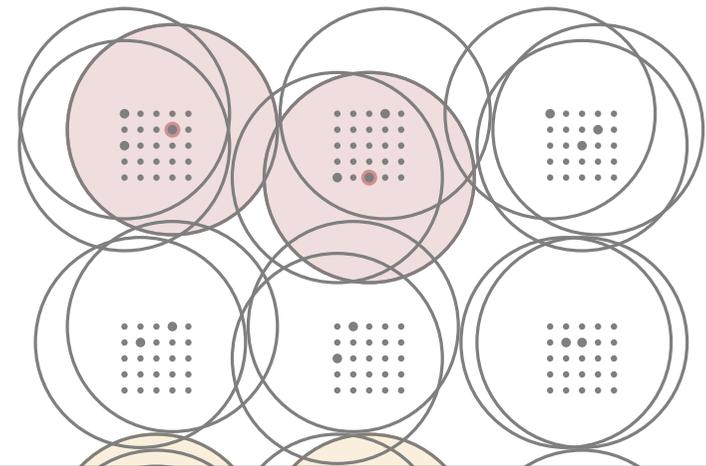
**Plan:** erstelle Instanz von UNIT DISK INDEPENDENT SET, die Lösung der Größe  $k^2$  hat  $\Leftrightarrow$  GRID TILING WITH  $\leq$  hat Lösung (im Beispiel ist  $k = 3$ )

## Idee

- ein Kreis für jedes Paar
- Kreise von Paaren aus der gleichen Zelle schneiden sich immer
- Kreise von Paaren aus benachbarten Zellen schneiden sich, wenn die entsprechende Koordinate kleiner wird

# Nachtrag: Untere Schranke für UNIT DISK IS

$S_{1,1}$ (1, 1) (3, 1) <b>(2, 4)</b>	$S_{1,2}$ (5, 1) (1, 4) <b>(5, 3)</b>	$S_{1,3}$ (1, 1) (2, 4) (3, 3)
$S_{2,1}$ (2, 2) (1, 4)	$S_{2,2}$ (3, 1) (1, 2)	$S_{2,3}$ (2, 2) (2, 3)



## Theorem

ETH impliziert, dass es keinen  $f(k) \cdot n^{o(\sqrt{k})}$ -Algorithmus für UNIT DISK INDEPENDENT SET gibt (außerdem ist es  $W[1]$ -schwer).

**Plan:** erstelle Instanz von UNIT DISK INDEPENDENT SET, die Lösung der Größe  $k^2$  hat  $\Leftrightarrow$  GRID TILING WITH  $\leq$  hat Lösung (im Beispiel ist  $k = 3$ )

## Idee

- ein Kreis für jedes Paar
- Kreise von Paaren aus der gleichen Zelle schneiden sich immer
- Kreise von Paaren aus benachbarten Zellen schneiden sich, wenn die entsprechende Koordinate kleiner wird

# Grundsätzliche Hinweise

## Ziel der Prüfung

- wir müssen euch bescheinigen, dass ihr
  - den Stoff der Vorlesung kennt
  - die Inhalte verstanden habt
  - mit den gelernten Techniken neue Algorithmen entwerfen und analysieren könnt
- mündliche Pr.: besonders gut geeignet für die ersten beiden Punkte
- der Fokus wird auf dem zweiten Punkt liegen  
(Punkt eins und drei werden aber auch vertreten sein)

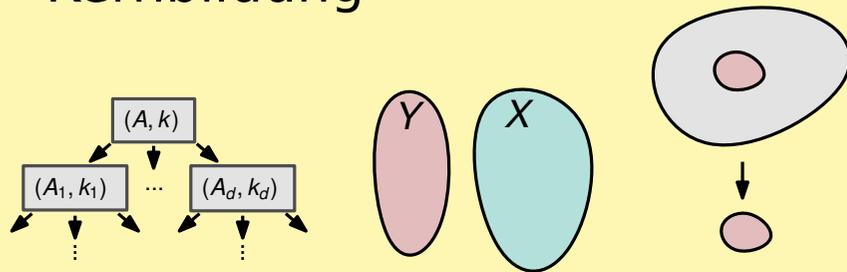
## Vorbereitung

- Schritt 1: rekapituliert und versteht die Inhalte
- Schritt 2: erklärt jemandem die Inhalte
- **Achtung:** Schritt 2 ist genau das, was in der Prüfung passiert. Das solltet ihr definitiv vorher üben!

# Inhalt

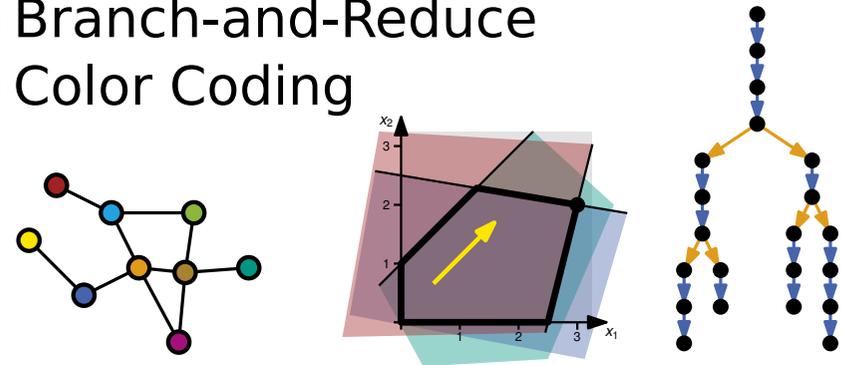
## Basic Toolbox

- beschränkte Suchbäume
- iterative Kompression
- Kernbildung



## Erweiterte Toolbox

- lineare Programme
- Branch-and-Reduce
- Color Coding



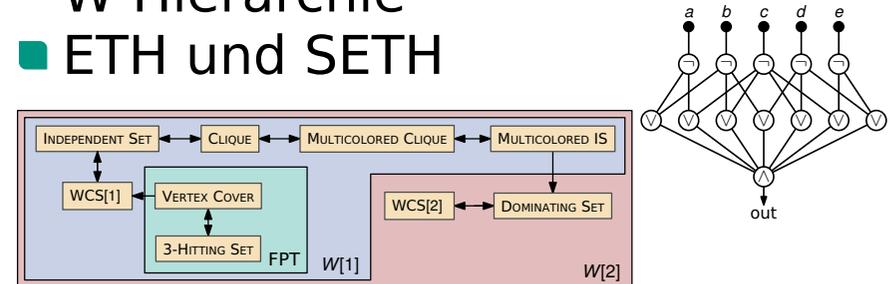
## Baumweite

- dynamische Programme
- chordale & planare Graphen
- Courcelles Theorem



## Untere Schranken

- parametrisierte Reduktionen
- boolesche Schaltkreise und die W-Hierarchie
- ETH und SETH



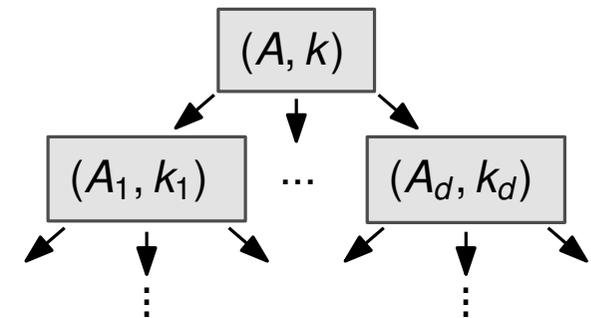
# FPT-Techniken Grundtechniken

## Grundbegriffe: Parametrisierung

- Was sind parametrisierte Probleme?
- Was ist FPT?

## Suchbäume

- Wie funktionieren Suchbäume?
- Wie bekomme man FPT-Laufzeit?
- Was ist wichtig um die Tiefe zu beschränken?

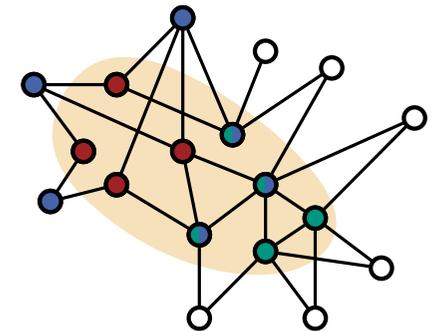


## Kernbildung

- Was ist ein Kern?
- Was ist die Standardmethode um Kerne zu berechnen?
- Wann ist Kernbildung für ein Problem möglich?

## Iterative Kompression

- Was ist die Grundidee dieser Technik?
- Woher kommt die zu große Lösung?
- Was ist das Kompressions-Problem?

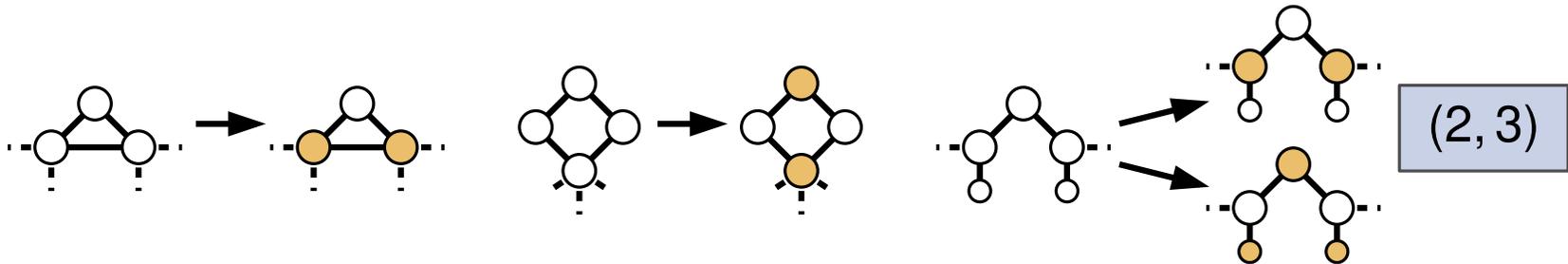


## Wie lassen sich diese Techniken auf VERTEX COVER anwenden?

# Beschränkte Suchbäume

## Allgemeine Verzweigung

- Was ist ein Verzweigungsvektor?
- Wie findet man anhand des Verzweigungsvektors die Baumgröße?
- Warum muss man da die Nullstelle eines Polynoms berechnen?



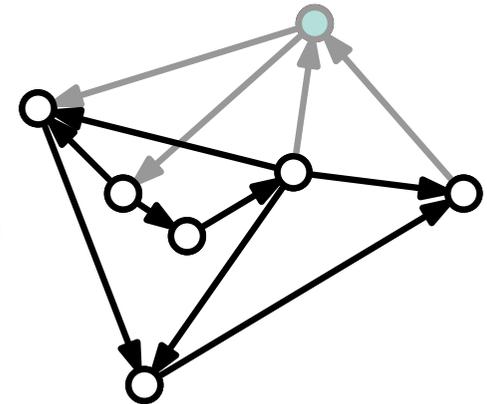
## Bessere Verzweigung bei VERTEX COVER

- Warum helfen Knoten mit großen Grad?
- Kann man immer einen Knoten mit Grad 4 finden?
- Wie wird man Knoten mit Grad 2 los?
- Was ist die Idee für Grad 3 Knoten?
- Wie sieht es mit Grad 4 Knoten aus?
- Warum kann ich den Verzweigungsvektor  $(1, 4)$  ignorieren?

# Iterative Kompression

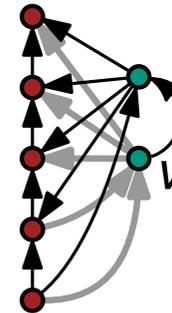
## FEEDBACK VERTEX SET

- Was ist das Problem?
- Wie reduziert man FVS auf FVS COMPRESSION?
- Wie reduziert man FVS COMPRESSION auf DISJOINT FVS?
- Welche Laufzeit verliert man unterwegs?



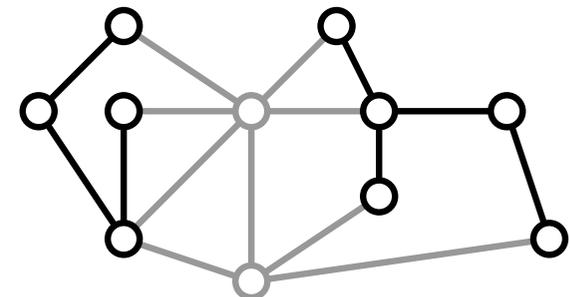
## DISJOINT FEEDBACK VERTEX SET auf Turniergraphen

- Was sind Turniergraphen?
- Wie reduziert sich das Problem dabei auf LONGEST COMMON SUBSEQUENCE?



## Ungerichtetes FVS

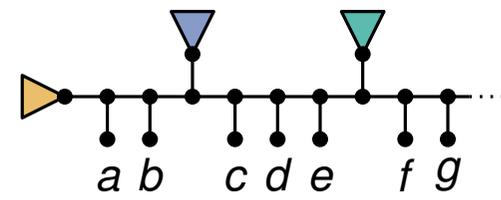
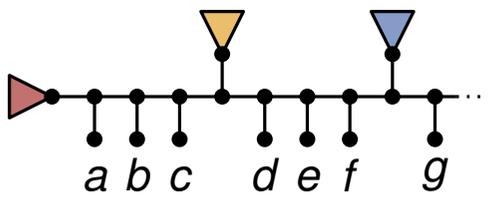
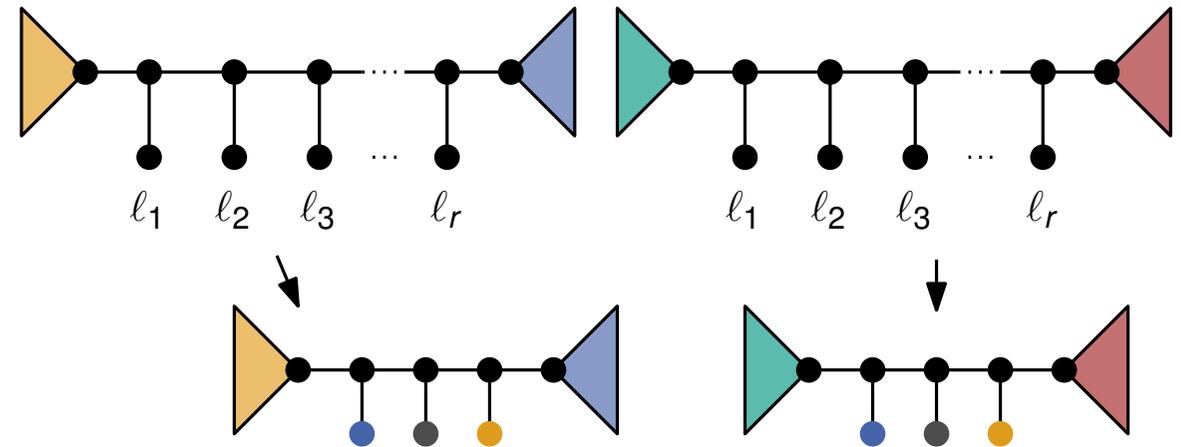
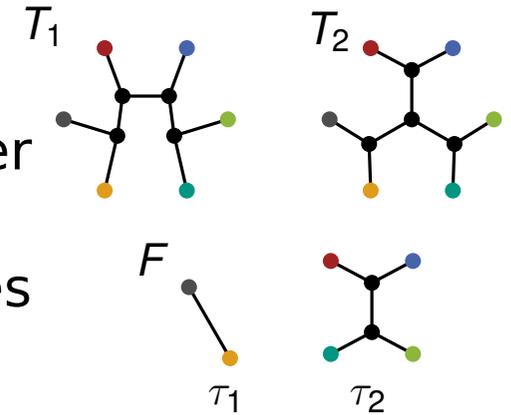
- Reduktion auf die disjunkte Variante?
- Wie löst man diese?



# Kernbildung: Ähnliche Bäume

## MAXIMUM AGREEMENT FOREST

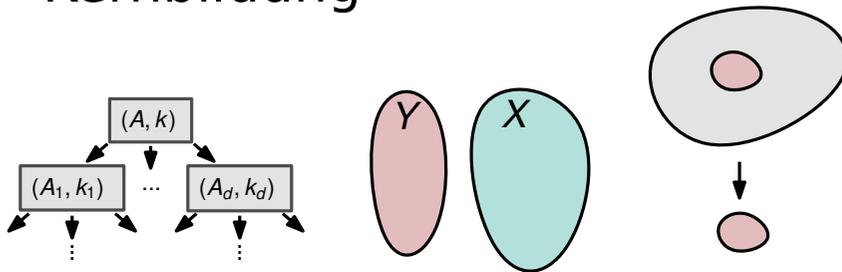
- Was ist das Problem?
- Warum würde es helfen, wenn jeder Baum in der Lösung wenige Blätter enthält?
- Welche Gegenbeispiele für diesen Wunsch gibt es und wie werden wir sie los?
- Wo muss man bei der Reduktion aufpassen?
- Wie hilft die amortisierte Sichtweise?



# Inhalt

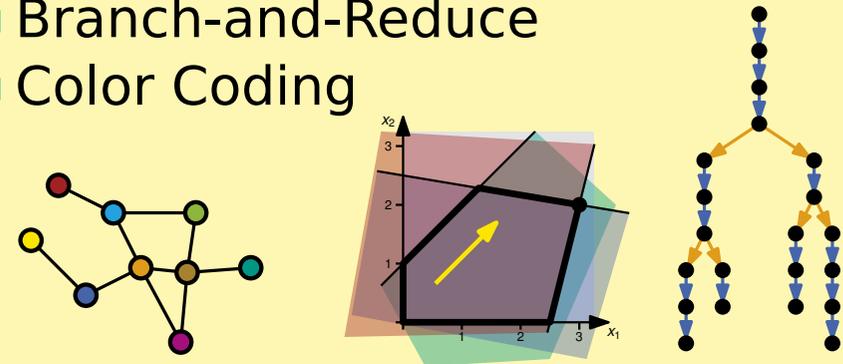
## Basic Toolbox

- beschränkte Suchbäume
- iterative Kompression
- Kernbildung



## Erweiterte Toolbox

- lineare Programme
- Branch-and-Reduce
- Color Coding



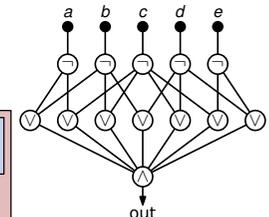
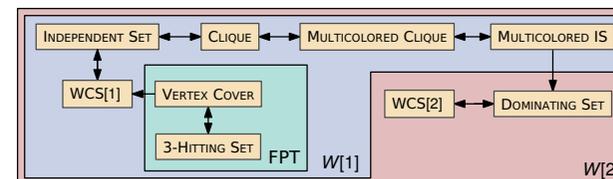
## Baumweite

- dynamische Programme
- chordale & planare Graphen
- Courcelles Theorem



## Untere Schranken

- parametrisierte Reduktionen
- boolesche Schaltkreise und die W-Hierarchie
- ETH und SETH



# Lineare Programmierung

## Grundlagen

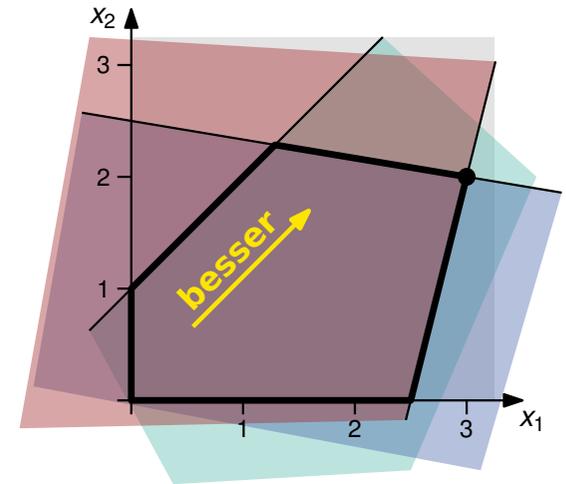
- Was ist lineare Programmierung?
- Welche Schreibweise wird für LPs verwendet?
- Wie lassen sich LPs umformen z.B. zu  $Ax \leq b$ ?
- Wie lässt sich manchmal ein Betrag durch lineare Bedingungen abbilden?

## Dualität

- Was bedeutet Dualität für LP?
- Was sagt der Dualitätssatz?
- Wofür ist Dualität nützlich?

## Theorem von Lenstra

- Was sagt uns Lenstras Theorem?
- Wie kann man damit einen FPT-Algorithmus für CLOSEST STRING bekommen?



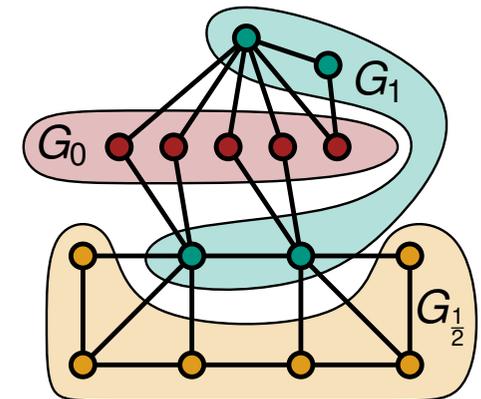
# ILP Relaxierung

## ILP

- Warum sind ILPs interessant?
- Was ist Relaxierung und was hat man davon?
- Wann ist Relaxierung exakt?

## Unimodularität

- Wie ist totale Unimodularität definiert?
- Wie beweist man totale Unimodularität?
- Beispiele total unimodularer Matrizen?



## Kernbildung für VERTEX COVER

- Welche Eigenschaften hat eine Optimallösung der Relaxierung?
- Wie bildet man mit einer LP Lösung einen Kern?
- Wie zeigt man, dass diese Reduktion sicher ist?
- Muss man wirklich ein LP lösen?

# Branch-and-Reduce

## Branch-and-Reduce

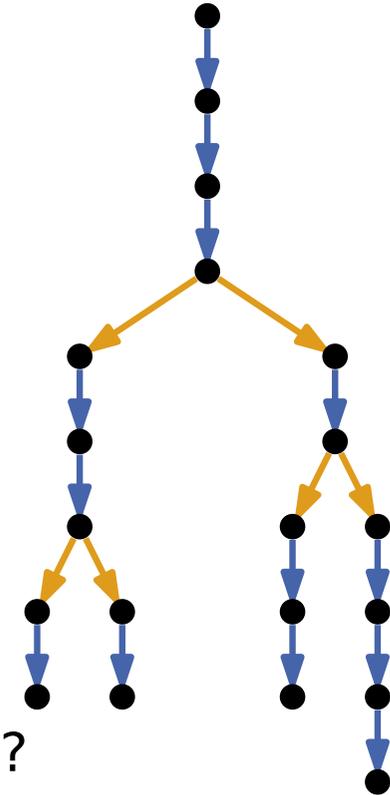
- Was versteht man unter diesem Begriff?

## Above Lower Bound Parametrisierung

- Welche Parameter werden hier betrachtet?
- Warum sind solche Parameter interessant?
- Beispiele für diese Parametrisierungen?

## VERTEX COVER above LP

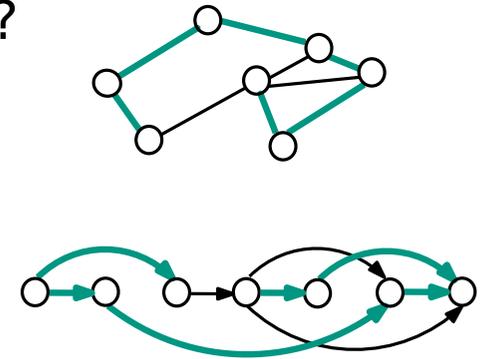
- Was ist die Grundidee zur Lösung dieses Problems?
- Warum braucht man hier Reduktion vor dem Branching?
- Wie funktioniert die Parameteranpassung?



# Color Coding

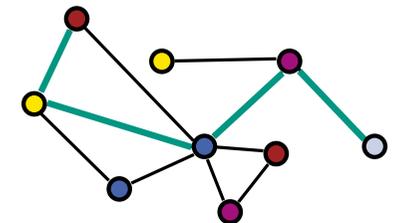
## LONGEST PATH: Randomisierung

- Welche zusätzliche Struktur haben wir uns geraten?
- Wie hilft diese zusätzliche Struktur beim Lösen?
- Was muss man über die Erfolgswahrscheinlichkeit zeigen, um FPT-Laufzeit zu erhalten?



## Color Coding

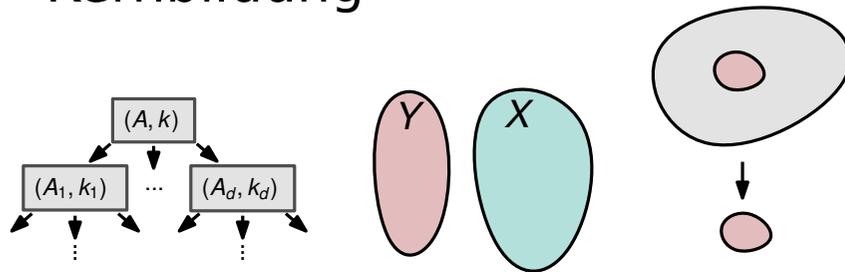
- Welche zusätzliche Struktur raten wir hier?
- Wie hilft uns das?
- Wie können wir das derandomisieren?
- Was sind perfekte Familien von Hash-Funktionen?
- Was sind universelle Mengen?



# Inhalt

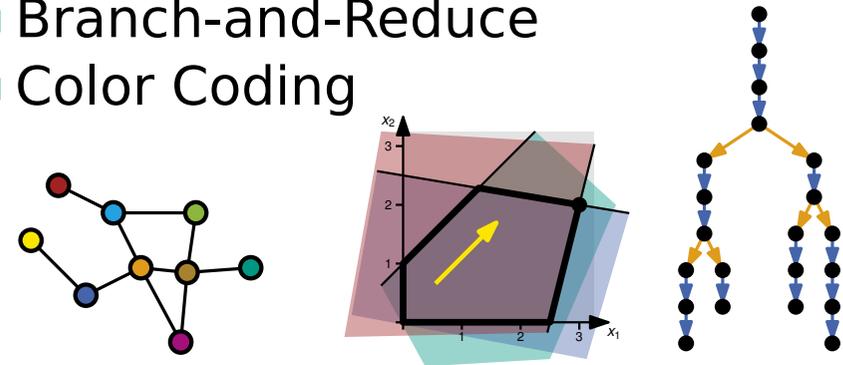
## Basic Toolbox

- beschränkte Suchbäume
- iterative Kompression
- Kernbildung



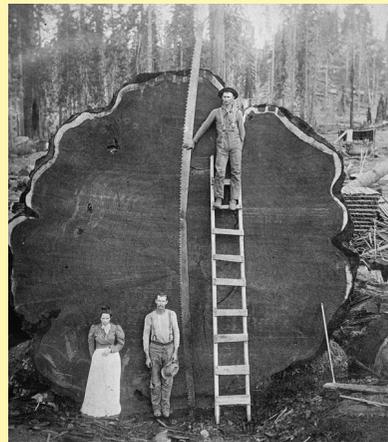
## Erweiterte Toolbox

- lineare Programme
- Branch-and-Reduce
- Color Coding



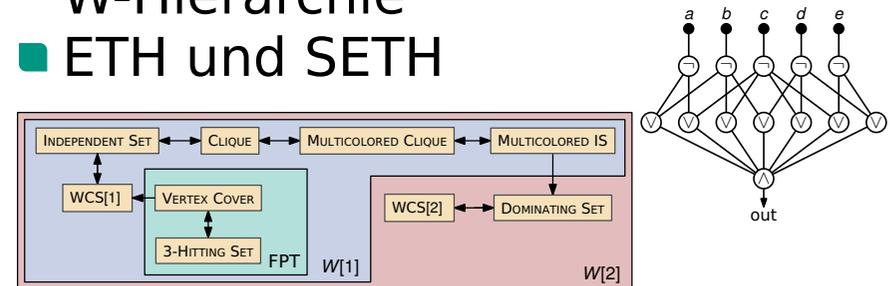
## Baumweite

- dynamische Programme
- chordale & planare Graphen
- Courcelles Theorem



## Untere Schranken

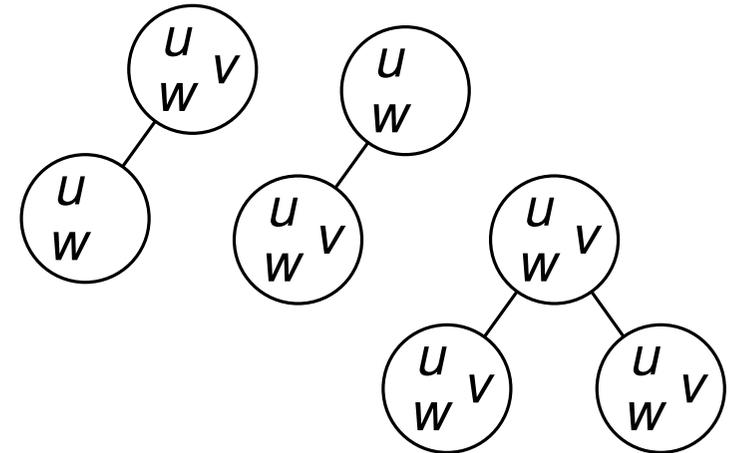
- parametrisierte Reduktionen
- boolesche Schaltkreise und die W-Hierarchie
- ETH und SETH



# Baumweite

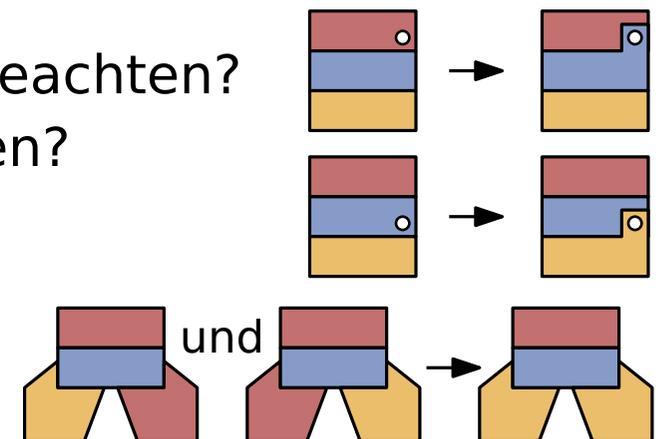
## Pfad- und Baumzerlegungen

- Was ist eine Pfad- bzw. Baumzerlegung?
- Was ist die Pfad- bzw. Baumweite?
- Wann ist eine Baumzerlegung schön?
- Warum kann man immer von schönen Baumzerlegungen ausgehen?



## Dynamische Programme

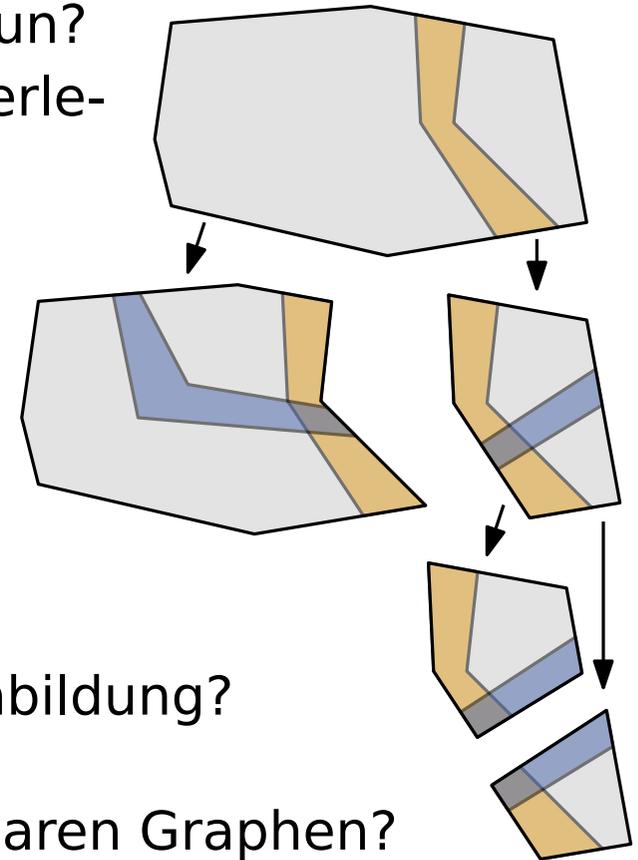
- Wie kann man Probleme mittels DP auf Baumzerlegungen bauen?
- Beispiele: INDEPENDENT SET und HAMILTONKREIS
- Wie schafft man es globale Bedingungen zu beachten?
- Kannst du das auf andere Probleme übertragen?



# Baumzerlegungen und planare Graphen

## Approximativer FPT-Algo für Baumzerlegungen

- Was heißt hier Approximation und was bedeutet das für unser DP?
- Was ist die Idee?
- Was hat das mit balancierten Separatoren zu tun?
- Warum können wir den Separator balanciert zerlegen, aber nicht den ganzen Graph?
- Warum genügt eine balancierte Aufteilung des Separators?
- Warum gibt es balancierte Separatoren?



## Win-Win in planaren Graphen

- Was sind Minoren?
- Was passiert mit der Baumweite unter Minorenbildung?
- Was hat das sonst mit der Baumweite zu tun?
- Wie hilft das für schnellere Algorithmen in planaren Graphen?

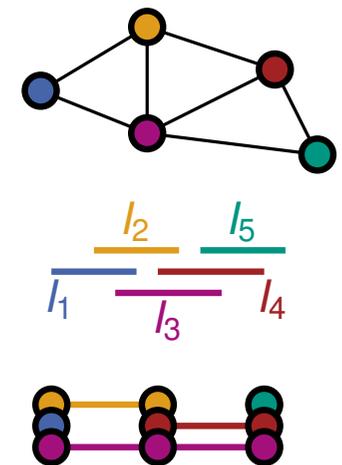
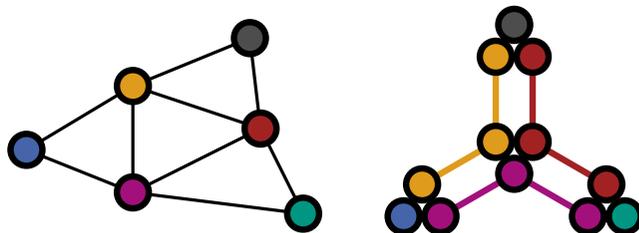
# Courcelle & Chordale Graphen

## Courcelles Theorem

- Was erlaubt  $\text{MSO}_2$ ?
- Wie kann man Zusammenhang modellieren?
- Modellierung von HAMILTONKREIS bzw. VERTEX COVER?
- Wie sieht es mit anderen Problemen aus?
- Was besagt Courcelles Theorem?
- Wozu brauchen wir die Optimierungsvariante?

## Chordale Graphen

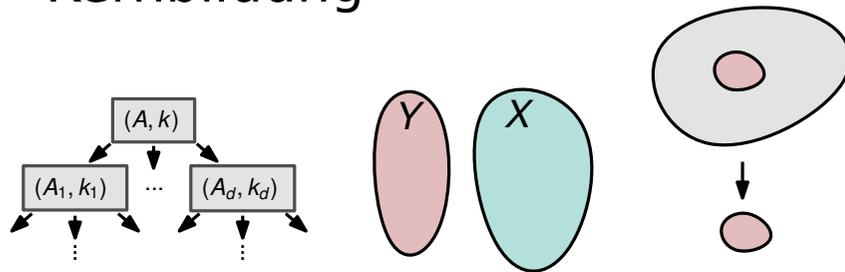
- Was sind Intervallgraphen bzw. chordale Graphen?
- Was ist die Intervallweite bzw. Chordalweite?
- Was hat das mit Pfadweite bzw. Baumweite zu tun?



# Inhalt

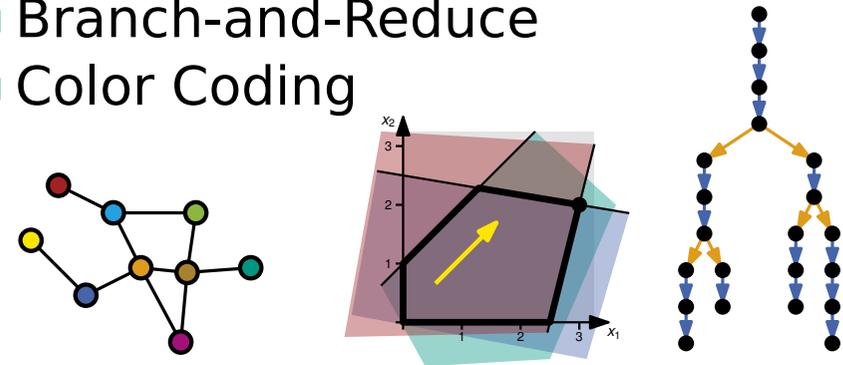
## Basic Toolbox

- beschränkte Suchbäume
- iterative Kompression
- Kernbildung



## Erweiterte Toolbox

- lineare Programme
- Branch-and-Reduce
- Color Coding



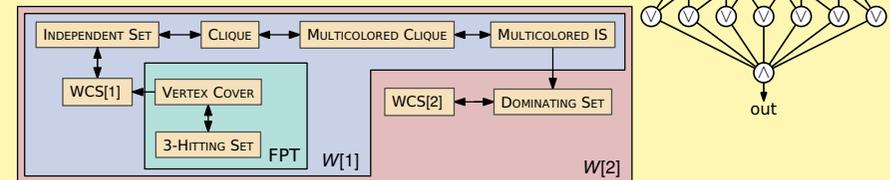
## Baumweite

- dynamische Programme
- chordale & planare Graphen
- Courcelles Theorem



## Untere Schranken

- parametrisierte Reduktionen
- boolesche Schaltkreise und die W-Hierarchie
- ETH und SETH



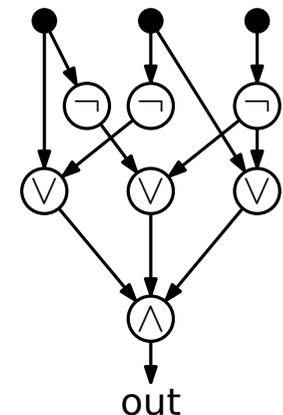
# W-Hierarchie

## Parametrisierte Reduktion

- Was ist eine parametrisierte Reduktion?
- Warum ist diese Reduktion so definiert?
- Reduktionen zwischen MULTICOLORED CLIQUE und CLIQUE?
- Weitere interessante Reduktionen?
  - MULTICOLORED IS  $\rightarrow$  DOMINATING SET
  - INDEPENDENT SET  $\rightarrow$  WEIGHTED CIRCUIT SATISFIABILITY
  - DOMINATING SET  $\rightarrow$  WEIGHTED CIRCUIT SATISFIABILITY

## W-Hierarchie

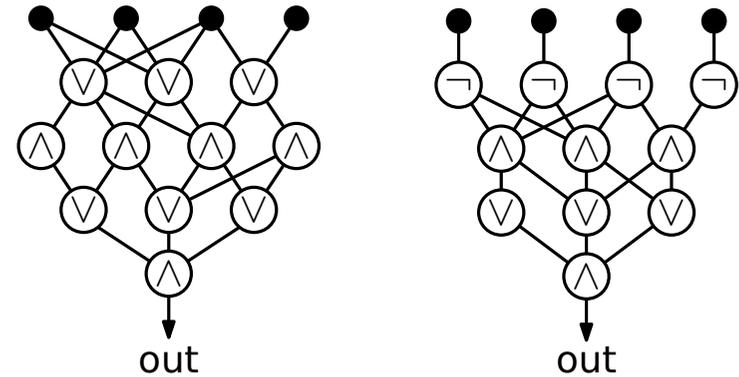
- Was ist WCS?
- Wie sind die Klassen der W-Hierarchie definiert?
- Wie zeigt man Härte/Zugehörigkeit zu  $W[t]$ ?
- Vollständige Probleme für  $W[1]$ ,  $W[2]$ ?
- Warum ist FPT eine Teilmenge von  $W[1]$ ?



# Relationale Datenbanken

## Normalisierte Schaltkreise

- Was sind normalisierte Schaltkreise?
- Monoton vs. antimonoton?
- Warum normalisieren wir?

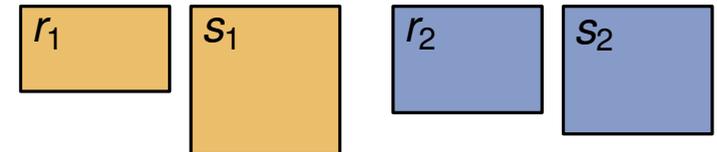


## UNIQUE

- Was ist das Problem?
- Wie reduziert man von und zu HITTING SET?

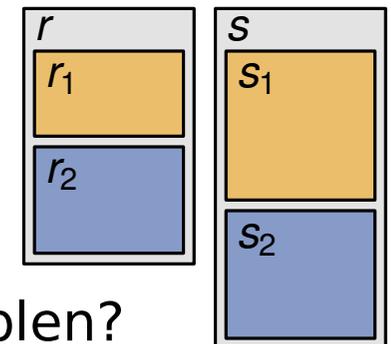
## FD

- Was sind funktionale Abhängigkeiten?
- Wie reduziert man das auf WCS[2]?



## IND<sub>FIXED</sub>

- Wie kann man das als Boolesche Funktionen auffassen?
- Wie kann man das verunden und warum hilft das?
- Was fehlt dann noch für die Reduktion von WANS[3]?
- Wie modellieren wir Disj. von Konj. von negierten Variablen?



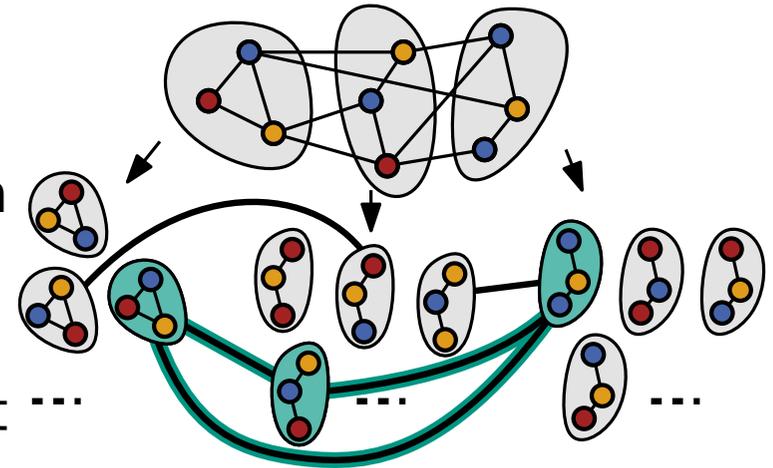
# ETH und SETH

## Grundlagen

- Was ist ETH? Was ist SETH?
- Wie verhalten sich die beiden zueinander?
- Wie erhält man untere Schranken für andere Probleme?
- Genügt dazu eine polynomielle Reduktion?

## Reduktionen so weit das Auge reicht

- Wie erhält man daraus untere Schranken für parametrisierte Probleme?
- Was bedeutet das für  $W[1]$  und FPT?
- Übertragung auf andere Probleme: genügt ... eine parametrisierte Reduktion?
- Was ist GRID TILING?
- Wie reduziert man CLIQUE auf GRID TILING?
- GRID TILING  $\rightarrow$  PLANAR LIST COLORING? Was passiert mit dem Parameter?
- GRID TILING  $\rightarrow$  UNIT DISK INDEPENDENT SET?



**Viel Erfolg!**