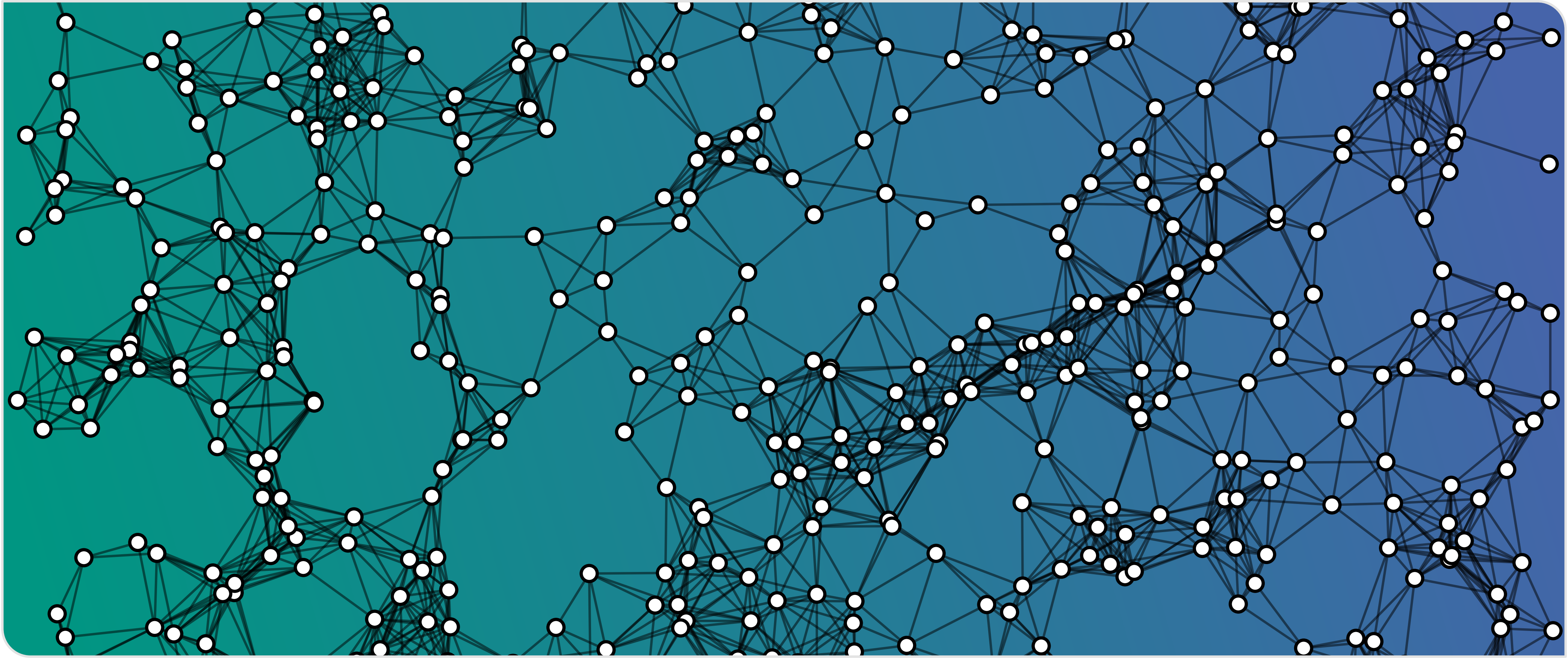
Karlsruher Institut für Technologie

Parametrisierte Algorithmen

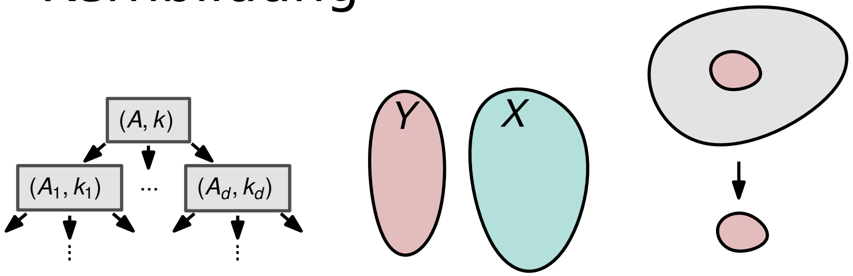
Untere Schranken: parametrisierte Komplexität und Datenbanken



Inhalt

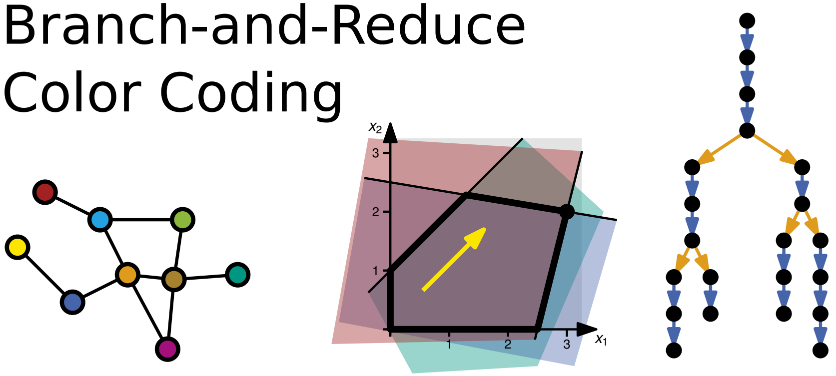
Basic Toolbox

- beschränkte Suchbäume
- iterative Kompression
- Kernbildung



Erweiterte Toolbox

- lineare Programme
- Branch-and-Reduce
- Color Coding

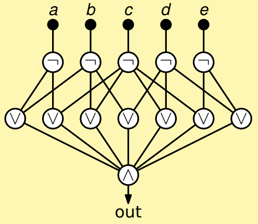


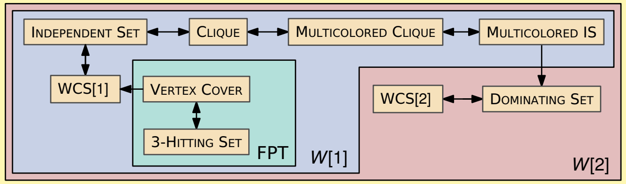
Baumweite

- dynamische Programme
- chordale & planare Graphen
- Courcelles Theorem

Untere Schranken

- parametrisierte Reduktionen
- boolesche Schaltkreise und die W-Hierarchie
- ETH und SETH





INDEPENDENT SET

CLIQUE

MULTICOLORED CLIQUE

MULTICOLORED IS

WCS[1]

VERTEX COVER

3-HITTING SET

FPT

$W[1]$

WCS[2]

DOMINATING SET

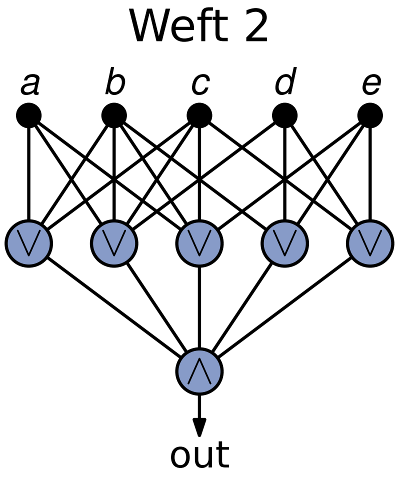
$W[2]$

Wiederholung: Boolesche Schaltkreise

Definition
Der **Weft** eines Booleschen Schaltkreises ist die maximale Anzahl an Knoten mit Eingangsgrad > 2 auf einem gerichteten Pfad.

Problem
WCS[$\boldsymbol{t}$] ist WCS eingeschränkt auf Schaltkreise mit konstanter Tiefe und Weft maximal t.

Definition
Die Klasse $\boldsymbol{W}[\boldsymbol{t}]$ enthält die Probleme, die eine parametrisierte Reduktion auf WCS[t] zulassen.

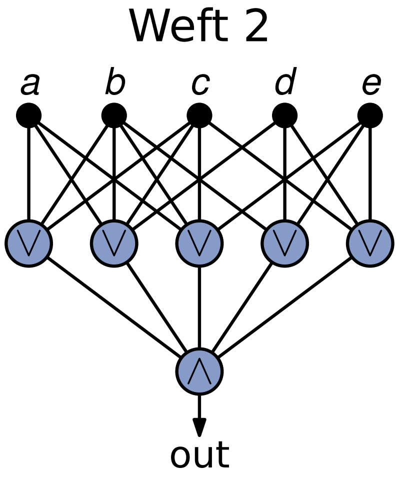


Wiederholung: Boolesche Schaltkreise

Definition
Der **Weft** eines Booleschen Schaltkreises ist die maximale Anzahl an Knoten mit Eingangsgrad > 2 auf einem gerichteten Pfad.

Problem
WCS$[\boldsymbol{t}]$ ist WCS eingeschränkt auf Schaltkreise mit konstanter Tiefe und Weft maximal t.

Definition
Die Klasse $\boldsymbol{W}[\boldsymbol{t}]$ enthält die Probleme, die eine parametrisierte Reduktion auf WCS$[t]$ zulassen.



Bemerkungen

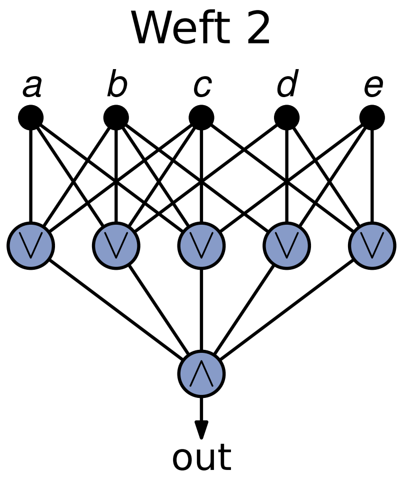
- Problem $\mathcal{L}$ ist $W[t]$-vollständig, wenn
  - $\mathcal{L} \in W[t]$
  - $\mathcal{L}$ $W[t]$-schwer (jedes $\mathcal{L}' \in W[t]$ lässt sich parametrisiert auf $\mathcal{L}$ reduzieren)

Wiederholung: Boolesche Schaltkreise

Definition
Der **Weft** eines Booleschen Schaltkreises ist die maximale Anzahl an Knoten mit Eingangsgrad > 2 auf einem gerichteten Pfad.

Problem
WCS[*t*] ist WCS eingeschränkt auf Schaltkreise mit konstanter Tiefe und Weft maximal t.

Definition
Die Klasse ***W*[*t*]** enthält die Probleme, die eine parametrisierte Reduktion auf WCS[t] zulassen.



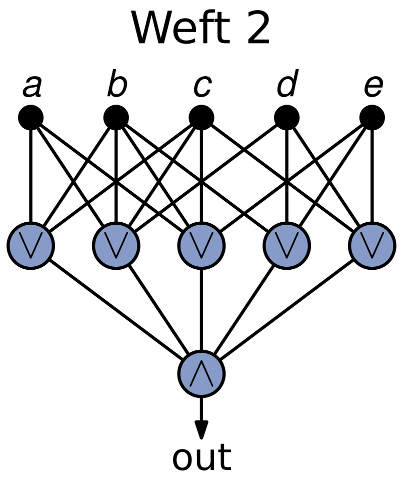
Bemerkungen

- Problem $\mathcal{L}$ ist $W[t]$-vollständig, wenn
  - $\mathcal{L} \in W[t]$
  - $\mathcal{L}$ $W[t]$-schwer (jedes $\mathcal{L}' \in W[t]$ lässt sich parametrisiert auf $\mathcal{L}$ reduzieren)
- WCS[t] ist per Definition $W[t]$-vollständig

Wiederholung: Boolesche Schaltkreise

Definition
Der **Weft** eines Booleschen Schaltkreises ist die maximale Anzahl an Knoten mit Eingangsgrad > 2 auf einem gerichteten Pfad.

Problem
WCS$[\boldsymbol{t}]$ ist WCS eingeschränkt auf Schaltkreise mit konstanter Tiefe und Weft maximal t.



Definition
Die Klasse $\boldsymbol{W}[\boldsymbol{t}]$ enthält die Probleme, die eine parametrisierte Reduktion auf WCS$[t]$ zulassen.

Bemerkungen

- Problem $\mathcal{L}$ ist $W[t]$-vollständig, wenn
    - $\mathcal{L} \in W[t]$
    - $\mathcal{L}$ $W[t]$-schwer (jedes $\mathcal{L}' \in W[t]$ lässt sich parametrisiert auf $\mathcal{L}$ reduzieren)
- WCS$[t]$ ist per Definition $W[t]$-vollständig
- Vermutung: FPT $\subset W[1] \subset W[2] \subset W[3] \subset \cdots$

Leichte und schwere Reduktionen

Wie zeigen wir $W[t]$-Vollständigkeit?

- reduziere auf und von anderem vollständigen Problem

Leichte und schwere Reduktionen

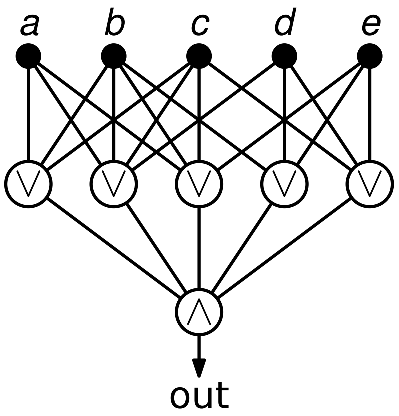
Wie zeigen wir $W[t]$-Vollständigkeit?

- reduziere auf und von anderem vollständigen Problem
- für $W[1]$: Independent Set oder Clique
- für $W[2]$: Dominating Set oder Hitting Set

Leichte und schwere Reduktionen

Wie zeigen wir $W[t]$-Vollständigkeit?

- reduziere auf und von anderem vollständigen Problem
- für $W[1]$: INDEPENDENT SET oder CLIQUE
- für $W[2]$: DOMINATING SET oder HITTING SET
- für $t > 2$: hier haben wir nur WCS[t] zur Verfügung



Leichte und schwere Reduktionen

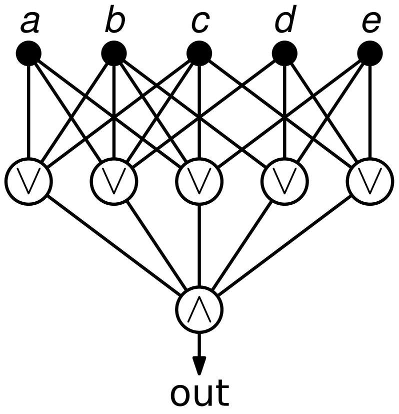
Wie zeigen wir $W[t]$-Vollständigkeit?

- reduziere auf und von anderem vollständigen Problem
- für $W[1]$: Independent Set oder Clique
- für $W[2]$: Dominating Set oder Hitting Set
- für $t > 2$: hier haben wir nur WCS[t] zur Verfügung

Reduktion nach WCS$[t]$

(Enthaltensein in $W[t]$)

- WCS ist eine mächtige Modellierungssprache
- Reduktion ist üblicherweise relativ einfach



Leichte und schwere Reduktionen

Wie zeigen wir $W[t]$-Vollständigkeit?

- reduziere auf und von anderem vollständigen Problem
- für $W[1]$: Independent Set oder Clique
- für $W[2]$: Dominating Set oder Hitting Set
- für $t > 2$: hier haben wir nur WCS[t] zur Verfügung

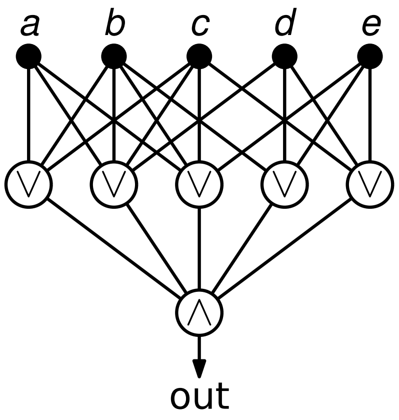
Reduktion nach WCS$[t]$ (Enthaltensein in $W[t]$)

- WCS ist eine mächtige Modellierungssprache
- Reduktion ist üblicherweise relativ einfach

Reduktion von WCS$[t]$ ($W[t]$-Schwere)

- dieser Teil ist meist deutlich schwerer
- ein Grund: der Schaltkreis kann sehr wüst aussehen

(nicht so, wie der da →)



Leichte und schwere Reduktionen

Wie zeigen wir $W[t]$-Vollständigkeit?

- reduziere auf und von anderem vollständigen Problem
- für $W[1]$: INDEPENDENT SET oder CLIQUE
- für $W[2]$: DOMINATING SET oder HITTING SET
- für $t > 2$: hier haben wir nur WCS[t] zur Verfügung

Reduktion nach WCS$[t]$

(Enthaltensein in $W[t]$)

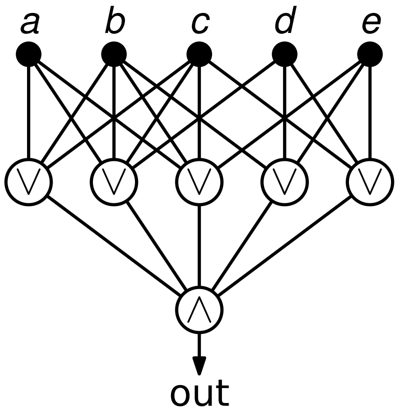
- WCS ist eine mächtige Modellierungssprache
- Reduktion ist üblicherweise relativ einfach

Reduktion von WCS$[t]$

($W[t]$-Schwere)

- dieser Teil ist meist deutlich schwerer
- ein Grund: der Schaltkreis kann sehr wüst aussehen

  (nicht so, wie der da →)
- Idee: verbiete wüste Schaltkreise → Normalisierung



Leichte und schwere Reduktionen

Wie zeigen wir $W[t]$-Vollständigkeit?

- reduziere auf und von anderem vollständigen Problem
- für $W[1]$: INDEPENDENT SET oder CLIQUE
- für $W[2]$: DOMINATING SET oder HITTING SET
- für $t > 2$: hier haben wir nur WCS[t] zur Verfügung

Reduktion nach WCS[t]

(Enthaltensein in $W[t]$)

- WCS ist eine mächtige Modellierungssprache
- Reduktion ist üblicherweise relativ einfach

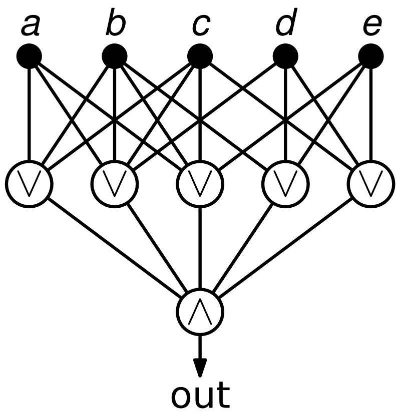
Reduktion von WCS[t]

($W[t]$-Schwere)

- dieser Teil ist meist deutlich schwerer
- ein Grund: der Schaltkreis kann sehr wüst aussehen

(nicht so, wie der da →)

- Idee: verbiete wüste Schaltkreise → Normalisierung
- zeige $W[t]$-Schwere für normalisierte Schaltkreise



Leichte und schwere Reduktionen

Wie zeigen wir $W[t]$-Vollständigkeit?

- reduziere auf und von anderem vollständigen Problem
- für $W[1]$: INDEPENDENT SET oder CLIQUE
- für $W[2]$: DOMINATING SET oder HITTING SET
- für $t > 2$: hier haben wir nur WCS[t] zur Verfügung

Reduktion nach WCS$[t]$

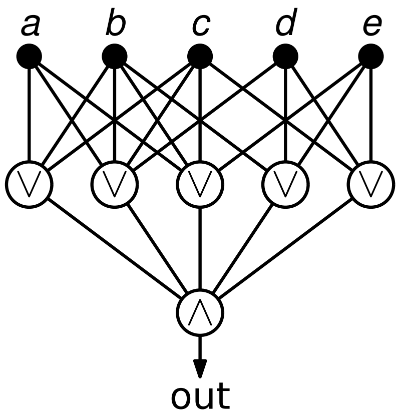
(Enthaltensein in $W[t]$)

- WCS ist eine mächtige Modellierungssprache
- Reduktion ist üblicherweise relativ einfach

Reduktion von WCS$[t]$

($W[t]$-Schwere)

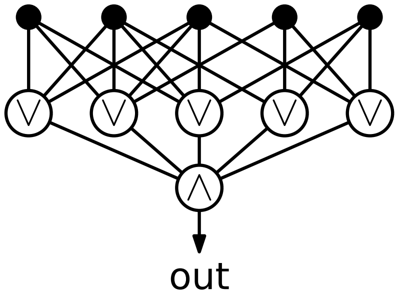
- dieser Teil ist meist deutlich schwerer
- ein Grund: der Schaltkreis kann sehr wüst aussehen
  (nicht so, wie der da →)
- Idee: verbiete wüste Schaltkreise → Normalisierung
- zeige $W[t]$-Schwere für normalisierte Schaltkreise
- und reduziere dann von diesen weiter



Normalisierte Schaltkreise

Der Schaltkreis für DOMINATING SET

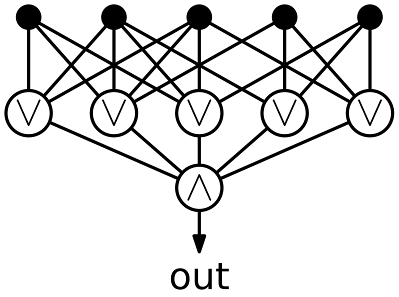
- auf jedem Pfad alternieren ∧- und ∨-Knoten
- Ausgabeknoten (unterste Lage) ist ein ∧-Knoten



Normalisierte Schaltkreise

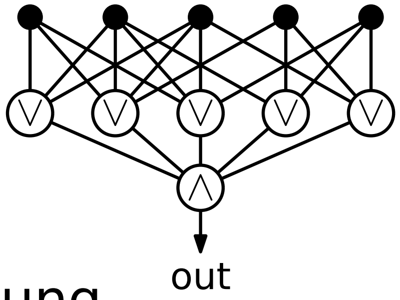
Der Schaltkreis für DOMINATING SET

- auf jedem Pfad alternieren ∧- und ∨-Knoten
- Ausgabeknoten (unterste Lage) ist ein ∧-Knoten
- nur positive Variablen ⇒ Schaltkreis ist **monoton**



Normalisierte Schaltkreise

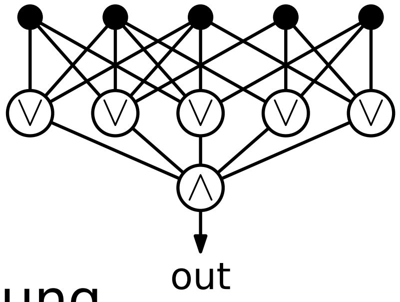
Der Schaltkreis für DOMINATING SET



- auf jedem Pfad alternieren $\wedge$- und $\vee$-Knoten
- Ausgabeknoten (unterste Lage) ist ein $\wedge$-Knoten
- nur positive Variablen $\Rightarrow$ Schaltkreis ist **monoton**
- Implikation: Supermenge einer Lösung ist ebenfalls Lösung

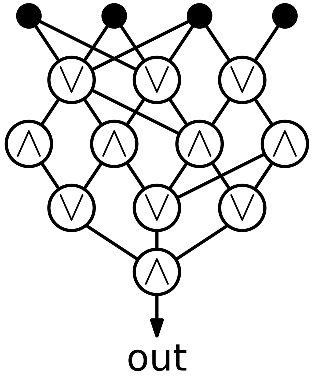
Normalisierte Schaltkreise

Der Schaltkreis für DOMINATING SET



- auf jedem Pfad alternieren $\wedge$- und $\vee$-Knoten
- Ausgabeknoten (unterste Lage) ist ein $\wedge$-Knoten
- nur positive Variablen $\Rightarrow$ Schaltkreis ist **monoton**
- Implikation: Supermenge einer Lösung ist ebenfalls Lösung

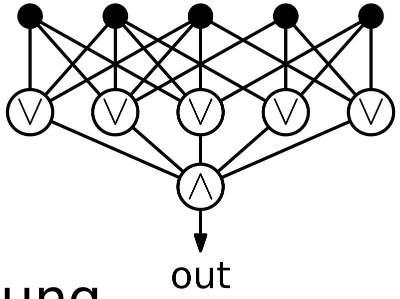
WEIGHTED MONOTONE *t*-NORMALIZED SATISFIABILITY



- t Lagen alternierender $\wedge$- und $\vee$-Knoten
- $\wedge$-Konten als Ausgabeknoten
- keine $\neg$-Knoten erlaubt

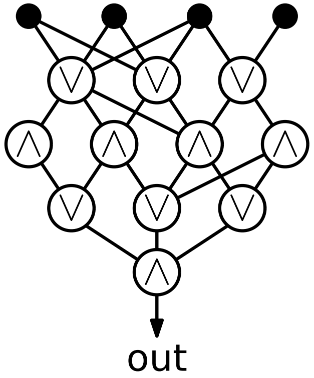
Normalisierte Schaltkreise

Der Schaltkreis für DOMINATING SET



- auf jedem Pfad alternieren $\wedge$- und $\vee$-Knoten
- Ausgabeknoten (unterste Lage) ist ein $\wedge$-Knoten
- nur positive Variablen $\Rightarrow$ Schaltkreis ist **monoton**
- Implikation: Supermenge einer Lösung ist ebenfalls Lösung

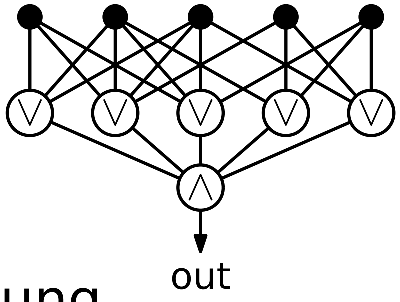
WEIGHTED MONOTONE *t*-NORMALIZED SATISFIABILITY



- *t* Lagen alternierender $\wedge$- und $\vee$-Knoten
- $\wedge$-Konten als Ausgabeknoten
- keine $\neg$-Knoten erlaubt
- also: $\underbrace{\text{Konj. von Disj. von Konj. \ldots von}}_{t\ \text{„von“s}}$ positiven Literalen

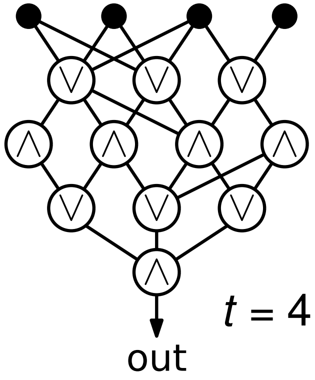
Normalisierte Schaltkreise

Der Schaltkreis für DOMINATING SET



- auf jedem Pfad alternieren $\wedge$- und $\vee$-Knoten
- Ausgabeknoten (unterste Lage) ist ein $\wedge$-Knoten
- nur positive Variablen $\Rightarrow$ Schaltkreis ist **monoton**
- Implikation: Supermenge einer Lösung ist ebenfalls Lösung

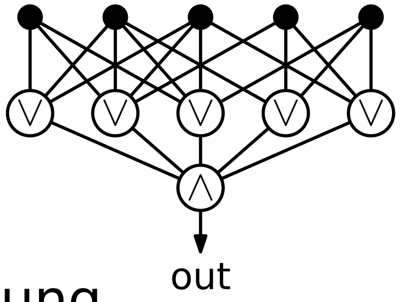
WEIGHTED MONOTONE *t*-NORMALIZED SATISFIABILITY



- t Lagen alternierender $\wedge$- und $\vee$-Knoten
- $\wedge$-Konten als Ausgabeknoten
- keine $\neg$-Knoten erlaubt
- also: $\underbrace{\text{Konj. von Disj. von Konj. \dots von}}_{t\text{ „von“s}}$ positiven Literalen

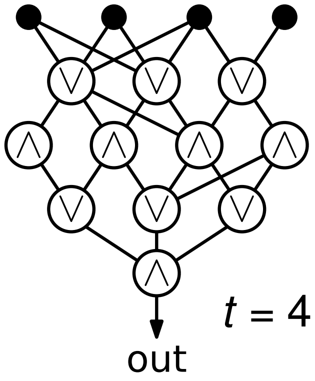
Normalisierte Schaltkreise

Der Schaltkreis für DOMINATING SET



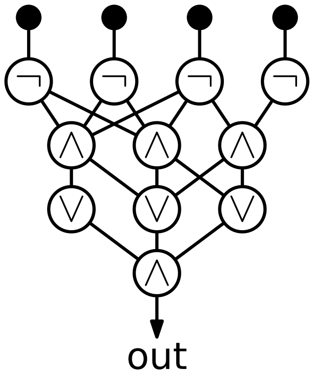
- auf jedem Pfad alternieren ∧- und ∨-Knoten
- Ausgabeknoten (unterste Lage) ist ein ∧-Knoten
- nur positive Variablen ⇒ Schaltkreis ist **monoton**
- Implikation: Supermenge einer Lösung ist ebenfalls Lösung

WEIGHTED MONOTONE *t*-NORMALIZED SATISFIABILITY



- *t* Lagen alternierender ∧- und ∨-Knoten
- ∧-Konten als Ausgabeknoten
- keine ¬-Knoten erlaubt
- also: $\underbrace{\text{Konj. von Disj. von Konj. \ldots von}}_{t \text{ „von“s}}$ positiven Literalen

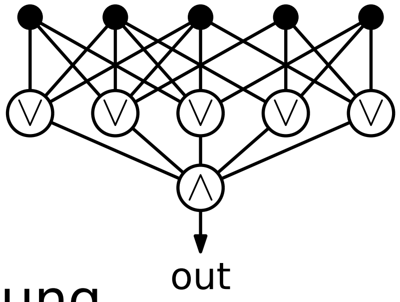
WEIGHTED ANTIMONOTONE *t*-NORMALIZED SATISFIABILITY



- jetzt muss jeder Eingangsknoten negiert werden
- also: $\underbrace{\text{Konj. von Disj. von Konj. \ldots von}}_{t \text{ „von“s}}$ negativen Literalen

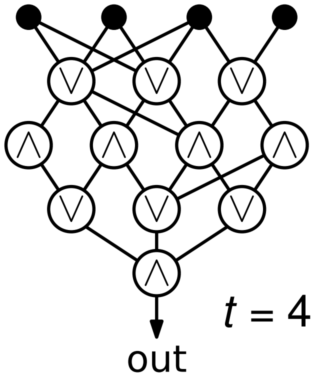
Normalisierte Schaltkreise

Der Schaltkreis für Dominating Set



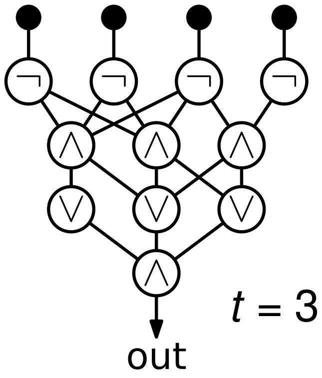
- auf jedem Pfad alternieren ∧- und ∨-Knoten
- Ausgabeknoten (unterste Lage) ist ein ∧-Knoten
- nur positive Variablen ⇒ Schaltkreis ist **monoton**
- Implikation: Supermenge einer Lösung ist ebenfalls Lösung

Weighted Monotone t-Normalized Satisfiability



- t Lagen alternierender ∧- und ∨-Knoten
- ∧-Konten als Ausgabeknoten
- keine ¬-Knoten erlaubt
- also: $\underbrace{\text{Konj. von Disj. von Konj. \ldots von}}_{t\ \text{„von“s}}$ positiven Literalen

Weighted Antimonotone t-Normalized Satisfiability

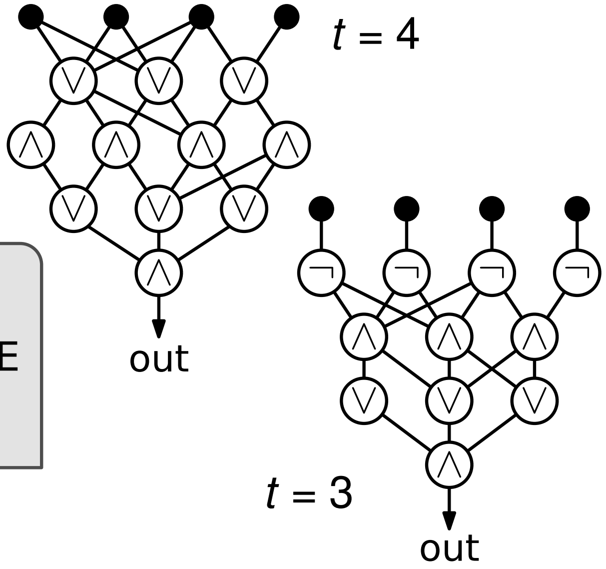


- jetzt muss jeder Eingangsknoten negiert werden
- also: $\underbrace{\text{Konj. von Disj. von Konj. \ldots von}}_{t\ \text{„von“s}}$ negativen Literalen

Normalisierte Schaltkreise

Theorem
Für jedes gerade $t \geq 2$ ist Weighted Monotone *t*-Normalized Satisfiability $W[t]$-vollständig.

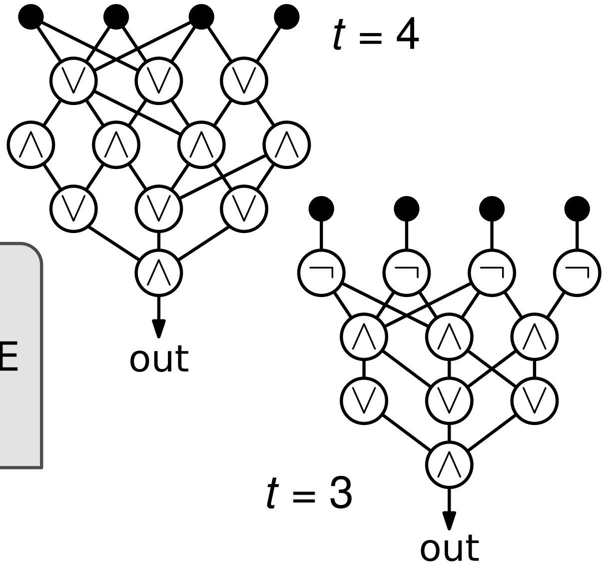
Theorem
Für jedes ungerade $t \geq 3$ ist Weighted Antimonotone *t*-Normalized Satisfiability $W[t]$-vollständig.



Normalisierte Schaltkreise

Theorem
Für jedes gerade $t \geq 2$ ist WEIGHTED MONOTONE t-NORMALIZED SATISFIABILITY $W[t]$-vollständig.

Theorem
Für jedes ungerade $t \geq 3$ ist WEIGHTED ANTIMONOTONE t-NORMALIZED SATISFIABILITY $W[t]$-vollständig.



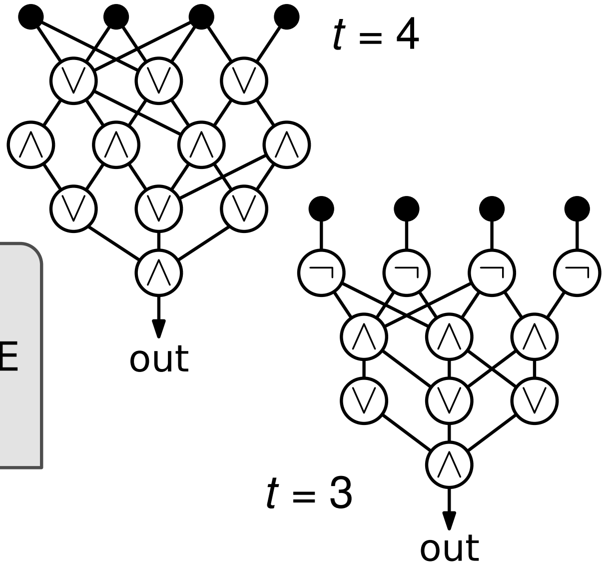
Anmerkungen

- WMNS[t] und WANS[t] sind offensichtlich in $W[t]$ enthalten
- die Schwierigkeit besteht darin $W[t]$-Schwere zu zeigen

Normalisierte Schaltkreise

Theorem
Für jedes gerade $t \geq 2$ ist Weighted Monotone t-Normalized Satisfiability $W[t]$-vollständig.

Theorem
Für jedes ungerade $t \geq 3$ ist Weighted Antimonotone t-Normalized Satisfiability $W[t]$-vollständig.



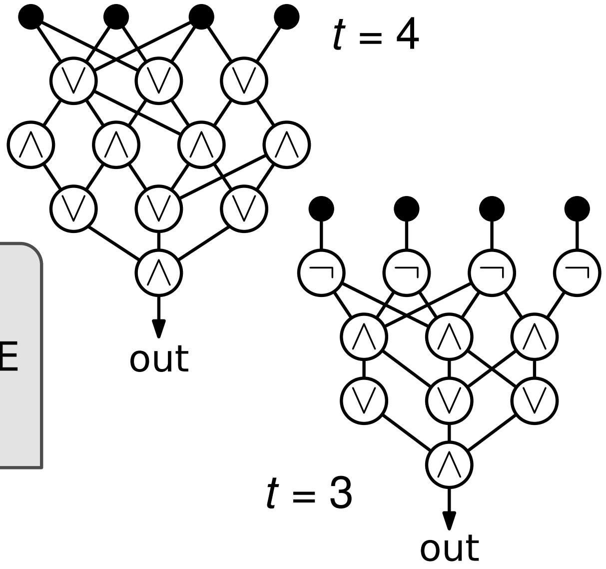
Anmerkungen

- WMNS[t] und WANS[t] sind offensichtlich in $W[t]$ enthalten
- die Schwierigkeit besteht darin $W[t]$-Schwere zu zeigen
- wir können jetzt also von WMNS[t] bzw. WANS[t] reduzieren um $W[t]$-Schwere zu zeigen

Normalisierte Schaltkreise

Theorem
Für jedes gerade $t \geq 2$ ist Weighted Monotone t-Normalized Satisfiability $W[t]$-vollständig.

Theorem
Für jedes ungerade $t \geq 3$ ist Weighted Antimonotone t-Normalized Satisfiability $W[t]$-vollständig.



Anmerkungen

- WMNS[t] und WANS[t] sind offensichtlich in $W[t]$ enthalten
- die Schwierigkeit besteht darin $W[t]$-Schwere zu zeigen
- wir können jetzt also von WMNS[t] bzw. WANS[t] reduzieren um $W[t]$-Schwere zu zeigen
- Tendenz: wähle gerades t für Minimierungs- und ungerades t für Maximierungsprobleme

Schlüsselkandidaten in Datenbanken

Definition
Eine Spaltenmenge A ist eine **Unique Column Combination**, wenn die Einschränkung auf A kein Tupel mehrfach enthält.

Schlüsselkandidaten in Datenbanken

Definition
Eine Spaltenmenge A ist eine **Unique Column Combination**, wenn die Einschränkung auf A kein Tupel mehrfach enthält.

Beispiel

Vorname	**Nachname**	**Geburtstag**	**Wohnort**
Max	Mustermann	1.6.	Karlsruhe
Bob	Mustermann	7.10.	Berlin
Bob	Baumeister	4.3.	Hamburg
Alice	Liddell	4.5.	Wunderland
Alice	Musterfrau	7.10.	Berlin

Schlüsselkandidaten in Datenbanken

Definition
Eine Spaltenmenge A ist eine **Unique Column Combination**, wenn die Einschränkung auf A kein Tupel mehrfach enthält.

Beispiel

- keine einzelne Spalte ist unique

Vorname	**Nachname**	**Geburtstag**	**Wohnort**
Max	Mustermann	1.6.	Karlsruhe
Bob	Mustermann	7.10.	Berlin
Bob	Baumeister	4.3.	Hamburg
Alice	Liddell	4.5.	Wunderland
Alice	Musterfrau	7.10.	Berlin

Schlüsselkandidaten in Datenbanken

Definition
Eine Spaltenmenge A ist eine **Unique Column Combination**, wenn die Einschränkung auf A kein Tupel mehrfach enthält.

Beispiel

- keine einzelne Spalte ist unique
- $\{$Vorname, Nachname$\}$ ist unique

Vorname	**Nachname**	**Geburtstag**	**Wohnort**
Max	Mustermann	1.6.	Karlsruhe
Bob	Mustermann	7.10.	Berlin
Bob	Baumeister	4.3.	Hamburg
Alice	Liddell	4.5.	Wunderland
Alice	Musterfrau	7.10.	Berlin

Schlüsselkandidaten in Datenbanken

Definition
Eine Spaltenmenge A ist eine **Unique Column Combination**, wenn die Einschränkung auf A kein Tupel mehrfach enthält.

Beispiel

- keine einzelne Spalte ist unique
- $\{$Vorname, Nachname$\}$ ist unique
- $\{$Geburtstag, Wohnort$\}$ nicht

Vorname	**Nachname**	**Geburtstag**	**Wohnort**
Max	Mustermann	1.6.	Karlsruhe
Bob	Mustermann	7.10.	Berlin
Bob	Baumeister	4.3.	Hamburg
Alice	Liddell	4.5.	Wunderland
Alice	Musterfrau	7.10.	Berlin

Schlüsselkandidaten in Datenbanken

Definition
Eine Spaltenmenge A ist eine **Unique Column Combination**, wenn die Einschränkung auf A kein Tupel mehrfach enthält.

Beispiel

- keine einzelne Spalte ist unique
- $\{$Vorname, Nachname$\}$ ist unique
- $\{$Geburtstag, Wohnort$\}$ nicht

Vorname	**Nachname**	**Geburtstag**	**Wohnort**
Max	Mustermann	1.6.	Karlsruhe
Bob	Mustermann	7.10.	Berlin
Bob	Baumeister	4.3.	Hamburg
Alice	Liddell	4.5.	Wunderland
Alice	Musterfrau	7.10.	Berlin

Problem: UNIQUE
Gegeben eine Datenbank und ein Parameter k. Gibt es eine Unique Column Combination der Größe maximal k?

Schlüsselkandidaten in Datenbanken

Definition
Eine Spaltenmenge A ist eine **Unique Column Combination**, wenn die Einschränkung auf A kein Tupel mehrfach enthält.

Beispiel

- keine einzelne Spalte ist unique
- $\{$Vorname, Nachname$\}$ ist unique
- $\{$Geburtstag, Wohnort$\}$ nicht

	Vorname	**Nachname**	**Geburtstag**	**Wohnort**
	Max	Mustermann	1.6.	Karlsruhe
r_2	Bob	Mustermann	7.10.	Berlin
	Bob	Baumeister	4.3.	Hamburg
	Alice	Liddell	4.5.	Wunderland
r_5	Alice	Musterfrau	7.10.	Berlin

Problem: Unique
Gegeben eine Datenbank und ein Parameter k. Gibt es eine Unique Column Combination der Größe maximal k?

Leicht andere Sichtweise

- Zeilenpaar $(r_2, r_5) \Rightarrow$ **Vor-** oder **Nachname** muss enthalten sein

Schlüsselkandidaten in Datenbanken

Definition
Eine Spaltenmenge A ist eine **Unique Column Combination**, wenn die Einschränkung auf A kein Tupel mehrfach enthält.

Beispiel

- keine einzelne Spalte ist unique
- $\{$Vorname, Nachname$\}$ ist unique
- $\{$Geburtstag, Wohnort$\}$ nicht

	Vorname	**Nachname**	**Geburtstag**	**Wohnort**
	Max	Mustermann	1.6.	Karlsruhe
r_2	Bob	Mustermann	7.10.	Berlin
	Bob	Baumeister	4.3.	Hamburg
	Alice	Liddell	4.5.	Wunderland
r_5	Alice	Musterfrau	7.10.	Berlin

Problem: UNIQUE
Gegeben eine Datenbank und ein Parameter k. Gibt es eine Unique Column Combination der Größe maximal k?

Leicht andere Sichtweise

- Zeilenpaar $(r_2, r_5) \Rightarrow$ **Vor-** oder **Nachname** muss enthalten sein
- jedes Zeilenpaar (r_i, r_j) liefert Spaltenmenge $A_{i,j}$ aus der mindestens ein Element gewählt werden muss

Schlüsselkandidaten in Datenbanken

Definition

Eine Spaltenmenge A ist eine **Unique Column Combination**, wenn die Einschränkung auf A kein Tupel mehrfach enthält.

Beispiel

- keine einzelne Spalte ist unique
- $\{$Vorname, Nachname$\}$ ist unique
- $\{$Geburtstag, Wohnort$\}$ nicht

	Vorname	**Nachname**	**Geburtstag**	**Wohnort**
	Max	Mustermann	1.6.	Karlsruhe
r_2	Bob	Mustermann	7.10.	Berlin
	Bob	Baumeister	4.3.	Hamburg
	Alice	Liddell	4.5.	Wunderland
r_5	Alice	Musterfrau	7.10.	Berlin

Problem: UNIQUE

Gegeben eine Datenbank und ein Parameter k. Gibt es eine Unique Column Combination der Größe maximal k?

Leicht andere Sichtweise

- Zeilenpaar $(r_2, r_5) \Rightarrow$ **Vor-** oder **Nachname** muss enthalten sein
- jedes Zeilenpaar (r_i, r_j) liefert Spaltenmenge $A_{i,j}$ aus der mindestens ein Element gewählt werden muss

Was ist das für ein Problem?

Schlüsselkandidaten in Datenbanken

Definition

Eine Spaltenmenge A ist eine **Unique Column Combination**, wenn die Einschränkung auf A kein Tupel mehrfach enthält.

Beispiel

- keine einzelne Spalte ist unique
- $\{$Vorname, Nachname$\}$ ist unique
- $\{$Geburtstag, Wohnort$\}$ nicht

	Vorname	**Nachname**	**Geburtstag**	**Wohnort**
	Max	Mustermann	1.6.	Karlsruhe
r_2	Bob	Mustermann	7.10.	Berlin
	Bob	Baumeister	4.3.	Hamburg
	Alice	Liddell	4.5.	Wunderland
r_5	Alice	Musterfrau	7.10.	Berlin

Problem: Unique

Gegeben eine Datenbank und ein Parameter k. Gibt es eine Unique Column Combination der Größe maximal k?

Leicht andere Sichtweise

- Zeilenpaar $(r_2, r_5) \Rightarrow$ **Vor-** oder **Nachname** muss enthalten sein
- jedes Zeilenpaar (r_i, r_j) liefert Spaltenmenge $A_{i,j}$ aus der mindestens ein Element gewählt werden muss

Was ist das für ein Problem? → Hitting Set

UNIQUE ist $W[2]$-vollständig

Gerade gesehen

- parametrisierte Reduktion von UNIQUE auf HITTING SET
- HITTING SET ist $W[2]$-vollständig $\Rightarrow$ UNIQUE $\in W[2]$

UNIQUE ist $W[2]$-vollständig

Gerade gesehen

- parametrisierte Reduktion von UNIQUE auf HITTING SET
- HITTING SET ist $W[2]$-vollständig $\Rightarrow$ UNIQUE $\in W[2]$

Zeige: Reduktion von HITTING SET auf UNIQUE

Instanz von HITTING SET

$U = \{a, b, c, d, e\}$

$S_1 = \{a, b, c\}$

$S_2 = \{a, d, e\}$

$S_3 = \{b, d, e\}$

$S_4 = \{b, c\}$

UNIQUE ist $W[2]$-vollständig

Gerade gesehen

- parametrisierte Reduktion von UNIQUE auf HITTING SET
- HITTING SET ist $W[2]$-vollständig $\Rightarrow$ UNIQUE $\in W[2]$

Zeige: Reduktion von HITTING SET auf UNIQUE

Instanz von HITTING SET

$U = \{a, b, c, d, e\}$

$S_1 = \{a, b, c\}$

$S_2 = \{a, d, e\}$

$S_3 = \{b, d, e\}$

$S_4 = \{b, c\}$

Instanz von UNIQUE

A B C D E

- verwende eine Spalte pro Element

UNIQUE ist $W[2]$-vollständig

Gerade gesehen

- parametrisierte Reduktion von UNIQUE auf HITTING SET
- HITTING SET ist $W[2]$-vollständig $\Rightarrow$ UNIQUE $\in W[2]$

Zeige: Reduktion von HITTING SET auf UNIQUE

Instanz von HITTING SET

$U = \{a, b, c, d, e\}$

$S_1 = \{a, b, c\}$

$S_2 = \{a, d, e\}$

$S_3 = \{b, d, e\}$

$S_4 = \{b, c\}$

Instanz von UNIQUE

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
r_0	0	0	0	0	0
r_1	1	1	1	0	0

- verwende eine Spalte pro Element
- jedes S_i muss von einem Zeilenpaar repräsentiert werden

UNIQUE ist $W[2]$-vollständig

Gerade gesehen

- parametrisierte Reduktion von UNIQUE auf HITTING SET
- HITTING SET ist $W[2]$-vollständig $\Rightarrow$ UNIQUE $\in W[2]$

Zeige: Reduktion von HITTING SET auf UNIQUE

Instanz von HITTING SET

$U = \{a, b, c, d, e\}$

$S_1 = \{a, b, c\}$

$S_2 = \{a, d, e\}$

$S_3 = \{b, d, e\}$

$S_4 = \{b, c\}$

Instanz von UNIQUE

	A	B	C	D	E
r_0	0	0	0	0	0
r_1	1	1	1	0	0
r_2	2	0	0	2	2

- verwende eine Spalte pro Element
- jedes S_i muss von einem Zeilenpaar repräsentiert werden
- Benutze die 0-Zeile s_0 für jedes Paar

UNIQUE ist $W[2]$-vollständig

Gerade gesehen

- parametrisierte Reduktion von UNIQUE auf HITTING SET
- HITTING SET ist $W[2]$-vollständig $\Rightarrow$ UNIQUE $\in W[2]$

Zeige: Reduktion von HITTING SET auf UNIQUE

Instanz von HITTING SET

$U = \{a, b, c, d, e\}$

$S_1 = \{a, b, c\}$

$S_2 = \{a, d, e\}$

$S_3 = \{b, d, e\}$

$S_4 = \{b, c\}$

Instanz von UNIQUE

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
r_0	0	0	0	0	0
r_1	1	1	1	0	0
r_2	2	0	0	2	2
r_3	0	3	0	3	3

- verwende eine Spalte pro Element
- jedes S_i muss von einem Zeilenpaar repräsentiert werden
- Benutze die 0-Zeile s_0 für jedes Paar

Unique ist $W[2]$-vollständig

Gerade gesehen

- parametrisierte Reduktion von Unique auf Hitting Set
- Hitting Set ist $W[2]$-vollständig $\Rightarrow$ Unique $\in W[2]$

Zeige: Reduktion von Hitting Set auf Unique

Instanz von Hitting Set

$U = \{a, b, c, d, e\}$

$S_1 = \{a, b, c\}$

$S_2 = \{a, d, e\}$

$S_3 = \{b, d, e\}$

$S_4 = \{b, c\}$

Instanz von Unique

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
r_0	0	0	0	0	0
r_1	1	1	1	0	0
r_2	2	0	0	2	2
r_3	0	3	0	3	3
r_4	0	4	4	0	0

- verwende eine Spalte pro Element
- jedes S_i muss von einem Zeilenpaar repräsentiert werden
- Benutze die 0-Zeile s_0 für jedes Paar

Unique ist $W[2]$-vollständig

Gerade gesehen

- parametrisierte Reduktion von Unique auf Hitting Set
- Hitting Set ist $W[2]$-vollständig $\Rightarrow$ Unique $\in W[2]$

Zeige: Reduktion von Hitting Set auf Unique

Instanz von Hitting Set

$U = \{a, b, c, d, e\}$

$S_1 = \{a, b, c\}$

$S_2 = \{a, d, e\}$

$S_3 = \{b, d, e\}$

$S_4 = \{b, c\}$

Instanz von Unique

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
r_0	0	0	0	0	0
r_1	1	1	1	0	0
r_2	2	0	0	2	2
r_3	0	3	0	3	3
r_4	0	4	4	0	0

- verwende eine Spalte pro Element
- jedes S_i muss von einem Zeilenpaar repräsentiert werden
- Benutze die 0-Zeile s_0 für jedes Paar
- Paar (r_0, r_i) stellt sicher, dass ein Element aus S_i gewählt wird
- also: Lösung für Unique $\Rightarrow$ Lösung für Hitting Set

UNIQUE ist $W[2]$-vollständig

Gerade gesehen

- parametrisierte Reduktion von UNIQUE auf HITTING SET
- HITTING SET ist $W[2]$-vollständig $\Rightarrow$ UNIQUE $\in W[2]$

Zeige: Reduktion von HITTING SET auf UNIQUE

Instanz von HITTING SET

$U = \{a, b, c, d, e\}$

$S_1 = \{a, b, c\}$

$S_2 = \{a, d, e\}$

$S_3 = \{b, d, e\}$

$S_4 = \{b, c\}$

Instanz von UNIQUE

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
r_0	0	0	0	0	0
r_1	1	1	1	0	0
r_2	2	0	0	2	2
r_3	0	3	0	3	3
r_4	0	4	4	0	0

- verwende eine Spalte pro Element
- jedes S_i muss von einem Zeilenpaar repräsentiert werden
- Benutze die 0-Zeile s_0 für jedes Paar
- Paar (r_0, r_i) stellt sicher, dass ein Element aus S_i gewählt wird
- also: Lösung für UNIQUE $\Rightarrow$ Lösung für HITTING SET
- **Achtung:** andere Paare liefern auch Bedingungen

Unique ist $W[2]$-vollständig

Gerade gesehen

- parametrisierte Reduktion von Unique auf Hitting Set
- Hitting Set ist $W[2]$-vollständig $\Rightarrow$ Unique $\in W[2]$

Zeige: Reduktion von Hitting Set auf Unique

Instanz von Hitting Set

$U = \{a, b, c, d, e\}$

$S_1 = \{a, b, c\}$

$S_2 = \{a, d, e\}$

$S_3 = \{b, d, e\}$

$S_4 = \{b, c\}$

Instanz von Unique

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
r_0	0	0	0	0	0
r_1	1	1	1	0	0
r_2	2	0	0	2	2
r_3	0	3	0	3	3
r_4	0	4	4	0	0

- verwende eine Spalte pro Element
- jedes S_i muss von einem Zeilenpaar repräsentiert werden
- Benutze die 0-Zeile s_0 für jedes Paar
- Paar (r_0, r_i) stellt sicher, dass ein Element aus S_i gewählt wird
- also: Lösung für Unique $\Rightarrow$ Lösung für Hitting Set
- **Achtung:** andere Paare liefern auch Bedingungen
- aber für $x \in S_i$ gilt: $r_i[x] \neq r_j[x]$ für alle j

Unique ist $W[2]$-vollständig

Gerade gesehen

- parametrisierte Reduktion von Unique auf Hitting Set
- Hitting Set ist $W[2]$-vollständig $\Rightarrow$ Unique $\in W[2]$

Zeige: Reduktion von Hitting Set auf Unique

Instanz von Hitting Set

$U = \{a, b, c, d, e\}$

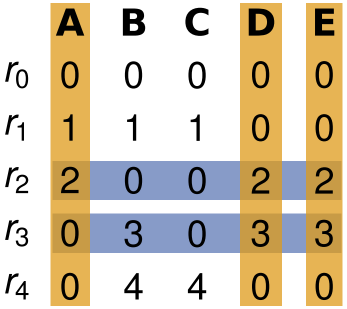
$S_1 = \{a, b, c\}$

$S_2 = \{a, d, e\}$

$S_3 = \{b, d, e\}$

$S_4 = \{b, c\}$

Instanz von Unique



	A	**B**	**C**	**D**	**E**
r_0	0	0	0	0	0
r_1	1	1	1	0	0
r_2	2	0	0	2	2
r_3	0	3	0	3	3
r_4	0	4	4	0	0

- verwende eine Spalte pro Element
- jedes S_i muss von einem Zeilenpaar repräsentiert werden
- Benutze die 0-Zeile s_0 für jedes Paar
- Paar (r_0, r_i) stellt sicher, dass ein Element aus S_i gewählt wird
- also: Lösung für Unique $\Rightarrow$ Lösung für Hitting Set
- **Achtung:** andere Paare liefern auch Bedingungen
- aber für $x \in S_i$ gilt: $r_i[x] \neq r_j[x]$ für alle j
- also: Lösung für Hitting Set $\Rightarrow$ Lösung für Unique

UNIQUE ist $W[2]$-vollständig

Gerade gesehen

- parametrisierte Reduktion von UNIQUE auf HITTING SET
- HITTING SET ist $W[2]$-vollständig $\Rightarrow$ UNIQUE $\in W[2]$

Zeige: Reduktion von HITTING SET auf UNIQUE

Instanz von HITTING SET

$U = \{a, b, c, d, e\}$

$S_1 = \{a, b, c\}$

$S_2 = \{a, d, e\}$

$S_3 = \{b, d, e\}$

$S_4 = \{b, c\}$

Instanz von UNIQUE

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
r_0	0	0	0	0	0
r_1	1	1	1	0	0
r_2	2	0	0	2	2
r_3	0	3	0	3	3
r_4	0	4	4	0	0

- verwende eine Spalte pro Element
- jedes S_i muss von einem Zeilenpaar repräsentiert werden
- Benutze die 0-Zeile s_0 für jedes Paar
- Paar (r_0, r_i) stellt sicher, dass ein Element aus S_i gewählt wird
- also: Lösung für UNIQUE $\Rightarrow$ Lösung für HITTING SET
- **Achtung:** andere Paare liefern auch Bedingungen
- aber für $x \in S_i$ gilt: $r_i[x] \neq r_j[x]$ für alle j
- also: Lösung für HITTING SET $\Rightarrow$ Lösung für UNIQUE

$\Rightarrow$ UNIQUE ist $W[2]$-schwer

Funktionale Abhängigkeiten

Vorname	Nachname	Geburtstag	Wohnort
Max	Mustermann	7.10.	Karlsruhe
Bob	Mustermann	1.6.	Karlsruhe
Bob	Baumeister	7.10.	Karlsruhe
Alice	Liddell	4.5.	Wunderland
Alice	Musterfrau	4.3.	Berlin

Beobachtung

- $\{$Nachname$\}$ ist kein Unique
- der Nachname identifiziert also nicht das gesamte Tupel
- aber: der Nachname identifiziert den Wohnort

Funktionale Abhängigkeiten

Beobachtung

- {Nachname} ist kein Unique
- der Nachname identifiziert also nicht das gesamte Tupel
- aber: der Nachname identifiziert den Wohnort

Vorname	Nachname	Geburtstag	Wohnort
Max	Mustermann	7.10.	Karlsruhe
Bob	Mustermann	1.6.	Karlsruhe
Bob	Baumeister	7.10.	Karlsruhe
Alice	Liddell	4.5.	Wunderland
Alice	Musterfrau	4.3.	Berlin
	X		A

Definition (Grundsätzliche Annahme: $A \notin X$)

Für eine Spaltenmenge X und eine Spalte A ist $X \to A$ eine **Funktionale Abh.**, wenn $r_i[A] \neq r_j[A] \Rightarrow r_i[X] \neq r_j[X]$ für alle Zeilenpaare (r_i, r_j).

Funktionale Abhängigkeiten

Beobachtung

- $\{$Nachname$\}$ ist kein Unique
- der Nachname identifiziert also nicht das gesamte Tupel
- aber: der Nachname identifiziert den Wohnort

Vorname	**Nachname**	**Geburtstag**	**Wohnort**
Max	Mustermann	7.10.	Karlsruhe
Bob	Mustermann	1.6.	Karlsruhe
Bob	Baumeister	7.10.	Karlsruhe
Alice	Liddell	4.5.	Wunderland
Alice	Musterfrau	4.3.	Berlin
	X		A

Definition (Grundsätzliche Annahme: $A \notin X$)

Für eine Spaltenmenge X und eine Spalte A ist $X \to A$ eine **Funktionale Abh.**, wenn $r_i[A] \neq r_j[A] \Rightarrow r_i[X] \neq r_j[X]$ für alle Zeilenpaare (r_i, r_j).

Welche der folgenden Abhängigkeiten gelten?

- $\{$Vorname$\} \to \{$Geburtstag$\}$
- $\{$Geburtstag$\} \to \{$Vorname$\}$
- $\{$Geburtstag$\} \to \{$Wohnort$\}$
- $\{$Vorname$\} \to \{$Wohnort$\}$
- $\{$Vorname, Geburtstag$\} \to \{$Wohnort$\}$
- $\{$Wohnort, Geburtstag$\} \to \{$Vorname$\}$

Funktionale Abhängigkeiten

Problem: FD
Gegeben eine Datenbank und ein Parameter k. Gibt es eine funktionale Abhängigkeit $X \to A$ mit $|X| \leq k$?

Funktionale Abhängigkeiten

Problem: FD
Gegeben eine Datenbank und ein Parameter k. Gibt es eine funktionale Abhängigkeit $X \rightarrow A$ mit $|X| \leq k$?

Zeige $W[2]$-Schwere für FD

- reduziere von Unique

Funktionale Abhängigkeiten

Problem: FD
Gegeben eine Datenbank und ein Parameter k. Gibt es eine funktionale Abhängigkeit $X \to A$ mit $|X| \leq k$?

Zeige $W[2]$-Schwere für FD

- reduziere von UNIQUE
- leichter, wenn im Problem FD die rechte Seite A feststeht

Problem: FD$_{\text{FIXED}}$
Gegeben eine Datenbank, eine Spalte A und ein Parameter k. Gibt es eine funktionale Abhängigkeit $X \to A$ mit $|X| \leq k$?

Funktionale Abhängigkeiten

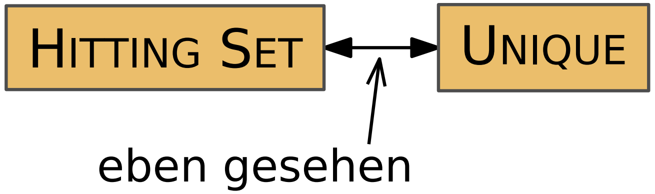
Problem: FD
Gegeben eine Datenbank und ein Parameter k. Gibt es eine funktionale Abhängigkeit $X \to A$ mit $|X| \leq k$?

Zeige $W[2]$-Schwere für FD

- reduziere von Unique
- leichter, wenn im Problem FD die rechte Seite A feststeht

Problem: FD$_{\text{FIXED}}$
Gegeben eine Datenbank, eine Spalte A und ein Parameter k. Gibt es eine funktionale Abhängigkeit $X \to A$ mit $|X| \leq k$?

Reduktionen



Funktionale Abhängigkeiten

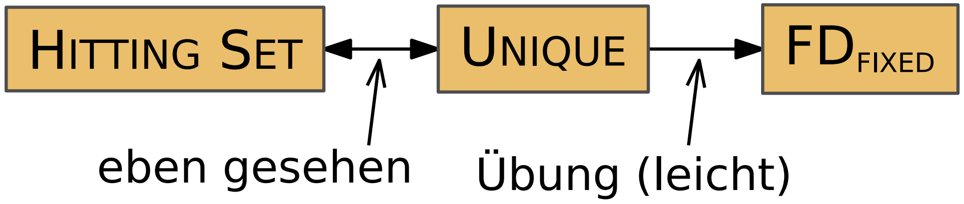
Problem: FD
Gegeben eine Datenbank und ein Parameter k. Gibt es eine funktionale Abhängigkeit $X \to A$ mit $|X| \leq k$?

Zeige $W[2]$-Schwere für FD

- reduziere von Unique
- leichter, wenn im Problem FD die rechte Seite A feststeht

Problem: FD$_{\text{FIXED}}$
Gegeben eine Datenbank, eine Spalte A und ein Parameter k. Gibt es eine funktionale Abhängigkeit $X \to A$ mit $|X| \leq k$?

Reduktionen



Funktionale Abhängigkeiten

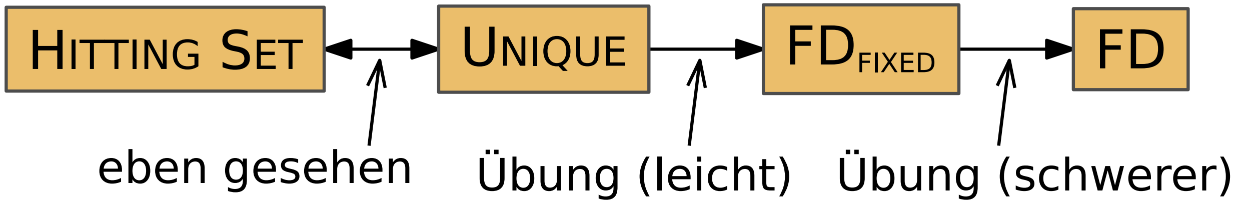
Problem: FD
Gegeben eine Datenbank und ein Parameter k. Gibt es eine funktionale Abhängigkeit $X \to A$ mit $|X| \leq k$?

Zeige $W[2]$-Schwere für FD

- reduziere von UNIQUE
- leichter, wenn im Problem FD die rechte Seite A feststeht

Problem: FD_{FIXED}
Gegeben eine Datenbank, eine Spalte A und ein Parameter k. Gibt es eine funktionale Abhängigkeit $X \to A$ mit $|X| \leq k$?

Reduktionen



HITTING SET ↔ UNIQUE → FD_{FIXED} → FD

eben gesehen

Übung (leicht)

Übung (schwerer)

Funktionale Abhängigkeiten

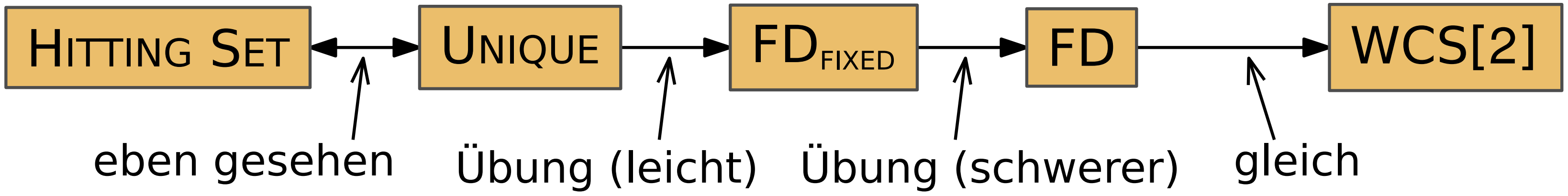
Problem: FD
Gegeben eine Datenbank und ein Parameter k. Gibt es eine funktionale Abhängigkeit $X \rightarrow A$ mit $|X| \leq k$?

Zeige $W[2]$-Schwere für FD

- reduziere von Unique
- leichter, wenn im Problem FD die rechte Seite A feststeht

Problem: FD_{FIXED}
Gegeben eine Datenbank, eine Spalte A und ein Parameter k. Gibt es eine funktionale Abhängigkeit $X \rightarrow A$ mit $|X| \leq k$?

Reduktionen



Funktionale Abhängigkeiten

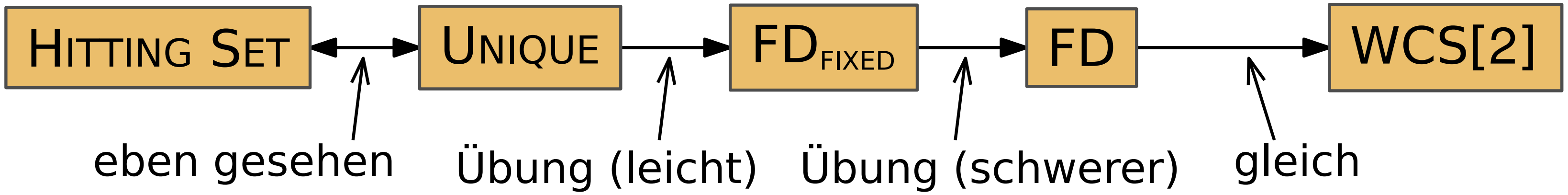
Problem: FD
Gegeben eine Datenbank und ein Parameter k. Gibt es eine funktionale Abhängigkeit $X \to A$ mit $|X| \leq k$?

Zeige $W[2]$-Schwere für FD

- reduziere von Unique
- leichter, wenn im Problem FD die rechte Seite A feststeht

Problem: FD$_{\text{FIXED}}$
Gegeben eine Datenbank, eine Spalte A und ein Parameter k. Gibt es eine funktionale Abhängigkeit $X \to A$ mit $|X| \leq k$?

Reduktionen



Hitting Set ↔ Unique → FD$_{\text{FIXED}}$ → FD → WCS[2]

eben gesehen

Übung (leicht)

Übung (schwerer)

gleich

- Hitting Set und WCS[2] sind $W[2]$-vollständig
  $\Rightarrow$ FD$_{\text{FIXED}}$ und FD sind $W[2]$-vollständig

FD $\rightarrow$ WCS[2]

Definition (Grundsätzliche Annahme: $A \notin X$)
Für eine Spaltenmenge X und eine Spalte A ist $X \rightarrow A$ eine **Funktionale Abh.**, wenn $r_i[A] \neq r_j[A] \Rightarrow r_i[X] \neq r_j[X]$ für alle Zeilenpaare (r_i, r_j).

Grober Plan

- modelliere die Bedingungen von FD mittels Boolescher Formeln
- verwende für jede Bedingung nur $\vee$ und ein $\wedge$ am Ende (CNF)

  ($\Rightarrow$ Schaltkreis wird 2-normalisiert und damit Weft-2 (wenn auch nicht monoton))

FD $\rightarrow$ WCS[2]

Definition (Grundsätzliche Annahme: $A \notin X$)
Für eine Spaltenmenge X und eine Spalte A ist $X \rightarrow A$ eine **Funktionale Abh.**, wenn $r_i[A] \neq r_j[A] \Rightarrow r_i[X] \neq r_j[X]$ für alle Zeilenpaare (r_i, r_j).

Grober Plan

- modelliere die Bedingungen von FD mittels Boolescher Formeln
- verwende für jede Bedingung nur $\vee$ und ein $\wedge$ am Ende (CNF)
  ($\Rightarrow$ Schaltkreis wird 2-normalisiert und damit Weft-2 (wenn auch nicht monoton))

Was sind die Bedingungen? Welche Variablen benutzen wir?

FD $\rightarrow$ WCS[2]

Definition (Grundsätzliche Annahme: $A \notin X$)
Für eine Spaltenmenge X und eine Spalte A ist $X \rightarrow A$ eine **Funktionale Abh.**, wenn $r_i[A] \neq r_j[A] \Rightarrow r_i[X] \neq r_j[X]$ für alle Zeilenpaare (r_i, r_j).

Grober Plan

- modelliere die Bedingungen von FD mittels Boolescher Formeln
- verwende für jede Bedingung nur $\vee$ und ein $\wedge$ am Ende (CNF)
  ($\Rightarrow$ Schaltkreis wird 2-normalisiert und damit Weft-2 (wenn auch nicht monoton))

Was sind die Bedingungen? Welche Variablen benutzen wir?

- RHS besteht aus ein genau einer Spalte
- LHS und RHS sind disjunkte Spaltenmengen
- wenn $r_i[A] \neq r_j[A]$ für ein Zeilenpaar (r_i, r_j) und $A \in$ RHS, dann:
  für eine Spalte B mit $r_i[B] \neq r_j[B]$ gilt $B \in$ LHS

FD $\rightarrow$ WCS[2]

Definition (Grundsätzliche Annahme: $A \notin X$)
Für eine Spaltenmenge X und eine Spalte A ist $X \rightarrow A$ eine **Funktionale Abh.**, wenn $r_i[A] \neq r_j[A] \Rightarrow r_i[X] \neq r_j[X]$ für alle Zeilenpaare (r_i, r_j).

Grober Plan

- modelliere die Bedingungen von FD mittels Boolescher Formeln
- verwende für jede Bedingung nur $\vee$ und ein $\wedge$ am Ende (CNF)
  ($\Rightarrow$ Schaltkreis wird 2-normalisiert und damit Weft-2 (wenn auch nicht monoton))

Was sind die Bedingungen? Welche Variablen benutzen wir?

- RHS besteht aus ein genau einer Spalte
- LHS und RHS sind disjunkte Spaltenmengen
- wenn $r_i[A] \neq r_j[A]$ für ein Zeilenpaar (r_i, r_j) und $A \in$ RHS, dann:
  für eine Spalte B mit $r_i[B] \neq r_j[B]$ gilt $B \in$ LHS
- Indikatorvariablen x_A und x'_A für $A \in$ LHS bzw. $A \in$ RHS

FD $\rightarrow$ WCS[2]

Definition (Grundsätzliche Annahme: $A \notin X$)
Für eine Spaltenmenge X und eine Spalte A ist $X \rightarrow A$ eine **Funktionale Abh.**, wenn $r_i[A] \neq r_j[A] \Rightarrow r_i[X] \neq r_j[X]$ für alle Zeilenpaare (r_i, r_j).

Grober Plan

- modelliere die Bedingungen von FD mittels Boolescher Formeln
- verwende für jede Bedingung nur $\vee$ und ein $\wedge$ am Ende (CNF)

  ($\Rightarrow$ Schaltkreis wird 2-normalisiert und damit Weft-2 (wenn auch nicht monoton))

Was sind die Bedingungen? Welche Variablen benutzen wir?

- RHS besteht aus ein genau einer Spalte
- LHS und RHS sind disjunkte Spaltenmengen
- wenn $r_i[A] \neq r_j[A]$ für ein Zeilenpaar (r_i, r_j) und $A \in$ RHS, dann:
  für eine Spalte B mit $r_i[B] \neq r_j[B]$ gilt $B \in$ LHS
- Indikatorvariablen x_A und x'_A für $A \in$ LHS bzw. $A \in$ RHS

RHS besteht aus genau einer Spalte

FD $\to$ WCS[2]

Definition (Grundsätzliche Annahme: $A \notin X$)
Für eine Spaltenmenge X und eine Spalte A ist $X \to A$ eine **Funktionale Abh.**, wenn $r_i[A] \neq r_j[A] \Rightarrow r_i[X] \neq r_j[X]$ für alle Zeilenpaare (r_i, r_j).

Grober Plan

- modelliere die Bedingungen von FD mittels Boolescher Formeln
- verwende für jede Bedingung nur $\vee$ und ein $\wedge$ am Ende (CNF)

  ($\Rightarrow$ Schaltkreis wird 2-normalisiert und damit Weft-2 (wenn auch nicht monoton))

Was sind die Bedingungen? Welche Variablen benutzen wir?

- RHS besteht aus ein genau einer Spalte
- LHS und RHS sind disjunkte Spaltenmengen
- wenn $r_i[A] \neq r_j[A]$ für ein Zeilenpaar (r_i, r_j) und $A \in$ RHS, dann:
  für eine Spalte B mit $r_i[B] \neq r_j[B]$ gilt $B \in$ LHS
- Indikatorvariablen x_A und x'_A für $A \in$ LHS bzw. $A \in$ RHS

RHS besteht aus genau einer Spalte

- mindestens eine Spalte: $\bigvee_{\text{Spalte } A} x'_A$

FD → WCS[2]

Definition (Grundsätzliche Annahme: $A \notin X$)
Für eine Spaltenmenge X und eine Spalte A ist $X \to A$ eine **Funktionale Abh.**, wenn $r_i[A] \neq r_j[A] \Rightarrow r_i[X] \neq r_j[X]$ für alle Zeilenpaare (r_i, r_j).

Grober Plan

- modelliere die Bedingungen von FD mittels Boolescher Formeln
- verwende für jede Bedingung nur $\vee$ und ein $\wedge$ am Ende (CNF)

  (⇒ Schaltkreis wird 2-normalisiert und damit Weft-2 (wenn auch nicht monoton))

Was sind die Bedingungen? Welche Variablen benutzen wir?

- RHS besteht aus ein genau einer Spalte
- LHS und RHS sind disjunkte Spaltenmengen
- wenn $r_i[A] \neq r_j[A]$ für ein Zeilenpaar (r_i, r_j) und $A \in$ RHS, dann:
  für eine Spalte B mit $r_i[B] \neq r_j[B]$ gilt $B \in$ LHS
- Indikatorvariablen x_A und x'_A für $A \in$ LHS bzw. $A \in$ RHS

RHS besteht aus genau einer Spalte

- mindestens eine Spalte: $\bigvee_{\text{Spalte } A} x'_A$
- nicht zwei Spalten A und B in der RHS: $\neg x'_A \vee \neg x'_B$

FD → WCS[2]

Definition (Grundsätzliche Annahme: $A \notin X$)
Für eine Spaltenmenge X und eine Spalte A ist $X \to A$ eine **Funktionale Abh.**, wenn $r_i[A] \neq r_j[A] \Rightarrow r_i[X] \neq r_j[X]$ für alle Zeilenpaare (r_i, r_j).

Grober Plan

- modelliere die Bedingungen von FD mittels Boolescher Formeln
- verwende für jede Bedingung nur $\vee$ und ein $\wedge$ am Ende (CNF)
  (⇒ Schaltkreis wird 2-normalisiert und damit Weft-2 (wenn auch nicht monoton))

Was sind die Bedingungen? Welche Variablen benutzen wir?

- RHS besteht aus ein genau einer Spalte
- LHS und RHS sind disjunkte Spaltenmengen
- wenn $r_i[A] \neq r_j[A]$ für ein Zeilenpaar (r_i, r_j) und $A \in$ RHS, dann:
  für eine Spalte B mit $r_i[B] \neq r_j[B]$ gilt $B \in$ LHS
- Indikatorvariablen x_A und x'_A für $A \in$ LHS bzw. $A \in$ RHS

LHS und RHS sind disjunkt

FD $\to$ WCS[2]

Definition (Grundsätzliche Annahme: $A \notin X$)
Für eine Spaltenmenge X und eine Spalte A ist $X \to A$ eine **Funktionale Abh.**, wenn $r_i[A] \neq r_j[A] \Rightarrow r_i[X] \neq r_j[X]$ für alle Zeilenpaare (r_i, r_j).

Grober Plan

- modelliere die Bedingungen von FD mittels Boolescher Formeln
- verwende für jede Bedingung nur $\vee$ und ein $\wedge$ am Ende (CNF)
  ($\Rightarrow$ Schaltkreis wird 2-normalisiert und damit Weft-2 (wenn auch nicht monoton))

Was sind die Bedingungen? Welche Variablen benutzen wir?

- RHS besteht aus ein genau einer Spalte
- LHS und RHS sind disjunkte Spaltenmengen
- wenn $r_i[A] \neq r_j[A]$ für ein Zeilenpaar (r_i, r_j) und $A \in$ RHS, dann:
  für eine Spalte B mit $r_i[B] \neq r_j[B]$ gilt $B \in$ LHS
- Indikatorvariablen x_A und x'_A für $A \in$ LHS bzw. $A \in$ RHS

LHS und RHS sind disjunkt

- für jede Spalte A: $\neg x_A \vee \neg x'_A$

FD → WCS[2]

Definition (Grundsätzliche Annahme: $A \notin X$)
Für eine Spaltenmenge X und eine Spalte A ist $X \to A$ eine **Funktionale Abh.**, wenn $r_i[A] \neq r_j[A] \Rightarrow r_i[X] \neq r_j[X]$ für alle Zeilenpaare (r_i, r_j).

Grober Plan

- modelliere die Bedingungen von FD mittels Boolescher Formeln
- verwende für jede Bedingung nur $\vee$ und ein $\wedge$ am Ende (CNF)

  (⇒ Schaltkreis wird 2-normalisiert und damit Weft-2 (wenn auch nicht monoton))

Was sind die Bedingungen? Welche Variablen benutzen wir?

- RHS besteht aus ein genau einer Spalte
- LHS und RHS sind disjunkte Spaltenmengen
- wenn $r_i[A] \neq r_j[A]$ für ein Zeilenpaar (r_i, r_j) und $A \in$ RHS, dann: für eine Spalte B mit $r_i[B] \neq r_j[B]$ gilt $B \in$ LHS
- Indikatorvariablen x_A und x'_A für $A \in$ LHS bzw. $A \in$ RHS

LHS und RHS bilden funktionale Abhängigkeit

FD → WCS[2]

Definition (Grundsätzliche Annahme: $A \notin X$)
Für eine Spaltenmenge X und eine Spalte A ist $X \to A$ eine **Funktionale Abh.**, wenn $r_i[A] \neq r_j[A] \Rightarrow r_i[X] \neq r_j[X]$ für alle Zeilenpaare (r_i, r_j).

Grober Plan

- modelliere die Bedingungen von FD mittels Boolescher Formeln
- verwende für jede Bedingung nur $\vee$ und ein $\wedge$ am Ende (CNF)

  ($\Rightarrow$ Schaltkreis wird 2-normalisiert und damit Weft-2 (wenn auch nicht monoton))

Was sind die Bedingungen? Welche Variablen benutzen wir?

- RHS besteht aus ein genau einer Spalte
- LHS und RHS sind disjunkte Spaltenmengen
- wenn $r_i[A] \neq r_j[A]$ für ein Zeilenpaar (r_i, r_j) und $A \in$ RHS, dann:
  für eine Spalte B mit $r_i[B] \neq r_j[B]$ gilt $B \in$ LHS
- Indikatorvariablen x_A und x'_A für $A \in$ LHS bzw. $A \in$ RHS

LHS und RHS bilden funktionale Abhängigkeit

- für jede Spalte A, und jedes Paar (r_i, r_j) mit $r_i[A] \neq r_j[A]$:

$$\neg x'_A \vee \bigvee_{\substack{\text{Spalte } A \neq B \\ r_i[B] \neq r_j[B]}} x_B$$

FD $\rightarrow$ WCS[2]

Definition (Grundsätzliche Annahme: $A \notin X$)
Für eine Spaltenmenge X und eine Spalte A ist $X \rightarrow A$ eine **Funktionale Abh.**, wenn $r_i[A] \neq r_j[A] \Rightarrow r_i[X] \neq r_j[X]$ für alle Zeilenpaare (r_i, r_j).

Grober Plan

- modelliere die Bedingungen von FD mittels Boolescher Formeln
- verwende für jede Bedingung nur $\vee$ und ein $\wedge$ am Ende (CNF)
  ($\Rightarrow$ Schaltkreis wird 2-normalisiert und damit Weft-2 (wenn auch nicht monoton))

Was sind die Bedingungen? Welche Variablen benutzen wir?

- RHS besteht aus ein genau einer Spalte
- LHS und RHS sind disjunkte Spaltenmengen
- wenn $r_i[A] \neq r_j[A]$ für ein Zeilenpaar (r_i, r_j) und $A \in$ RHS, dann:
  für eine Spalte B mit $r_i[B] \neq r_j[B]$ gilt $B \in$ LHS
- Indikatorvariablen x_A und x'_A für $A \in$ LHS bzw. $A \in$ RHS

Theorem
Die Probleme Unique, FD$_{\text{FIXED}}$ und FD sind $W[2]$-vollständig.

Inclusion Dependency

Ziel: finde Daten in einer Datenbank, die in einer anderen enthalten sind

Schema R

A	B	C
1	1	1
3	1	2
1	2	1
2	3	3
3	4	4

Schema S

D	E	F	G
4	1	3	1
3	3	4	1
3	3	3	2
4	2	1	3
2	4	1	3
4	4	4	3

Inclusion Dependency

Ziel: finde Daten in einer Datenbank, die in einer anderen enthalten sind

Schema R

A	B	C
1	1	1
3	1	2
1	2	1
2	3	3
3	4	4

Schema S

D	E	F	G
4	1	3	1
3	3	4	1
3	3	3	2
4	2	1	3
2	4	1	3
4	4	4	3

- betrachte Spalten $X = \{A, C\} \subseteq R$
- und Abbildung $\sigma\colon X \to S$ mit $\sigma(A) = G$ und $\sigma(C) = E$

Inclusion Dependency

Ziel: finde Daten in einer Datenbank, die in einer anderen enthalten sind

Schema R

A	B	C
1	1	1
3	1	2
1	2	1
2	3	3
3	4	4

Schema S

D	E	F	G
4	1	3	1
3	3	4	1
3	3	3	2
4	2	1	3
2	4	1	3
4	4	4	3

- betrachte Spalten $X = \{A, C\} \subseteq R$
- und Abbildung $\sigma : X \to S$ mit $\sigma(A) = G$ und $\sigma(C) = E$
- Tupel für X: $\{11, 32, 23, 34\}$

$$\rotatebox{90}{$\subseteq$}$$

- Tupel für $\sigma(X)$: $\{11, 13, 23, 32, 34\}$

Inclusion Dependency

Ziel: finde Daten in einer Datenbank, die in einer anderen enthalten sind

Schema R

A	B	C
1	1	1
3	1	2
1	2	1
2	3	3
3	4	4

Schema S

D	E	F	G
4	1	3	1
3	3	4	1
3	3	3	2
4	2	1	3
2	4	1	3
4	4	4	3

- betrachte Spalten $X = \{A, C\} \subseteq R$
- und Abbildung $\sigma\colon X \to S$ mit $\sigma(A) = G$ und $\sigma(C) = E$
- Tupel für X: $\{11, 32, 23, 34\}$

$\rotatebox{-90}{$\subseteq$}$

- Tupel für $\sigma(X)$: $\{11, 13, 23, 32, 34\}$

Definition
Betrachte die Instanzen r und s zweier Schemata R bzw. S. Eine Teilmenge $X \subseteq R$ zusammen mit einer injektiven Abbildung $\sigma\colon X \to S$ ist eine **Inclusion Dependency**, wenn $r[X] \subseteq s[\sigma(X)]$.

Inclusion Dependency

Ziel: finde Daten in einer Datenbank, die in einer anderen enthalten sind

Schema R

A	B	C
1	1	1
3	1	2
1	2	1
2	3	3
3	4	4

Schema S

D	E	F	G
4	1	3	1
3	3	4	1
3	3	3	2
4	2	1	3
2	4	1	3
4	4	4	3

- betrachte Spalten $X = \{A, C\} \subseteq R$
- und Abbildung $\sigma\colon X \to S$ mit $\sigma(A) = G$ und $\sigma(C) = E$
- Tupel für X: $\{11, 32, 23, 34\}$

$\rotatebox{-90}{$\subseteq$}$

- Tupel für $\sigma(X)$: $\{11, 13, 23, 32, 34\}$

Definition

Betrachte die Instanzen r und s zweier Schemata R bzw. S. Eine Teilmenge $X \subseteq R$ zusammen mit einer injektiven Abbildung $\sigma\colon X \to S$ ist eine **Inclusion Dependency**, wenn $r[X] \subseteq s[\sigma(X)]$.

Problem: IND

Gegeben seien zwei Datenbanken r und s sowie ein Parameter k. Gibt es eine Inclusion Dependency der Größe k?

Inclusion Dependency

Ziel: finde Daten in einer Datenbank, die in einer anderen enthalten sind

Schema R

A	B	C
1	1	1
3	1	2
1	2	1
2	3	3
3	4	4

Schema S

D	E	F	G
4	1	3	1
3	3	4	1
3	3	3	2
4	2	1	3
2	4	1	3
4	4	4	3

- betrachte Spalten $X = \{A, C\} \subseteq R$
- und Abbildung $\sigma\colon X \to S$ mit $\sigma(A) = G$ und $\sigma(C) = E$
- Tupel für X: $\{11, 32, 23, 34\}$

$\rotatebox{-90}{$\subseteq$}$

- Tupel für $\sigma(X)$: $\{11, 13, 23, 32, 34\}$

Definition

Betrachte die Instanzen r und s zweier Schemata R bzw. S. Eine Teilmenge $X \subseteq R$ zusammen mit einer injektiven Abbildung $\sigma\colon X \to S$ ist eine **Inclusion Dependency**, wenn $r[X] \subseteq s[\sigma(X)]$.

Problem: IND

Gegeben seien zwei Datenbanken r und s sowie ein Parameter k. Gibt es eine Inclusion Dependency der Größe k?

Problem: $\textbf{IND}_{\textbf{FIXED}}$

Gegeben seien r und s mit gleichem Schema und ein Parameter k. Gibt es eine Inclusion Dependency der Größe k mit der Identität als σ?

Finde die größte Inclusion Dependency

5	M	I	N
1	1	4	3
4	1	2	4
2	4	3	2
1	3	4	4
2	3	4	1
4	1	1	4
2	3	1	1

P	A	U	S	E
3	3	1	1	3
4	3	3	1	3
3	1	3	4	2
2	3	2	2	4
1	2	3	2	3
2	2	2	3	1
2	1	4	2	2
4	4	1	4	4

Definition
Betrachte die Instanzen r und s zweier Schemata R bzw. S. Eine Teilmenge $X \subseteq R$ zusammen mit einer injektiven Abbildung $\sigma\colon X \to S$ ist eine **Inclusion Dependency**, wenn $r[X] \subseteq s[\sigma(X)]$.

Finde die größte Inclusion Dependency

5	M	I	N
1	1	4	3
4	1	2	4
2	4	3	2
1	3	4	4
2	3	4	1
4	1	1	4
2	3	1	1

P	A	U	S	E
3	3	1	1	3
4	3	3	1	3
3	1	3	4	2
2	3	2	2	4
1	2	3	2	3
2	2	2	3	1
2	1	4	2	2
4	4	1	4	4

Lösung

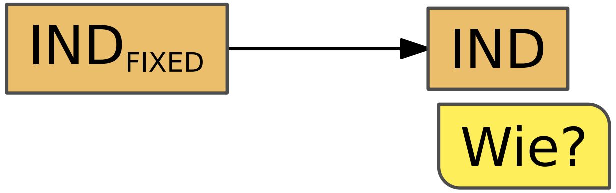
- $X = \{5, M, N\}$
- $\sigma(5) = S$, $\sigma(M) = U$ und $\sigma(N) = P$

Definition
Betrachte die Instanzen r und s zweier Schemata R bzw. S. Eine Teilmenge $X \subseteq R$ zusammen mit einer injektiven Abbildung $\sigma \colon X \to S$ ist eine **Inclusion Dependency**, wenn $r[X] \subseteq s[\sigma(X)]$.

IND ist *W*[3]-Vollständig

IND$_{\text{FIXED}}$ und IND

- Reduktion von IND$_{\text{FIXED}}$ auf IND ist einfach



IND$_{\text{FIXED}}$

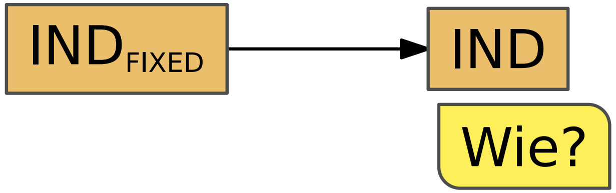
IND

Wie?

IND ist *W*[3]-Vollständig

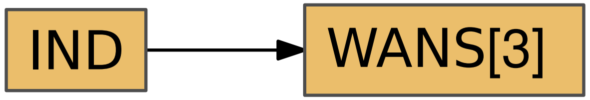
IND$_{\text{FIXED}}$ und IND

- Reduktion von IND$_{\text{FIXED}}$ auf IND ist einfach



IND und WANS[3]

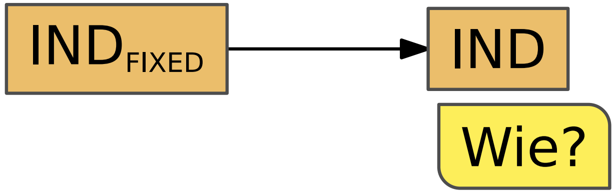
- Reduktion von IND auf WANS[3]



IND ist *W*[3]-Vollständig

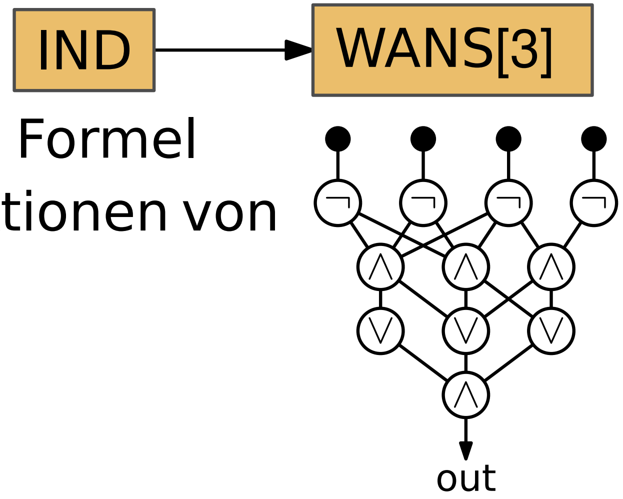
$\text{IND}_{\text{FIXED}}$ und IND

- Reduktion von $\text{IND}_{\text{FIXED}}$ auf IND ist einfach



IND und WANS[3]

- Reduktion von IND auf WANS[3]
- modelliere die IND-Bedingungen als Boolesche Formel
- stelle sicher: es ist eine Konjunktion von Disjunktionen von Konjunktionen von negierten Variablen



IND ist *W*[3]-Vollständig

$\text{IND}_{\text{FIXED}}$ und IND

- Reduktion von $\text{IND}_{\text{FIXED}}$ auf IND ist einfach

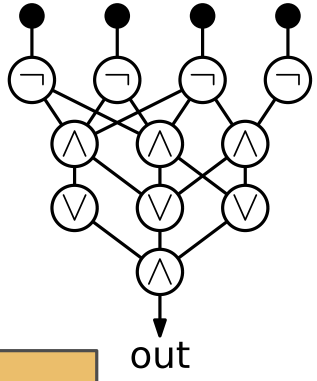
$\text{IND}_{\text{FIXED}} \rightarrow \text{IND}$

Wie?

IND und WANS[3]

- Reduktion von IND auf WANS[3]
- modelliere die IND-Bedingungen als Boolesche Formel
- stelle sicher: es ist eine Konjunktion von Disjunktionen von Konjunktionen von negierten Variablen

IND → WANS[3]



WANS[3] und $\text{IND}_{\text{FIXED}}$

- Reduktion von WANS[3] auf $\text{IND}_{\text{FIXED}}$

$\text{WANS[3]} \rightarrow \text{IND}_{\text{FIXED}}$

IND ist *W*[3]-Vollständig

$\text{IND}_{\text{FIXED}}$ und IND

- Reduktion von $\text{IND}_{\text{FIXED}}$ auf IND ist einfach

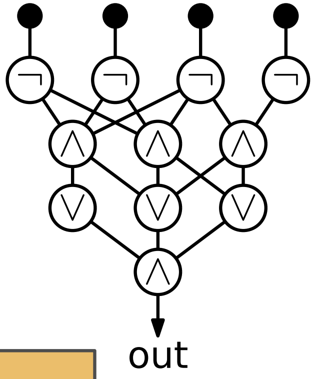
$\text{IND}_{\text{FIXED}} \rightarrow \text{IND}$

Wie?

IND und WANS[3]

- Reduktion von IND auf WANS[3]
- modelliere die IND-Bedingungen als Boolesche Formel
- stelle sicher: es ist eine Konjunktion von Disjunktionen von Konjunktionen von negierten Variablen

IND → WANS[3]



WANS[3] und $\text{IND}_{\text{FIXED}}$

- Reduktion von WANS[3] auf $\text{IND}_{\text{FIXED}}$
- modelliere antimonotone 3-normalisierte Boolesche Formeln mittels zweier Datenbanken

$\text{WANS[3]} \rightarrow \text{IND}_{\text{FIXED}}$

IND ist $W[3]$-Vollständig

$\text{IND}_{\text{FIXED}}$ und IND

- Reduktion von $\text{IND}_{\text{FIXED}}$ auf IND ist einfach

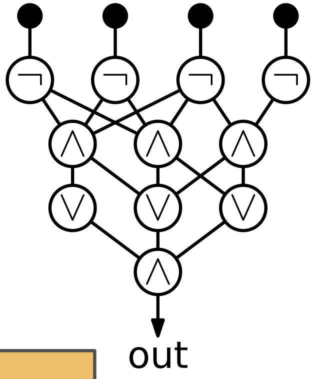
$\text{IND}_{\text{FIXED}} \to \text{IND}$

Wie?

IND und WANS[3]

- Reduktion von IND auf WANS[3]
- modelliere die IND-Bedingungen als Boolesche Formel
- stelle sicher: es ist eine Konjunktion von Disjunktionen von Konjunktionen von negierten Variablen

$\text{IND} \to \text{WANS[3]}$



WANS[3] und $\text{IND}_{\text{FIXED}}$

- Reduktion von WANS[3] auf $\text{IND}_{\text{FIXED}}$
- modelliere antimonotone 3-normalisierte Boolesche Formeln mittels zweier Datenbanken

$\text{WANS[3]} \to \text{IND}_{\text{FIXED}}$

Gesamtplan: $\text{WANS[3]} \to \text{IND}_{\text{FIXED}} \to \text{IND} \to \text{WANS[3]}$

WANS[3] → IND$_{\text{FIXED}}$

IND$_{\text{FIXED}}$ aufgefasst als Boolesche Funktion

- fasse eine Spaltenmenge als 01-String auf

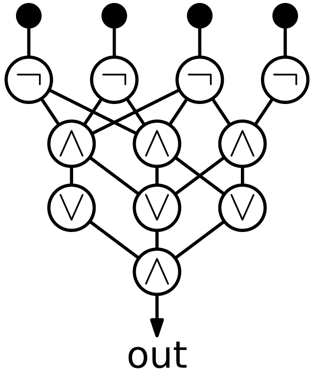
(Bsp: $\{A, C\} \widehat{=} 101$)

Datenbank r

A	B	C
1	1	1
3	1	2
1	2	1
2	3	3
3	4	4

Datenbank s

A	B	C
1	3	1
1	4	3
2	3	3
3	1	2
3	1	4
3	4	4



WANS[3] → IND$_{\text{FIXED}}$

IND$_{\text{FIXED}}$ aufgefasst als Boolesche Funktion

- fasse eine Spaltenmenge als 01-String auf

  (Bsp: $\{A, C\} \widehat{=} 101$)
- betrachte $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, mit $f(x) = 1 \Leftrightarrow x$ ist Inclusion Dependency für (r, s)

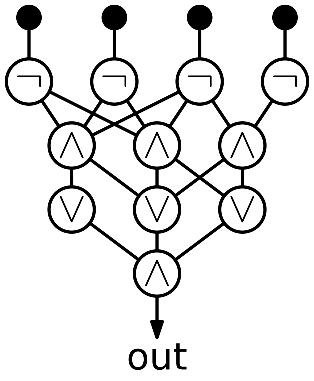
  (Bsp: $f(101) = 1$, $f(110) = 0$)

Datenbank r

A	B	C
1	1	1
3	1	2
1	2	1
2	3	3
3	4	4

Datenbank s

A	B	C
1	3	1
1	4	3
2	3	3
3	1	2
3	1	4
3	4	4



WANS[3] → $\text{IND}_{\text{FIXED}}$

$\text{IND}_{\text{FIXED}}$ aufgefasst als Boolesche Funktion

- fasse eine Spaltenmenge als 01-String auf

  (Bsp: $\{A, C\} \widehat{=} 101$)

- betrachte $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, mit $f(x) = 1 \Leftrightarrow x$ ist Inclusion Dependency für (r, s)

  (Bsp: $f(101) = 1$, $f(110) = 0$)

Datenbank r

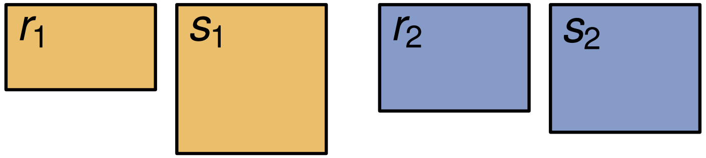
A	B	C
1	1	1
3	1	2
1	2	1
2	3	3
3	4	4

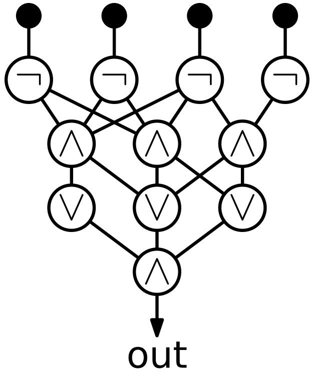
Datenbank s

A	B	C
1	3	1
1	4	3
2	3	3
3	1	2
3	1	4
3	4	4

Verundung von zwei Instanzen (über dem gleichen Schema)

- betrachte Instanzen (r_1, s_1) und (r_2, s_2) mit Funktionen f_1 bzw. f_2





WANS[3] $\rightarrow$ IND$_{\text{FIXED}}$

IND$_{\text{FIXED}}$ aufgefasst als Boolesche Funktion

- fasse eine Spaltenmenge als 01-String auf

  (Bsp: $\{A, C\} \widehat{=} 101$)

- betrachte $f \colon \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, mit $f(x) = 1 \Leftrightarrow x$ ist Inclusion Dependency für (r, s)

  (Bsp: $f(101) = 1$, $f(110) = 0$)

Datenbank r

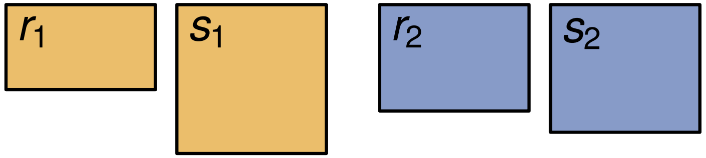
A	B	C
1	1	1
3	1	2
1	2	1
2	3	3
3	4	4

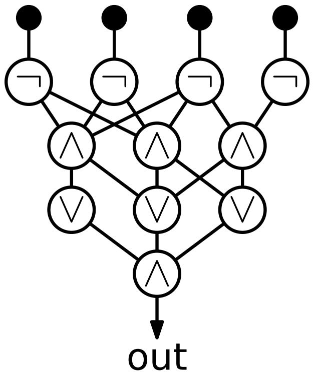
Datenbank s

A	B	C
1	3	1
1	4	3
2	3	3
3	1	2
3	1	4
3	4	4

Verundung von zwei Instanzen (über dem gleichen Schema)

- betrachte Instanzen (r_1, s_1) und (r_2, s_2) mit Funktionen f_1 bzw. f_2
- git es Instanz (r, s), sodass $f = f_1 \wedge f_2$?





WANS[3] $\rightarrow$ IND$_{\text{FIXED}}$

IND$_{\text{FIXED}}$ aufgefasst als Boolesche Funktion

- fasse eine Spaltenmenge als 01-String auf
  (Bsp: $\{A, C\} \widehat{=} 101$)
- betrachte $f\colon \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$, mit $f(x) = 1 \Leftrightarrow x$ ist Inclusion Dependency für (r, s)
  (Bsp: $f(101) = 1$, $f(110) = 0$)

Datenbank r

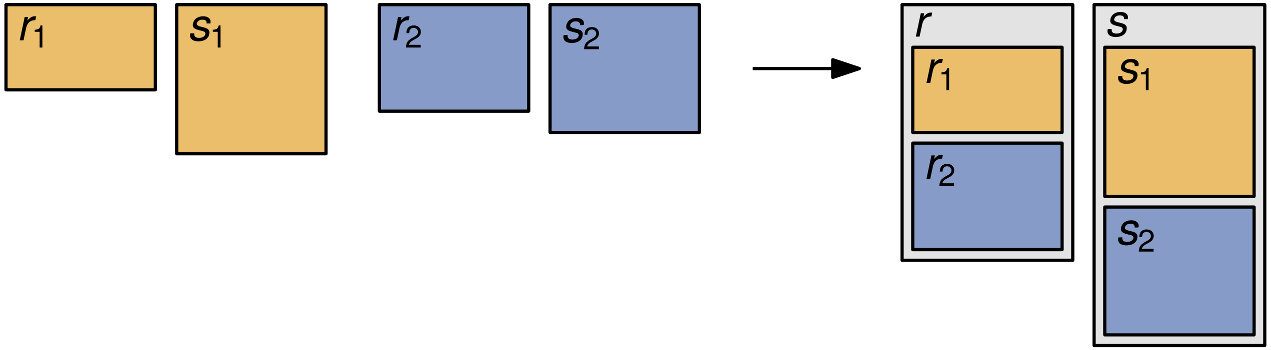
A	B	C
1	1	1
3	1	2
1	2	1
2	3	3
3	4	4

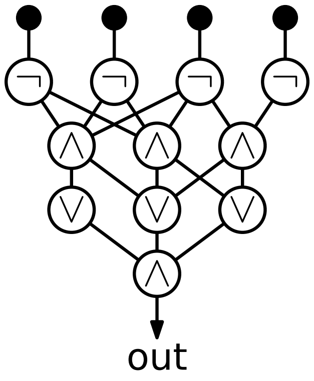
Datenbank s

A	B	C
1	3	1
1	4	3
2	3	3
3	1	2
3	1	4
3	4	4

Verundung von zwei Instanzen (über dem gleichen Schema)

- betrachte Instanzen (r_1, s_1) und (r_2, s_2) mit Funktionen f_1 bzw. f_2
- git es Instanz (r, s), sodass $f = f_1 \wedge f_2$?
- Idee: sorge dafür, dass (r_1, s_1) und (r_2, s_2) disjunkte Werte haben und schreibe die Instanzen einfach untereinander





WANS[3] $\rightarrow$ IND$_{\text{FIXED}}$

IND$_{\text{FIXED}}$ aufgefasst als Boolesche Funktion

- fasse eine Spaltenmenge als 01-String auf (Bsp: $\{A, C\} \widehat{=} 101$)
- betrachte $f\colon \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$, mit $f(x) = 1 \Leftrightarrow x$ ist Inclusion Dependency für (r, s) (Bsp: $f(101) = 1$, $f(110) = 0$)

Datenbank r

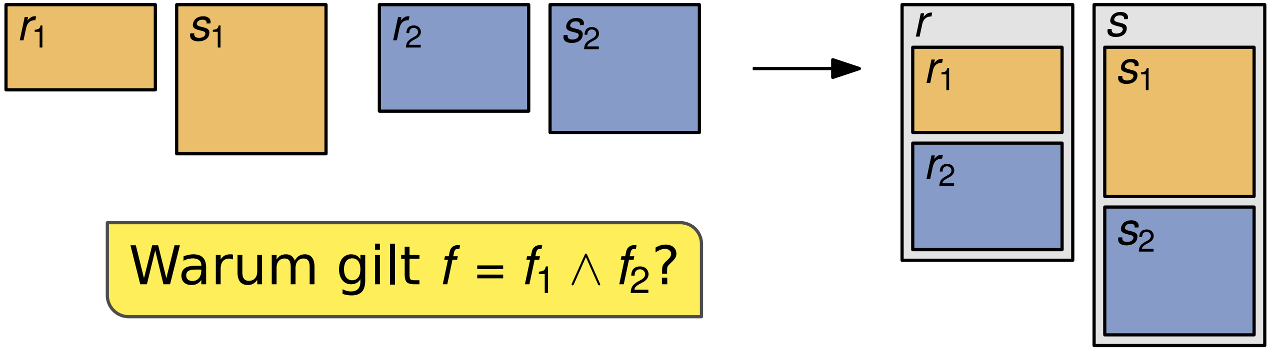
A	B	C
1	1	1
3	1	2
1	2	1
2	3	3
3	4	4

Datenbank s

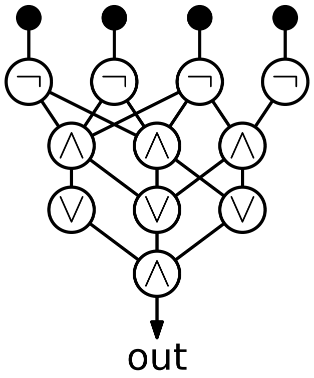
A	B	C
1	3	1
1	4	3
2	3	3
3	1	2
3	1	4
3	4	4

Verundung von zwei Instanzen (über dem gleichen Schema)

- betrachte Instanzen (r_1, s_1) und (r_2, s_2) mit Funktionen f_1 bzw. f_2
- git es Instanz (r, s), sodass $f = f_1 \wedge f_2$?
- Idee: sorge dafür, dass (r_1, s_1) und (r_2, s_2) disjunkte Werte haben und schreibe die Instanzen einfach untereinander

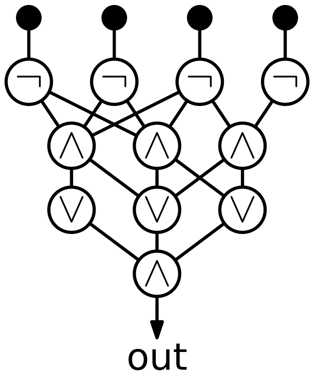


Warum gilt $f = f_1 \wedge f_2$?



WANS[3] $\rightarrow$ IND$_{\text{FIXED}}$

Lemma
Gegeben zwei IND$_{\text{FIXED}}$-Instanzen mit Indikatorfunktionen f_1 und f_2, dann gibt es eine (nicht zu große) IND$_{\text{FIXED}}$-Instanz mit Indikatorfunktion $f_1 \wedge f_2$.

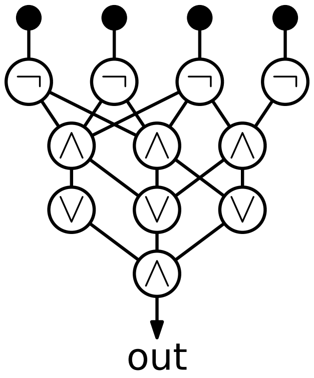


WANS[3] $\rightarrow$ IND$_{\text{FIXED}}$

Lemma
Gegeben zwei IND$_{\text{FIXED}}$-Instanzen mit Indikatorfunktionen f_1 und f_2, dann gibt es eine (nicht zu große) IND$_{\text{FIXED}}$-Instanz mit Indikatorfunktion $f_1 \wedge f_2$.

Zwischenstand

- Konjunktionen können wir also schon modellieren
- können wir auf ähnliche Art auch Disjunktionen modellieren?

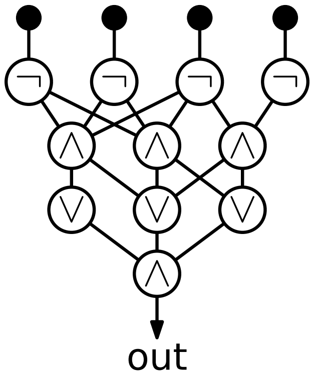


WANS[3] → $\text{IND}_{\text{FIXED}}$

Lemma
Gegeben zwei $\text{IND}_{\text{FIXED}}$-Instanzen mit Indikatorfunktionen f_1 und f_2, dann gibt es eine (nicht zu große) $\text{IND}_{\text{FIXED}}$-Instanz mit Indikatorfunktion $f_1 \wedge f_2$.

Zwischenstand

- Konjunktionen können wir also schon modellieren
- können wir auf ähnliche Art auch Disjunktionen modellieren?
- falls ja, dann wäre $\text{IND}_{\text{FIXED}}$ sogar $W[t]$-schwer, für beliebiges t



WANS[3] → $\text{IND}_{\text{FIXED}}$

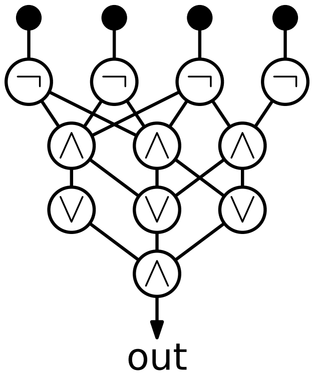
Lemma
Gegeben zwei $\text{IND}_{\text{FIXED}}$-Instanzen mit Indikatorfunktionen f_1 und f_2, dann gibt es eine (nicht zu große) $\text{IND}_{\text{FIXED}}$-Instanz mit Indikatorfunktion $f_1 \wedge f_2$.

Zwischenstand

- Konjunktionen können wir also schon modellieren
- können wir auf ähnliche Art auch Disjunktionen modellieren?
- falls ja, dann wäre $\text{IND}_{\text{FIXED}}$ sogar $W[t]$-schwer, für beliebiges t

Ziel: modelliere Disjunktion von Konjunktionen von negierten Variablen

$\varphi = c_1 \vee c_2 \vee c_3$
$c_1 = (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3)$
$c_2 = (\neg x_2 \wedge \neg x_4 \wedge \neg x_5)$
$c_3 = (\neg x_1 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4 \wedge \neg x_6)$



WANS[3] → IND$_{\text{FIXED}}$

Lemma
Gegeben zwei IND$_{\text{FIXED}}$-Instanzen mit Indikatorfunktionen f_1 und f_2, dann gibt es eine (nicht zu große) IND$_{\text{FIXED}}$-Instanz mit Indikatorfunktion $f_1 \wedge f_2$.

Zwischenstand

- Konjunktionen können wir also schon modellieren
- können wir auf ähnliche Art auch Disjunktionen modellieren?
- falls ja, dann wäre IND$_{\text{FIXED}}$ sogar $W[t]$-schwer, für beliebiges t

Ziel: modelliere Disjunktion von Konjunktionen von negierten Variablen

$\varphi = c_1 \vee c_2 \vee c_3$

$c_1 = (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3)$

$c_2 = (\neg x_2 \wedge \neg x_4 \wedge \neg x_5)$

$c_3 = (\neg x_1 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4 \wedge \neg x_6)$

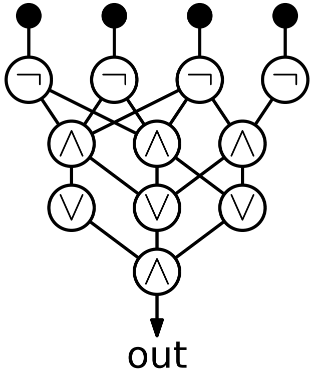
r:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
0	0	0	0	0	0

s:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	1	1	0	0	0

- ein einzelnes c_i darstellen ist leicht



WANS[3] $\rightarrow$ IND$_{\text{FIXED}}$

Lemma
Gegeben zwei IND$_{\text{FIXED}}$-Instanzen mit Indikatorfunktionen f_1 und f_2, dann gibt es eine (nicht zu große) IND$_{\text{FIXED}}$-Instanz mit Indikatorfunktion $f_1 \wedge f_2$.

Zwischenstand

- Konjunktionen können wir also schon modellieren
- können wir auf ähnliche Art auch Disjunktionen modellieren?
- falls ja, dann wäre IND$_{\text{FIXED}}$ sogar $W[t]$-schwer, für beliebiges t

Ziel: modelliere Disjunktion von Konjunktionen von negierten Variablen

$\varphi = c_1 \vee c_2 \vee c_3$

$c_1 = (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3)$

$c_2 = (\neg x_2 \wedge \neg x_4 \wedge \neg x_5)$

$c_3 = (\neg x_1 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4 \wedge \neg x_6)$

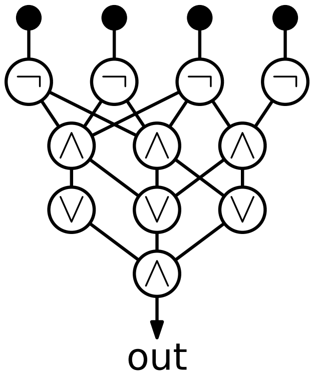
r:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
0	0	0	0	0	0

s:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1

- ein einzelnes c_i darstellen ist leicht
- Veroderung der c_i: biete in s jedes der c_i einmal an



WANS[3] → $\text{IND}_{\text{FIXED}}$

Lemma
Gegeben zwei $\text{IND}_{\text{FIXED}}$-Instanzen mit Indikatorfunktionen f_1 und f_2, dann gibt es eine (nicht zu große) $\text{IND}_{\text{FIXED}}$-Instanz mit Indikatorfunktion $f_1 \wedge f_2$.

Zwischenstand

- Konjunktionen können wir also schon modellieren
- können wir auf ähnliche Art auch Disjunktionen modellieren?
- falls ja, dann wäre $\text{IND}_{\text{FIXED}}$ sogar $W[t]$-schwer, für beliebiges t

Ziel: modelliere Disjunktion von Konjunktionen von negierten Variablen

$\varphi = c_1 \vee c_2 \vee c_3$

$c_1 = (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3)$

$c_2 = (\neg x_2 \wedge \neg x_4 \wedge \neg x_5)$

$c_3 = (\neg x_1 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4 \wedge \neg x_6)$

r:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
0	0	0	0	0	0

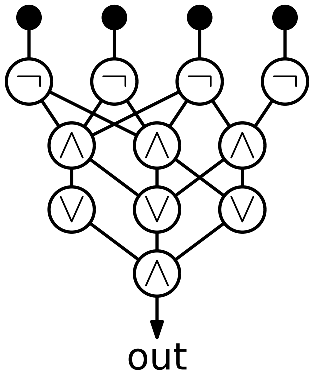
s:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1

- ein einzelnes c_i darstellen ist leicht
- Veroderung der c_i: biete in s jedes der c_i einmal an

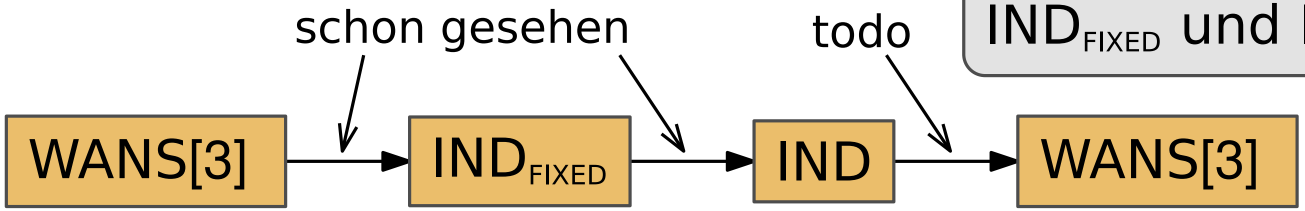
Zeige: Lösung für φ liefert Lösung für (r, s) und umgekehrt

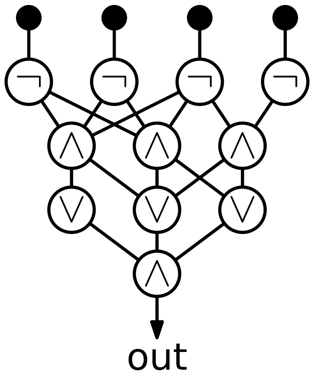
Wie?



Zwischenstand

Theorem
IND$_{\text{FIXED}}$ und IND sind $W[3]$-schwer.

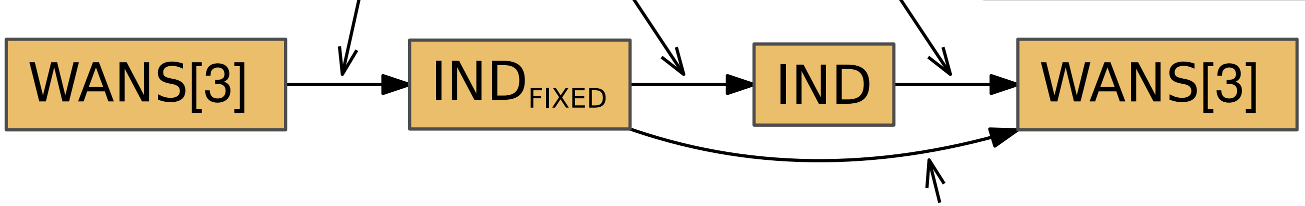




Zwischenstand

Theorem

$\text{IND}_{\text{FIXED}}$ und IND sind $W[3]$-schwer.



schon gesehen

todo

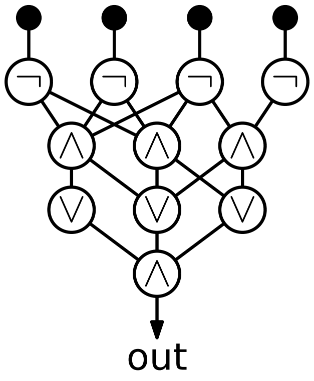
WANS[3]

$\text{IND}_{\text{FIXED}}$

IND

WANS[3]

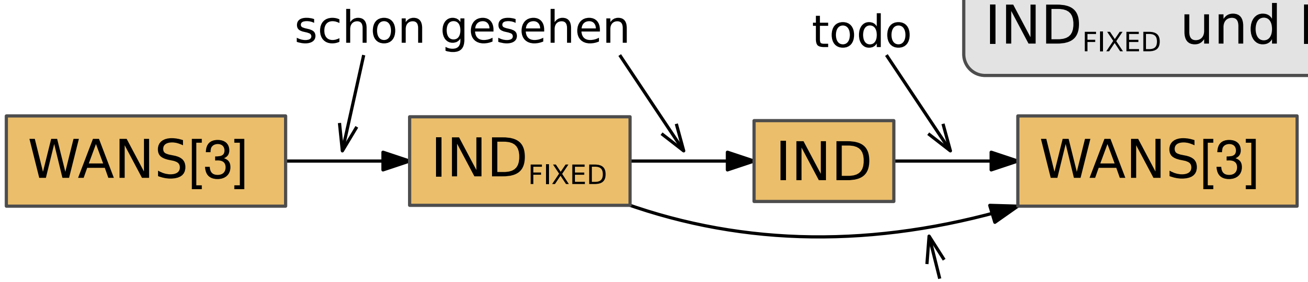
etwas leichter und auf IND → WANS[3] erweiterbar



Zwischenstand

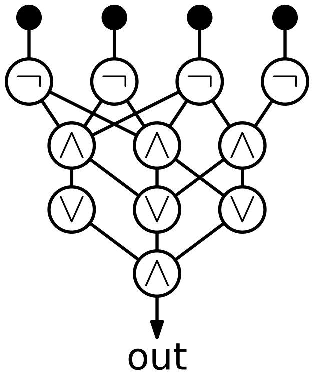
Theorem

$\text{IND}_{\text{FIXED}}$ und IND sind $W[3]$-schwer.



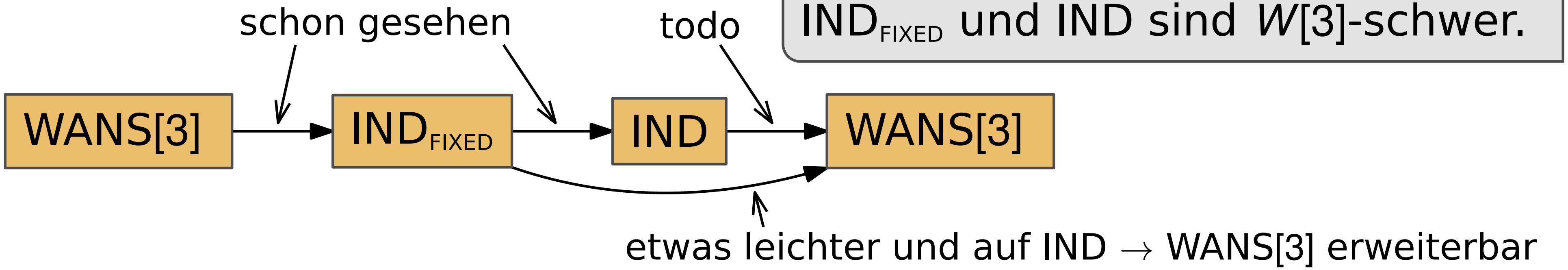
etwas leichter und auf IND → WANS[3] erweiterbar

Welche Bedingungen müssen wir modellieren?



Zwischenstand

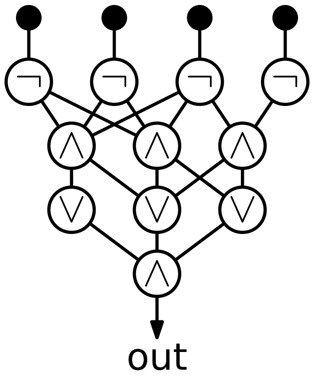
Theorem
$\text{IND}_{\text{FIXED}}$ und IND sind $W[3]$-schwer.



Welche Bedingungen müssen wir modellieren?

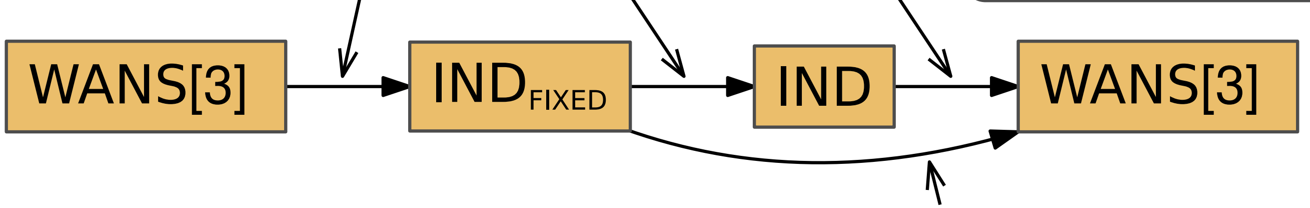
- einzelnes Zeilenpaar (r_i, s_j): wähle gewisse Elemente nicht

$$\begin{array}{ccccc} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ r_j & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ s_j & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \longrightarrow \neg x_2 \wedge \neg x_3$$



Zwischenstand

Theorem
$\mathrm{IND}_{\mathrm{FIXED}}$ und IND sind $W[3]$-schwer.


schon gesehen

todo

WANS[3] → $\mathrm{IND}_{\mathrm{FIXED}}$ → IND → WANS[3]

etwas leichter und auf IND → WANS[3] erweiterbar

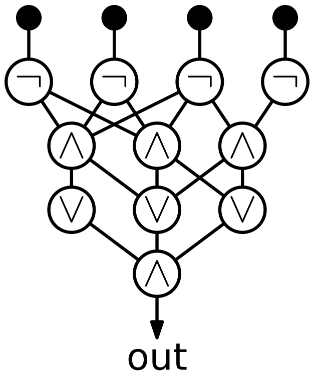
Welche Bedingungen müssen wir modellieren?

- einzelnes Zeilenpaar (r_i, s_j): wähle gewisse Elemente nicht

$$\begin{array}{ccccc} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ r_i & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ s_j & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \longrightarrow \neg x_2 \wedge \neg x_3$$

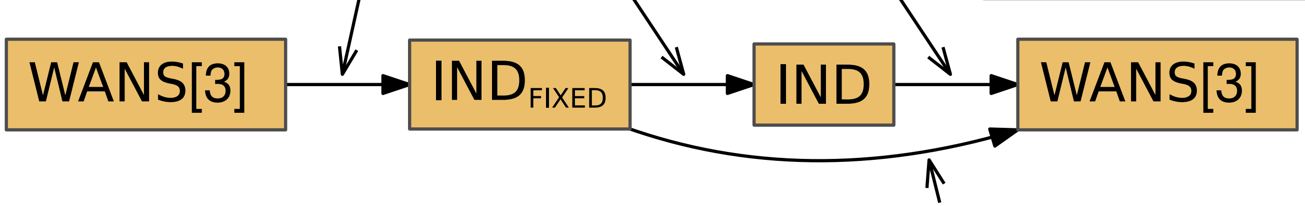
- r_i und mehrere Zeilen in s: erfülle eine der vorherigen Bedingungen

$$\begin{array}{ccccc} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ r_i & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \longrightarrow \neg x_2 \wedge \neg x_3 \vee \neg x_1 \wedge \neg x_2$$



Zwischenstand

Theorem
$\text{IND}_{\text{FIXED}}$ und IND sind $W[3]$-schwer.



etwas leichter und auf IND → WANS[3] erweiterbar

Welche Bedingungen müssen wir modellieren?

- einzelnes Zeilenpaar (r_i, s_j): wähle gewisse Elemente nicht

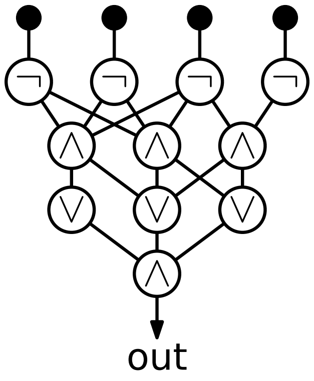
$$\begin{array}{ccccc} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4\\ r_j & 1 & 0 & 1 & 0\end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4\\ s_j & 1 & 1 & 0 & 0\end{array} \longrightarrow \neg x_2 \wedge \neg x_3$$

- r_i und mehrere Zeilen in s: erfülle eine der vorherigen Bedingungen

$$\begin{array}{ccccc} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4\\ r_j & 1 & 0 & 1 & 0\end{array} \qquad \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array} \longrightarrow \neg x_2 \wedge \neg x_3 \vee \neg x_1 \wedge \neg x_2$$

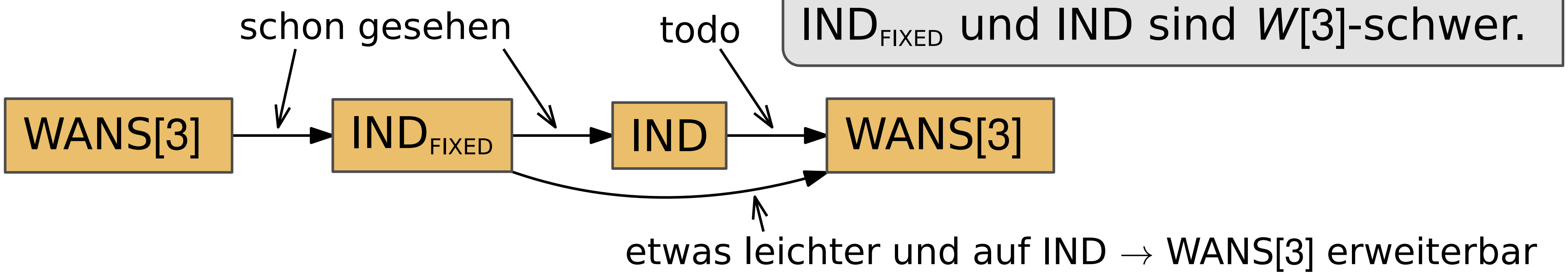
- mehrere Zeilen in r: erfülle Bedingungen für jede Zeile

$$\begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{array} \qquad \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} (\neg x_2 \wedge \neg x_3 \vee \neg x_1 \wedge \neg x_2)\\ \wedge\ (\neg x_1 \wedge \neg x_4 \vee \neg x_3 \wedge \neg x_4)\end{array}$$



Zwischenstand

Theorem
$\text{IND}_{\text{FIXED}}$ und IND sind $W[3]$-schwer.

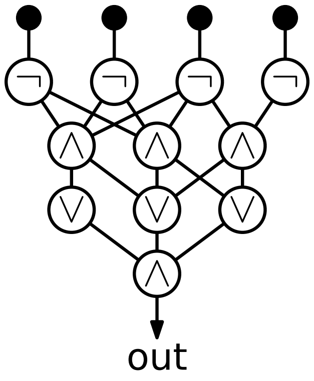

WANS[3] → $\text{IND}_{\text{FIXED}}$ → IND → WANS[3]

schon gesehen

todo

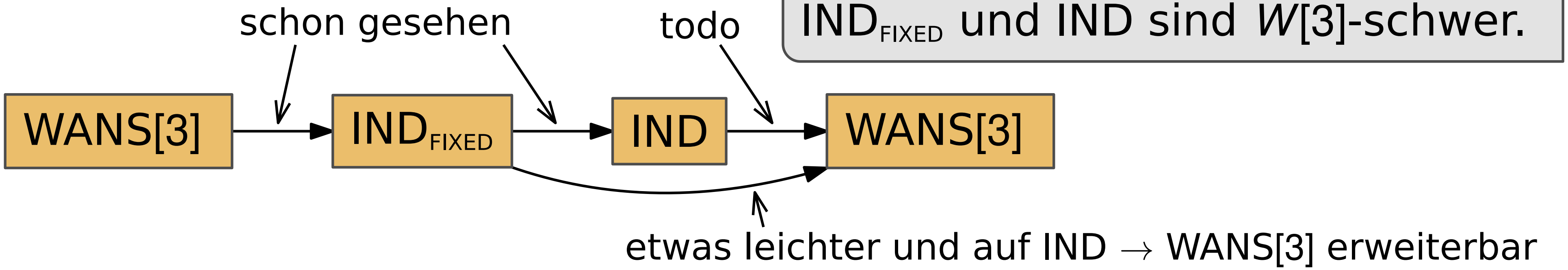
etwas leichter und auf IND → WANS[3] erweiterbar

Erweiterung auf IND → WANS[3]



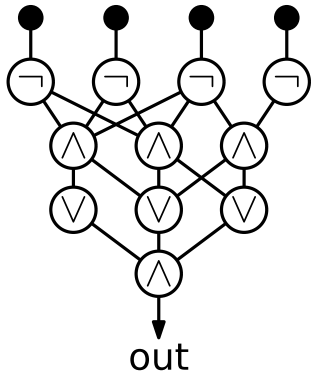
Zwischenstand

Theorem
IND$_{\text{FIXED}}$ und IND sind $W[3]$-schwer.



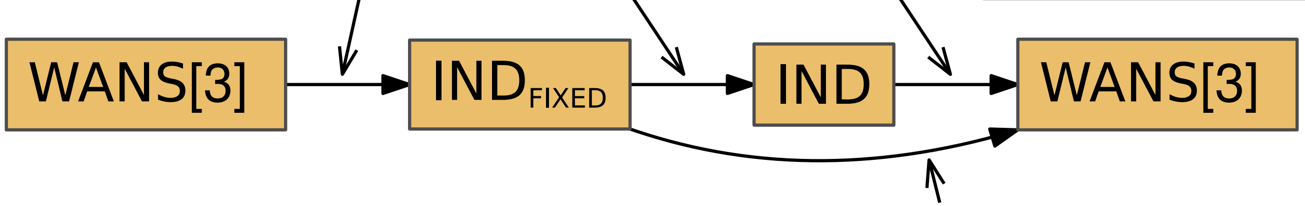
Erweiterung auf IND → WANS[3]

- benutze Variablen $x_{i,j}$ mit der Bedeutung, dass $x_{i,j} = 1 \Leftrightarrow$ Spalte i in R wird ausgewählt und auf Spalte j in S abgebildet
- sorge dafür, dass man eine Bijektion erhält



Zwischenstand

Theorem
$\text{IND}_{\text{FIXED}}$ und IND sind $W[3]$-schwer.



schon gesehen

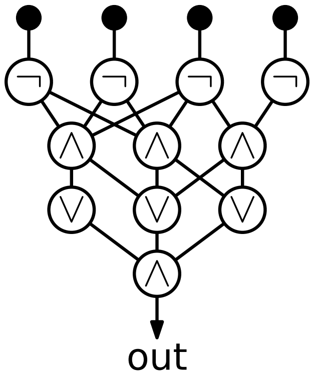
todo

WANS[3] → $\text{IND}_{\text{FIXED}}$ → IND → WANS[3]

etwas leichter und auf IND → WANS[3] erweiterbar

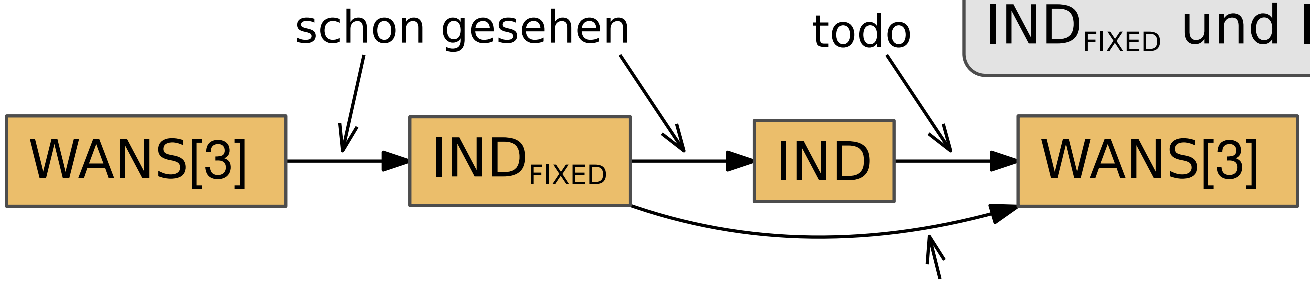
Erweiterung auf IND → WANS[3]

- benutze Variablen $x_{i,j}$ mit der Bedeutung, dass $x_{i,j} = 1 \Leftrightarrow$ Spalte i in R wird ausgewählt und auf Spalte j in S abgebildet
- sorge dafür, dass man eine Bijektion erhält
- kombiniere das, mit den Bedingungen von vorher



Zwischenstand

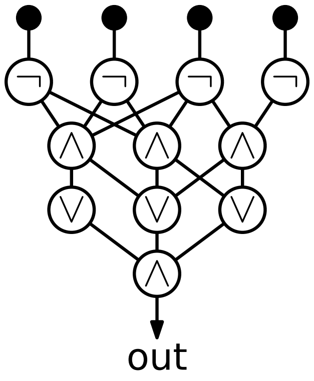
Theorem
$\text{IND}_{\text{FIXED}}$ und IND sind $W[3]$-schwer.



Erweiterung auf IND → WANS[3]

- benutze Variablen $x_{i,j}$ mit der Bedeutung, dass $x_{i,j} = 1 \Leftrightarrow$ Spalte i in R wird ausgewählt und auf Spalte j in S abgebildet
- sorge dafür, dass man eine Bijektion erhält
- kombiniere das, mit den Bedingungen von vorher

Theorem
$\text{IND}_{\text{FIXED}}$ und IND sind $W[3]$-vollständig.



Zusammenfassung

Normalisierte Schaltkreise

- bei Reduktionen von WCS können wir mit recht aufgeräumten Schaltkreisen starten
- brauchen uns dann nicht mehr um Weft t kümmern (stattdessen: Anzahl alternierender Ebenen)

Zusammenfassung

Normalisierte Schaltkreise

- bei Reduktionen von WCS können wir mit recht aufgeräumten Schaltkreisen starten
- brauchen uns dann nicht mehr um Weft t kümmern (stattdessen: Anzahl alternierender Ebenen)
- gerades t: monoton; ungerades t: antimonoton

Zusammenfassung

Normalisierte Schaltkreise

- bei Reduktionen von WCS können wir mit recht aufgeräumten Schaltkreisen starten
- brauchen uns dann nicht mehr um Weft t kümmern (stattdessen: Anzahl alternierender Ebenen)
- gerades t: monoton; ungerades t: antimonoton

Dependency Detection

- es müssen nicht immer nur Graphen sein
- es gibt auch natürliche $W[3]$-vollständige Probleme

Zusammenfassung

Normalisierte Schaltkreise

- bei Reduktionen von WCS können wir mit recht aufgeräumten Schaltkreisen starten
- brauchen uns dann nicht mehr um Weft t kümmern (stattdessen: Anzahl alternierender Ebenen)
- gerades t: monoton; ungerades t: antimonoton

Dependency Detection

- es müssen nicht immer nur Graphen sein
- es gibt auch natürliche $W[3]$-vollständige Probleme
- erklärt nicht, warum funktionale Abhängigkeiten in der Praxis schnell ausgerechnet werden können

(tatsächlich können sogar alle inklusionsminimalen UCCs/FDs aufgezählt werden)

Literaturhinweise

The Parameterized Complexity of Dependency Detection in Relational Databases

- Thomas Bläsius, Tobias Friedrich, Martin Schirneck [2016]
- enthält die eben gesehenen Reduktionen

`doi.org/10.4230/LIPIcs.IPEC.2016.6`

Profiling relational data: a survey

- Ziawasch Abedjan, Lukasz Golab, Felix Naumann [2015]
- Überblick zum Finden von Abhängigkeiten in Datenbanken

`doi.org/10.1007/s00778-015-0389-y`

A Hybrid Approach to Functional Dependency Discovery

- Thorsten Papenbrock, Felix Naumann [2016]
- in der Praxis effizienter Algo zum Aufzählen von funktionalen Abhängigkeiten

`doi.org/10.1145/2882903.2915203`

Hitting Set Enumeration with Partial Information for Unique Column Combination Discovery

- Johann Birnick, Thomas Bläsius, Tobias Friedrich, Felix Naumann, Thorsten Papenbrock, Martin Schirneck [2020]
- in der Praxis effizienter Algo zum Aufzählen von Unique Colum Combinations

`doi.org/10.14778/3407790.3407824`