

Parametrisierte Algorithmen

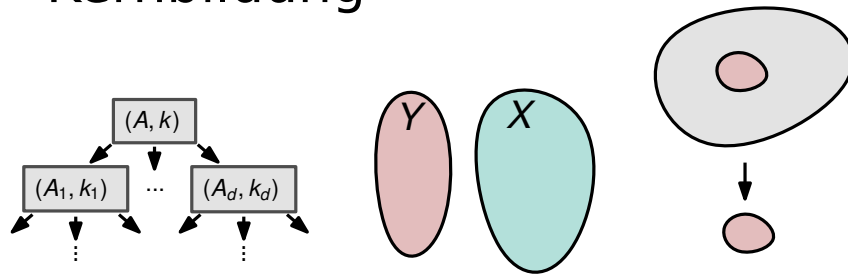
Baumweite & dynamische Programme auf Baumzerlegungen



Inhalt

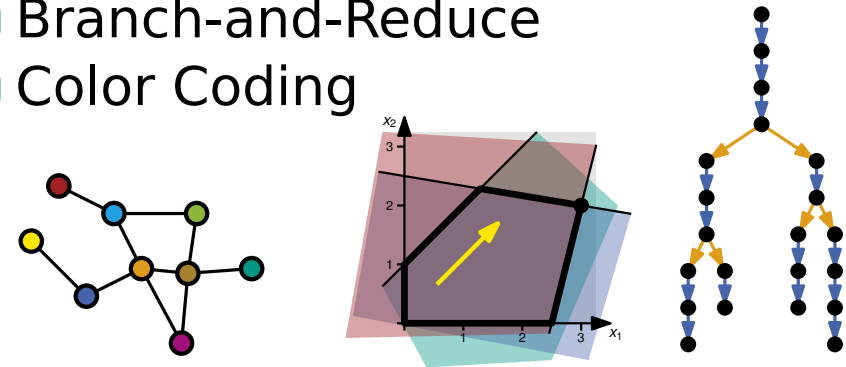
Basic Toolbox

- beschränkte Suchbäume
- iterative Kompression
- Kernbildung



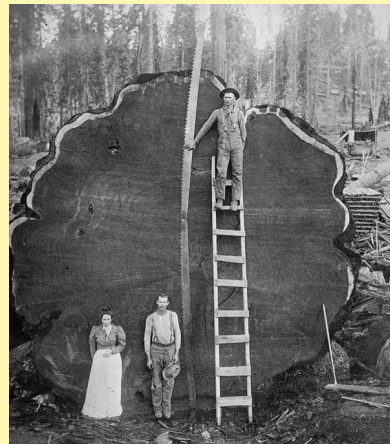
Erweiterte Toolbox

- lineare Programme
- Branch-and-Reduce
- Color Coding



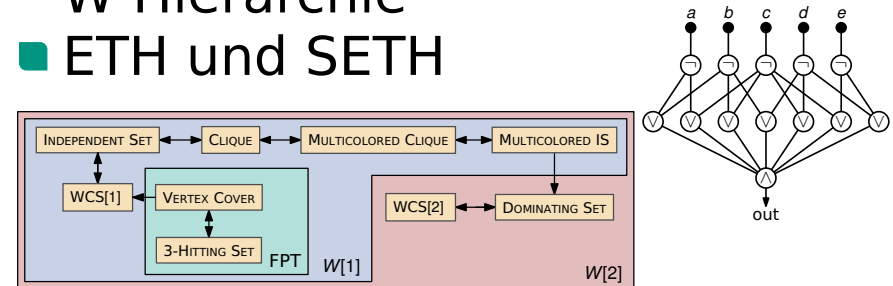
Baumweite

- dynamische Programme
- chordale & planare Graphen
- Courcelles Theorem



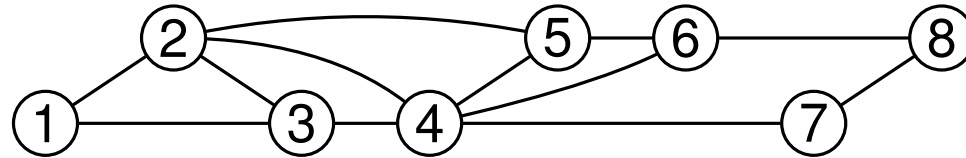
Untere Schranken

- parametrisierte Reduktionen
- boolesche Schaltkreise und die W-Hierarchie
- ETH und SETH



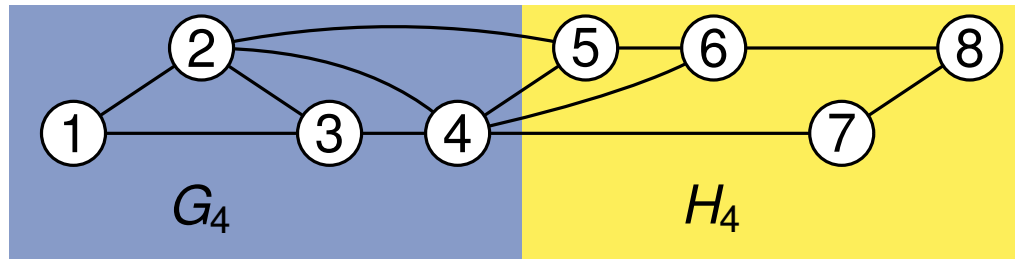
Sortierte Graphen

Graph $G = (V, E)$ mit Knotenordnung $V = \{v_1, \dots, v_n\}$



Sortierte Graphen

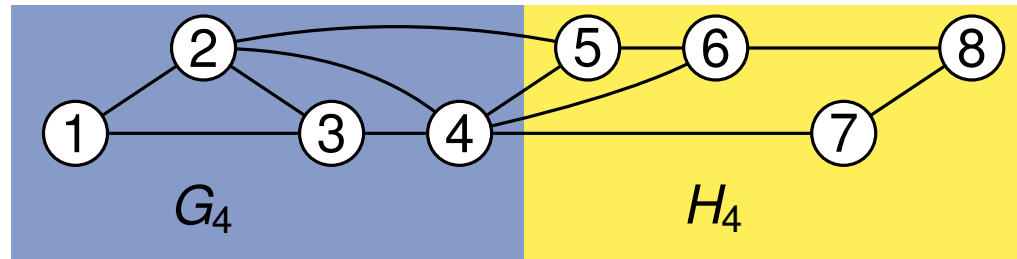
Graph $G = (V, E)$ mit Knotenordnung $V = \{v_1, \dots, v_n\}$



- $V_i = \{v_1, \dots, v_i\}$, $G_i = G[V_i]$ und $H_i = G[V \setminus V_i]$

Sortierte Graphen

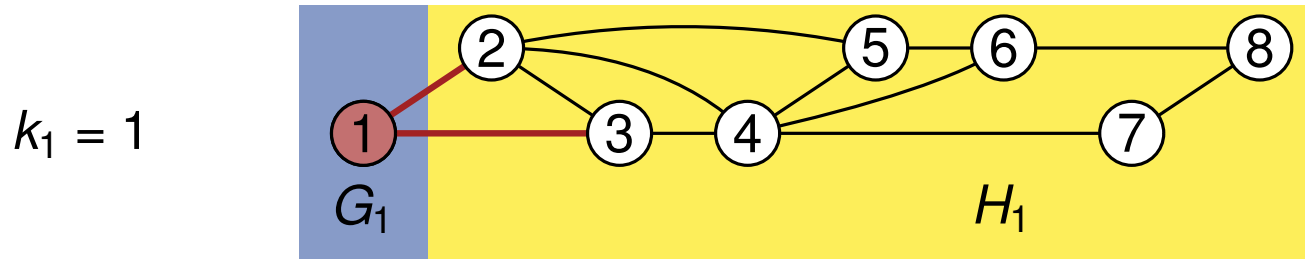
Graph $G = (V, E)$ mit Knotenordnung $V = \{v_1, \dots, v_n\}$



- $V_i = \{v_1, \dots, v_i\}$, $G_i = G[V_i]$ und $H_i = G[V \setminus V_i]$
- $k_i = \#\text{Knoten in } G_i \text{ mit Kanten zu } H_i$ und $k = \max\{k_i\}$

Sortierte Graphen

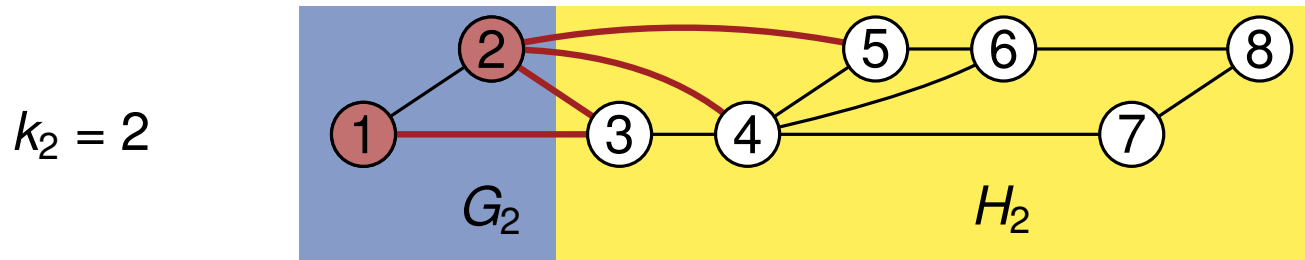
Graph $G = (V, E)$ mit Knotenordnung $V = \{v_1, \dots, v_n\}$



- $V_i = \{v_1, \dots, v_i\}$, $G_i = G[V_i]$ und $H_i = G[V \setminus V_i]$
- $k_i = \#\text{Knoten in } G_i \text{ mit Kanten zu } H_i$ und $k = \max\{k_i\}$

Sortierte Graphen

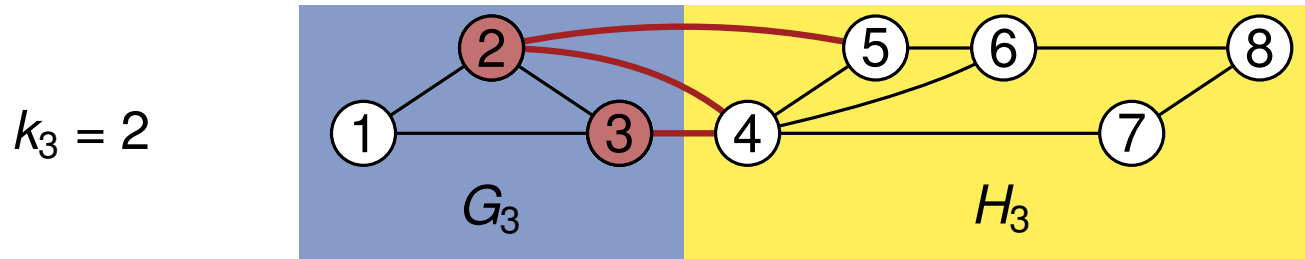
Graph $G = (V, E)$ mit Knotenordnung $V = \{v_1, \dots, v_n\}$



- $V_i = \{v_1, \dots, v_i\}$, $G_i = G[V_i]$ und $H_i = G[V \setminus V_i]$
- $k_i = \#\text{Knoten in } G_i \text{ mit Kanten zu } H_i$ und $k = \max\{k_i\}$

Sortierte Graphen

Graph $G = (V, E)$ mit Knotenordnung $V = \{v_1, \dots, v_n\}$

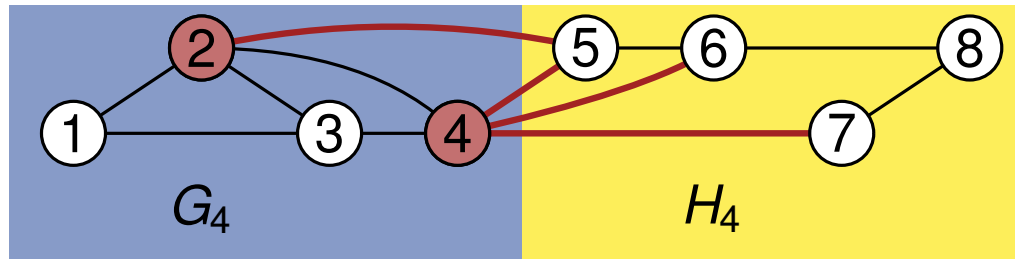


- $V_i = \{v_1, \dots, v_i\}$, $G_i = G[V_i]$ und $H_i = G[V \setminus V_i]$
- $k_i = \#\text{Knoten in } G_i \text{ mit Kanten zu } H_i$ und $k = \max\{k_i\}$

Sortierte Graphen

Graph $G = (V, E)$ mit Knotenordnung $V = \{v_1, \dots, v_n\}$

$$k_4 = 2$$

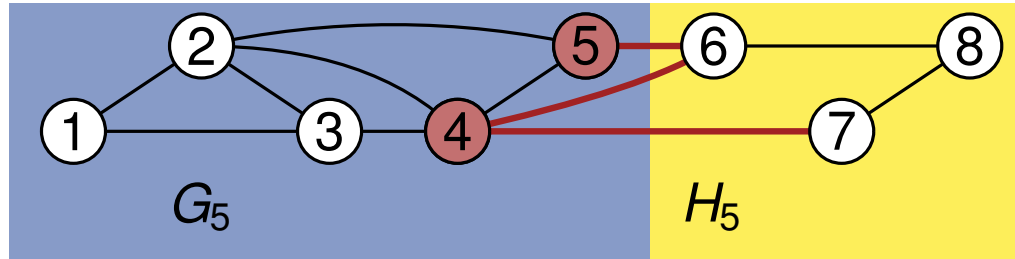


- $V_i = \{v_1, \dots, v_i\}$, $G_i = G[V_i]$ und $H_i = G[V \setminus V_i]$
- $k_i = \#\text{Knoten in } G_i \text{ mit Kanten zu } H_i$ und $k = \max\{k_i\}$

Sortierte Graphen

Graph $G = (V, E)$ mit Knotenordnung $V = \{v_1, \dots, v_n\}$

$k_5 = 2$

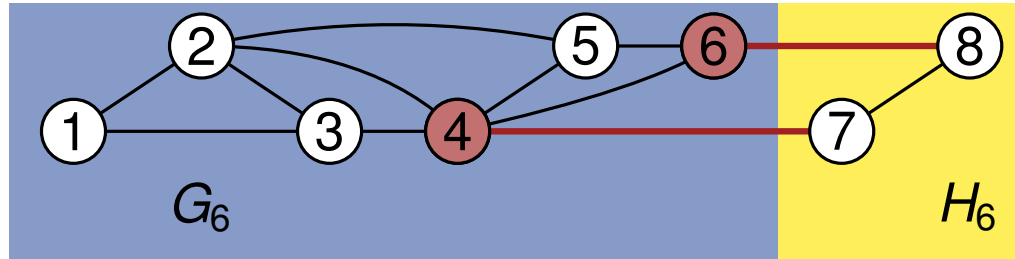


- $V_i = \{v_1, \dots, v_i\}$, $G_i = G[V_i]$ und $H_i = G[V \setminus V_i]$
- $k_i = \#\text{Knoten in } G_i \text{ mit Kanten zu } H_i$ und $k = \max\{k_i\}$

Sortierte Graphen

Graph $G = (V, E)$ mit Knotenordnung $V = \{v_1, \dots, v_n\}$

$$k_6 = 2$$



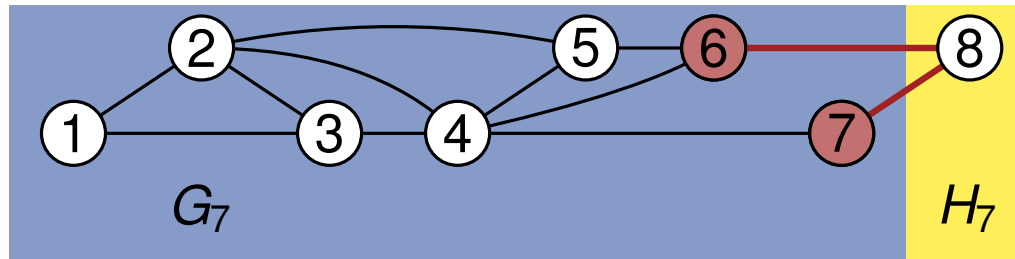
- $V_i = \{v_1, \dots, v_i\}$, $G_i = G[V_i]$ und $H_i = G[V \setminus V_i]$
- $k_i = \#\text{Knoten in } G_i \text{ mit Kanten zu } H_i$ und $k = \max\{k_i\}$

Sortierte Graphen

Graph $G = (V, E)$ mit Knotenordnung $V = \{v_1, \dots, v_n\}$

$$k_7 = 2$$

$$\Rightarrow k = 2$$



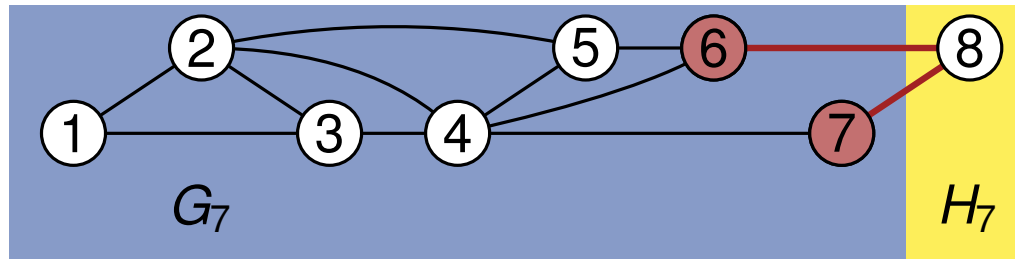
- $V_i = \{v_1, \dots, v_i\}$, $G_i = G[V_i]$ und $H_i = G[V \setminus V_i]$
- $k_i = \#\text{Knoten in } G_i \text{ mit Kanten zu } H_i$ und $k = \max\{k_i\}$

Sortierte Graphen

Graph $G = (V, E)$ mit Knotenordnung $V = \{v_1, \dots, v_n\}$

$$k_7 = 2$$

$$\Rightarrow k = 2$$



- $V_i = \{v_1, \dots, v_i\}$, $G_i = G[V_i]$ und $H_i = G[V \setminus V_i]$
- $k_i = \#\text{Knoten in } G_i \text{ mit Kanten zu } H_i$ und $k = \max\{k_i\}$

Alternative Sichtweise: Pfadzerlegung

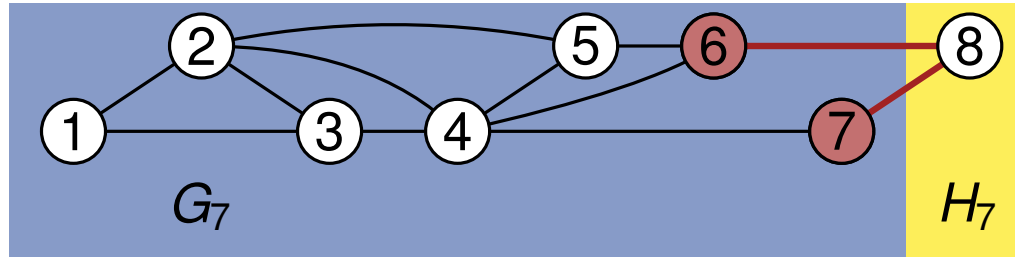
betrachte Pfad x_1, \dots, x_r mit Bags X_1, \dots, X_r ($X_i \subseteq V$), sodass

Sortierte Graphen

Graph $G = (V, E)$ mit Knotenordnung $V = \{v_1, \dots, v_n\}$

$$k_7 = 2$$

$$\Rightarrow k = 2$$



- $V_i = \{v_1, \dots, v_i\}$, $G_i = G[V_i]$ und $H_i = G[V \setminus V_i]$
- $k_i = \#\text{Knoten in } G_i \text{ mit Kanten zu } H_i$ und $k = \max\{k_i\}$

Alternative Sichtweise: Pfadzerlegung

betrachte Pfad x_1, \dots, x_r mit Bags X_1, \dots, X_r ($X_i \subseteq V$), sodass

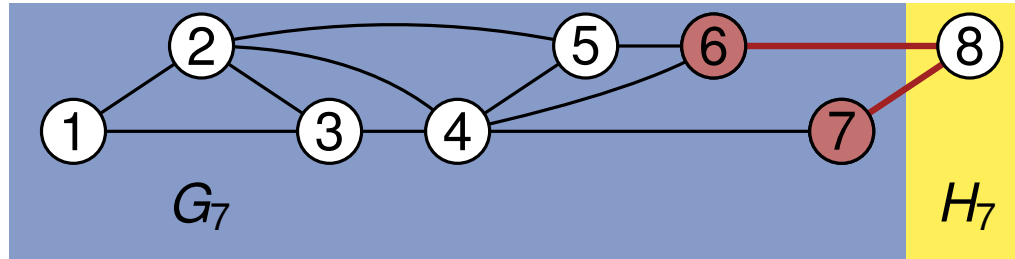
1. $X_1 \cup \dots \cup X_r = V$
2. $\{u, v\} \in E \Rightarrow u, v \in X_i$ für mindestens ein Bag X_i
3. die Bags jedes Knotens $v \in V$ bilden einen Teilpfad

Sortierte Graphen

Graph $G = (V, E)$ mit Knotenordnung $V = \{v_1, \dots, v_n\}$

$$k_7 = 2$$

$$\Rightarrow k = 2$$

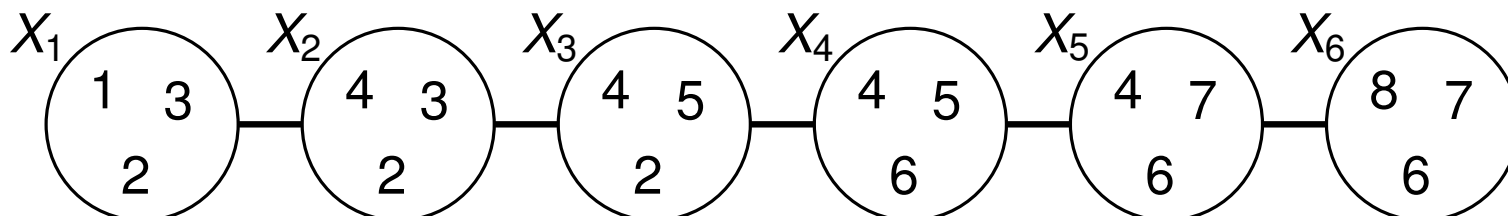


- $V_i = \{v_1, \dots, v_i\}$, $G_i = G[V_i]$ und $H_i = G[V \setminus V_i]$
- $k_i = \#\text{Knoten in } G_i \text{ mit Kanten zu } H_i$ und $k = \max\{k_i\}$

Alternative Sichtweise: Pfadzerlegung

betrachte Pfad x_1, \dots, x_r mit Bags X_1, \dots, X_r ($X_i \subseteq V$), sodass

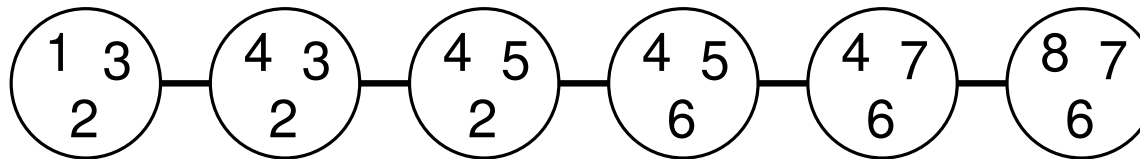
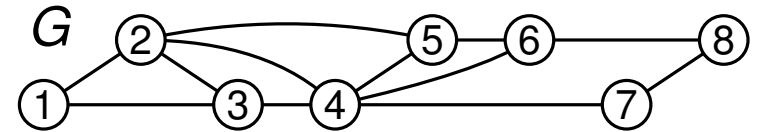
1. $X_1 \cup \dots \cup X_r = V$
2. $\{u, v\} \in E \Rightarrow u, v \in X_i$ für mindestens ein Bag X_i
3. die Bags jedes Knotens $v \in V$ bilden einen Teilpfad



Pfadweite und schöne Pfadzerlegungen

Pfadweite

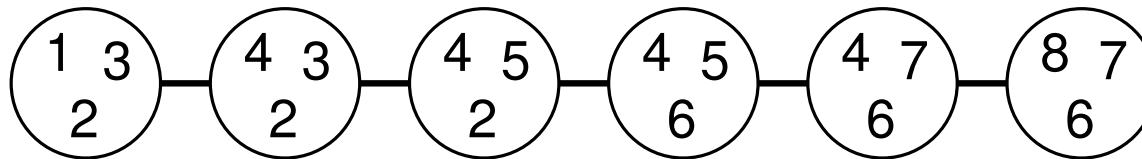
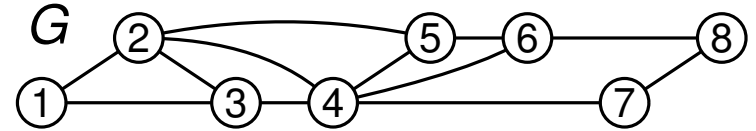
- Weite einer Zerlegung: $\max\{|X_i|\} - 1$
- Pfadweite eines Graphen: minimale Weite einer Pfadzerlegung



Pfadweite und schöne Pfadzerlegungen

Pfadweite

- Weite einer Zerlegung: $\max\{|X_i|\} - 1$
- Pfadweite eines Graphen: minimale Weite einer Pfadzerlegung



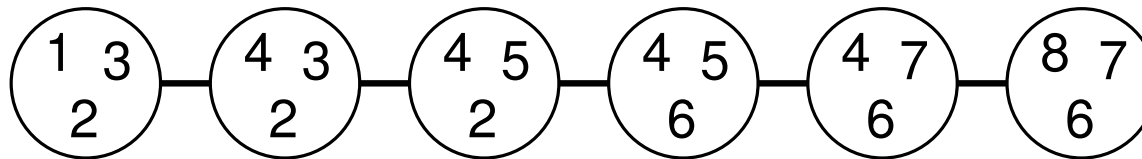
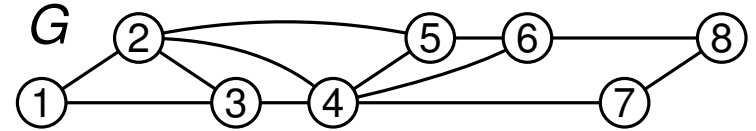
Schöne Pfadzerlegung

- nur zwei Typen von Knoten: introduce-Knoten und forget-Knoten

Pfadweite und schöne Pfadzerlegungen

Pfadweite

- Weite einer Zerlegung: $\max\{|X_i|\} - 1$
- Pfadweite eines Graphen: minimale Weite einer Pfadzerlegung



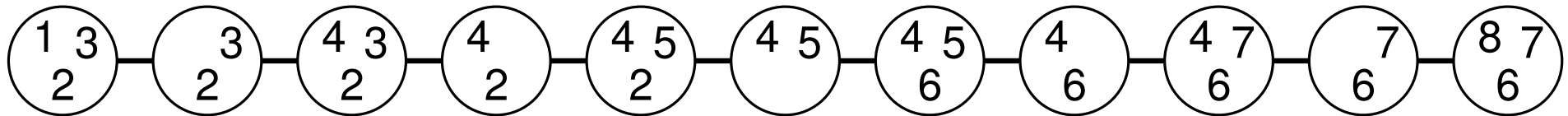
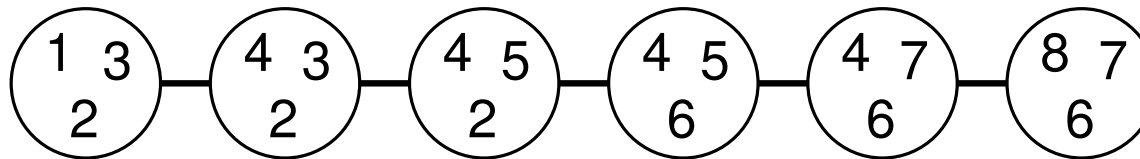
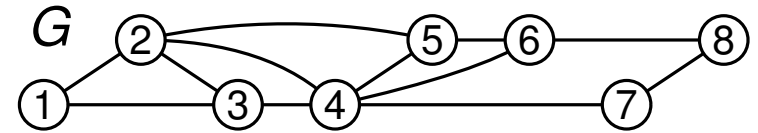
Schöne Pfadzerlegung

- nur zwei Typen von Knoten: introduce-Knoten und forget-Knoten
- x_i ist introduce-Knoten wenn $X_i = X_{i-1} \cup \{v\}$ für ein $v \in V$
- x_i ist forget-Knoten wenn $X_i = X_{i-1} \setminus \{v\}$ für ein $v \in V$

Pfadweite und schöne Pfadzerlegungen

Pfadweite

- Weite einer Zerlegung: $\max\{|X_i|\} - 1$
- Pfadweite eines Graphen: minimale Weite einer Pfadzerlegung



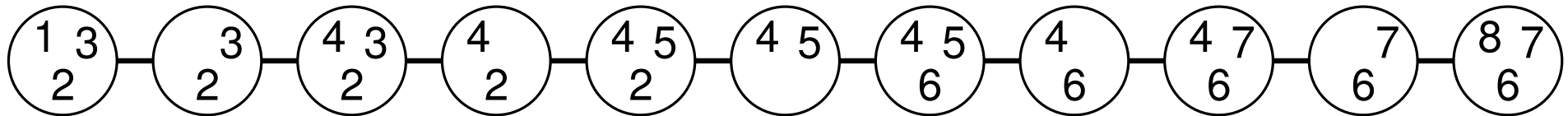
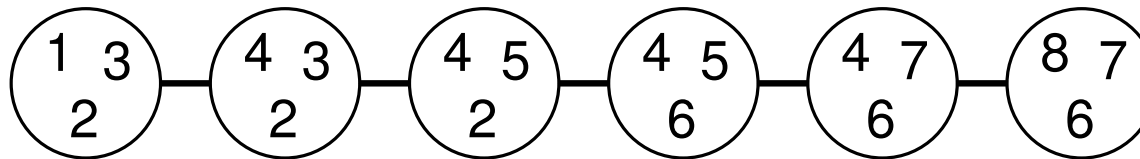
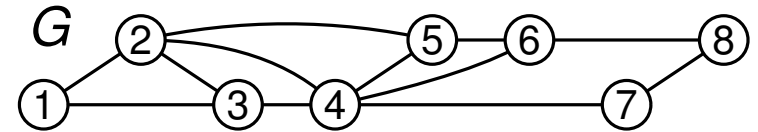
Schöne Pfadzerlegung

- nur zwei Typen von Knoten: introduce-Knoten und forget-Knoten
- x_i ist introduce-Knoten wenn $X_i = X_{i-1} \cup \{v\}$ für ein $v \in V$
- x_i ist forget-Knoten wenn $X_i = X_{i-1} \setminus \{v\}$ für ein $v \in V$

Pfadweite und schöne Pfadzerlegungen

Pfadweite

- Weite einer Zerlegung: $\max\{|X_i|\} - 1$
- Pfadweite eines Graphen: minimale Weite einer Pfadzerlegung



Schöne Pfadzerlegung

- nur zwei Typen von Knoten: introduce-Knoten und forget-Knoten
- x_i ist introduce-Knoten wenn $X_i = X_{i-1} \cup \{v\}$ für ein $v \in V$
- x_i ist forget-Knoten wenn $X_i = X_{i-1} \setminus \{v\}$ für ein $v \in V$

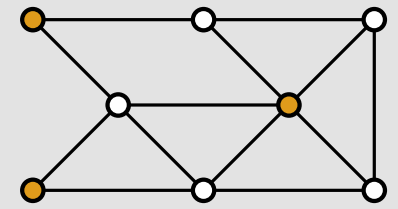
Lemma

Wenn G eine Pfadzerlegung mit Weite p hat, dann hat G auch eine schöne Pfadzerlegung mit Weite p .

Dynamische Programme

Problem: INDEPENDENT SET

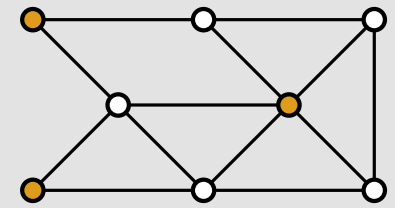
Gegeben seien ein Graph, ein Parameter p und eine Pfadzerlegung der Weite p . Gibt es ein independent Set der Größe k ? (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)



Dynamische Programme

Problem: INDEPENDENT SET

Gegeben seien ein Graph, ein Parameter p und eine Pfadzerlegung der Weite p . Gibt es ein independent Set der Größe k ? (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)



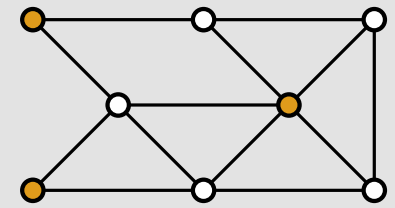
Dynamisches Programm über eine schöne Pfadzerlegung

- sei $V_i = X_1 \cup \dots \cup X_i$ und $G_i = G[V_i]$
- Schritt i : für alle $X'_i \subseteq X_i$ berechne \max IS U_i in G_i mit $U_i \cap X_i = X'_i$

Dynamische Programme

Problem: INDEPENDENT SET

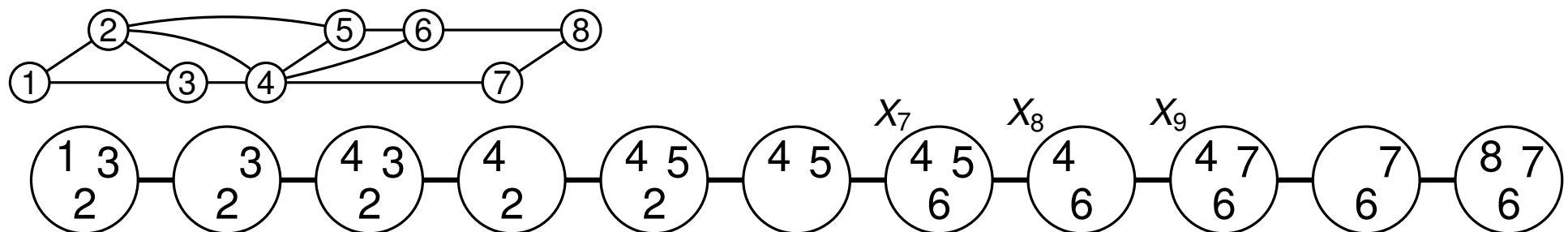
Gegeben seien ein Graph, ein Parameter p und eine Pfadzerlegung der Weite p . Gibt es ein independent Set der Größe k ? (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)



Dynamisches Programm über eine schöne Pfadzerlegung

- sei $V_i = X_1 \cup \dots \cup X_i$ und $G_i = G[V_i]$
- Schritt i : für alle $X'_i \subseteq X_i$ berechne max IS U_i in G_i mit $U_i \cap X_i = X'_i$

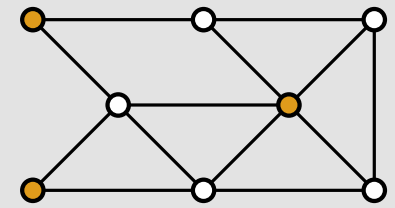
Beispiel



Dynamische Programme

Problem: INDEPENDENT SET

Gegeben seien ein Graph, ein Parameter p und eine Pfadzerlegung der Weite p . Gibt es ein independent Set der Größe k ? (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)

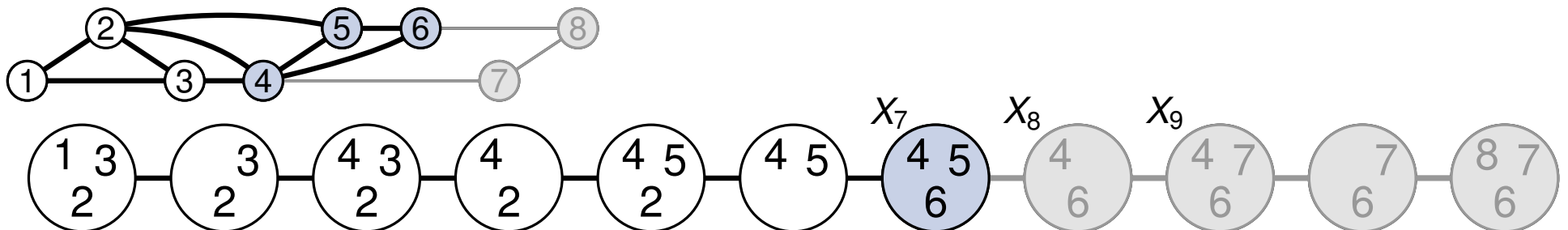


Dynamisches Programm über eine schöne Pfadzerlegung

- sei $V_i = X_1 \cup \dots \cup X_i$ und $G_i = G[V_i]$
- Schritt i : für alle $X'_i \subseteq X_i$ berechne \max IS U_i in G_i mit $U_i \cap X_i = X'_i$

Beispiel

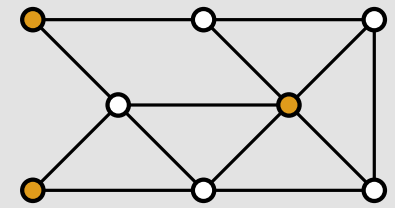
Teilmengen von X_7	\emptyset	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	$\{4,5\}$	$\{4,6\}$	$\{5,6\}$	$\{4,5,6\}$
Größe max. IS in G_7	1	2	2	2	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$



Dynamische Programme

Problem: INDEPENDENT SET

Gegeben seien ein Graph, ein Parameter p und eine Pfadzerlegung der Weite p . Gibt es ein independent Set der Größe k ? (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)



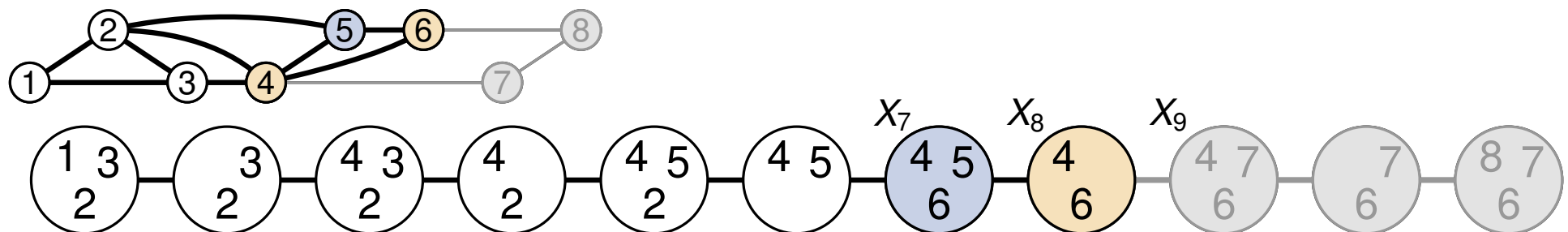
Dynamisches Programm über eine schöne Pfadzerlegung

- sei $V_i = X_1 \cup \dots \cup X_i$ und $G_i = G[V_i]$
- Schritt i : für alle $X'_i \subseteq X_i$ berechne \max IS U_i in G_i mit $U_i \cap X_i = X'_i$

Beispiel

Teilmengen von X_7	\emptyset	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	$\{4, 5\}$	$\{4, 6\}$	$\{5, 6\}$	$\{4, 5, 6\}$
Größe max. IS in G_7	1	2	2	2	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Teilmengen von X_8	\emptyset	$\{4\}$		$\{6\}$		$\{4, 6\}$		
Größe max. IS in G_8								

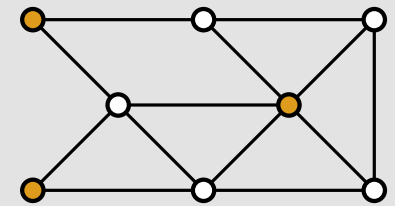
forget-Knoten



Dynamische Programme

Problem: INDEPENDENT SET

Gegeben seien ein Graph, ein Parameter p und eine Pfadzerlegung der Weite p . Gibt es ein independent Set der Größe k ? (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)



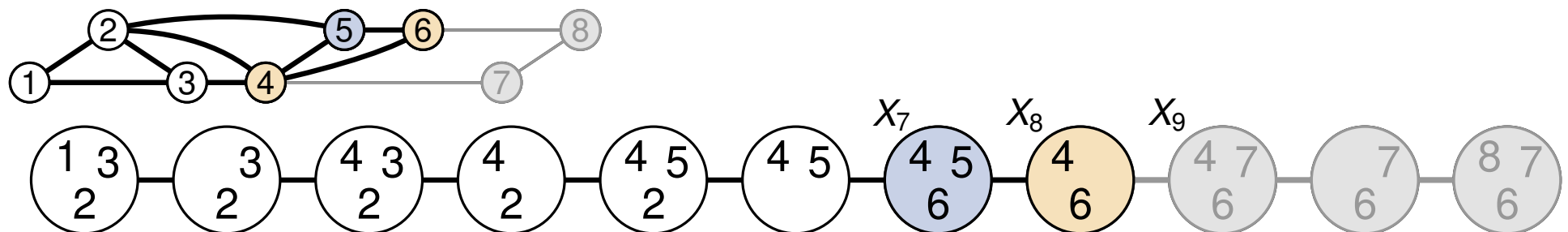
Dynamisches Programm über eine schöne Pfadzerlegung

- sei $V_i = X_1 \cup \dots \cup X_i$ und $G_i = G[V_i]$
- Schritt i : für alle $X'_i \subseteq X_i$ berechne \max IS U_i in G_i mit $U_i \cap X_i = X'_i$

Beispiel

Teilmengen von X_7	\emptyset	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	$\{4,5\}$	$\{4,6\}$	$\{5,6\}$	$\{4,5,6\}$
Größe max. IS in G_7	1	2	2	2	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Teilmengen von X_8	\emptyset	$\{4\}$		$\{6\}$		$\{4,6\}$		
Größe max. IS in G_8	2							

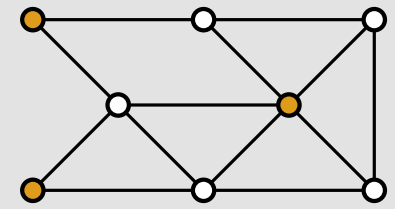
forget-Knoten



Dynamische Programme

Problem: INDEPENDENT SET

Gegeben seien ein Graph, ein Parameter p und eine Pfadzerlegung der Weite p . Gibt es ein independent Set der Größe k ? (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)



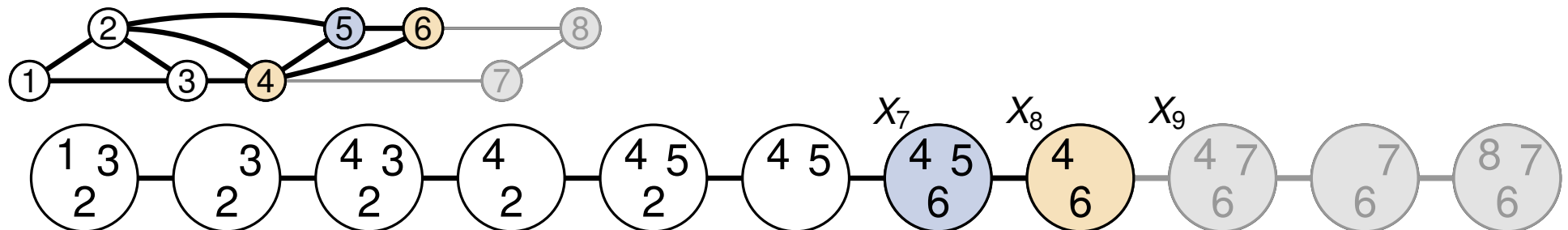
Dynamisches Programm über eine schöne Pfadzerlegung

- sei $V_i = X_1 \cup \dots \cup X_i$ und $G_i = G[V_i]$
- Schritt i : für alle $X'_i \subseteq X_i$ berechne max IS U_i in G_i mit $U_i \cap X_i = X'_i$

Beispiel

Teilmengen von X_7	\emptyset	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	$\{4,5\}$	$\{4,6\}$	$\{5,6\}$	$\{4,5,6\}$
Größe max. IS in G_7	1	2	2	2	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Teilmengen von X_8	\emptyset	$\{4\}$		$\{6\}$		$\{4,6\}$		
Größe max. IS in G_8	2	2						

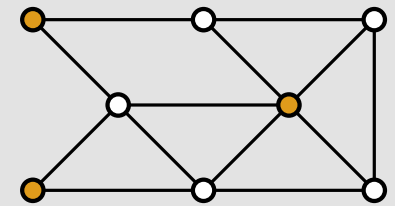
forget-Knoten



Dynamische Programme

Problem: INDEPENDENT SET

Gegeben seien ein Graph, ein Parameter p und eine Pfadzerlegung der Weite p . Gibt es ein independent Set der Größe k ? (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)



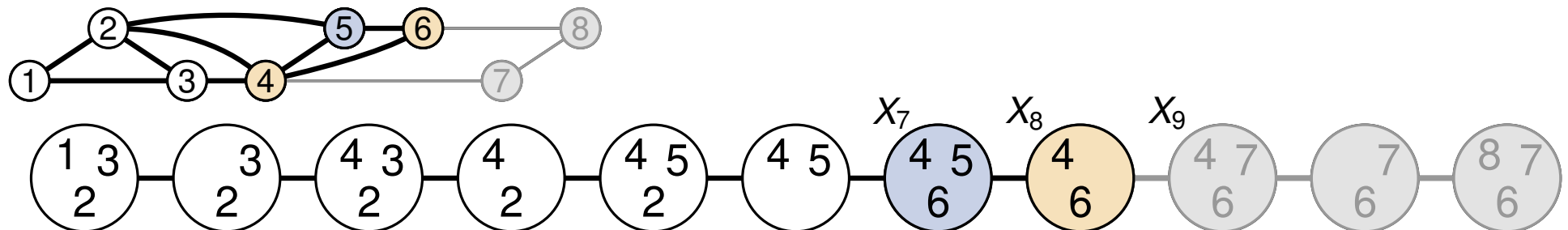
Dynamisches Programm über eine schöne Pfadzerlegung

- sei $V_i = X_1 \cup \dots \cup X_i$ und $G_i = G[V_i]$
- Schritt i : für alle $X'_i \subseteq X_i$ berechne \max IS U_i in G_i mit $U_i \cap X_i = X'_i$

Beispiel

Teilmengen von X_7	\emptyset	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	$\{4, 5\}$	$\{4, 6\}$	$\{5, 6\}$	$\{4, 5, 6\}$
Größe max. IS in G_7	1	2	2	2	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Teilmengen von X_8	\emptyset	$\{4\}$		$\{6\}$		$\{4, 6\}$		
Größe max. IS in G_8	2	2		2				

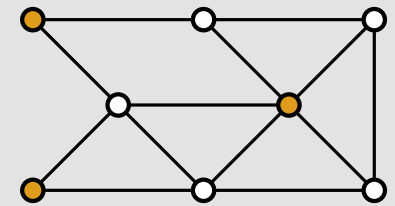
forget-Knoten



Dynamische Programme

Problem: INDEPENDENT SET

Gegeben seien ein Graph, ein Parameter p und eine Pfadzerlegung der Weite p . Gibt es ein independent Set der Größe k ? (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)



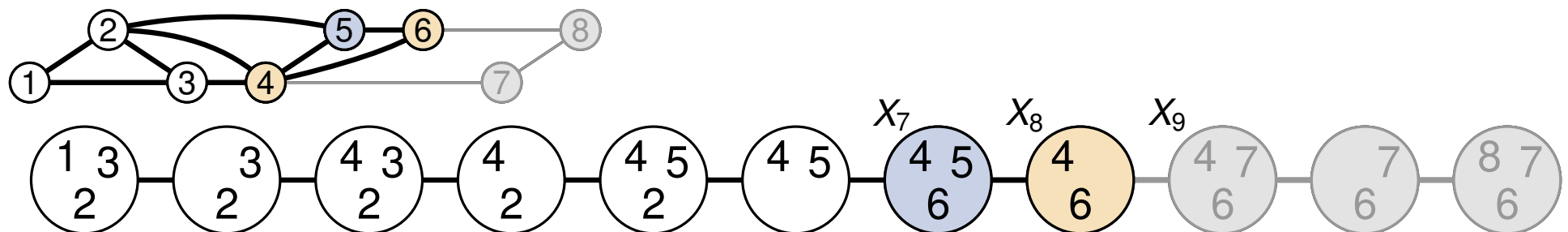
Dynamisches Programm über eine schöne Pfadzerlegung

- sei $V_i = X_1 \cup \dots \cup X_i$ und $G_i = G[V_i]$
- Schritt i : für alle $X'_i \subseteq X_i$ berechne \max IS U_i in G_i mit $U_i \cap X_i = X'_i$

Beispiel

Teilmengen von X_7	\emptyset	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	$\{4,5\}$	$\{4,6\}$	$\{5,6\}$	$\{4,5,6\}$
Größe max. IS in G_7	1	2	2	2	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Teilmengen von X_8	\emptyset	$\{4\}$		$\{6\}$		$\{4,6\}$		
Größe max. IS in G_8	2	2		2		$-\infty$		

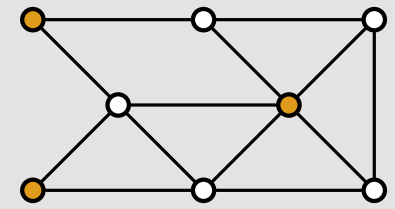
forget-Knoten



Dynamische Programme

Problem: INDEPENDENT SET

Gegeben seien ein Graph, ein Parameter p und eine Pfadzerlegung der Weite p . Gibt es ein independent Set der Größe k ? (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)



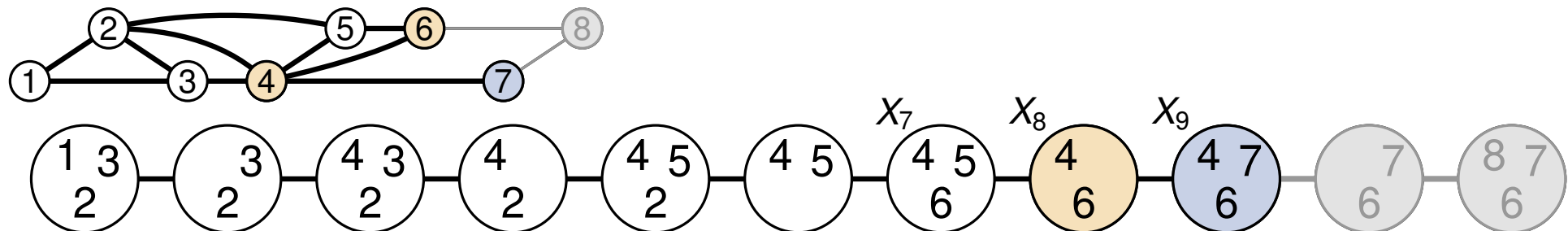
Dynamisches Programm über eine schöne Pfadzerlegung

- sei $V_i = X_1 \cup \dots \cup X_i$ und $G_i = G[V_i]$
- Schritt i : für alle $X'_i \subseteq X_i$ berechne \max IS U_i in G_i mit $U_i \cap X_i = X'_i$

Beispiel

Teilmengen von X_8	\emptyset	$\{4\}$	$\{6\}$	$\{4, 6\}$				
Größe max. IS in G_8	2	2	2	$-\infty$				
Teilmengen von X_9	\emptyset	$\{7\}$	$\{4\}$	$\{4, 7\}$	$\{6\}$	$\{6, 7\}$	$\{4, 6\}$	$\{4, 6, 7\}$
Größe max. IS in G_9								

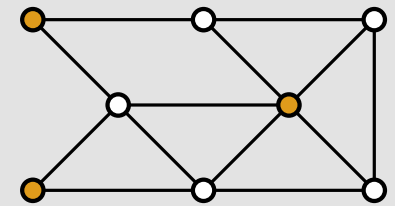
introduce-Knoten



Dynamische Programme

Problem: INDEPENDENT SET

Gegeben seien ein Graph, ein Parameter p und eine Pfadzerlegung der Weite p . Gibt es ein independent Set der Größe k ? (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)



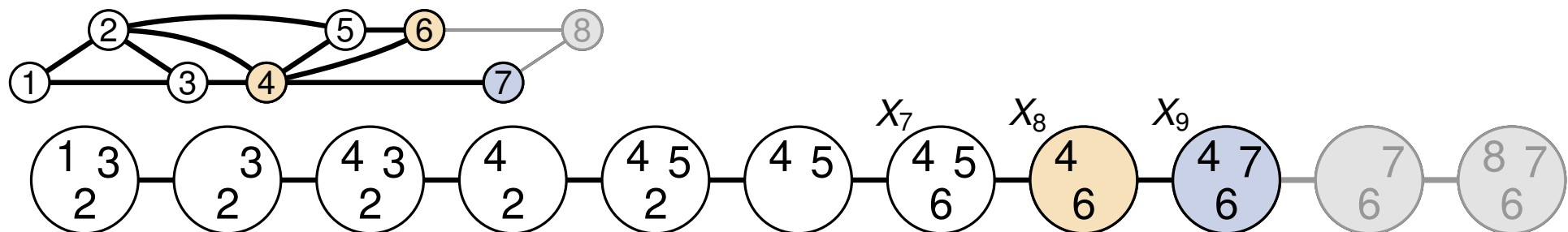
Dynamisches Programm über eine schöne Pfadzerlegung

- sei $V_i = X_1 \cup \dots \cup X_i$ und $G_i = G[V_i]$
- Schritt i : für alle $X'_i \subseteq X_i$ berechne max IS U_i in G_i mit $U_i \cap X_i = X'_i$

Beispiel

Teilmengen von X_8	\emptyset	$\{4\}$	$\{6\}$	$\{4, 6\}$				
Größe max. IS in G_8	2	2	2	$-\infty$				
Teilmengen von X_9	\emptyset	$\{7\}$	$\{4\}$	$\{4, 7\}$	$\{6\}$	$\{6, 7\}$	$\{4, 6\}$	$\{4, 6, 7\}$
Größe max. IS in G_9	2	3						

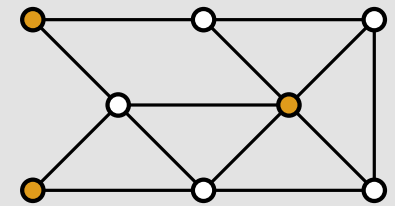
introduce-Knoten



Dynamische Programme

Problem: INDEPENDENT SET

Gegeben seien ein Graph, ein Parameter p und eine Pfadzerlegung der Weite p . Gibt es ein independent Set der Größe k ? (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)



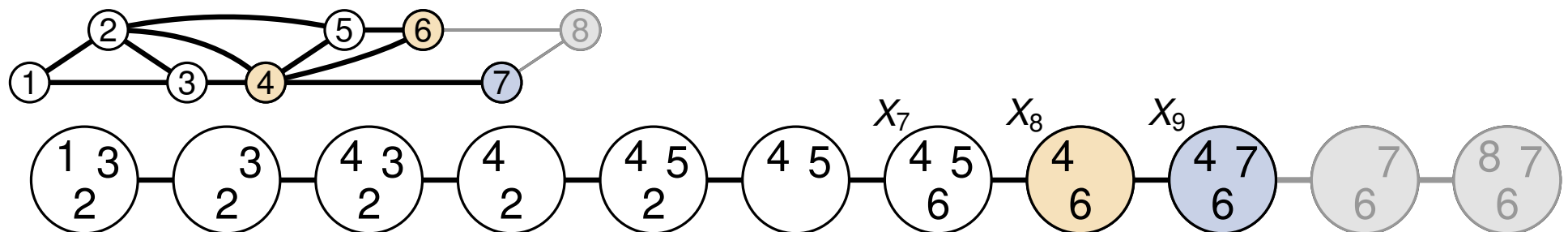
Dynamisches Programm über eine schöne Pfadzerlegung

- sei $V_i = X_1 \cup \dots \cup X_i$ und $G_i = G[V_i]$
- Schritt i : für alle $X'_i \subseteq X_i$ berechne max IS U_i in G_i mit $U_i \cap X_i = X'_i$

Beispiel

introduce-Knoten

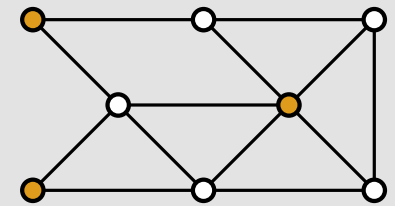
Teilmengen von X_8	\emptyset	$\{4\}$	$\{6\}$	$\{4, 6\}$				
Größe max. IS in G_8	2	2	2	$-\infty$				
Teilmengen von X_9	\emptyset	$\{7\}$	$\{4\}$	$\{4, 7\}$	$\{6\}$	$\{6, 7\}$	$\{4, 6\}$	$\{4, 6, 7\}$
Größe max. IS in G_9	2	3	2	$-\infty$				



Dynamische Programme

Problem: INDEPENDENT SET

Gegeben seien ein Graph, ein Parameter p und eine Pfadzerlegung der Weite p . Gibt es ein independent Set der Größe k ? (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)



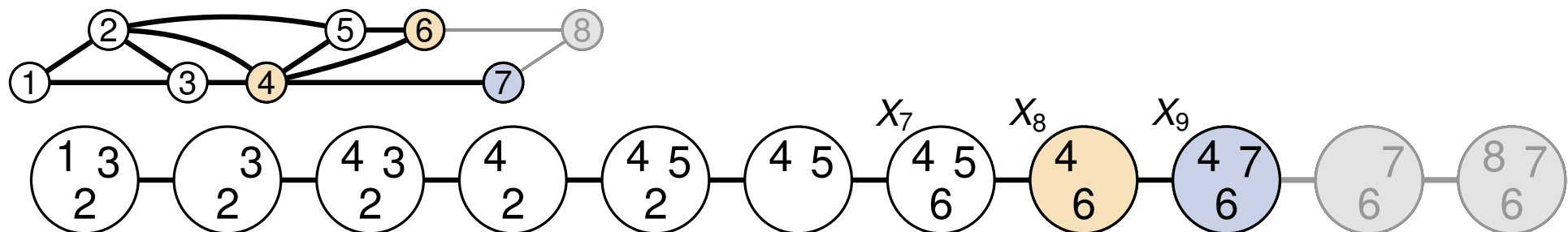
Dynamisches Programm über eine schöne Pfadzerlegung

- sei $V_i = X_1 \cup \dots \cup X_i$ und $G_i = G[V_i]$
- Schritt i : für alle $X'_i \subseteq X_i$ berechne \max IS U_i in G_i mit $U_i \cap X_i = X'_i$

Beispiel

introduce-Knoten

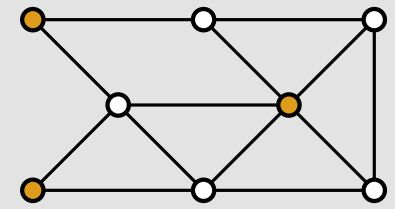
Teilmengen von X_8	\emptyset	$\{4\}$	$\{6\}$	$\{4, 6\}$				
Größe max. IS in G_8	2	2	2	$-\infty$				
Teilmengen von X_9	\emptyset	$\{7\}$	$\{4\}$	$\{4, 7\}$	$\{6\}$	$\{6, 7\}$	$\{4, 6\}$	$\{4, 6, 7\}$
Größe max. IS in G_9	2	3	2	$-\infty$	2	3		



Dynamische Programme

Problem: INDEPENDENT SET

Gegeben seien ein Graph, ein Parameter p und eine Pfadzerlegung der Weite p . Gibt es ein independent Set der Größe k ? (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)



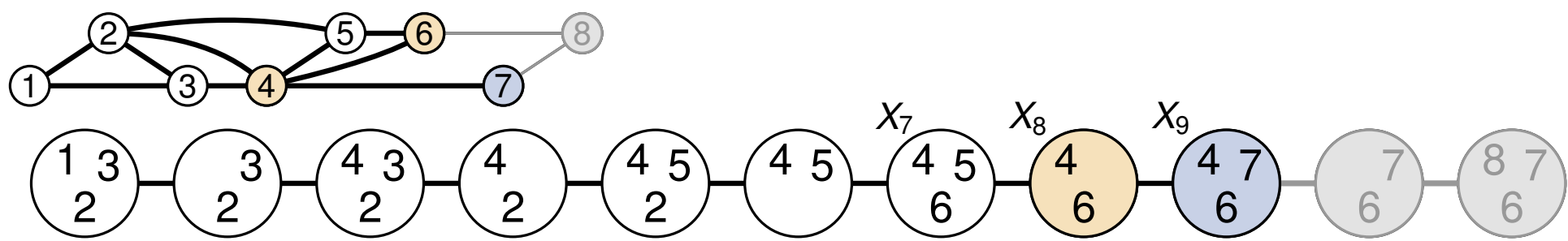
Dynamisches Programm über eine schöne Pfadzerlegung

- sei $V_i = X_1 \cup \dots \cup X_i$ und $G_i = G[V_i]$
- Schritt i : für alle $X'_i \subseteq X_i$ berechne max IS U_i in G_i mit $U_i \cap X_i = X'_i$

Beispiel

introduce-Knoten

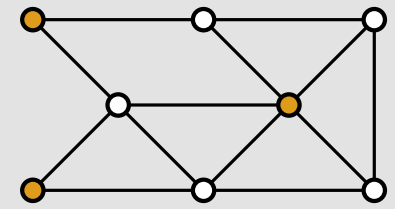
Teilmengen von X_8	\emptyset	$\{4\}$	$\{6\}$	$\{4, 6\}$				
Größe max. IS in G_8	2	2	2	$-\infty$				
Teilmengen von X_9	\emptyset	$\{7\}$	$\{4\}$	$\{4, 7\}$	$\{6\}$	$\{6, 7\}$	$\{4, 6\}$	$\{4, 6, 7\}$
Größe max. IS in G_9	2	3	2	$-\infty$	2	3	$-\infty$	$-\infty$



Dynamische Programme

Problem: INDEPENDENT SET

Gegeben seien ein Graph, ein Parameter p und eine Pfadzerlegung der Weite p . Gibt es ein independent Set der Größe k ? (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)



Dynamisches Programm über eine schöne Pfadzerlegung

- sei $V_i = X_1 \cup \dots \cup X_i$ und $G_i = G[V_i]$
- Schritt i : für alle $X'_i \subseteq X_i$ berechne max IS U_i in G_i mit $U_i \cap X_i = X'_i$

Beispiel

	Teilmengen von X_8							
	\emptyset	$\{4\}$	$\{6\}$	$\{4, 6\}$				
Größe max. IS in G_8	2	2	2	$-\infty$				
Teilmengen von X_9	\emptyset	$\{7\}$	$\{4\}$	$\{4, 7\}$	$\{6\}$	$\{6, 7\}$	$\{4, 6\}$	$\{4, 6, 7\}$
Größe max. IS in G_9	2	3	2	$-\infty$	2	3	$-\infty$	$-\infty$

introduce-Knoten (indicated by arrows from the X_9 row to the G_9 row)

Theorem

INDEPENDENT SET ist FPT bezüglich der Pfadweite p (das DP hat Laufzeit $O(2^p n^2)$).
 (angenommen, wir kennen eine entsprechende Pfadzerlegung)

Baumweite

Pfadzerlegung

betrachte Pfad x_1, \dots, x_r mit *Bags* X_1, \dots, X_r ($X_i \subseteq V$), sodass

1. $X_1 \cup \dots \cup X_r = V$
2. $\{u, v\} \in E \Rightarrow u, v \in X_i$ für mindestens ein Bag X_i
3. die Bags jedes Knotens $v \in V$ bilden einen Teilpfad

Baumweite

Pfadzerlegung

betrachte Pfad x_1, \dots, x_r mit Bags X_1, \dots, X_r ($X_i \subseteq V$), sodass

1. $X_1 \cup \dots \cup X_r = V$
2. $\{u, v\} \in E \Rightarrow u, v \in X_i$ für mindestens ein Bag X_i
3. die Bags jedes Knotens $v \in V$ bilden einen Teilpfad

Das gleiche Spiel nochmal... jetzt auf Bäumen!

betrachte Baum auf den Knoten x_1, \dots, x_r mit Bags X_1, \dots, X_r , sodass

1. $X_1 \cup \dots \cup X_r = V$
2. $\{u, v\} \in E \Rightarrow u, v \in X_i$ für mindestens ein Bag X_i
3. die Bags jedes Knotens $v \in V$ bilden einen Teilbaum

Baumweite

Pfadzerlegung

betrachte Pfad x_1, \dots, x_r mit Bags X_1, \dots, X_r ($X_i \subseteq V$), sodass

1. $X_1 \cup \dots \cup X_r = V$
2. $\{u, v\} \in E \Rightarrow u, v \in X_i$ für mindestens ein Bag X_i
3. die Bags jedes Knotens $v \in V$ bilden einen Teilpfad

Das gleiche Spiel nochmal... jetzt auf Bäumen!

betrachte Baum auf den Knoten x_1, \dots, x_r mit Bags X_1, \dots, X_r , sodass

1. $X_1 \cup \dots \cup X_r = V$
2. $\{u, v\} \in E \Rightarrow u, v \in X_i$ für mindestens ein Bag X_i
3. die Bags jedes Knotens $v \in V$ bilden einen Teilbaum

Baumweite

- Weite einer Zerlegung: $\max\{|X_i|\} - 1$
- Baumweite eines Graphen: minimale Weite einer Baumzerlegung

Baumweite

Das gleiche Spiel nochmal... jetzt auf Bäumen!

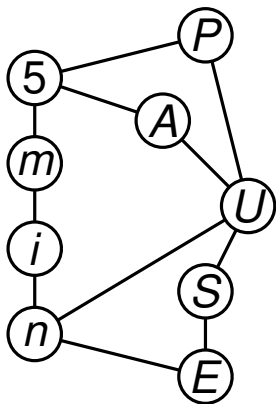
betrachte Baum auf den Knoten x_1, \dots, x_r mit Bags X_1, \dots, X_r , sodass

1. $X_1 \cup \dots \cup X_r = V$
2. $\{u, v\} \in E \Rightarrow u, v \in X_i$ für mindestens ein Bag X_i
3. die Bags jedes Knotens $v \in V$ bilden einen Teilbaum

Baumweite

- Weite einer Zerlegung: $\max\{|X_i|\} - 1$
- Baumweite eines Graphen: minimale Weite einer Baumzerlegung

Welche Baumweite hat der folgende Graph?



Baumweite

Das gleiche Spiel nochmal... jetzt auf Bäumen!

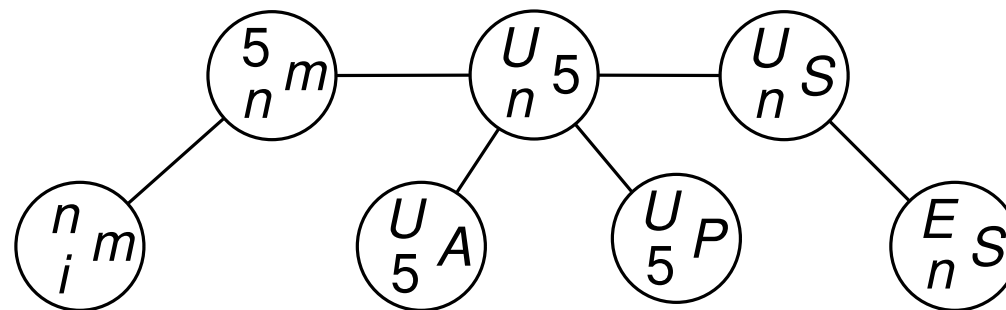
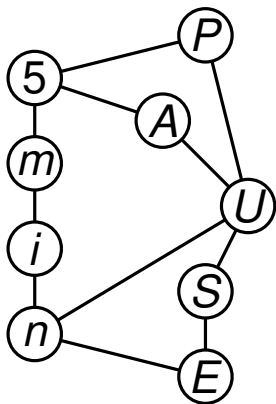
betrachte Baum auf den Knoten x_1, \dots, x_r mit Bags X_1, \dots, X_r , sodass

1. $X_1 \cup \dots \cup X_r = V$
2. $\{u, v\} \in E \Rightarrow u, v \in X_i$ für mindestens ein Bag X_i
3. die Bags jedes Knotens $v \in V$ bilden einen Teilbaum

Baumweite

- Weite einer Zerlegung: $\max\{|X_i|\} - 1$
- Baumweite eines Graphen: minimale Weite einer Baumzerlegung

Welche Baumweite hat der folgende Graph?



\Rightarrow Baumweite 2

Baumweite

Das gleiche Spiel nochmal... jetzt auf Bäumen!

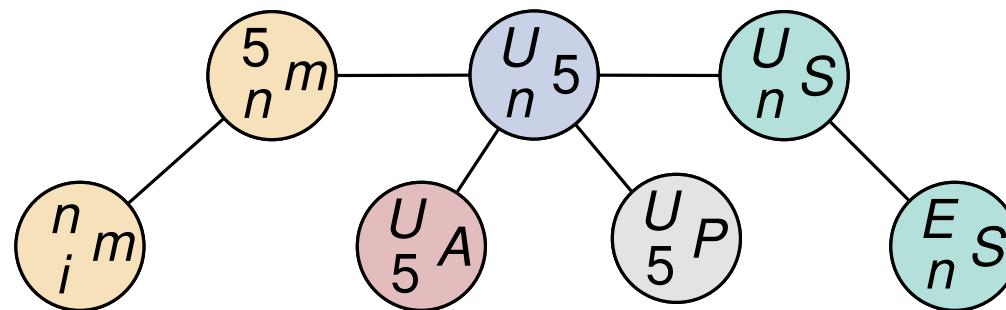
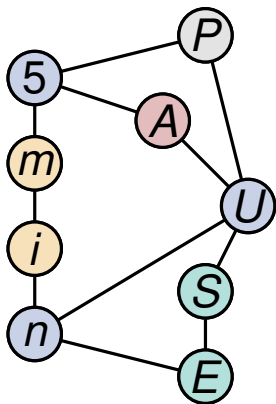
betrachte Baum auf den Knoten x_1, \dots, x_r mit Bags X_1, \dots, X_r , sodass

1. $X_1 \cup \dots \cup X_r = V$
2. $\{u, v\} \in E \Rightarrow u, v \in X_i$ für mindestens ein Bag X_i
3. die Bags jedes Knotens $v \in V$ bilden einen Teilbaum

Baumweite

- Weite einer Zerlegung: $\max\{|X_i|\} - 1$
- Baumweite eines Graphen: minimale Weite einer Baumzerlegung

Welche Baumweite hat der folgende Graph?



\Rightarrow Baumweite 2

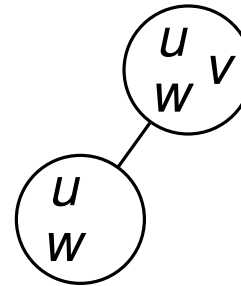
Schöne Baumzerlegungen

Drei Typen von Knoten

Schöne Baumzerlegungen

Drei Typen von Knoten

- x_i ist **introduce-Knoten** wenn
 - x_i hat genau ein Kind x_j und
 - $X_i = X_j \cup \{v\}$ für ein $v \in V$



Intuition: DP läuft bottom-up

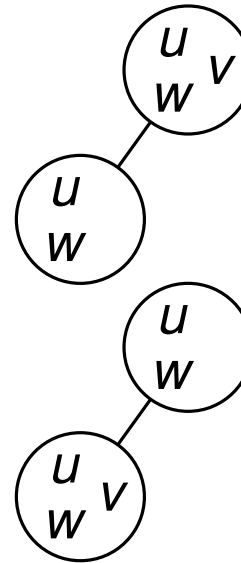


Schöne Baumzerlegungen

Drei Typen von Knoten

- x_i ist **introduce-Knoten** wenn
 - x_i hat genau ein Kind x_j und
 - $X_i = X_j \cup \{v\}$ für ein $v \in V$

- x_i ist **forget-Knoten** wenn
 - x_i hat genau ein Kind x_j und
 - $X_i = X_j \setminus \{v\}$ für ein $v \in V$



Intuition: DP läuft bottom-up

↑
introduce v

↑
forget v

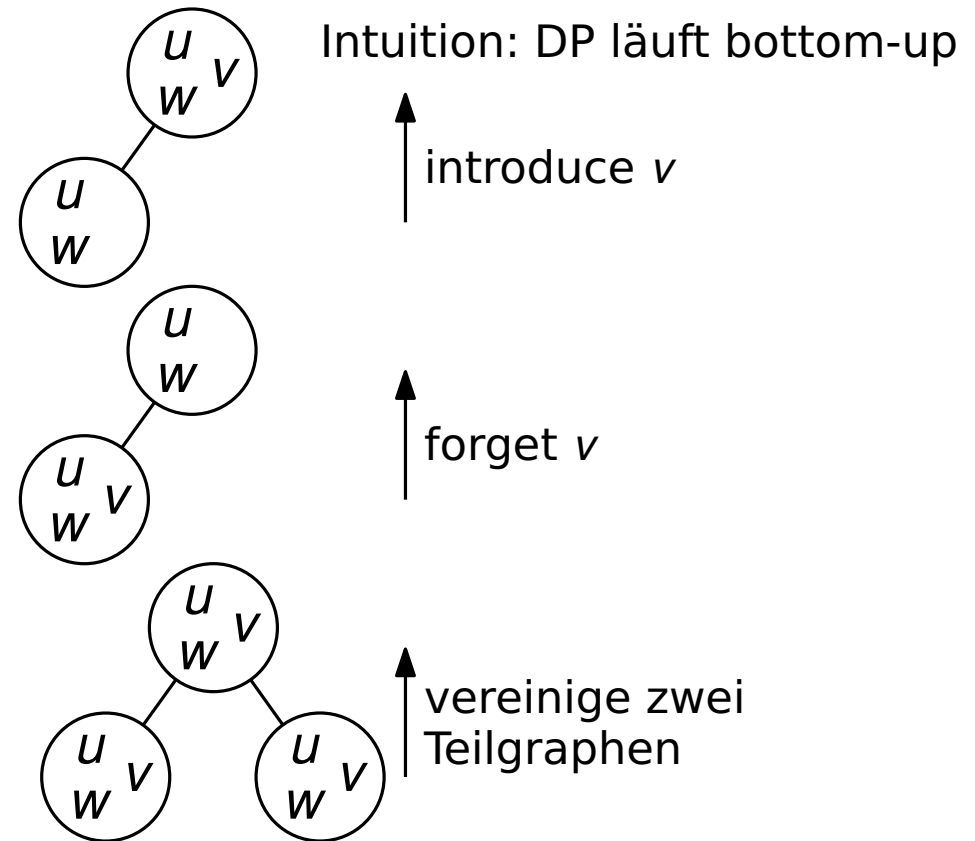
Schöne Baumzerlegungen

Drei Typen von Knoten

- x_i ist **introduce-Knoten** wenn
 - x_i hat genau ein Kind x_j und
 - $X_i = X_j \cup \{v\}$ für ein $v \in V$

- x_i ist **forget-Knoten** wenn
 - x_i hat genau ein Kind x_j und
 - $X_i = X_j \setminus \{v\}$ für ein $v \in V$

- x_i ist **join-Knoten** wenn
 - x_i hat genau zwei Kinder x_j, x_k
 - und $X_i = X_j = X_k$



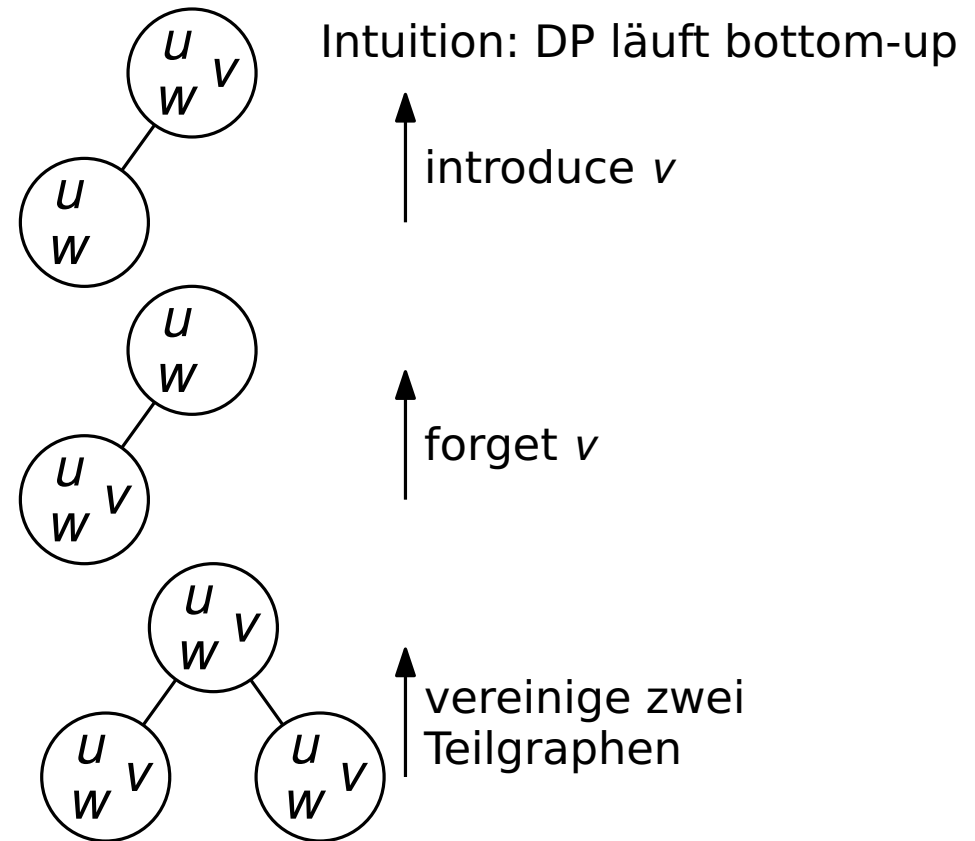
Schöne Baumzerlegungen

Drei Typen von Knoten

- x_i ist **introduce-Knoten** wenn
 - x_i hat genau ein Kind x_j und
 - $X_i = X_j \cup \{v\}$ für ein $v \in V$

- x_i ist **forget-Knoten** wenn
 - x_i hat genau ein Kind x_j und
 - $X_i = X_j \setminus \{v\}$ für ein $v \in V$

- x_i ist **join-Knoten** wenn
 - x_i hat genau zwei Kinder x_j, x_k
 - und $X_i = X_j = X_k$



Theorem

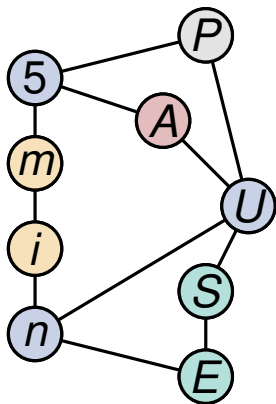
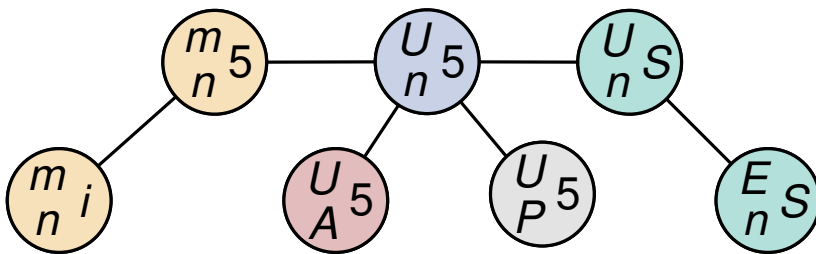
Wenn G eine Baumzerlegung mit Weite t hat, dann hat G auch eine schöne Baumzerlegung mit Weite t .

Schöne Baumzerlegungen

Theorem

Wenn G eine Baumzerlegung mit Weite t hat, dann hat G auch eine schöne Baumzerlegung mit Weite t .

Beispiel

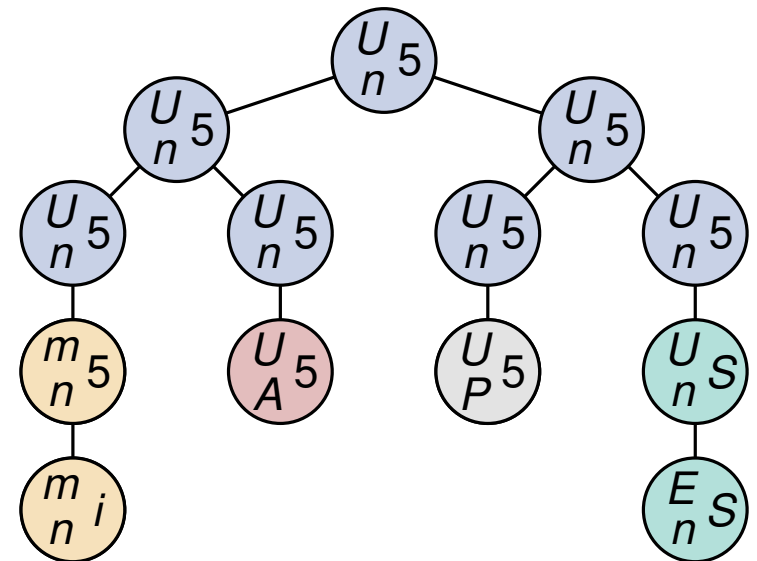
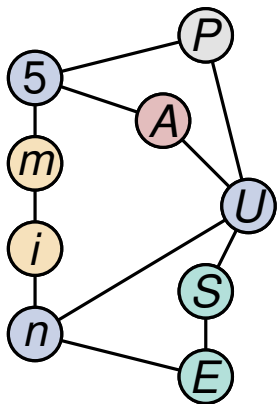
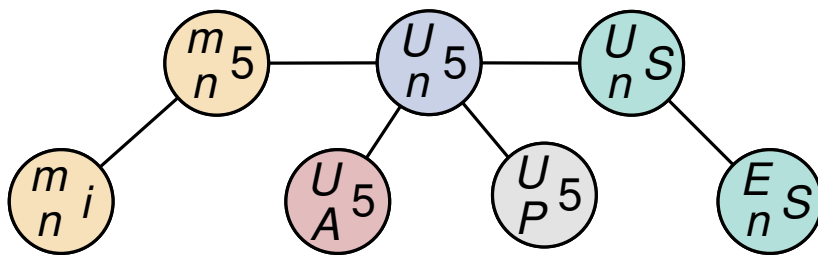


Schöne Baumzerlegungen

Theorem

Wenn G eine Baumzerlegung mit Weite t hat, dann hat G auch eine schöne Baumzerlegung mit Weite t .

Beispiel

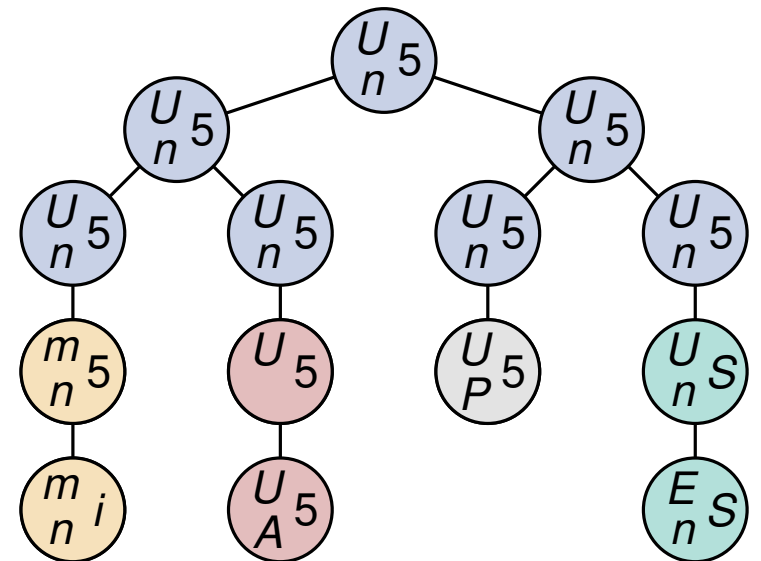
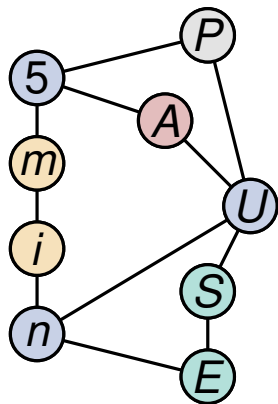
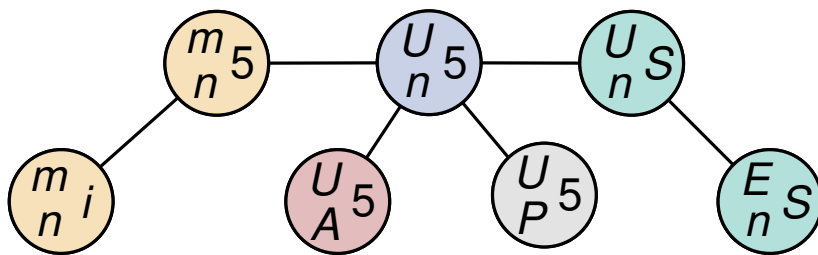


Schöne Baumzerlegungen

Theorem

Wenn G eine Baumzerlegung mit Weite t hat, dann hat G auch eine schöne Baumzerlegung mit Weite t .

Beispiel

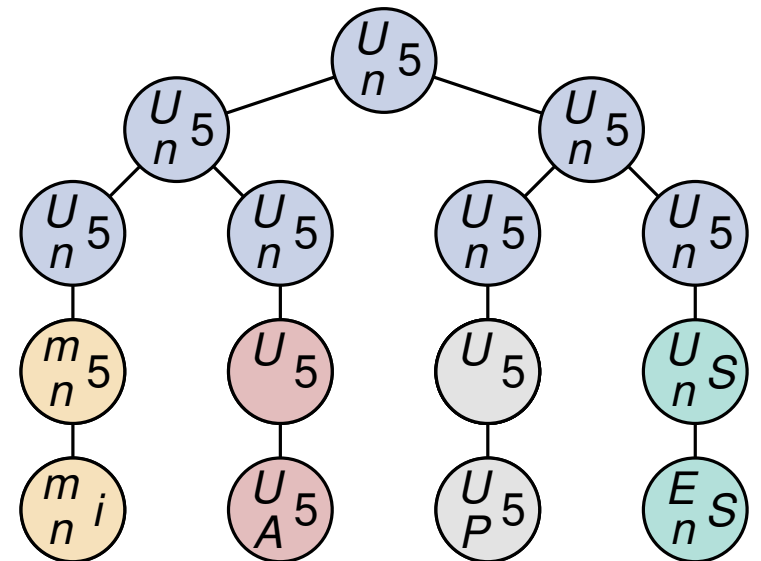
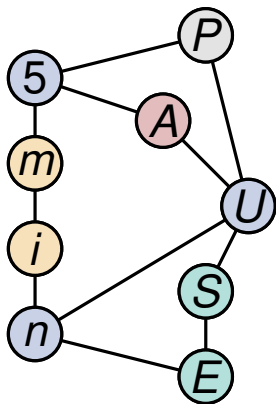
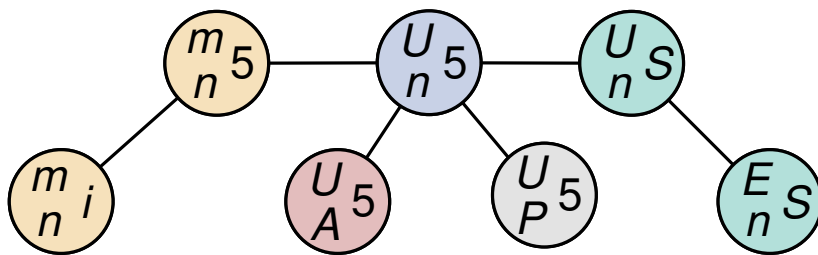


Schöne Baumzerlegungen

Theorem

Wenn G eine Baumzerlegung mit Weite t hat, dann hat G auch eine schöne Baumzerlegung mit Weite t .

Beispiel

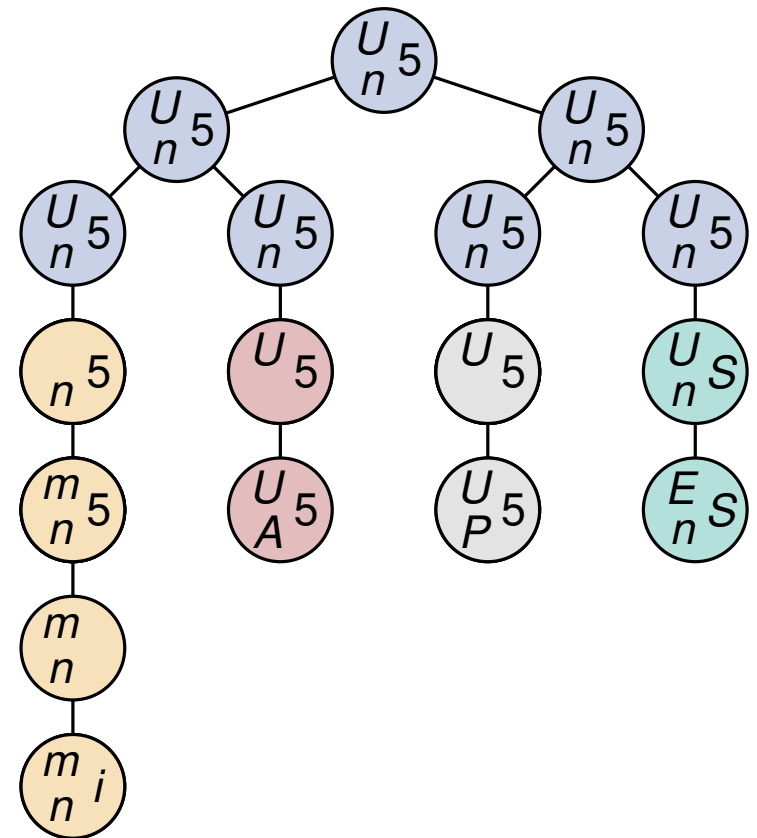
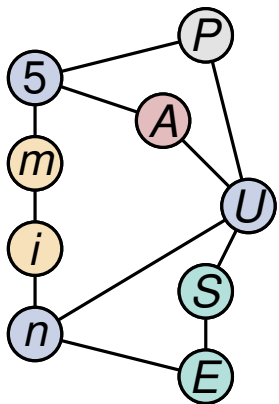
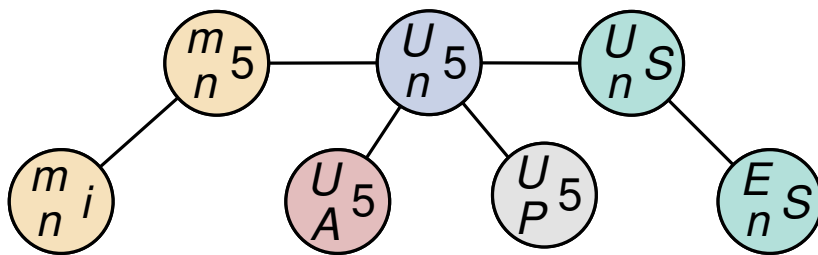


Schöne Baumzerlegungen

Theorem

Wenn G eine Baumzerlegung mit Weite t hat, dann hat G auch eine schöne Baumzerlegung mit Weite t .

Beispiel

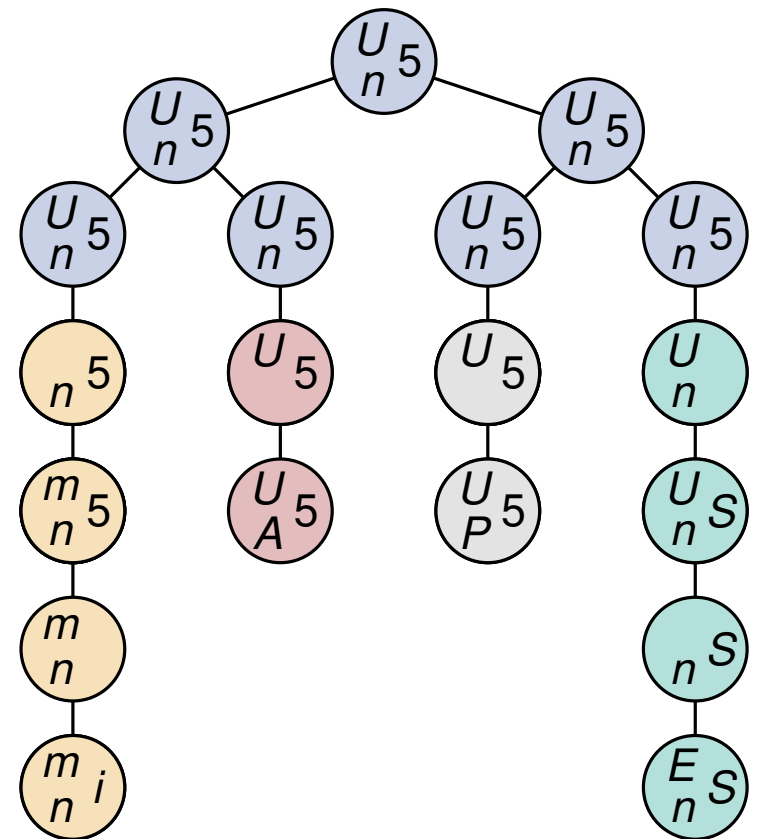
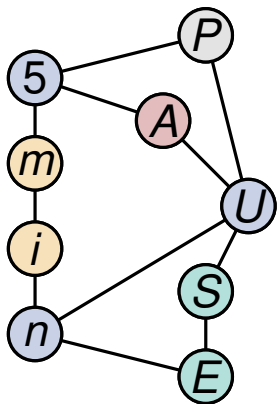
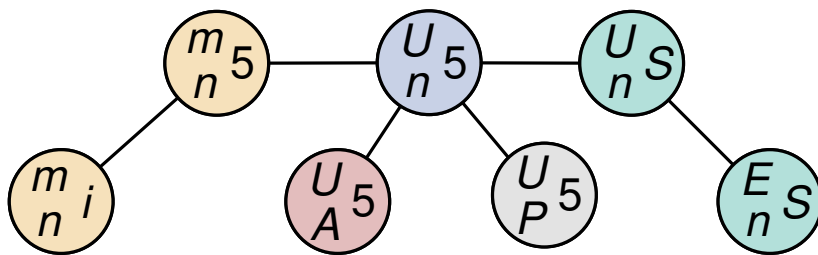


Schöne Baumzerlegungen

Theorem

Wenn G eine Baumzerlegung mit Weite t hat, dann hat G auch eine schöne Baumzerlegung mit Weite t .

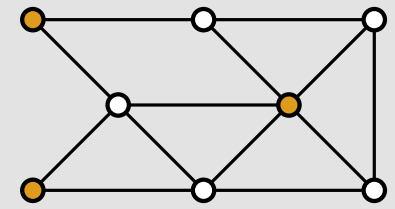
Beispiel



DP über eine schöne Baumzerlegung

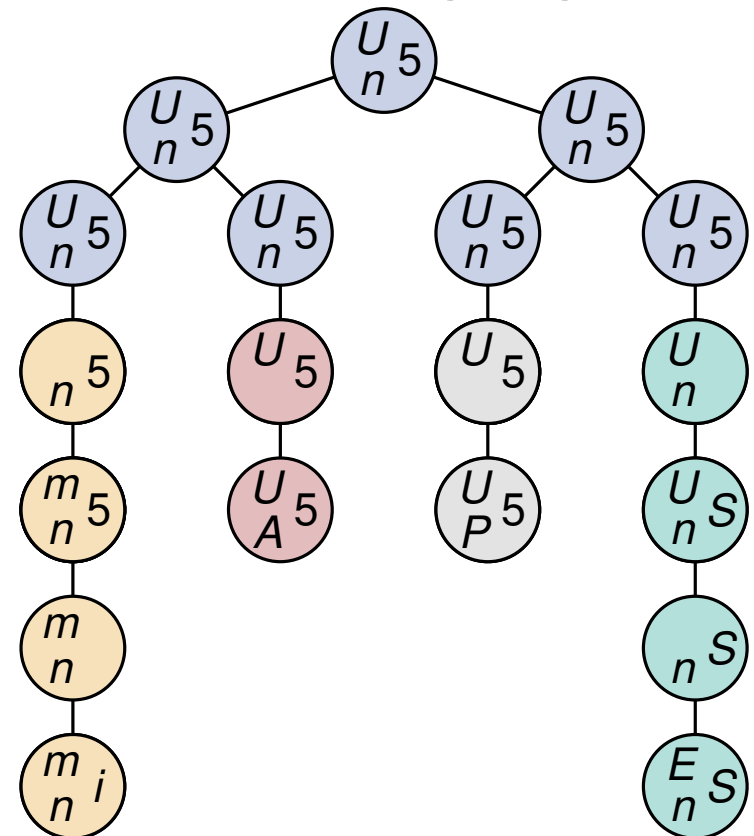
Problem: INDEPENDENT SET

Gegeben seien ein Graph, ein Parameter t und eine Baumzerl. der Weite t . Gibt es ein independent Set der Größe k ?
 (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)



Dynamisches Programm über eine schöne Baumzerlegung

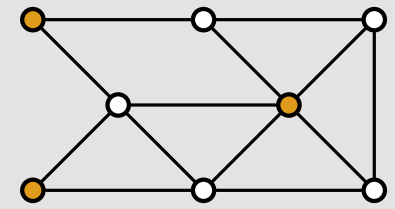
- introduce-/forget-Knoten: wie vorher bei der Pfadzerlegung



DP über eine schöne Baumzerlegung

Problem: INDEPENDENT SET

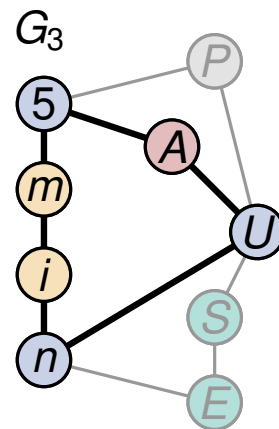
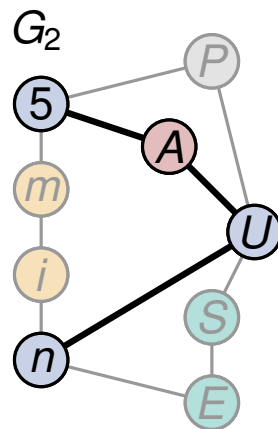
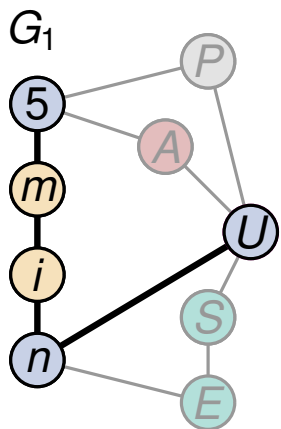
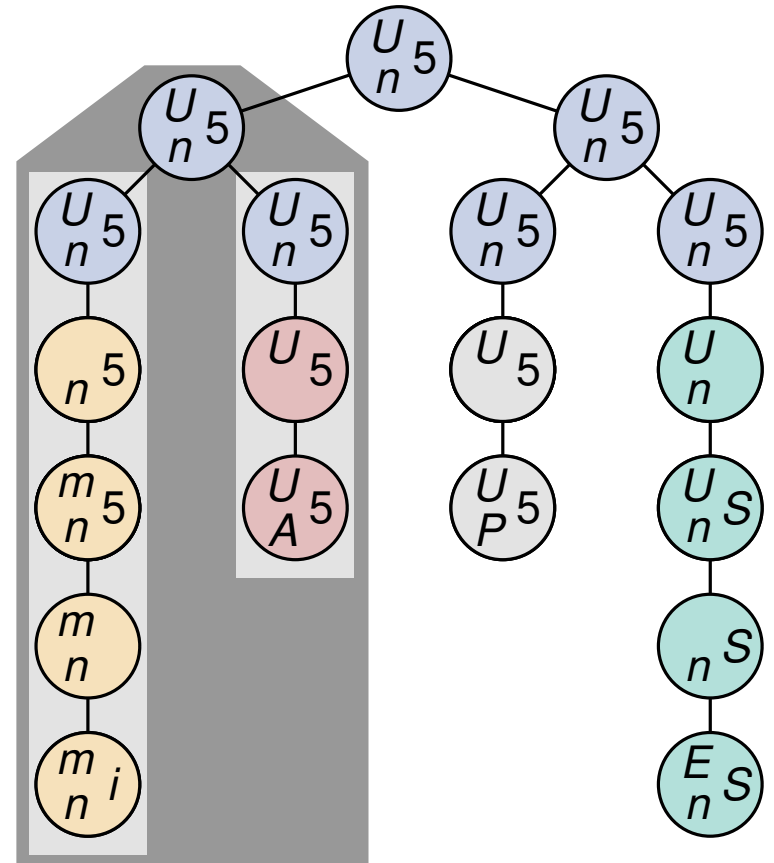
Gegeben seien ein Graph, ein Parameter t und eine Baumzerl. der Weite t . Gibt es ein independent Set der Größe k ?
 (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)



Dynamisches Programm über eine schöne Baumzerlegung

■ join-Knoten:

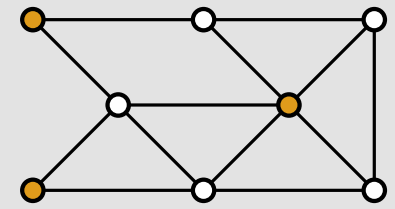
	\emptyset	$\{U\}$	$\{5\}$	$\{n\}$	$\{U, 5\}$	$\{U, n\}$	$\{n, 5\}$	$\{U, n, 5\}$
G_1	1	2	2	2	3	$-\infty$	2	$-\infty$
G_2	1	1	1	2	2	$-\infty$	2	$-\infty$
G_3								



DP über eine schöne Baumzerlegung

Problem: INDEPENDENT SET

Gegeben seien ein Graph, ein Parameter t und eine Baumzerl. der Weite t . Gibt es ein independent Set der Größe k ?
 (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)

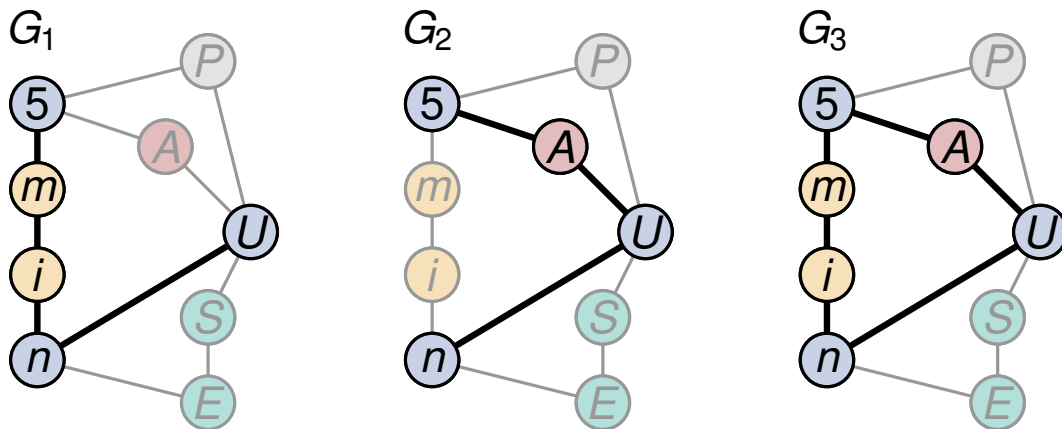
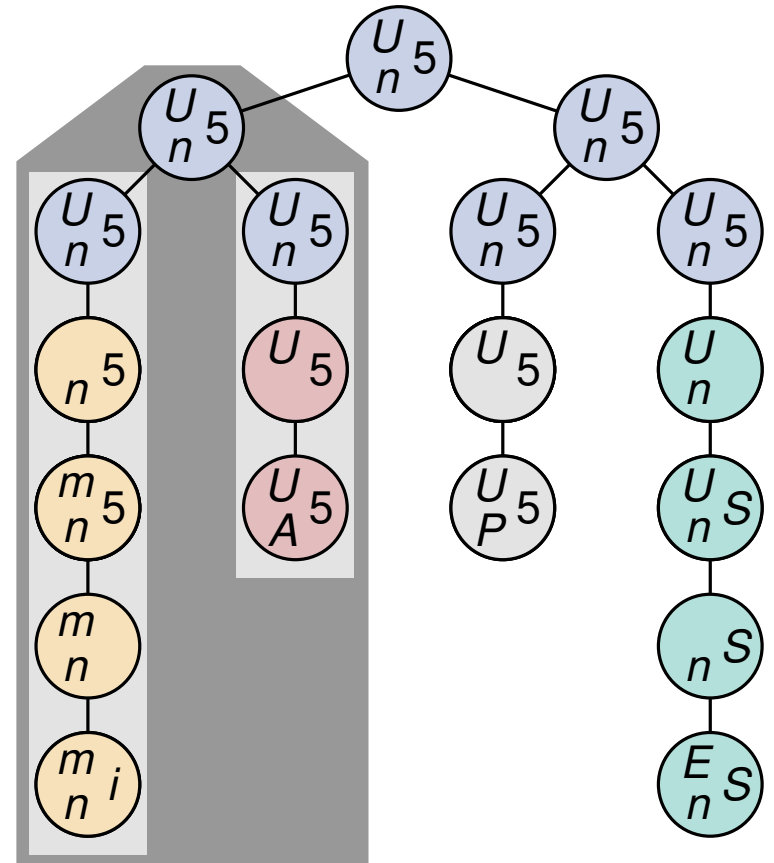


Dynamisches Programm über eine schöne Baumzerlegung

■ join-Knoten:

	\emptyset	$\{U\}$	$\{5\}$	$\{n\}$	$\{U, 5\}$	$\{U, n\}$	$\{n, 5\}$	$\{U, n, 5\}$
G_1	1	2	2	2	3	$-\infty$	2	$-\infty$
G_2	1	1	1	2	2	$-\infty$	2	$-\infty$
G_3	2							

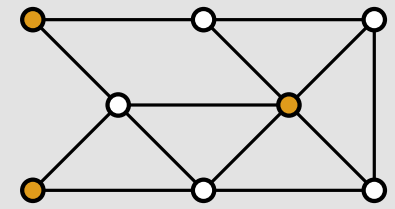
Vereinigung der independent Sets
 \Rightarrow Summe der Werte



DP über eine schöne Baumzerlegung

Problem: INDEPENDENT SET

Gegeben seien ein Graph, ein Parameter t und eine Baumzerl. der Weite t . Gibt es ein independent Set der Größe k ?
 (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)

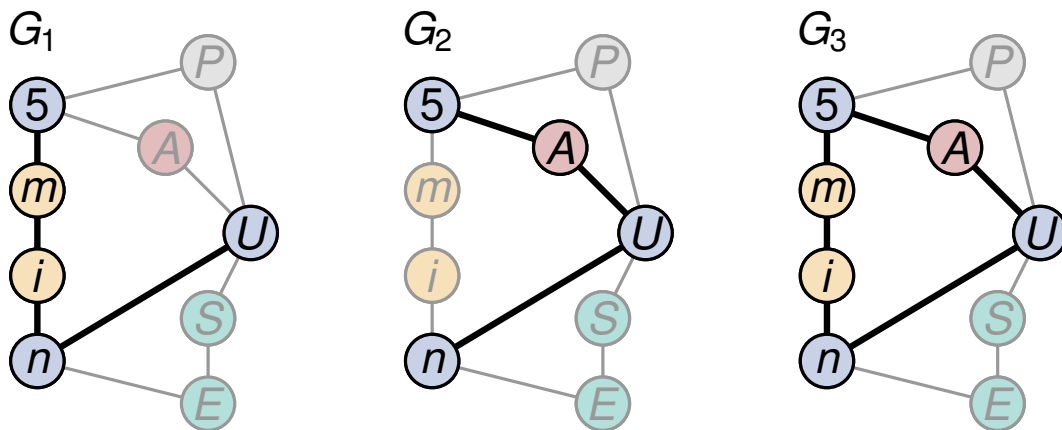
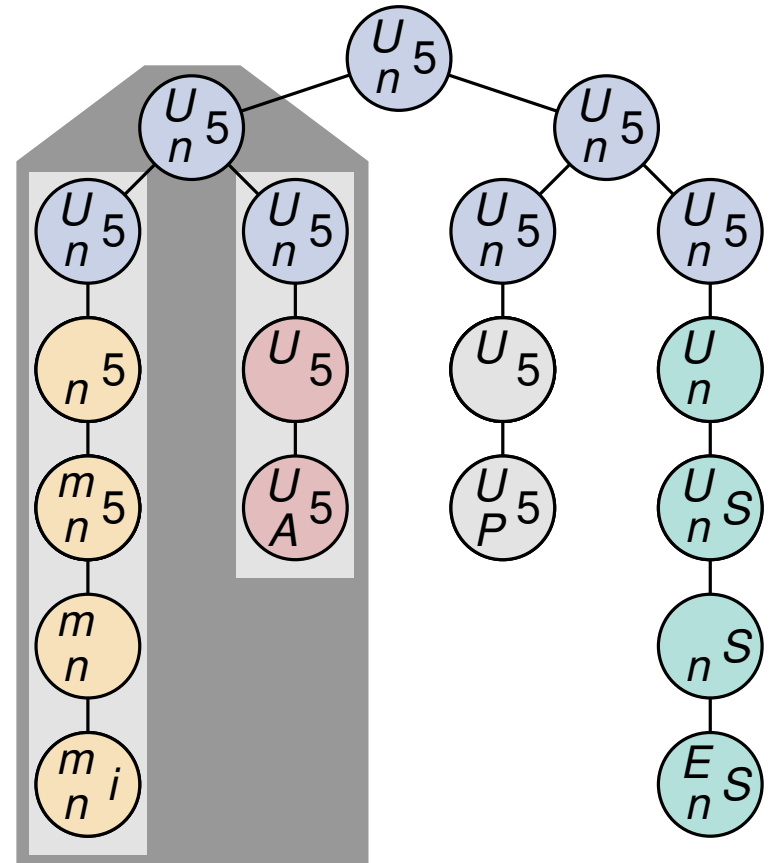


Dynamisches Programm über eine schöne Baumzerlegung

■ join-Knoten:

	\emptyset	$\{U\}$	$\{5\}$	$\{n\}$	$\{U, 5\}$	$\{U, n\}$	$\{n, 5\}$	$\{U, n, 5\}$
G_1	1	2	2	2	3	$-\infty$	2	$-\infty$
G_2	1	1	1	2	2	$-\infty$	2	$-\infty$
G_3	2	2						

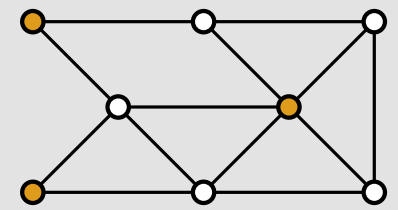
Vereinigung der independent Sets
 \Rightarrow Summe der Werte $-|\{U\}|$



DP über eine schöne Baumzerlegung

Problem: INDEPENDENT SET

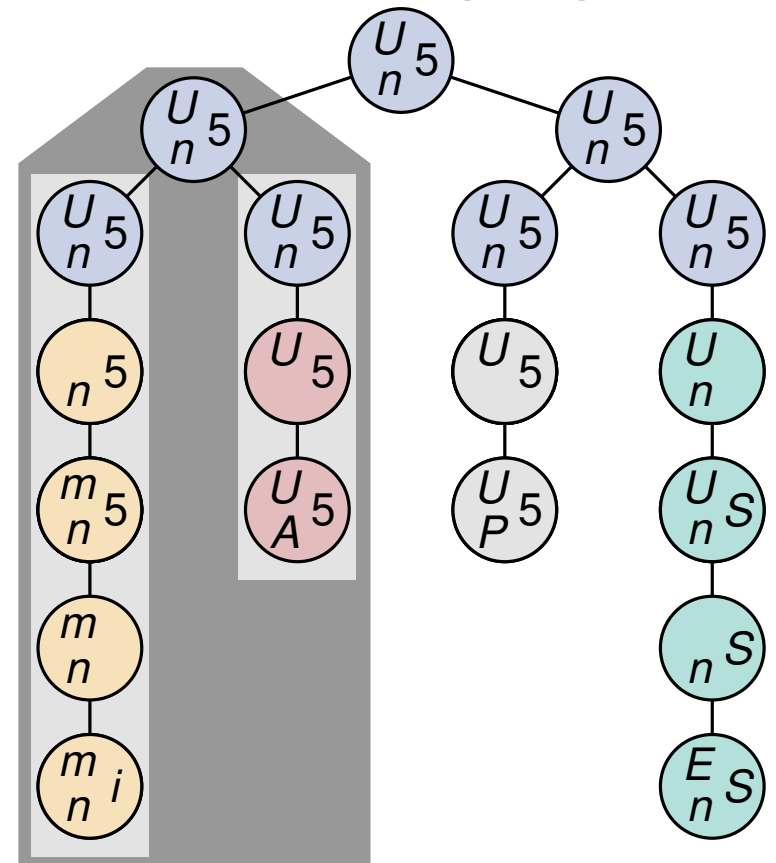
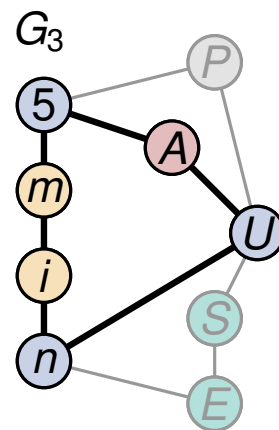
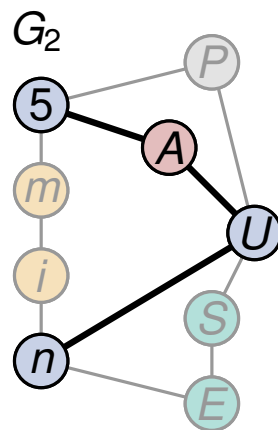
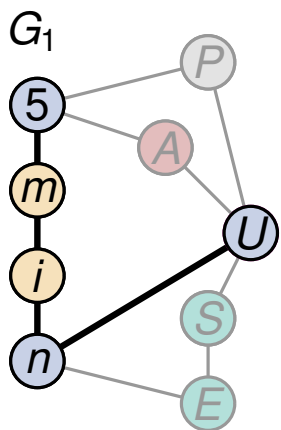
Gegeben seien ein Graph, ein Parameter t und eine Baumzerl. der Weite t . Gibt es ein independent Set der Größe k ?
 (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)



Dynamisches Programm über eine schöne Baumzerlegung

■ join-Knoten:

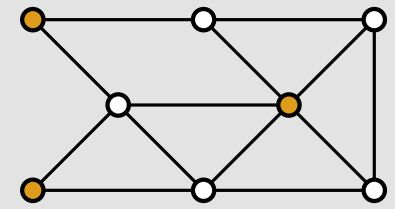
	\emptyset	$\{U\}$	$\{5\}$	$\{n\}$	$\{U, 5\}$	$\{U, n\}$	$\{n, 5\}$	$\{U, n, 5\}$
G_1	1	2	2	2	3	$-\infty$	2	$-\infty$
G_2	1	1	1	2	2	$-\infty$	2	$-\infty$
G_3	2	2	2					



DP über eine schöne Baumzerlegung

Problem: INDEPENDENT SET

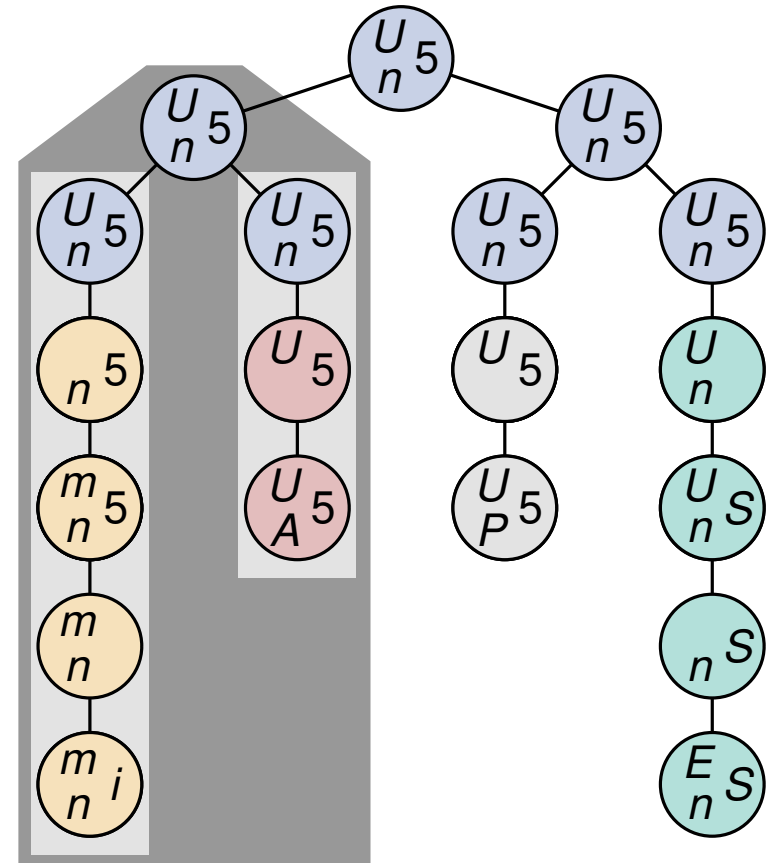
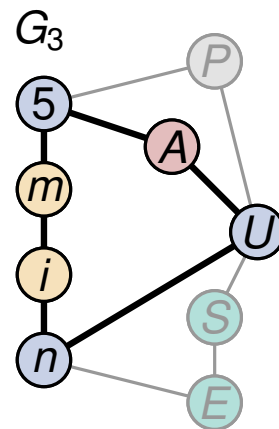
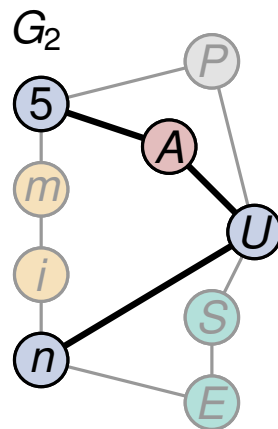
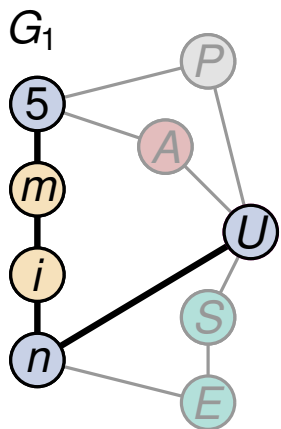
Gegeben seien ein Graph, ein Parameter t und eine Baumzerl. der Weite t . Gibt es ein independent Set der Größe k ?
 (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)



Dynamisches Programm über eine schöne Baumzerlegung

■ join-Knoten:

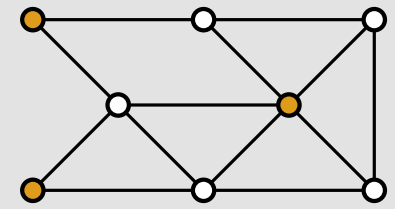
	\emptyset	$\{U\}$	$\{5\}$	$\{n\}$	$\{U, 5\}$	$\{U, n\}$	$\{n, 5\}$	$\{U, n, 5\}$
G_1	1	2	2	2	3	$-\infty$	2	$-\infty$
G_2	1	1	1	2	2	$-\infty$	2	$-\infty$
G_3	2	2	2	3				



DP über eine schöne Baumzerlegung

Problem: INDEPENDENT SET

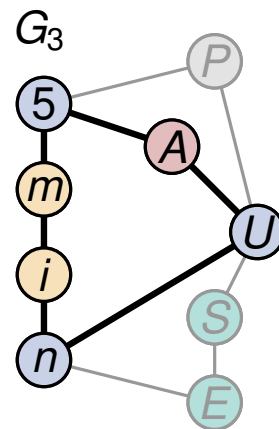
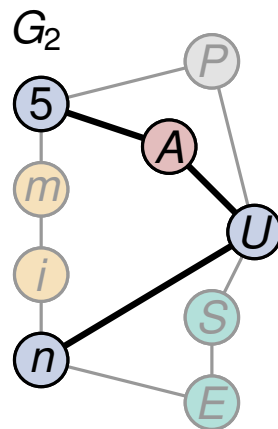
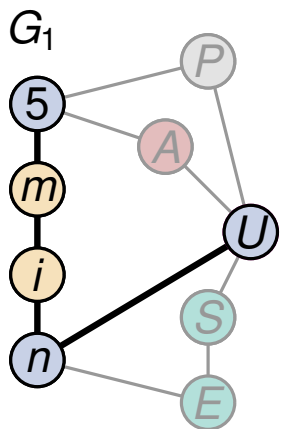
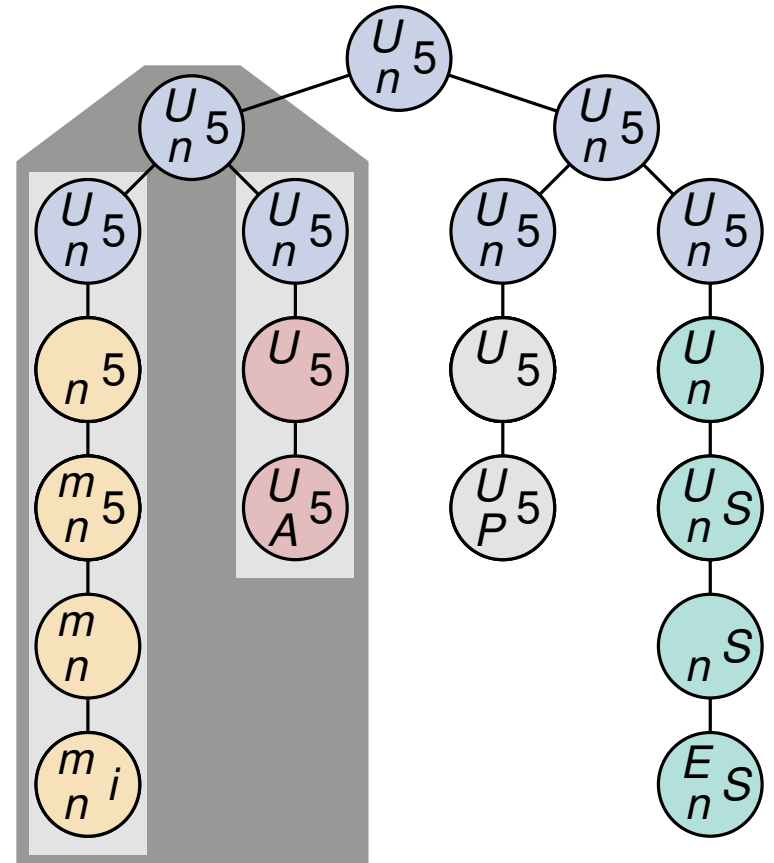
Gegeben seien ein Graph, ein Parameter t und eine Baumzerl. der Weite t . Gibt es ein independent Set der Größe k ?
 (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)



Dynamisches Programm über eine schöne Baumzerlegung

■ join-Knoten:

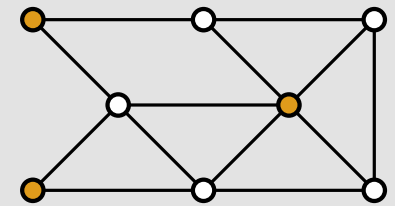
	\emptyset	$\{U\}$	$\{5\}$	$\{n\}$	$\{U, 5\}$	$\{U, n\}$	$\{n, 5\}$	$\{U, n, 5\}$
G_1	1	2	2	2	3	$-\infty$	2	$-\infty$
G_2	1	1	1	2	2	$-\infty$	2	$-\infty$
G_3	2	2	2	3	3			



DP über eine schöne Baumzerlegung

Problem: INDEPENDENT SET

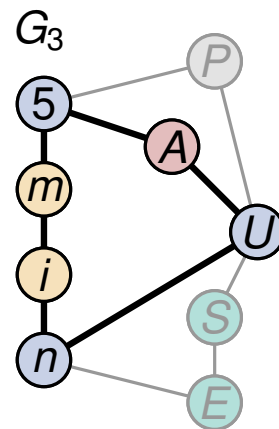
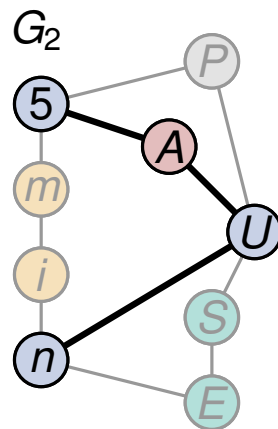
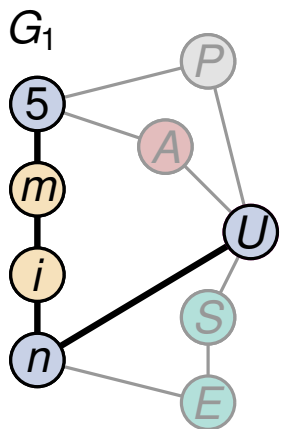
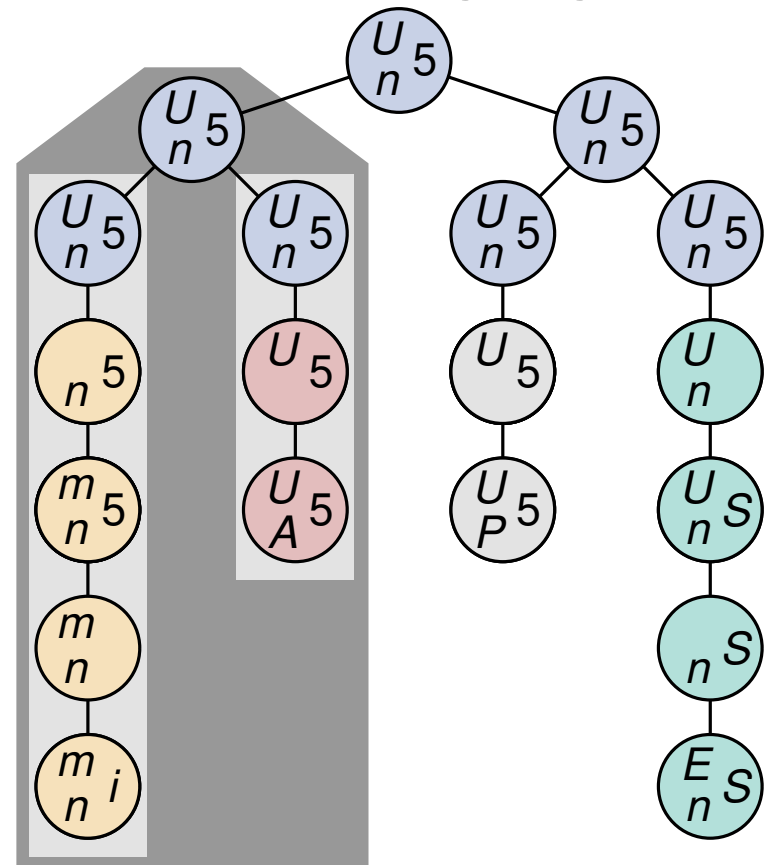
Gegeben seien ein Graph, ein Parameter t und eine Baumzerl. der Weite t . Gibt es ein independent Set der Größe k ?
 (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)



Dynamisches Programm über eine schöne Baumzerlegung

■ join-Knoten:

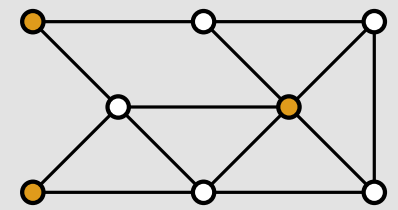
	\emptyset	$\{U\}$	$\{5\}$	$\{n\}$	$\{U, 5\}$	$\{U, n\}$	$\{n, 5\}$	$\{U, n, 5\}$
G_1	1	2	2	2	3	$-\infty$	2	$-\infty$
G_2	1	1	1	2	2	$-\infty$	2	$-\infty$
G_3	2	2	2	3	3	$-\infty$		



DP über eine schöne Baumzerlegung

Problem: INDEPENDENT SET

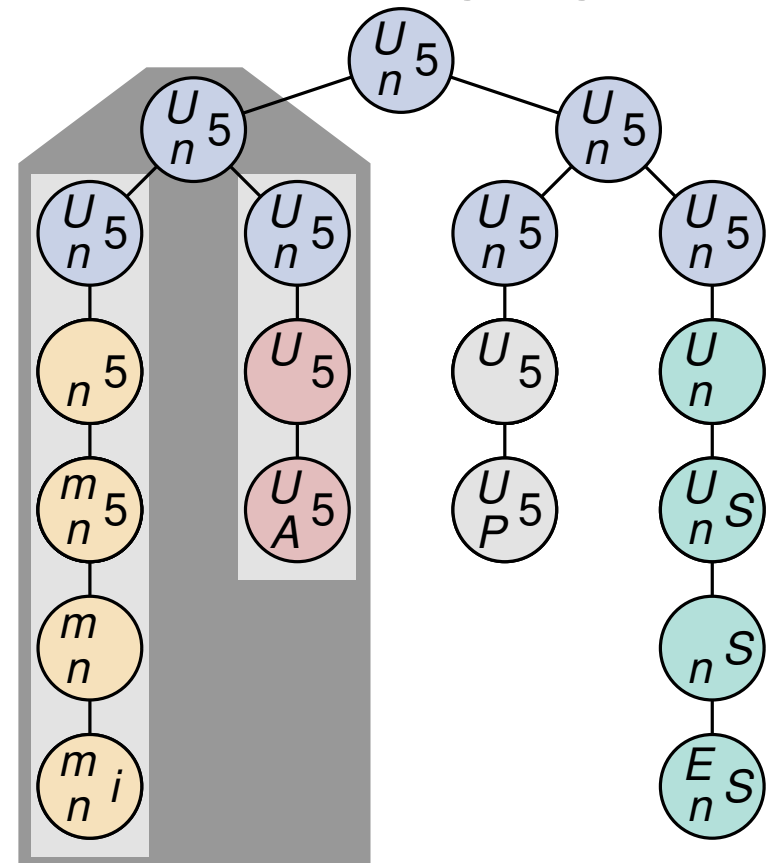
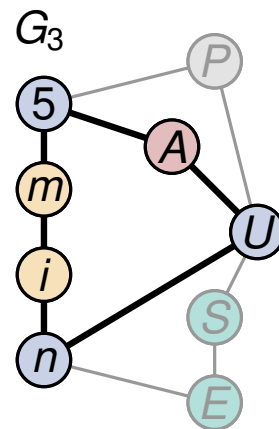
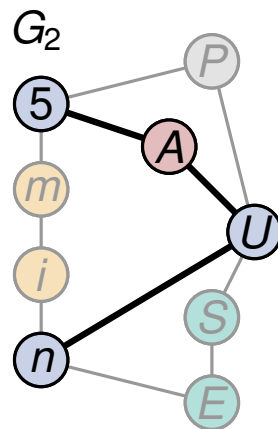
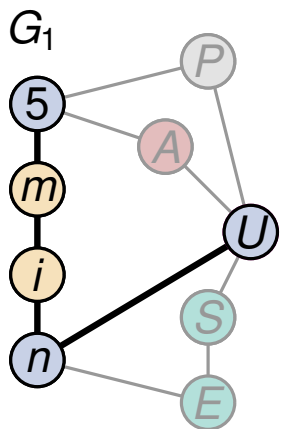
Gegeben seien ein Graph, ein Parameter t und eine Baumzerl. der Weite t . Gibt es ein independent Set der Größe k ?
 (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)



Dynamisches Programm über eine schöne Baumzerlegung

■ join-Knoten:

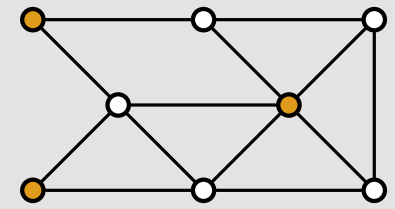
	\emptyset	$\{U\}$	$\{5\}$	$\{n\}$	$\{U, 5\}$	$\{U, n\}$	$\{n, 5\}$	$\{U, n, 5\}$
G_1	1	2	2	2	3	$-\infty$	2	$-\infty$
G_2	1	1	1	2	2	$-\infty$	2	$-\infty$
G_3	2	2	2	3	3	$-\infty$	2	



DP über eine schöne Baumzerlegung

Problem: INDEPENDENT SET

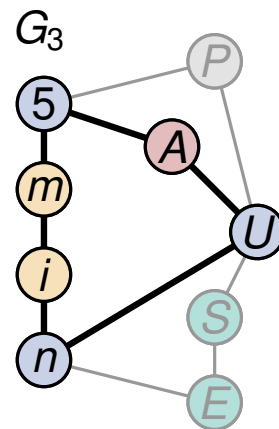
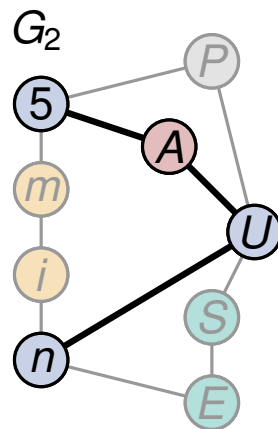
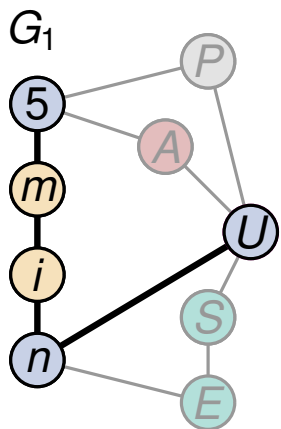
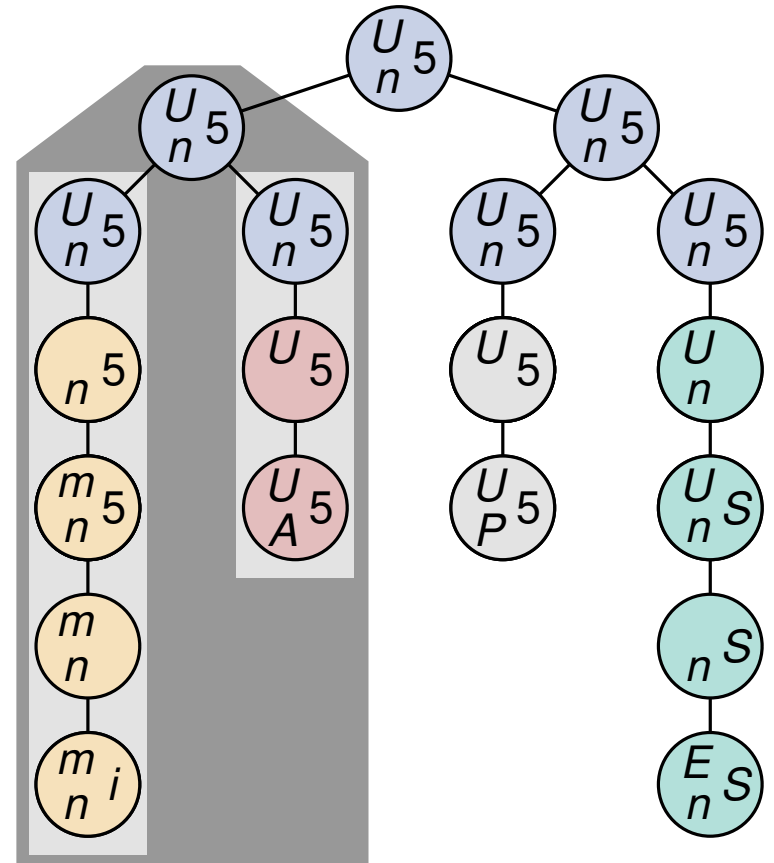
Gegeben seien ein Graph, ein Parameter t und eine Baumzerl. der Weite t . Gibt es ein independent Set der Größe k ?
 (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)



Dynamisches Programm über eine schöne Baumzerlegung

■ join-Knoten:

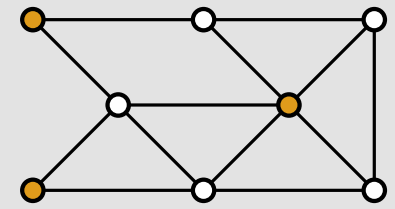
	\emptyset	$\{U\}$	$\{5\}$	$\{n\}$	$\{U, 5\}$	$\{U, n\}$	$\{n, 5\}$	$\{U, n, 5\}$
G_1	1	2	2	2	3	$-\infty$	2	$-\infty$
G_2	1	1	1	2	2	$-\infty$	2	$-\infty$
G_3	2	2	2	3	3	$-\infty$	2	$-\infty$



DP über eine schöne Baumzerlegung

Problem: INDEPENDENT SET

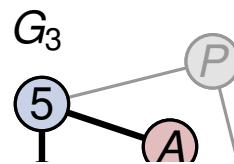
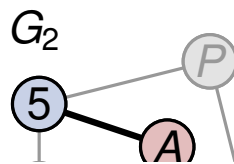
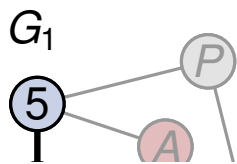
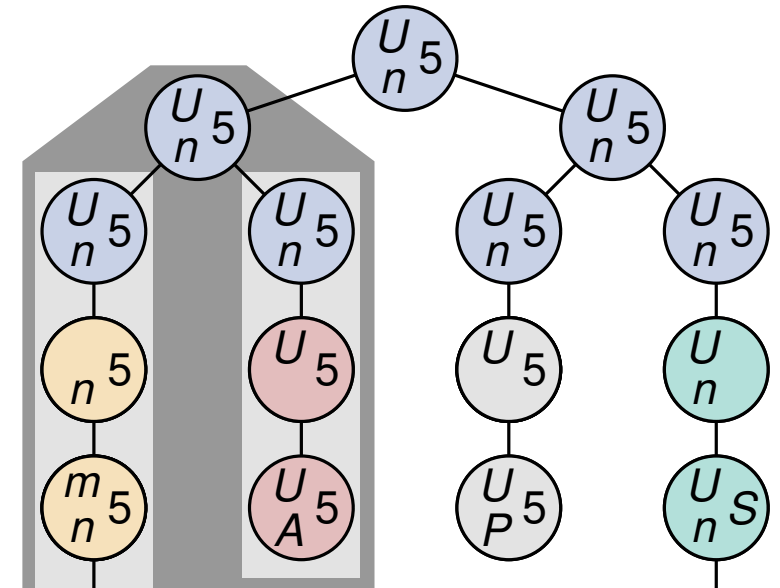
Gegeben seien ein Graph, ein Parameter t und eine Baumzerl. der Weite t . Gibt es ein independent Set der Größe k ?
 (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)



Dynamisches Programm über eine schöne Baumzerlegung

■ join-Knoten:

	\emptyset	$\{U\}$	$\{5\}$	$\{n\}$	$\{U, 5\}$	$\{U, n\}$	$\{n, 5\}$	$\{U, n, 5\}$
G_1	1	2	2	2	3	$-\infty$	2	$-\infty$
G_2	1	1	1	2	2	$-\infty$	2	$-\infty$
G_3	2	2	2	3	3	$-\infty$	2	$-\infty$



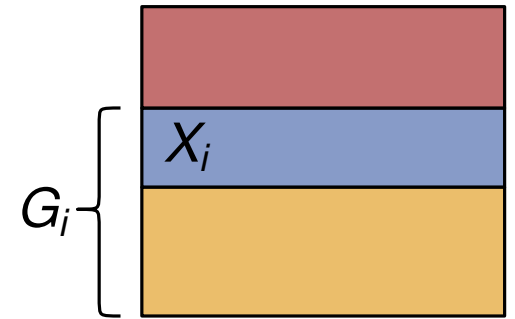
Theorem

INDEPENDENT SET ist FPT bezüglich der Baumweite t (das DP hat Laufzeit $O(2^t n^2)$).
 (angenommen, wir kennen eine entsprechende Baumzerlegung)

DPs auf Baumzerlegungen

Notation und grundlegende Eigenschaften

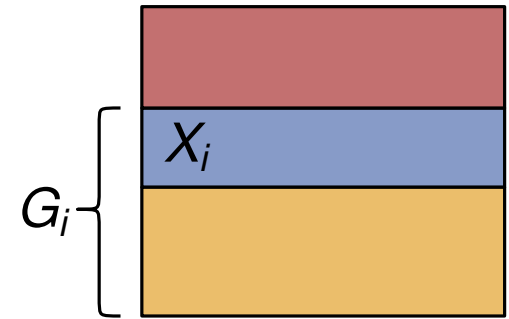
- für Knoten x_i in der Baumzerlegung ist $V_i = X_i \cup \{v \in V \mid v \in X_j \text{ für Nachfolger } x_j \text{ von } x_i\}$
- $G_i = G[V_i]$; X_i ist das **Interface** von G_i
- X_i separiert G_i vom Restgraph



DPs auf Baumzerlegungen

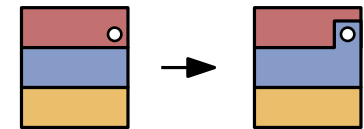
Notation und grundlegende Eigenschaften

- für Knoten x_i in der Baumzerlegung ist $V_i = X_i \cup \{v \in V \mid v \in X_j \text{ für Nachfolger } x_j \text{ von } x_i\}$
- $G_i = G[V_i]$; X_i ist das **Interface** von G_i
- X_i separiert G_i vom Restgraph



Knotentypen aus Sicht der G_i

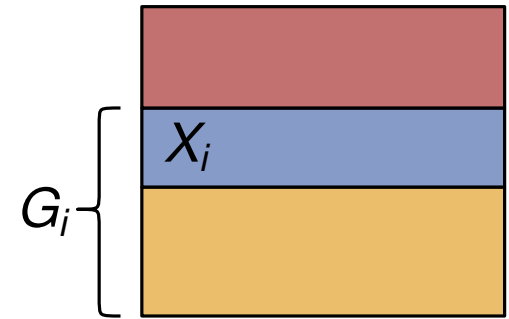
- **introduce:** füge Knoten zu G_i und zum Interface hinzu



DPs auf Baumzerlegungen

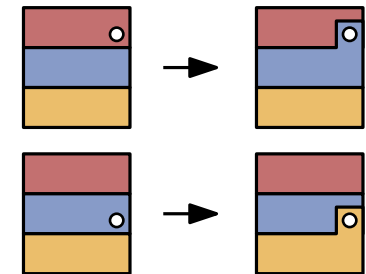
Notation und grundlegende Eigenschaften

- für Knoten x_i in der Baumzerlegung ist $V_i = X_i \cup \{v \in V \mid v \in X_j \text{ für Nachfolger } x_j \text{ von } x_i\}$
- $G_i = G[V_i]$; X_i ist das **Interface** von G_i
- X_i separiert G_i vom Restgraph



Knotentypen aus Sicht der G_i

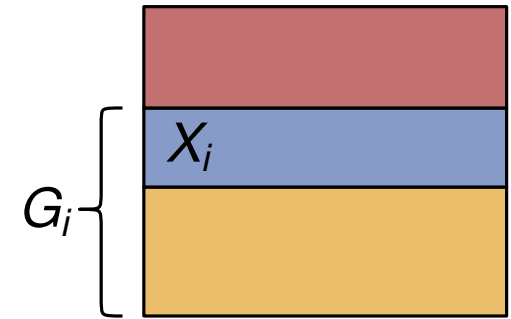
- **introduce:** füge Knoten zu G_i und zum Interface hinzu
- **forget:** entferne Knoten aus dem Interface von G_i



DPs auf Baumzerlegungen

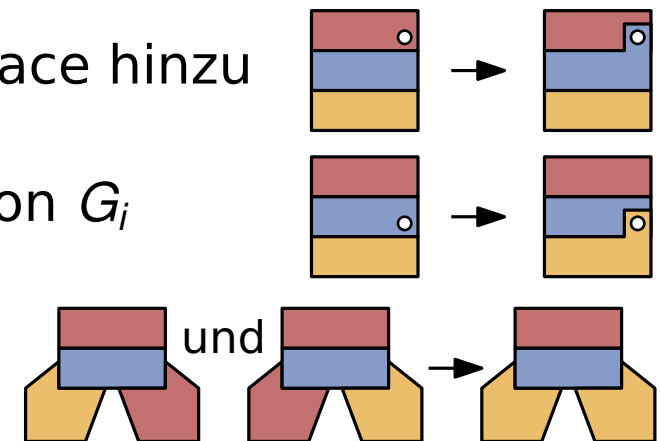
Notation und grundlegende Eigenschaften

- für Knoten x_i in der Baumzerlegung ist $V_i = X_i \cup \{v \in V \mid v \in X_j \text{ für Nachfolger } x_j \text{ von } x_i\}$
- $G_i = G[V_i]$; X_i ist das **Interface** von G_i
- X_i separiert G_i vom Restgraph



Knotentypen aus Sicht der G_i

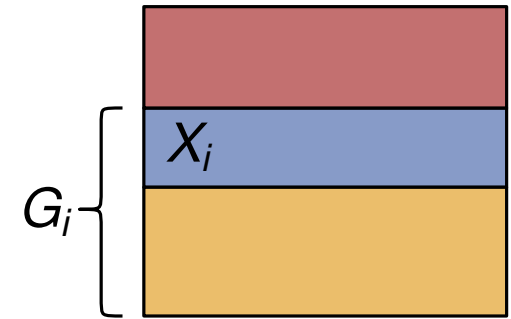
- **introduce:** füge Knoten zu G_i und zum Interface hinzu
- **forget:** entferne Knoten aus dem Interface von G_i
- **join:** vereinige zwei Teilgraphen mit dem selben Interface



DPs auf Baumzerlegungen

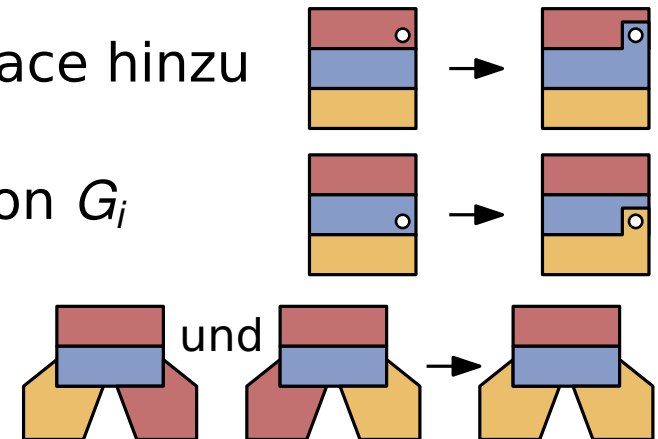
Notation und grundlegende Eigenschaften

- für Knoten x_i in der Baumzerlegung ist $V_i = X_i \cup \{v \in V \mid v \in X_j \text{ für Nachfolger } x_j \text{ von } x_i\}$
- $G_i = G[V_i]$; X_i ist das **Interface** von G_i
- X_i separiert G_i vom Restgraph



Knotentypen aus Sicht der G_i

- **introduce:** füge Knoten zu G_i und zum Interface hinzu
- **forget:** entferne Knoten aus dem Interface von G_i
- **join:** vereinige zwei Teilgraphen mit dem selben Interface



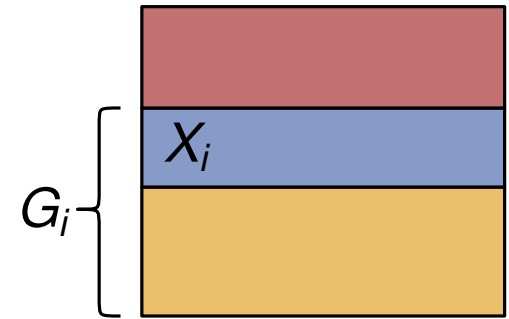
Eigenschaften der für (G_i, X_i) berechneten Teillösungen

- für $G_i = G$ ist die tatsächliche Lösung enthalten

DPs auf Baumzerlegungen

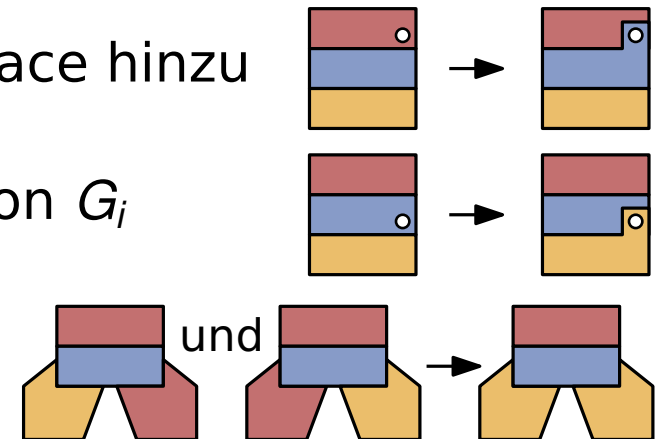
Notation und grundlegende Eigenschaften

- für Knoten x_i in der Baumzerlegung ist $V_i = X_i \cup \{v \in V \mid v \in X_j \text{ für Nachfolger } x_j \text{ von } x_i\}$
- $G_i = G[V_i]$; X_i ist das **Interface** von G_i
- X_i separiert G_i vom Restgraph



Knotentypen aus Sicht der G_i

- **introduce:** füge Knoten zu G_i und zum Interface hinzu
- **forget:** entferne Knoten aus dem Interface von G_i
- **join:** vereinige zwei Teilgraphen mit dem selben Interface



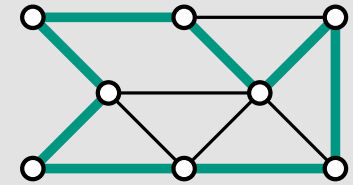
Eigenschaften der für (G_i, X_i) berechneten Teillösungen

- für $G_i = G$ ist die tatsächliche Lösung enthalten
- in jedem Schritt lassen sich alle neuen Teillösungen aus den alten berechnen

DP für Hamiltonkreis

Problem: HAMILTONKREIS

Gibt es in einem gegebenen Graphen einen Kreis, der alle Knoten enthält?

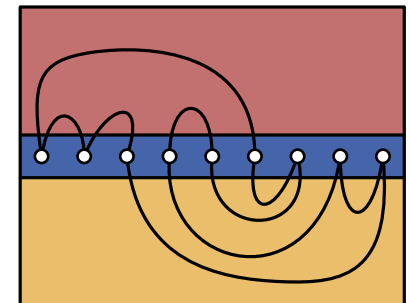


Ziel: FPT-Laufzeit bezüglich Baumweite

(entsprechende Baumzerlegung wird als gegeben angenommen)

Was sind sinnvolle Teillösungen?

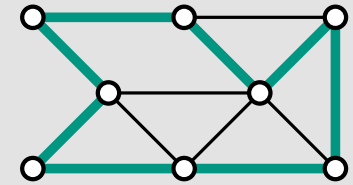
- Beobachtung: Hamiltonkreis in G liefert Menge von Pfaden in G_i



DP für Hamiltonkreis

Problem: HAMILTONKREIS

Gibt es in einem gegebenen Graphen einen Kreis, der alle Knoten enthält?

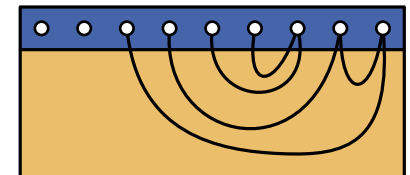


Ziel: FPT-Laufzeit bezüglich Baumweite

(entsprechende Baumzerlegung wird als gegeben angenommen)

Was sind sinnvolle Teilösungen?

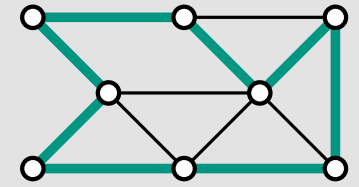
- Beobachtung: Hamiltonkreis in G liefert Menge von Pfaden in G_i



DP für Hamiltonkreis

Problem: HAMILTONKREIS

Gibt es in einem gegebenen Graphen einen Kreis, der alle Knoten enthält?

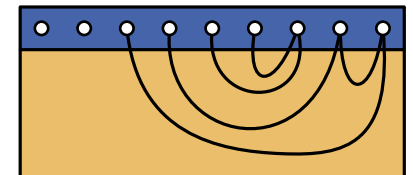


Ziel: FPT-Laufzeit bezüglich Baumweite

(entsprechende Baumzerlegung wird als gegeben angenommen)

Was sind sinnvolle Teillösungen?

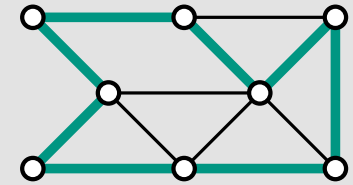
- Beobachtung: Hamiltonkreis in G liefert Menge von Pfaden in G_i
- \Rightarrow Teillösung = Menge von Pfaden in G_i



DP für Hamiltonkreis

Problem: HAMILTONKREIS

Gibt es in einem gegebenen Graphen einen Kreis, der alle Knoten enthält?

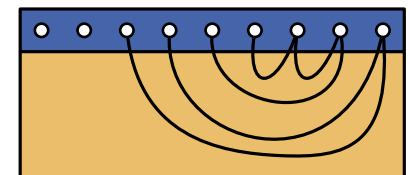
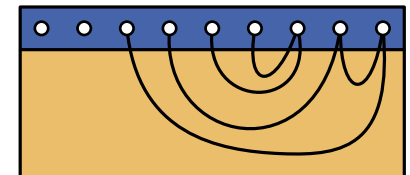


Ziel: FPT-Laufzeit bezüglich Baumweite

(entsprechende Baumzerlegung wird als gegeben angenommen)

Was sind sinnvolle Teillösungen?

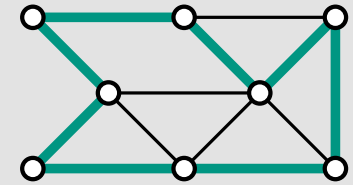
- Beobachtung: Hamiltonkreis in G liefert Menge von Pfaden in G_i
- \Rightarrow Teillösung = Menge von Pfaden in G_i
- Problem: es gibt zu viele solche Pfadmengen



DP für Hamiltonkreis

Problem: HAMILTONKREIS

Gibt es in einem gegebenen Graphen einen Kreis, der alle Knoten enthält?

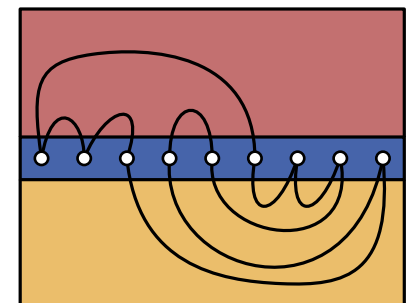
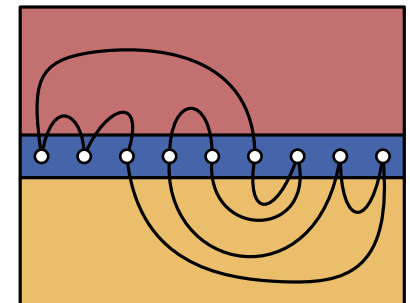


Ziel: FPT-Laufzeit bezüglich Baumweite

(entsprechende Baumzerlegung wird als gegeben angenommen)

Was sind sinnvolle Teillösungen?

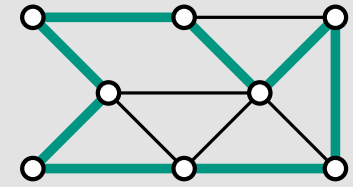
- Beobachtung: Hamiltonkreis in G liefert Menge von Pfaden in G_i
- \Rightarrow Teillösung = Menge von Pfaden in G_i
- Problem: es gibt zu viele solche Pfadmengen
- Beobachtung: unterschiedliche Pfadmengen sehen von außen gleich aus, wenn



DP für Hamiltonkreis

Problem: HAMILTONKREIS

Gibt es in einem gegebenen Graphen einen Kreis, der alle Knoten enthält?

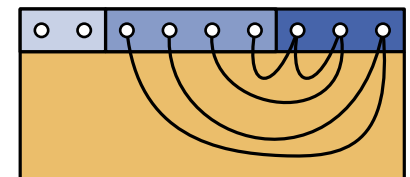
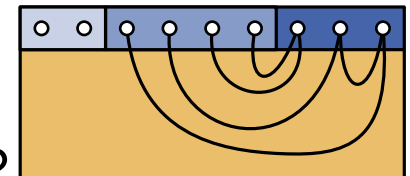


Ziel: FPT-Laufzeit bezüglich Baumweite

(entsprechende Baumzerlegung wird als gegeben angenommen)

Was sind sinnvolle Teillösungen?

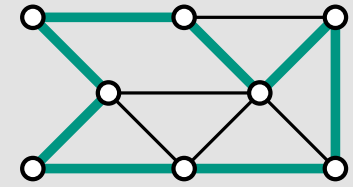
- Beobachtung: Hamiltonkreis in G liefert Menge von Pfaden in G_i
- \Rightarrow Teillösung = Menge von Pfaden in G_i
- Problem: es gibt zu viele solche Pfadmengen
- Beobachtung: unterschiedliche Pfadmengen sehen von außen gleich aus, wenn
 - die gleichen Knoten sind in G_i inzident zu 0, 1 bzw. 2 Kreiskanten



DP für Hamiltonkreis

Problem: HAMILTONKREIS

Gibt es in einem gegebenen Graphen einen Kreis, der alle Knoten enthält?

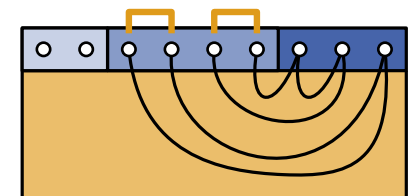
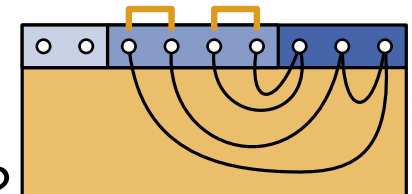


Ziel: FPT-Laufzeit bezüglich Baumweite

(entsprechende Baumzerlegung wird als gegeben angenommen)

Was sind sinnvolle Teillösungen?

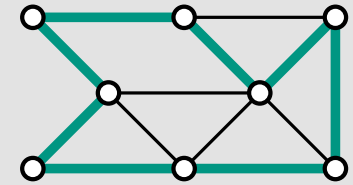
- Beobachtung: Hamiltonkreis in G liefert Menge von Pfaden in G_i
- \Rightarrow Teillösung = Menge von Pfaden in G_i
- Problem: es gibt zu viele solche Pfadmengen
- Beobachtung: unterschiedliche Pfadmengen sehen von außen gleich aus, wenn
 - die gleichen Knoten sind in G_i inzident zu 0, 1 bzw. 2 Kreiskanten
 - die gleichen Paare von 1-er Knoten gehören zum gleichen Pfad



DP für Hamiltonkreis

Problem: HAMILTONKREIS

Gibt es in einem gegebenen Graphen einen Kreis, der alle Knoten enthält?

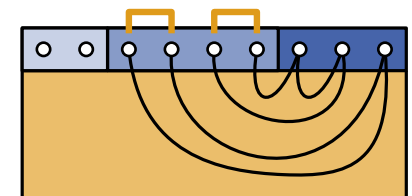
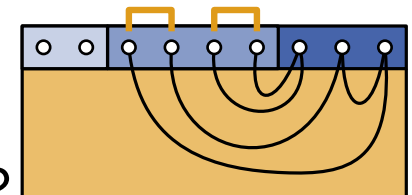
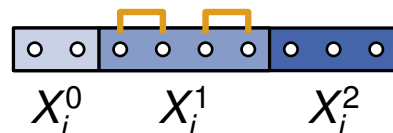


Ziel: FPT-Laufzeit bezüglich Baumweite

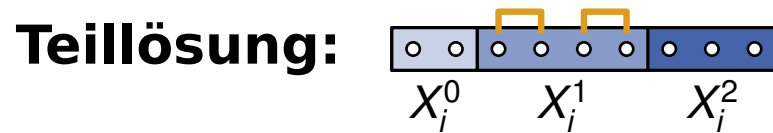
(entsprechende Baumzerlegung wird als gegeben angenommen)

Was sind sinnvolle Teillösungen?

- Beobachtung: Hamiltonkreis in G liefert Menge von Pfaden in G_i
- \Rightarrow Teillösung = Menge von Pfaden in G_i
- Problem: es gibt zu viele solche Pfadmengen
- Beobachtung: unterschiedliche Pfadmengen sehen von außen gleich aus, wenn
 - die gleichen Knoten sind in G_i inzident zu 0, 1 bzw. 2 Kreiskanten
 - die gleichen Paare von 1-er Knoten gehören zum gleichen Pfad
- Teillösung:



DP für Hamiltonkreis

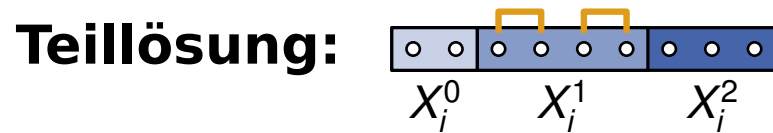


Berechnung neuer Teillösungen: forget-Knoten

- sei v der zu vergessende Knoten



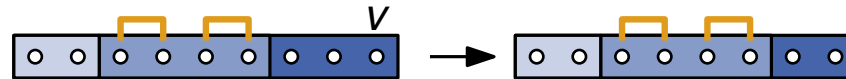
DP für Hamiltonkreis



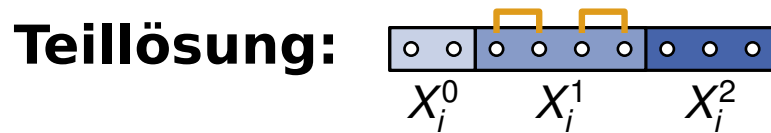
Berechnung neuer Teillösungen: forget-Knoten

- sei v der zu vergessende Knoten

- Fall 1: $v \in X_i^2$:

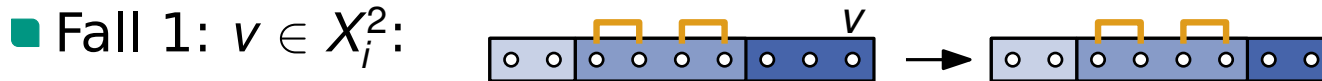


DP für Hamiltonkreis



Berechnung neuer Teillösungen: forget-Knoten

■ sei v der zu vergessende Knoten

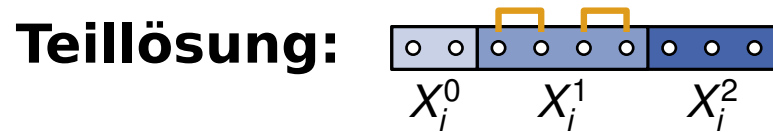


■ Fall 2: $v \notin X_i^2 \Rightarrow v$ hat keine Chance mehr, in den Hamiltonkreis zu kommen

\Rightarrow Teillösung ist eine Sackgasse und kann ignoriert werden

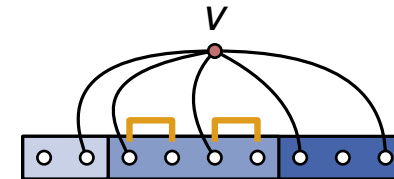
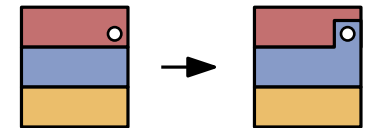


DP für Hamiltonkreis

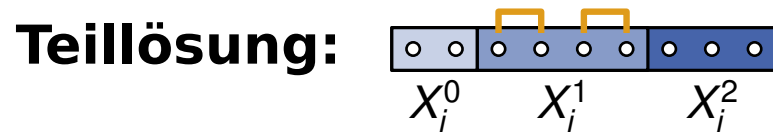


Berechnung neuer Teillösungen: introduce-Knoten

- sei v der neue Knoten; betrachte Kanten von v zu Knoten in X_i

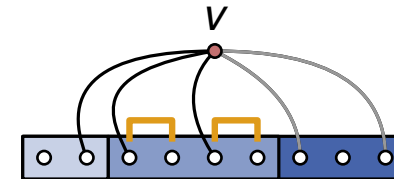


DP für Hamiltonkreis

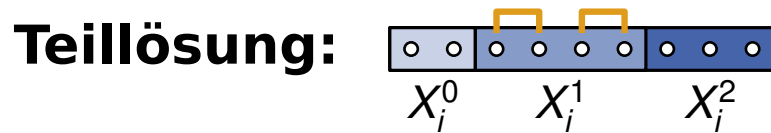


Berechnung neuer Teillösungen: introduce-Knoten

- sei v der neue Knoten; betrachte Kanten von v zu Knoten in X_i
- Kanten zu X_i^2 sind nicht relevant

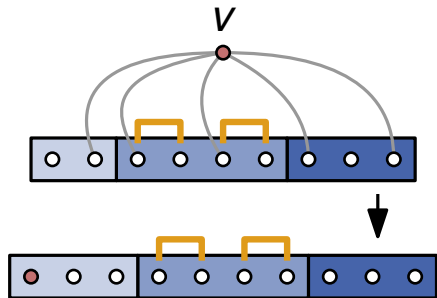
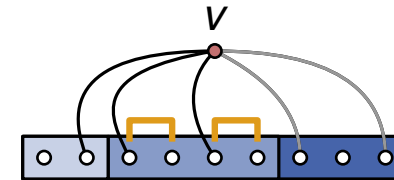
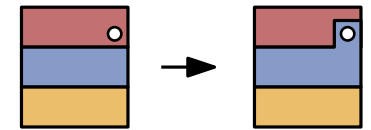


DP für Hamiltonkreis

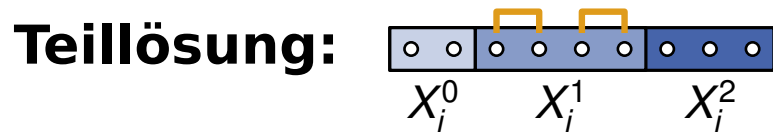


Berechnung neuer Teillösungen: introduce-Knoten

- sei v der neue Knoten; betrachte Kanten von v zu Knoten in X_i
- Kanten zu X_i^2 sind nicht relevant
- jede Teilmenge mit maximal zwei der übrigen Kanten liefert neue Teillösung

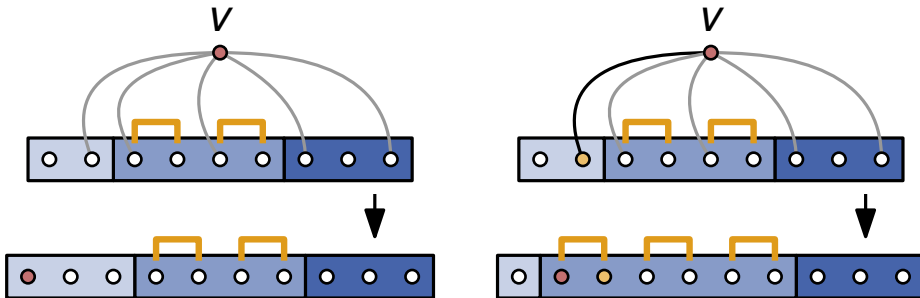
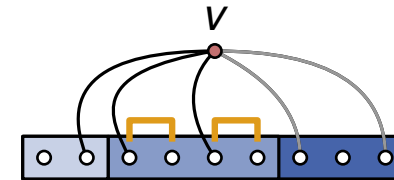


DP für Hamiltonkreis

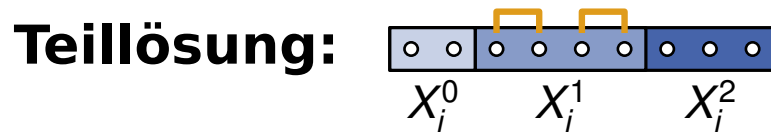


Berechnung neuer Teillösungen: introduce-Knoten

- sei v der neue Knoten; betrachte Kanten von v zu Knoten in X_i
- Kanten zu X_i^2 sind nicht relevant
- jede Teilmenge mit maximal zwei der übrigen Kanten liefert neue Teillösung

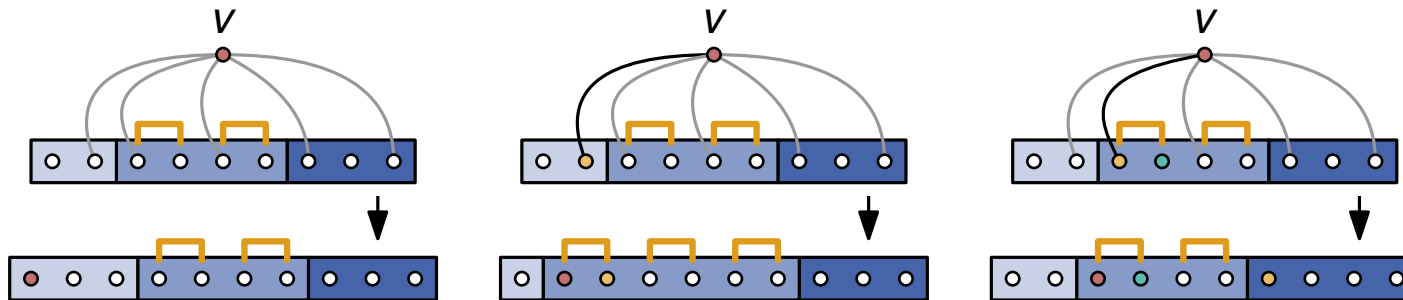
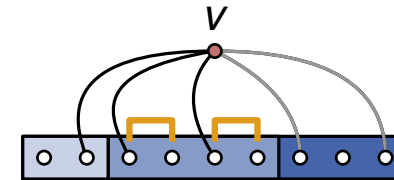
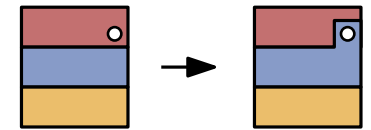


DP für Hamiltonkreis

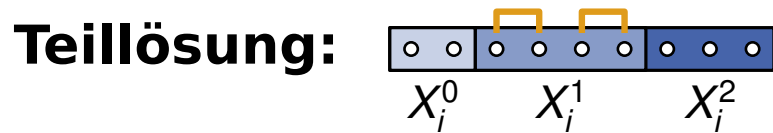


Berechnung neuer Teillösungen: introduce-Knoten

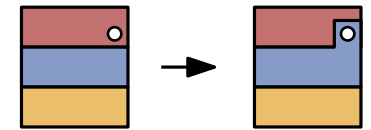
- sei v der neue Knoten; betrachte Kanten von v zu Knoten in X_i
- Kanten zu X_i^2 sind nicht relevant
- jede Teilmenge mit maximal zwei der übrigen Kanten liefert neue Teillösung



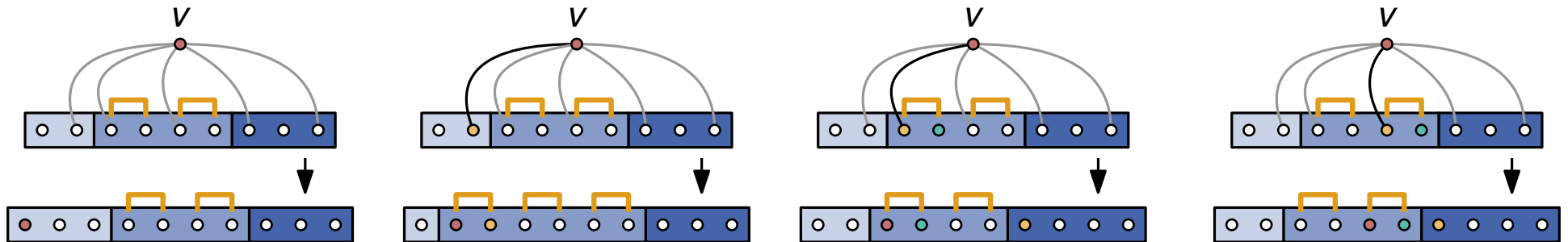
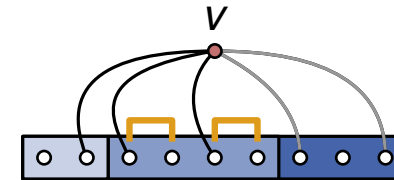
DP für Hamiltonkreis



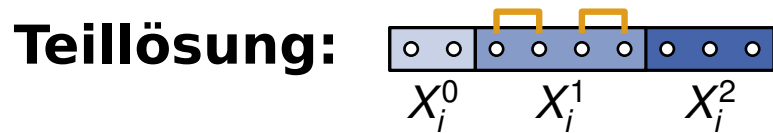
Berechnung neuer Teillösungen: introduce-Knoten



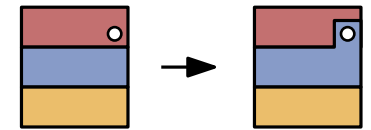
- sei v der neue Knoten; betrachte Kanten von v zu Knoten in X_i
- Kanten zu X_i^2 sind nicht relevant
- jede Teilmenge mit maximal zwei der übrigen Kanten liefert neue Teillösung



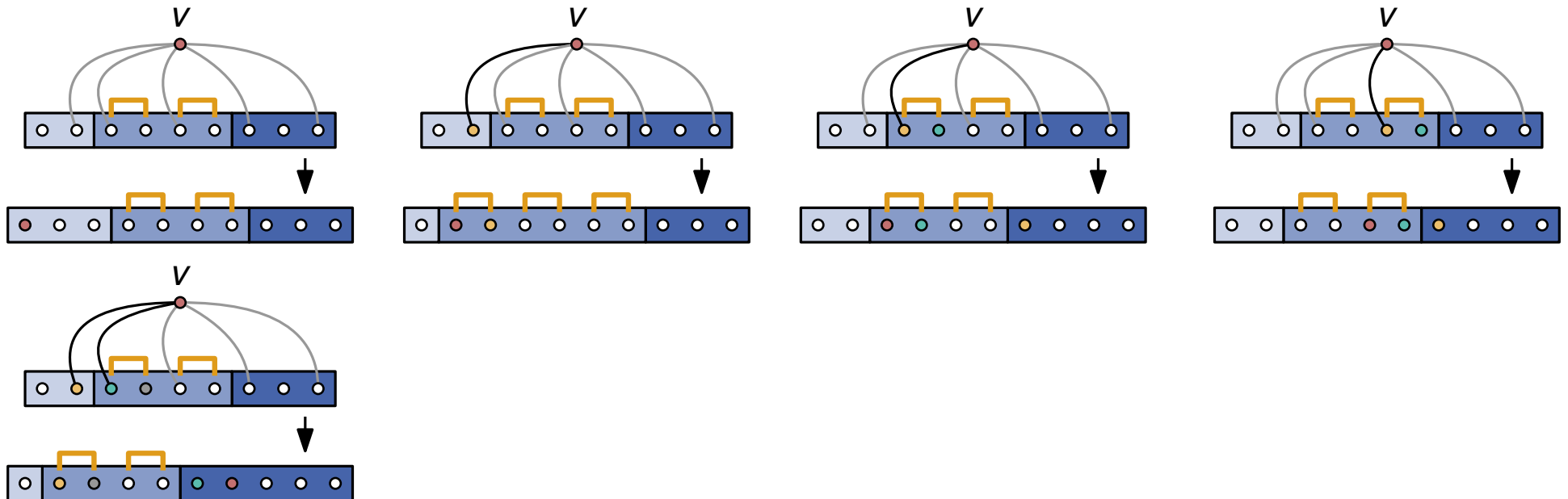
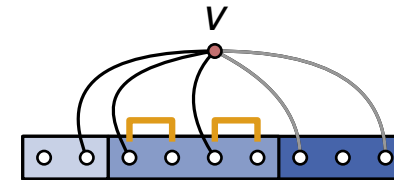
DP für Hamiltonkreis



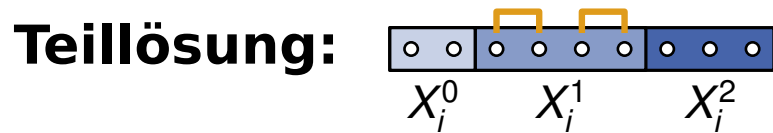
Berechnung neuer Teillösungen: introduce-Knoten



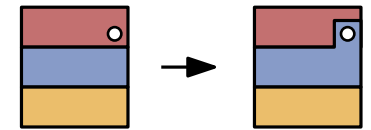
- sei v der neue Knoten; betrachte Kanten von v zu Knoten in X_i
- Kanten zu X_i^2 sind nicht relevant
- jede Teilmenge mit maximal zwei der übrigen Kanten liefert neue Teillösung



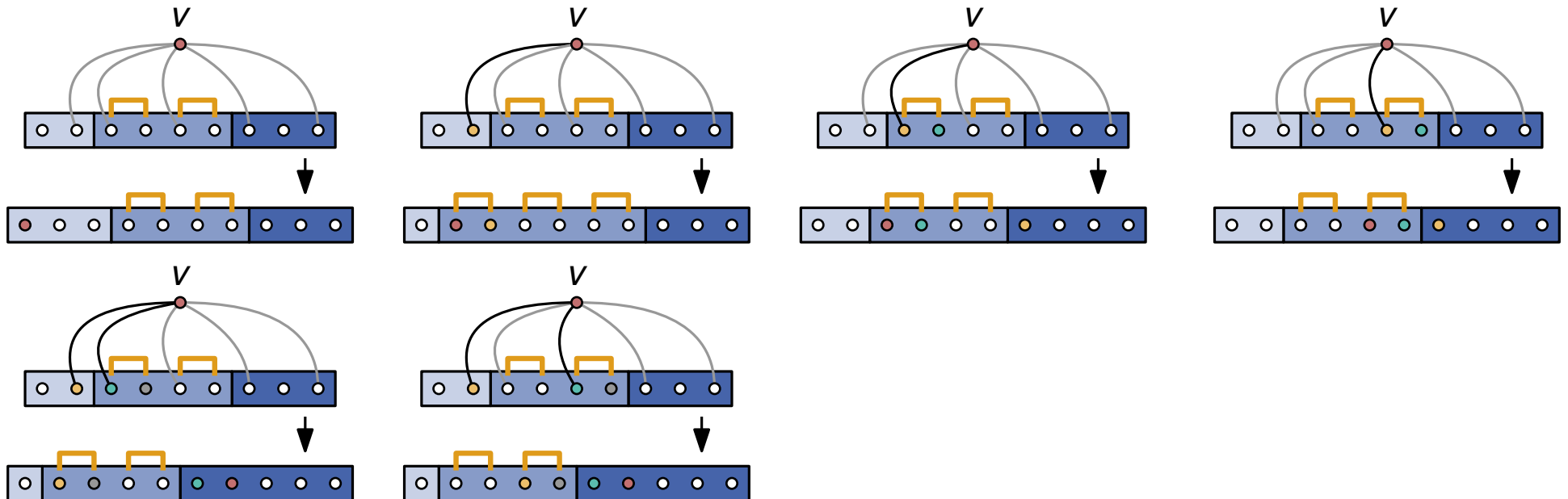
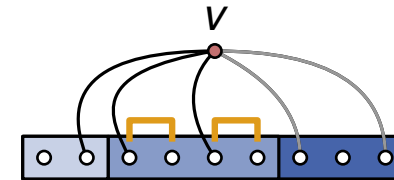
DP für Hamiltonkreis



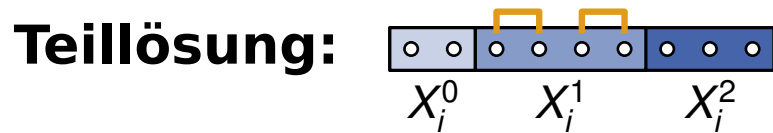
Berechnung neuer Teillösungen: introduce-Knoten



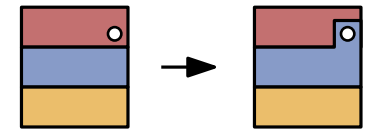
- sei v der neue Knoten; betrachte Kanten von v zu Knoten in X_i
- Kanten zu X_i^2 sind nicht relevant
- jede Teilmenge mit maximal zwei der übrigen Kanten liefert neue Teillösung



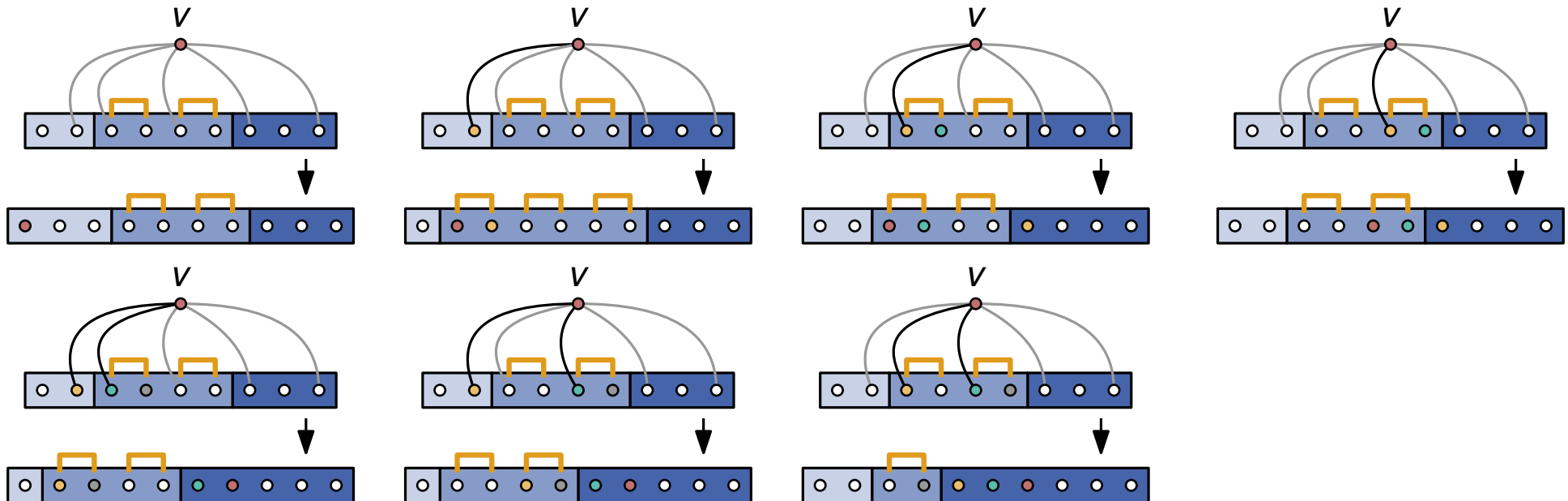
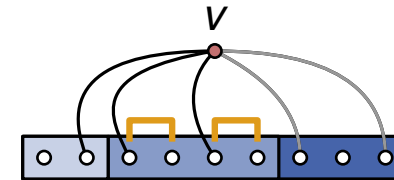
DP für Hamiltonkreis



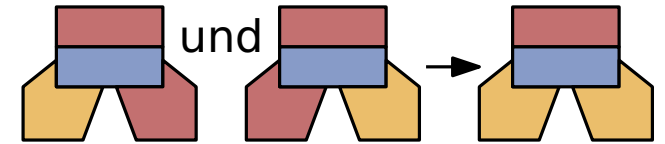
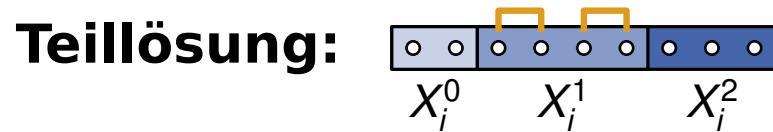
Berechnung neuer Teillösungen: introduce-Knoten



- sei v der neue Knoten; betrachte Kanten von v zu Knoten in X_i
- Kanten zu X_i^2 sind nicht relevant
- jede Teilmenge mit maximal zwei der übrigen Kanten liefert neue Teillösung

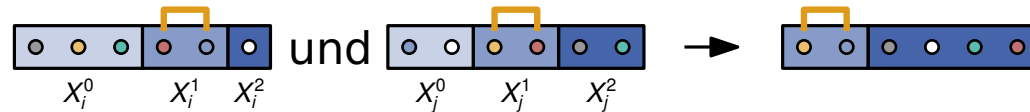


DP für Hamiltonkreis

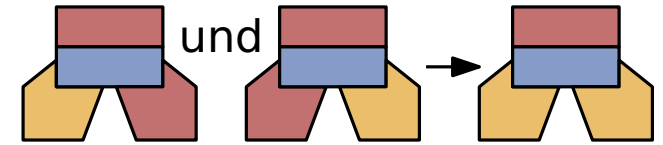
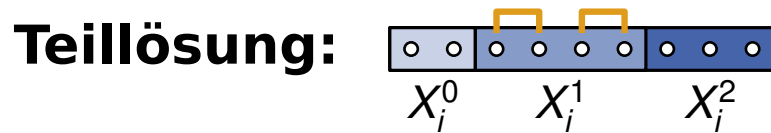


Berechnung neuer Teillösungen: join-Knoten

- Vereinigung zweier Teillösungen \equiv Vereinigung der Kantenmengen

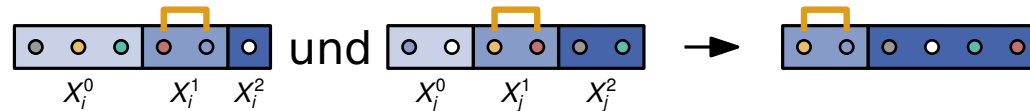


DP für Hamiltonkreis



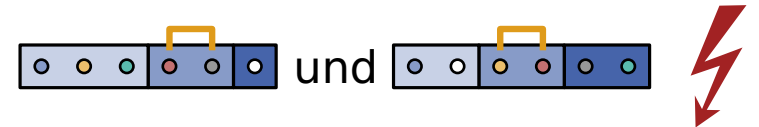
Berechnung neuer Teillösungen: join-Knoten

- Vereinigung zweier Teillösungen \equiv Vereinigung der Kantenmengen

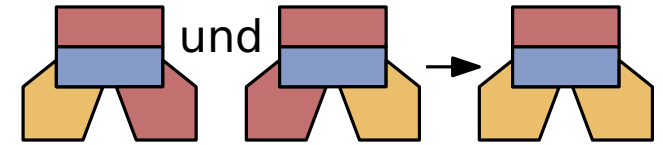
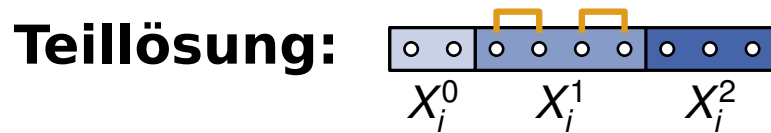


- keine Vereinigung möglich, wenn:

- Summe der Grade aus G_i und $G_j > 2$

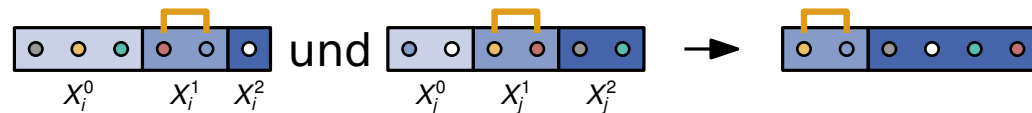


DP für Hamiltonkreis



Berechnung neuer Teillösungen: join-Knoten

- Vereinigung zweier Teillösungen \equiv Vereinigung der Kantenmengen



- keine Vereinigung möglich, wenn:

- Summe der Grade aus G_i und $G_j > 2$

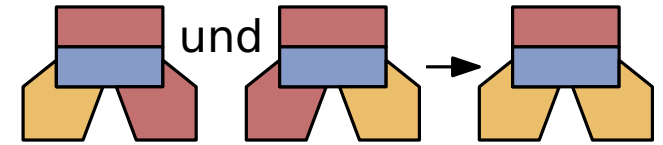
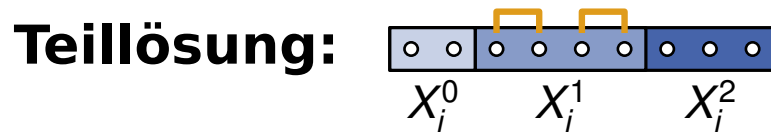


- ein Kreis wird geschlossen



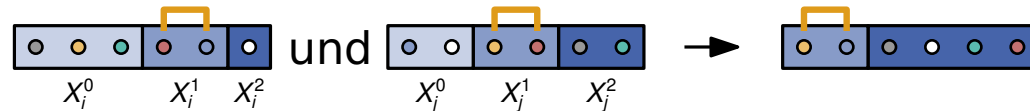
(Sonderfall Wurzel: schließe Kreis, sodass danach alle Knoten in X_i^2 liegen)

DP für Hamiltonkreis



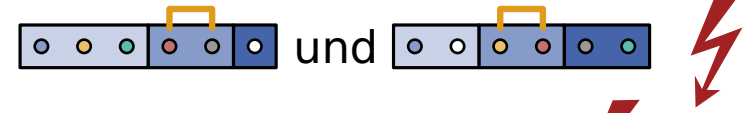
Berechnung neuer Teillösungen: join-Knoten

- Vereinigung zweier Teillösungen \equiv Vereinigung der Kantenmengen



- keine Vereinigung möglich, wenn:

- Summe der Grade aus G_i und $G_j > 2$



- ein Kreis wird geschlossen



(Sonderfall Wurzel: schließe Kreis, sodass danach alle Knoten in X_i^2 liegen)

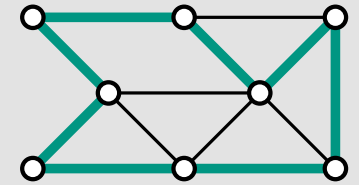
- sonst:

- addiere die Knotengrade für neue Eingruppierung
- berechne, welche 1-er Knoten zum selben Pfad gehören

DP für Hamiltonkreis

Problem: HAMILTONKREIS

Gibt es in einem gegebenen Graphen einen Kreis, der alle Knoten enthält?



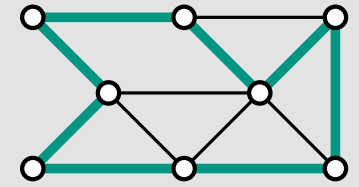
Ziel: FPT-Laufzeit bezüglich Baumweite

(entsprechende Baumzerlegung wird als gegeben angenommen)

DP für Hamiltonkreis

Problem: HAMILTONKREIS

Gibt es in einem gegebenen Graphen einen Kreis, der alle Knoten enthält?



Ziel: FPT-Laufzeit bezüglich Baumweite

(entsprechende Baumzerlegung wird als gegeben angenommen)

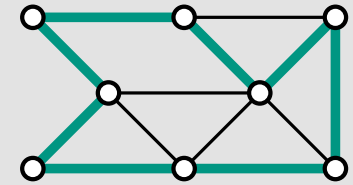
Laufzeit (grob)

- pro Knoten in der Baumzerlegung: #Teillösungen hängt nur von der Baggröße (= Interfacegröße) ab
- Berechnung neuer Teillösungen: ebenfalls nur von Baggröße abhängig

DP für Hamiltonkreis

Problem: HAMILTONKREIS

Gibt es in einem gegebenen Graphen einen Kreis, der alle Knoten enthält?



Ziel: FPT-Laufzeit bezüglich Baumweite

(entsprechende Baumzerlegung wird als gegeben angenommen)

Laufzeit (grob)

- pro Knoten in der Baumzerlegung: #Teillösungen hängt nur von der Baggröße (= Interfacegröße) ab
- Berechnung neuer Teillösungen: ebenfalls nur von Baggröße abhängig

Theorem

HAMILTONKREIS ist FPT bezüglich der Baumweite t .

(angenommen, wir kennen eine entsprechende Baumzerlegung)

Zusammenfassung

Baumweite

- struktureller Graphparameter
- Maß für die Ähnlichkeit zu Bäumen (bezüglich Separatoren)



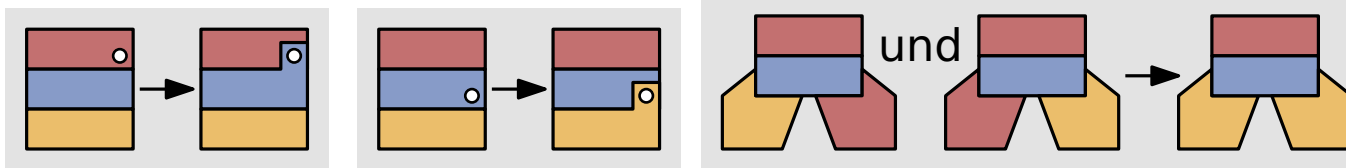
Zusammenfassung

Baumweite

- struktureller Graphparameter
- Maß für die Ähnlichkeit zu Bäumen (bezüglich Separatoren)

DP auf Baumzerlegungen

- schöne Baumzerlegungen sind schön



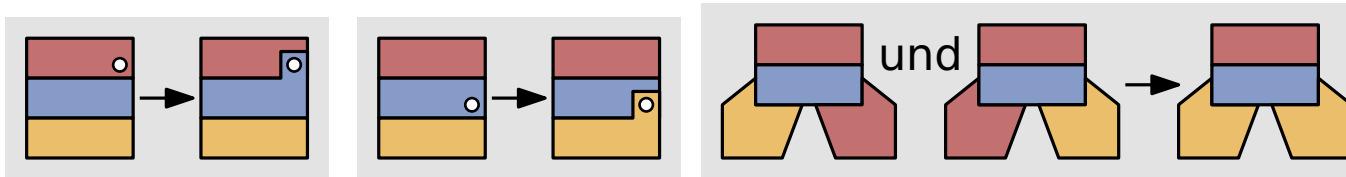
Zusammenfassung

Baumweite

- struktureller Graphparameter
- Maß für die Ähnlichkeit zu Bäumen (bezüglich Separatoren)

DP auf Baumzerlegungen

- schöne Baumzerlegungen sind schön



- Schwierigkeit: gute Definition für „Teillösung“



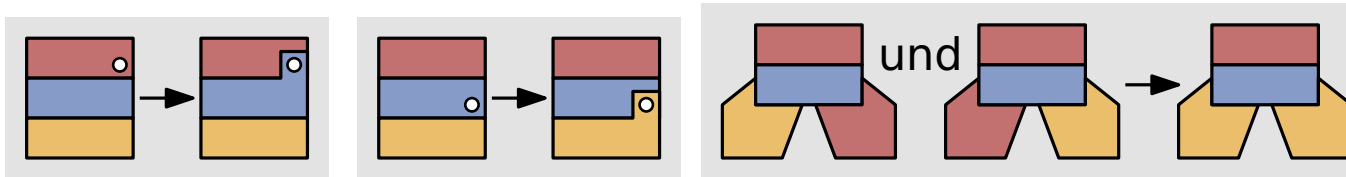
Zusammenfassung

Baumweite

- struktureller Graphparameter
- Maß für die Ähnlichkeit zu Bäumen (bezüglich Separatoren)

DP auf Baumzerlegungen

- schöne Baumzerlegungen sind schön



- Schwierigkeit: gute Definition für „Teillösung“
 - Anzahl Teillösungen nur abhängig von der Interfacegröße



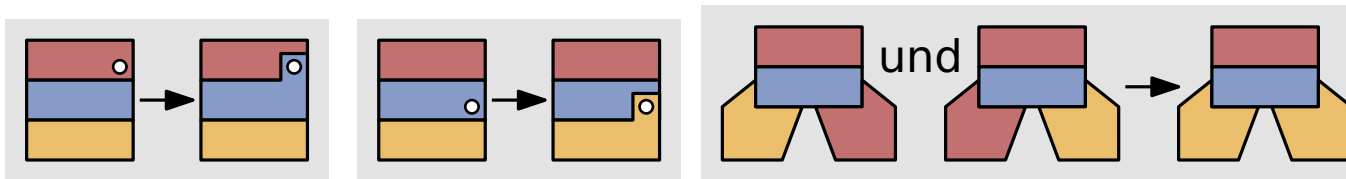
Zusammenfassung

Baumweite

- struktureller Graphparameter
- Maß für die Ähnlichkeit zu Bäumen (bezüglich Separatoren)

DP auf Baumzerlegungen

- schöne Baumzerlegungen sind schön



- Schwierigkeit: gute Definition für „Teillösung“
 - Anzahl Teillösungen nur abhängig von der Interfacegröße
 - Berechnung neuer Teillösungen aus den alten Teillösungen möglich (für alle drei Knotentypen)



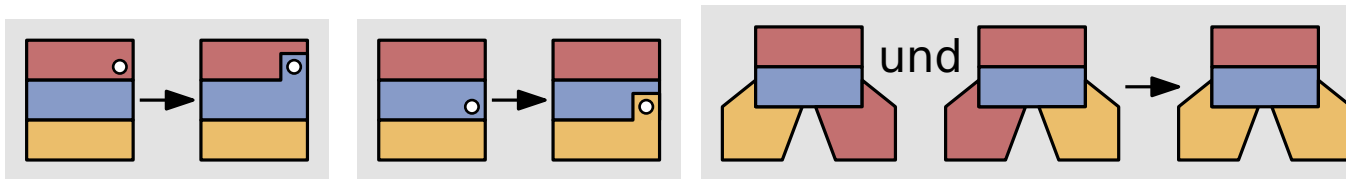
Zusammenfassung

Baumweite

- struktureller Graphparameter
- Maß für die Ähnlichkeit zu Bäumen (bezüglich Separatoren)

DP auf Baumzerlegungen

- schöne Baumzerlegungen sind schön



- Schwierigkeit: gute Definition für „Teillösung“
 - Anzahl Teillösungen nur abhängig von der Interfacegröße
 - Berechnung neuer Teillösungen aus den alten Teillösungen möglich (für alle drei Knotentypen)

Wie groß ist Baumweite in echten Graphen?

- heuristische Berechnung auf zwei „zufällig“ ausgewählte Graphen:



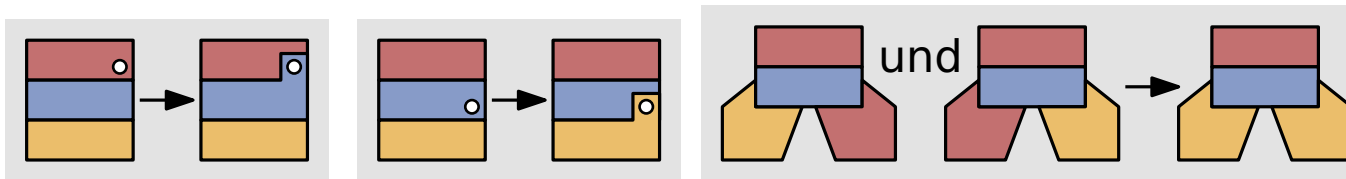
Zusammenfassung

Baumweite

- struktureller Graphparameter
- Maß für die Ähnlichkeit zu Bäumen (bezüglich Separatoren)

DP auf Baumzerlegungen

- schöne Baumzerlegungen sind schön



- Schwierigkeit: gute Definition für „Teillösung“
 - Anzahl Teillösungen nur abhängig von der Interfacegröße
 - Berechnung neuer Teillösungen aus den alten Teillösungen möglich (für alle drei Knotentypen)



Wie groß ist Baumweite in echten Graphen?

- heuristische Berechnung auf zwei „zufällig“ ausgewählte Graphen:
 - Links zwischen politischen Blogs: $n = 642, m = 2280, t \leq 42$

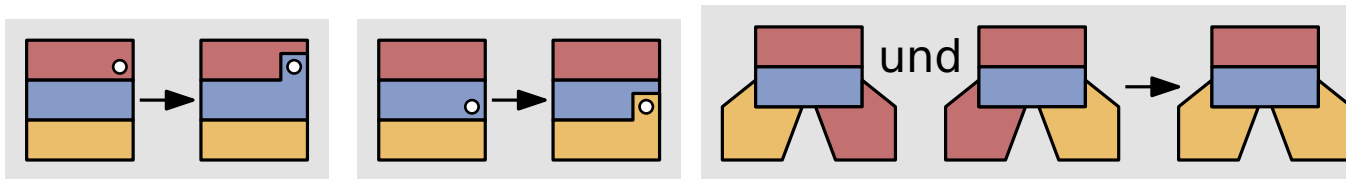
Zusammenfassung

Baumweite

- struktureller Graphparameter
- Maß für die Ähnlichkeit zu Bäumen (bezüglich Separatoren)

DP auf Baumzerlegungen

- schöne Baumzerlegungen sind schön



- Schwierigkeit: gute Definition für „Teillösung“
 - Anzahl Teillösungen nur abhängig von der Interfacegröße
 - Berechnung neuer Teillösungen aus den alten Teillösungen möglich (für alle drei Knotentypen)



Wie groß ist Baumweite in echten Graphen?

- heuristische Berechnung auf zwei „zufällig“ ausgewählte Graphen:
 - Links zwischen politischen Blogs: $n = 642, m = 2280, t \leq 42$
 - Co-Autoren-Netzwerk: $n = 226413, m = 716460, t \leq 11775$