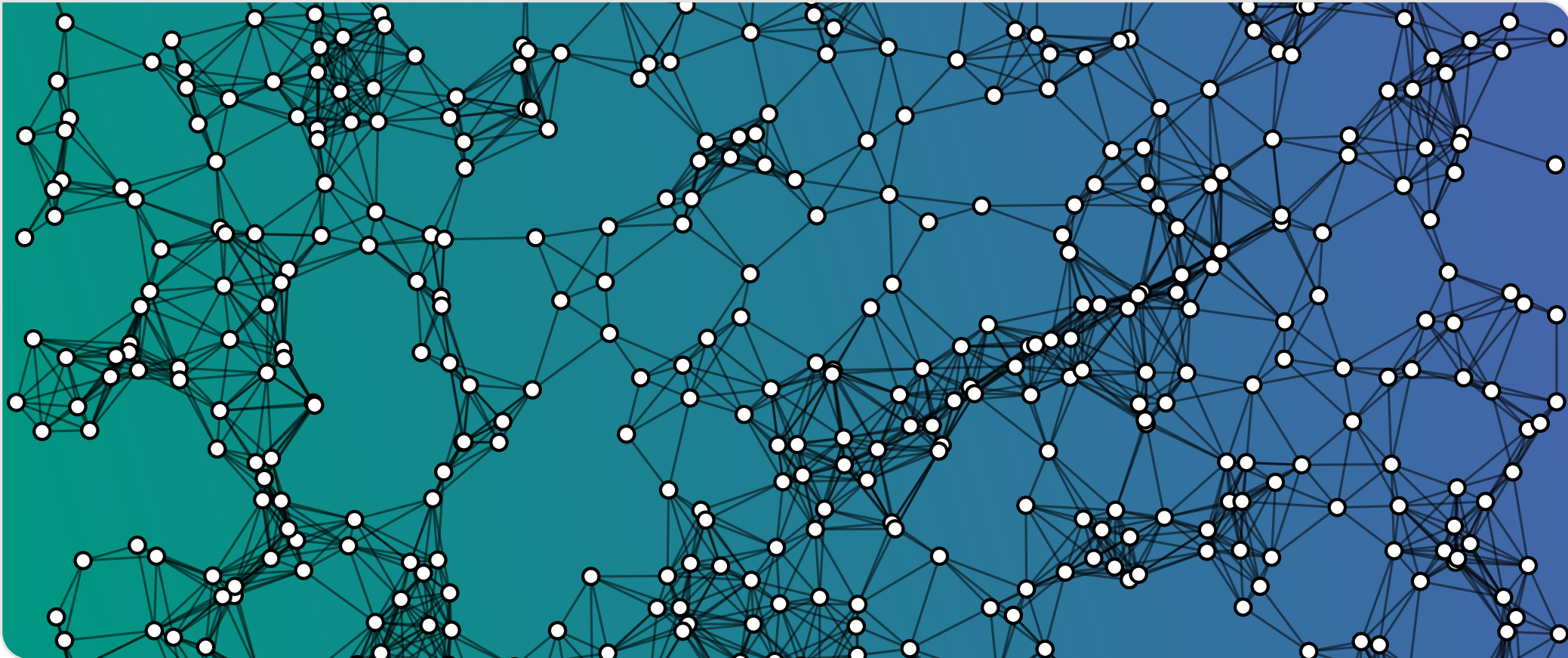


Parametrisierte Algorithmen

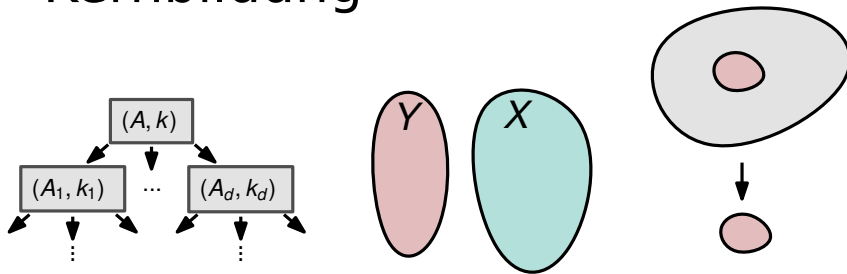
Untere Schranken: ETH und SETH



Inhalt

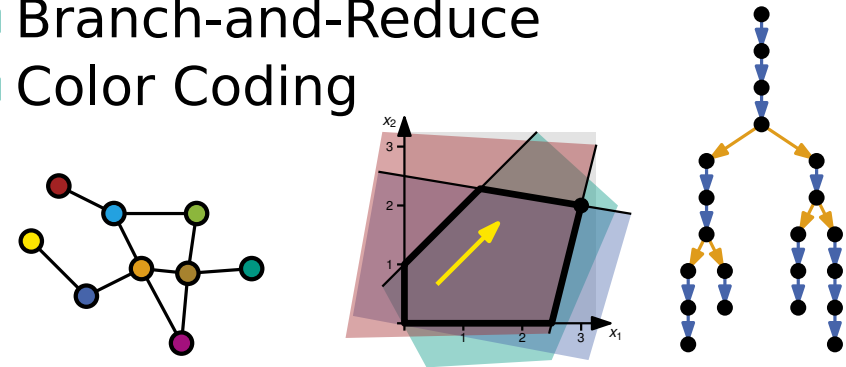
Basic Toolbox

- beschränkte Suchbäume
- iterative Kompression
- Kernbildung



Erweiterte Toolbox

- lineare Programme
- Branch-and-Reduce
- Color Coding



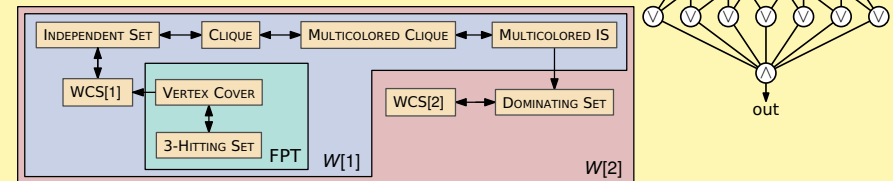
Baumweite

- dynamische Programme
- chordale & planare Graphen
- Courcelles Theorem



Untere Schranken

- parametrisierte Reduktionen
- boolesche Schaltkreise und die W-Hierarchie
- ETH und SETH



(Strong) Exponential-Time Hypothesis

Ziel

- $n^{\log \log k}$ ist zwar keine FPT-Laufzeit, aber deutlich besser als n^k
- zeige: $f(k) \cdot n^{o(k)}$ geht nicht für manche Probleme in $W[1]$
- wir brauchen dazu eine etwas stärkere Annahme als $FPT \neq W[1]$

Definition

Für $q \geq 2$, sei δ_q das Infimum aller $c \in \mathbb{R}$, für die es einen $O(2^{cn})$ Algorithmus für q -SAT mit n Variablen gibt.

Was wissen wir?

- $q = 2$: $\delta_q = 0$, denn $2\text{-SAT} \in P$ und $\text{poly}(n) \in O(2^{cn})$ für alle $c > 0$
- $q > 2$: $\delta_q \leq 1$, denn ein $O(2^n)$ -Algorithmus existiert für jedes q

ETH

Es gilt $\delta_3 > 0$.

Also: kein subexponentieller Algo für 3-SAT

Vermutung: die Hypothese stimmt

SETH

Es gilt $\lim_{q \rightarrow \infty} \delta_q = 1$.

Also: für SAT geht es nicht besser als Brute-Force

Vermutung: unklar, aber besserer Algorithmus würde einen sehr großen Durchbruch bedeuten

Ein paar Implikationen

Theorem: SETH impliziert ETH.

ETH: kein subexponentieller Algo für 3-SAT
SETH: für SAT geht es nicht besser als 2^n

Beweisidee

- reduziere q -SAT auf 3-SAT
- zeige: die Formel wird nicht so viel größer, dass aus etwas subexponentiellen etwas exponentielles wird

Theorem: ETH impliziert $FPT \neq W[1]$.

Beweisidee

- zeige später: untere Schranke von $n^{\Omega(k)}$ für ein Problem in $W[1]$ (basierend auf ETH)
- das impliziert direkt $FPT \neq W[1]$

Theorem

ETH impliziert, dass es für VERTEX COVER, DOMINATING SET, FEEDBACK VERTEX SET, 3-COLORING und HAMILTONIAN CYCLE keinen $2^{o(n+m)}$ -Algorithmus gibt.

Beweisidee

- lineare Reduktionen von 3-SAT auf diese Probleme

ETH und Parametrisierung

Was haben wir?

- untere Schranken der Form $2^{\Omega(n+m)}$

Was wollen wir?

- untere Schranken der Form $f(k) \cdot n^{\Omega(k)}$ (für ein parametrisiertes Problem)

Grundsätzlicher Plan

- reduziere ein „normales“ Problem auf ein parametrisiertes
- lasse das Zielproblem k Teillösungen „auswählen“
- verstecke damit einen Teil der Eingabgröße in dem Parameter

Von welchem Problem transformieren wir?

- sollte möglichst keine „Ausgabegröße“ haben: wir wollen nicht in Versuchung geraten, es parametrisiert zu betrachten
- Kombinierbarkeit lokaler Teillösungen: überlasse die Auswahl von k Teillösungen aus k Teilgraphen dem Zielproblem
- 3-COLORING bietet sich an

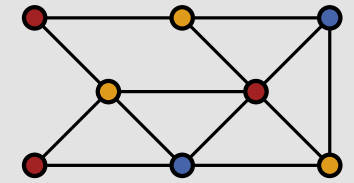
Theorem

ETH impliziert, dass es für VERTEX COVER, DOMINATING SET, FEEDBACK VERTEX SET, 3-COLORING und HAMILTONIAN CYCLE keinen $2^{o(n+m)}$ -Algorithmus gibt.

Auswahl geeigneter Teillösungen

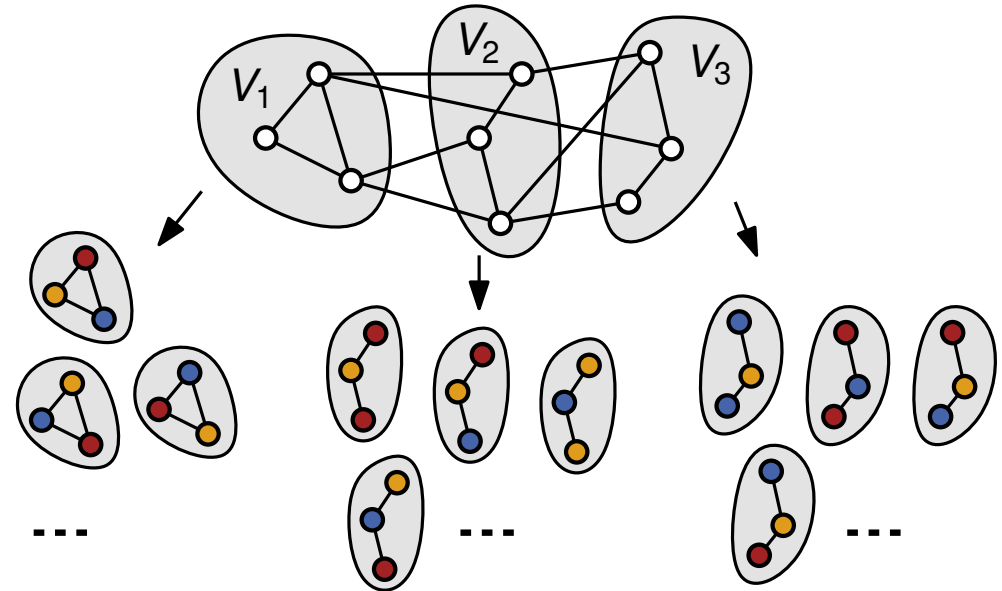
Problem: 3-COLORING

Färbe die Knoten eines Graphen mit drei Farben, sodass benachbarte Knoten unterschiedliche Farben haben.



Teillösungen

- partitioniere $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$
- betrachte Menge C_i aller 3-Färbungen für $G[V_i]$
- wähle für jedes i eine Färbung $c_i \in C_i$, sodass je zwei c_i und c_j zusammenpassen



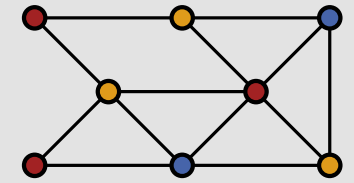
Interpretation

- einen Teil der Schwierigkeit verstecken wir in der Problemgröße (wir zählen viele Färbungen auf)
- einen anderen Teil in der Auswahl von k passenden Teilfärbungen

Auswahl geeigneter Teillösungen

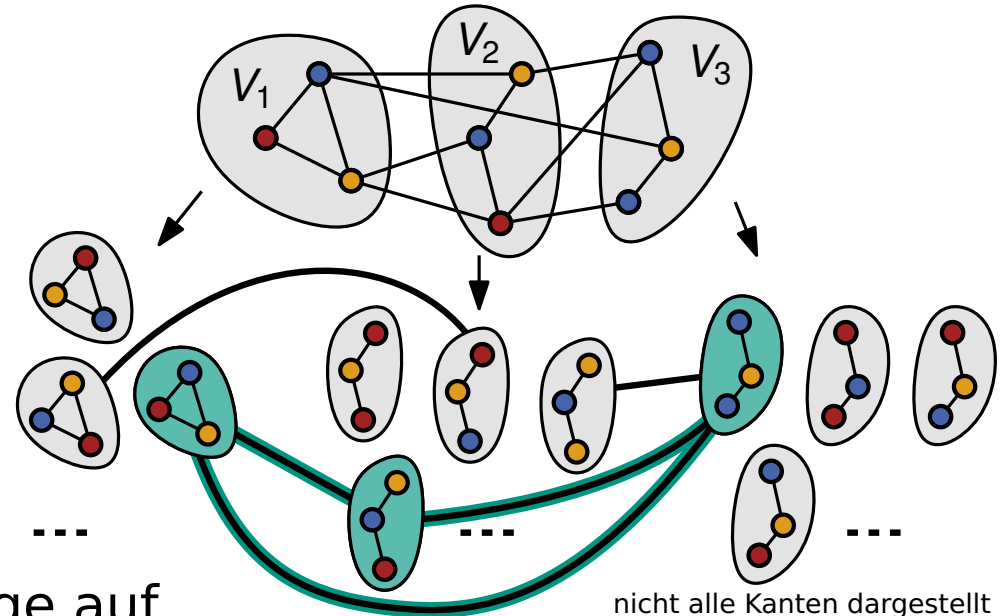
Problem: 3-COLORING

Färbe die Knoten eines Graphen mit drei Farben, sodass benachbarte Knoten unterschiedliche Farben haben.



Teillösungen

- partitioniere $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$
- betrachte Menge C_i aller 3-Färbungen für $G[V_i]$
- wähle für jedes i eine Färbung $c_i \in C_i$, sodass je zwei c_i und c_j zusammenpassen



nicht alle Kanten dargestellt

Andere Sichtweise

- fasse $C_1 \cup \dots \cup C_k$ als Knotenmenge auf
- füge Kante $\{c_i, c_j\}$ ein, wenn c_i und c_j zusammenpassen ($c_i \in C_i, c_j \in C_j$)

Lemma

Der resultierende Graph mit $3^{\frac{n}{k}} \cdot k$ Knoten hat eine Clique der Größe k genau dann, wenn G 3-färbbar ist.

Eine untere Schranke für Clique

Lemma

Der resultierend Graph mit $3^{\frac{n}{k}} \cdot k$ Knoten hat eine Clique der Größe k genau dann, wenn G 3-färbbar ist.

Annahme: es gibt einen $f(k) \cdot n_c^{o(k)}$ -Algorithmus für CLIQUE
 ($n_c = 3^{\frac{n}{k}} = \#$ Knoten in der CLIQUE-Instanz)

Resultierende Laufzeit für 3-COLORING

$f(k) \cdot 3^{\frac{n}{k} \cdot o(k)}$ (Ziel: wähle k so, dass die Laufzeit in $2^{o(n)}$ liegt)

■ erster Versuch: $k = n \rightarrow f(n) \cdot 3^{\frac{n}{n} \cdot o(n)}$
 potentiell zu groß klein genug

Theorem

ETH impliziert, dass es für 3-COLORING keinen $2^{o(n+m)}$ -Algorithmus gibt.

■ zweiter Versuch: k konstant

Achtung: $o(k)$ wird nicht zu $o(1)$

($o(k)$ wächst sublinear mit wachsendem k ; wenn k nicht wächst, dann ist auch $o(k)$ konstant (und insbesondere nicht fallend bezüglich n))

■ dritter Versuch: $k = g(n) = f^{-1}(n) \rightarrow n \cdot 3^{\frac{n}{g(n)} \cdot o(g(n))} \leq 2^{o(n)}$

(wir können annehmen, dass $g(n)$ streng monoton wächst)

Theorem

ETH impliziert, dass es keinen $f(k) \cdot n^{o(k)}$ -Algorithmus für CLIQUE gibt.

Implikationen

Theorem

ETH impliziert, dass es keinen $f(k) \cdot n^{o(k)}$ -Algorithmus für CLIQUE gibt.

Mehr untere Schranken

- parametrisierte Reduktionen von CLIQUE liefern untere Schranken für andere Probleme
- einfachstes Beispiel: ETH \Rightarrow INDEPENDENT SET hat keinen $f(k)n^{o(k)}$ -Algo
- gilt ebenfalls für MULTICOLORED CLIQUE, MULTICOLORED INDEPENDENT SET, DOMINATING SET, CONNECTED DOMINATING SET, ...
- **Achtung:** man muss bei der Reduktion aufpassen, ob sich der Parameter verändert

Die W-Hierarchie

- wir erhalten:

Theorem: ETH impliziert $FPT \neq W[1]$.

Gleich

- weitere (leicht anders geartete) Implikationen
- wichtiges Zwischenproblem: GRID TILING

GRID TILING

Problem: GRID TILING

 $([n] = [1, n])$

Gegeben sei eine $k \times k$ Matrix an Mengen $S_{i,j}$, wobei $S_{i,j} \subseteq [n] \times [n]$. Wähle für jede Zelle ein $s_{i,j} \in S_{i,j}$, sodass $s_{i,j}$ und $s_{i+1,j}$ bzw. $s_{i,j}$ und $s_{i,j+1}$ sich in der ersten bzw. in der zweiten Koordinate nicht unterscheiden.

Beispiel

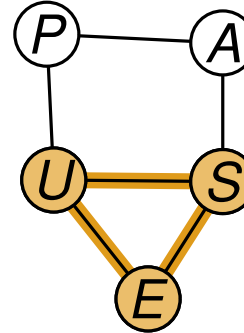
- $k = 3$ und $n = 5$

$S_{1,1}$ (1, 1) (3, 1) (2, 4)	$S_{1,2}$ (5, 1) (1, 4) (5, 3)	$S_{1,3}$ (1, 1) (2, 4) (3, 3)
$S_{2,1}$ (2, 2) (1, 4)	$S_{2,2}$ (3, 1) (1, 2)	$S_{2,3}$ (2, 2) (2, 3)
$S_{3,1}$ (1, 3) (2, 3) (3, 3)	$S_{3,2}$ (1, 1) (1, 3)	$S_{3,3}$ (2, 3) (5, 3)

Was ist hier passiert?

Ist die GRID TILING-Instanz lösbar? Was bedeutet das für den Graphen?

- eine 3-Clique in G liefert eine Lösung für GRID TILING
- Umkehrung gilt auch Warum?



Beachte

- $n = \# \text{Knoten}$, $k = \text{Cliquengröße}$
- wir haben also eine parametrisierte Reduktion von CLIQUE ZU GRID TILING
- Parameter k überträgt sich linear

(P, P) (A, A) (U, U) (S, S) (E, E)	(A, P) (U, P) (S, A) (S, U) (E, U) (E, S)	(A, P) (U, P) (S, A) (S, U) (E, U) (E, S)
(P, A) (P, U) (A, S) (U, S) (U, E) (S, E)	(P, P) (A, A) (U, U) (S, S) (E, E)	(A, P) (U, P) (S, A) (S, U) (E, U) (E, S)
(P, A) (P, U) (A, S) (U, S) (U, E) (S, E)	(P, A) (P, U) (A, S) (U, S) (U, E) (S, E)	(P, P) (A, A) (U, U) (S, S) (E, E)

Theorem

ETH impliziert, dass es keinen $f(k) \cdot n^{o(k)}$ -Algorithmus für GRID TILING gibt (außerdem ist es $W[1]$ -schwer).

Problem: GRID TILING

Gegeben sei eine $k \times k$ Matrix an Mengen $S_{i,j}$, wobei $S_{i,j} \subseteq [n] \times [n]$. Wähle für jede Zelle ein $s_{i,j} \in S_{i,j}$, sodass $s_{i,j}$ und $s_{i+1,j}$ bzw. $s_{i,j}$ und $s_{i,j+1}$ sich in der ersten bzw. in der zweiten Koordinate nicht unterscheiden.

$S_{1,1}$ $(1, 1)$ $(3, 1)$ $(2, 4)$	$S_{1,2}$ $(5, 1)$ $(1, 4)$ $(5, 3)$	$S_{1,3}$ $(1, 1)$ $(2, 4)$ $(3, 3)$
$S_{2,1}$ $(2, 2)$ $(1, 4)$	$S_{2,2}$ $(3, 1)$ $(1, 2)$	$S_{2,3}$ $(2, 2)$ $(2, 3)$
$S_{3,1}$ $(1, 3)$ $(2, 3)$ $(3, 3)$	$S_{3,2}$ $(1, 1)$ $(1, 3)$	$S_{3,3}$ $(2, 3)$ $(5, 3)$

Anmerkungen zu GRID TILING

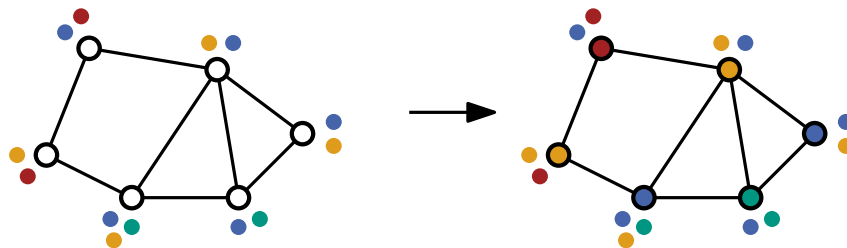
Reduktionen von GRID TILING

- die grobe Struktur von GRID TILING ist ein Gitter
 - alle Bedingungen sind lokal: nur zwischen benachbarten Zellen
 - die Bedingungen sind sehr einfach: Gleichheit in einer Koordinate
- ⇒ GRID TILING eignet sich gut um Schwere auf planaren Graphen zu zeigen

Problem: PLANAR LIST COLORING

Gegeben sei ein planarer Graph und eine Liste von Farben für jeden Knoten. Wähle für jeden Knoten eine Farbe aus seiner Liste, sodass benachbarte Knoten unterschiedlich gefärbt sind.

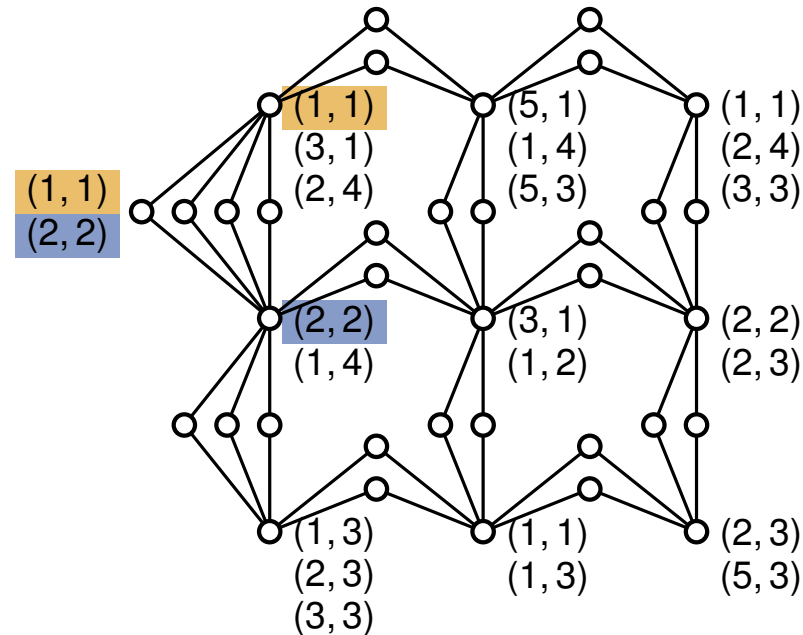
Beispiel



Ziel: reduziere GRID TILING auf PLANAR LIST COLORING

GRID TILING \rightarrow PLANAR LIST COLORING

$S_{1,1}$ $(1, 1)$ $(3, 1)$ $(2, 4)$	$S_{1,2}$ $(5, 1)$ $(1, 4)$ $(5, 3)$	$S_{1,3}$ $(1, 1)$ $(2, 4)$ $(3, 3)$
$S_{2,1}$ $(2, 2)$ $(1, 4)$	$S_{2,2}$ $(3, 1)$ $(1, 2)$	$S_{2,3}$ $(2, 2)$ $(2, 3)$
$S_{3,1}$ $(1, 3)$ $(2, 3)$ $(3, 3)$	$S_{3,2}$ $(1, 1)$ $(1, 3)$	$S_{3,3}$ $(2, 3)$ $(5, 3)$



Wahl der Knoten und Farben

- naheliegender Versuch: ein Knoten pro Zelle, eine Farbe pro Paar

Verbiere gewisse Farbwahlen

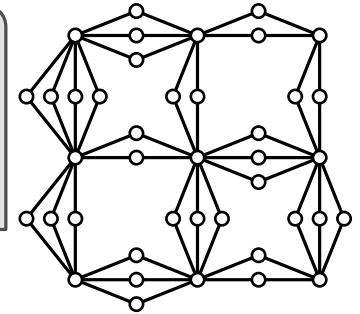
- verhindere, dass $(1, 1)$ für $S_{1,1}$ und $(2, 2)$ für $S_{2,1}$ ausgewählt wird
- verbinde beide mit neuem Knoten mit den Farben $(1, 1)$ und $(2, 2)$
- analoges Vorgehen für alle unerwünschten Paare

Beachte: Graph ist planar und die Instanzen sind äquivalent

Was zeigen wir hier eigentlich?

Theorem

ETH impliziert, dass es keinen $f(k) \cdot n^{o(k)}$ -Algorithmus für PLANAR LIST COLORING gibt (außerdem ist es $W[1]$ -schwer).



Für welchen Parameter k ?

- Beobachtung: der resultierende Graph hat Baumweite k
- das Theorem gilt also für die Parametrisierung mittels Baumweite

Warum?

Kann man LIST COLORING nicht mittels DP auf einer Baumzerlegung lösen?

Antwort: doch, aber es ist zu langsam

Theorem

ETH impliziert, dass es keinen $f(k) \cdot n^{o(k)}$ -Algorithmus für GRID TILING gibt (außerdem ist es $W[1]$ -schwer).

Erinnerung

- k war die Gittergröße

Relaxiertes GRID TILING

Problem: GRID TILING WITH \leq

$([n] = [1, n])$

Gegeben sei eine $k \times k$ Matrix an Mengen $S_{i,j}$, wobei $S_{i,j} \subseteq [n] \times [n]$. Wähle für jede Zelle ein $s_{i,j} \in S_{i,j}$, sodass für jede Spalte bzw. Zeile die ersten bzw. zweiten Koordinaten nicht-absteigend sortiert sind.

Beispiel

- $k = 3$ und $n = 5$

Beachte

- die Instanzen von GRID TILING und GRID TILING WITH \leq sind gleich
- jede Lösung von GRID TILING löst auch GRID TILING WITH \leq , aber nicht umgekehrt
- das heißt aber nicht, dass GRID TILING WITH \leq leichter zu lösen ist

$S_{1,1}$ $(1, 1)$ $(3, 1)$ $(2, 4)$	$S_{1,2}$ $(5, 1)$ $(1, 4)$ $(5, 3)$	$S_{1,3}$ $(1, 1)$ $(2, 4)$ $(3, 3)$
$S_{2,1}$ $(2, 2)$ $(1, 4)$	$S_{2,2}$ $(3, 1)$ $(1, 2)$	$S_{2,3}$ $(2, 2)$ $(2, 3)$
$S_{3,1}$ $(1, 3)$ $(2, 3)$ $(3, 3)$	$S_{3,2}$ $(1, 1)$ $(1, 3)$	$S_{3,3}$ $(2, 3)$ $(5, 3)$

Theorem

(ohne Beweis)

ETH impliziert, dass es keinen $f(k) \cdot n^{o(k)}$ -Algorithmus für GRID TILING WITH \leq gibt (außerdem ist es $W[1]$ -schwer).

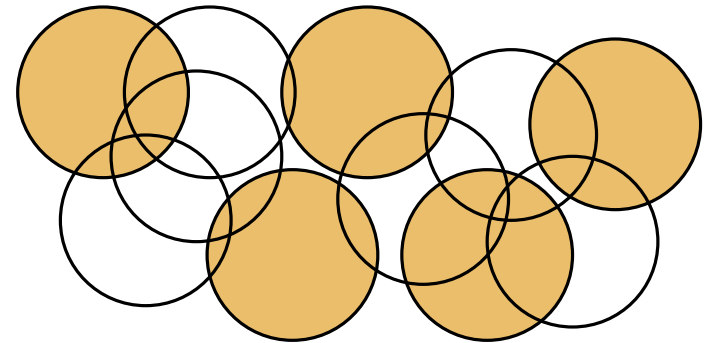
Unabhängige Einheitskreise

Problem: UNIT DISK INDEPENDENT SET

Gegeben sei eine Menge von Kreisen mit Radius 1 und ein Parameter k .
Gibt es unter ihnen k disjunkte Kreise?

Beispiel

- gibt es $k = 6$ disjunkte Kreise?
- nein, 5 ist das Maximum



Beachte

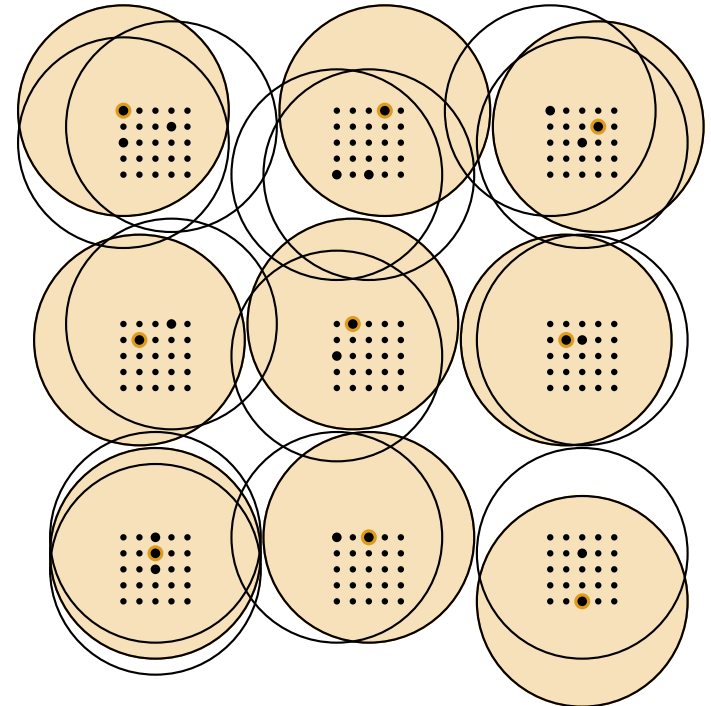
- äquivalent zu INDEPENDENT SET eingeschränkt auf „unit disk graphs“
- also potentiell echt leichter als INDEPENDENT SET
- tatsächlich: UNIT DISK INDEPENDENT SET kann in $n^{O(\sqrt{k})}$ gelöst werden
(untere Schranke für allgemeines IS (basierend auf ETH): $n^{\Omega(k)}$)

Ziel im Folgenden

- zeige, dass es auch nicht besser geht (untere Schranke: $n^{\Omega(\sqrt{k})}$)
- reduziere von GRID TILING WITH \leq

Untere Schranke für UNIT DISK IS

$S_{1,1}$ (1, 1) (3, 1) (2, 4)	$S_{1,2}$ (5, 1) (1, 4) (5, 3)	$S_{1,3}$ (1, 1) (2, 4) (3, 3)
$S_{2,1}$ (2, 2) (1, 4)	$S_{2,2}$ (3, 1) (1, 2)	$S_{2,3}$ (2, 2) (2, 3)
$S_{3,1}$ (1, 3) (2, 3) (3, 3)	$S_{3,2}$ (1, 1) (1, 3)	$S_{3,3}$ (2, 3) (5, 3)



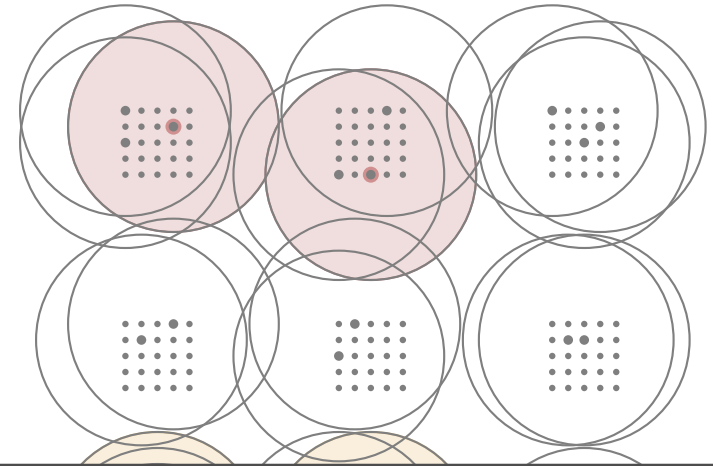
Plan: erstelle Instanz von UNIT DISK INDEPENDENT SET, die Lösung der Größe k^2 hat \Leftrightarrow GRID TILING WITH \leq hat Lösung (im Beispiel ist $k = 3$)

Idee

- ein Kreis für jedes Paar
- Kreise von Paaren aus der gleichen Zelle schneiden sich immer
- Kreise von Paaren aus benachbarten Zellen schneiden sich, wenn die entsprechende Koordinate kleiner wird

Untere Schranke für UNIT DISK IS

$S_{1,1}$ (1, 1) (3, 1) (2, 4)	$S_{1,2}$ (5, 1) (1, 4) (5, 3)	$S_{1,3}$ (1, 1) (2, 4) (3, 3)
$S_{2,1}$ (2, 2) (1, 4)	$S_{2,2}$ (3, 1) (1, 2)	$S_{2,3}$ (2, 2) (2, 3)



Theorem

ETH impliziert, dass es keinen $f(k) \cdot n^{o(\sqrt{k})}$ -Algorithmus für UNIT DISK INDEPENDENT SET gibt (außerdem ist es $W[1]$ -schwer).

Plan: erstelle Instanz von UNIT DISK INDEPENDENT SET, die Lösung der Größe k^2 hat \Leftrightarrow GRID TILING WITH \leq hat Lösung (im Beispiel ist $k = 3$)

Idee

- ein Kreis für jedes Paar
- Kreise von Paaren aus der gleichen Zelle schneiden sich immer
- Kreise von Paaren aus benachbarten Zellen schneiden sich, wenn die entsprechende Koordinate kleiner wird

Zusammenfassung & Ausblick

Untere Schranken

- Überraschung: stärkere Annahme (ETH statt $FPT \neq W[1]$) liefern stärkere untere Schranken ($f(k)n^{\Omega(k)}$ statt $f(k)n^{\Omega(1)}$)
- Übertragung von Schranken der Form $2^{\Omega(n)}$ (für 3-COLORING) auf parametrisierte Schranken der Form $f(k)n^{\Omega(k)}$ (für CLIQUE)
- liefert feinere Unterteilung von $W[1]$

GRID TILING

- eignet sich gut als Startproblem für Reduktionen
- vor allem dann, wenn das Zielproblem geometrischer Natur

Feinere Unterteilung von FPT

- Erinnerung: Problem ist FPT \Leftrightarrow es gibt Kernbildungsalgo
- untere Schranken für die Kerngröße unterteilen die Klasse FPT
- Beispiel: polynomieller Kernbildungsalgo für VERTEX COVER mit Kerngröße $O(k^{2-\epsilon}) \Rightarrow NP \subseteq \text{coNP}/\text{poly}$

Untere Schranken in P

- Beispiel: SETH \Rightarrow kein subquadratischer Algo für ORTHOGONAL VECTORS
- Stichwort: Fine-Grained Complexity Theory