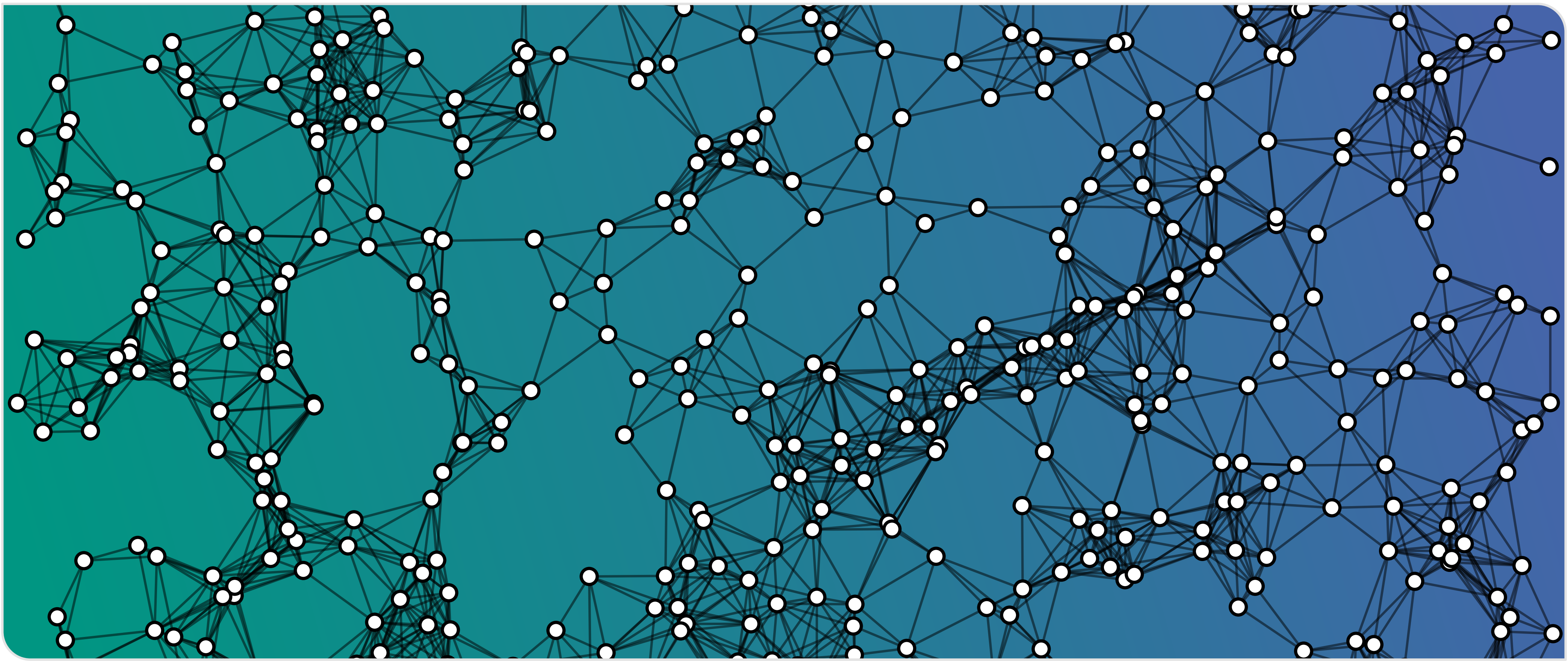
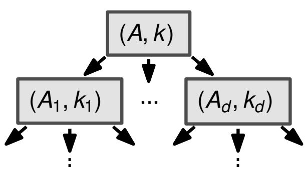
# Parametrisierte Algorithmen

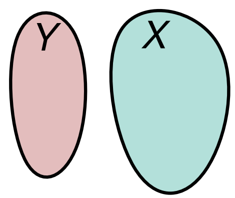
## Baumweite & dynamische Programme auf Baumzerlegungen

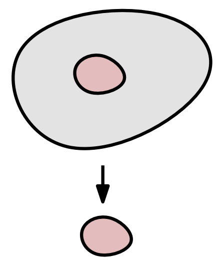


# Inhalt

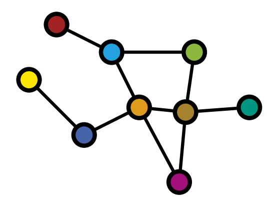
## Basic Toolbox
- beschränkte Suchbäume
- iterative Kompression
- Kernbildung

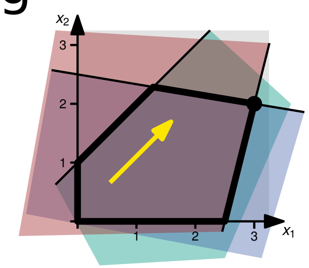


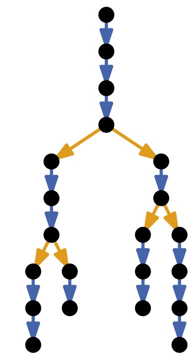



## Erweiterte Toolbox
- lineare Programme
- Branch-and-Reduce
- Color Coding

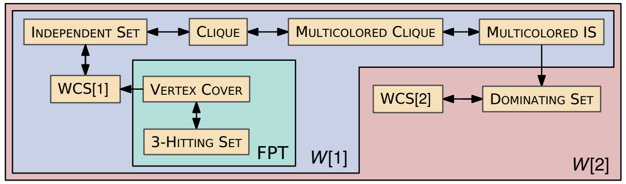


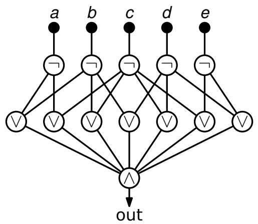


## Baumweite
- dynamische Programme
- chordale & planare Graphen
- Courcelles Theorem

## Untere Schranken
- parametrisierte Reduktionen
- boolesche Schaltkreise und die W-Hierarchie
- ETH und SETH



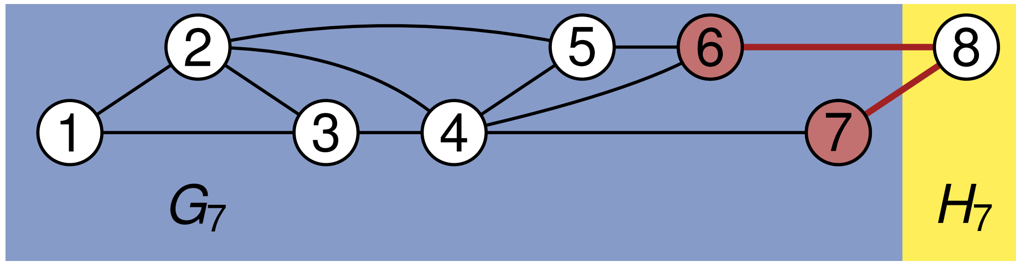



# Sortierte Graphen

## Graph $G = (V, E)$ mit Knotenordnung $V = \{v_1, \dots, v_n\}$

$k_7 = 2$

$\Rightarrow k = 2$

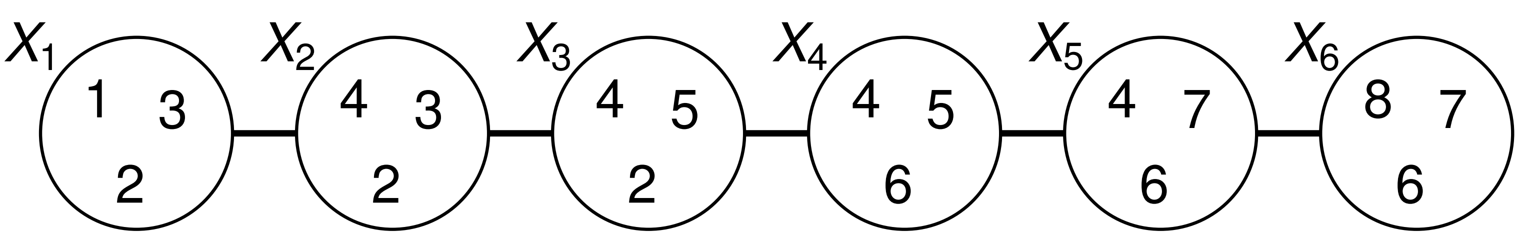



- $V_i = \{v_1, \dots, v_i\}$, $G_i = G[V_i]$ und $H_i = G[V \setminus V_i]$
- $k_i$ =#Knoten in $G_i$ mit Kanten zu $H_i$ und $k = \max\{k_i\}$

## Alternative Sichtweise: Pfadzerlegung

betrachte Pfad $x_1, \dots, x_r$ mit *Bags* $X_1, \dots, X_r$ ($X_i \subseteq V$), sodass

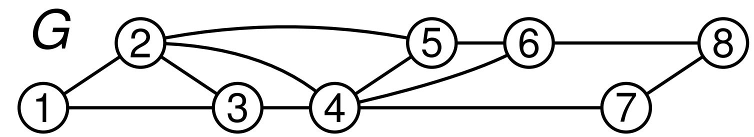
1. $X_1 \cup \dots \cup X_r = V$
2. $\{u, v\} \in E \Rightarrow u, v \in X_i$ für mindestens ein Bag $X_i$
3. die Bags jedes Knotens $v \in V$ bilden einen Teilpfad

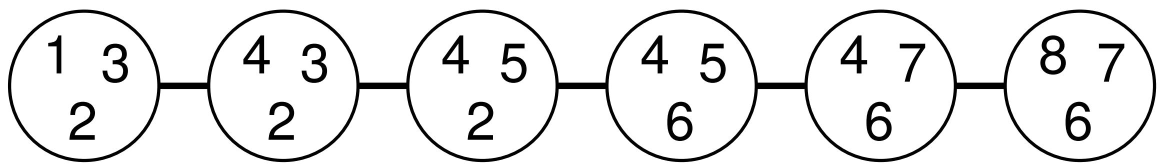


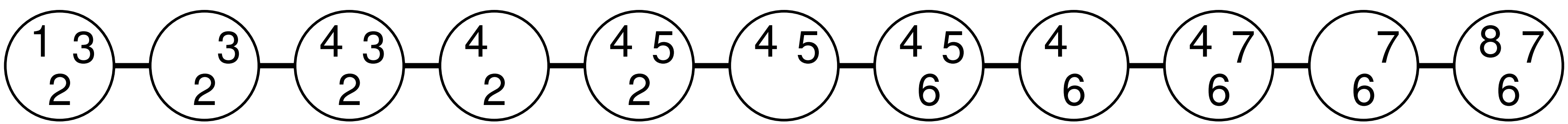
# Pfadweite und schöne Pfadzerlegungen

## Pfadweite

- Weite einer Zerlegung: $\max\{|X_i|\} - 1$
- Pfadweite eines Graphen: minimale Weite einer Pfadzerlegung



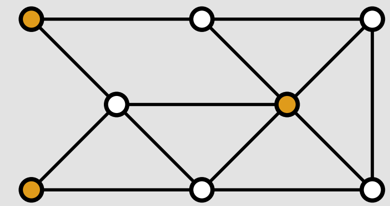

## Schöne Pfadzerlegung

- nur zwei Typen von Knoten: introduce-Knoten und forget-Knoten
- $x_i$ ist introduce-Knoten wenn $X_i = X_{i-1} \cup \{v\}$ für ein $v \in V$
- $x_i$ ist forget-Knoten wenn $X_i = X_{i-1} \setminus \{v\}$ für ein $v \in V$

**Lemma**
Wenn $G$ eine Pfadzerlegung mit Weite $p$ hat, dann hat $G$ auch eine schöne Pfadzerlegung mit Weite $p$.

# Dynamische Programme

**Problem: Independent Set**
Gegeben seien ein Graph, ein Parameter $p$ und eine Pfadzerlegung der Weite $p$. Gibt es ein independent Set der Größe $k$? (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)



## Dynamisches Programm über eine schöne Pfadzerlegung

- sei $V_i = X_1 \cup \cdots \cup X_i$ und $G_i = G[V_i]$
- Schritt $i$: für alle $X_i' \subseteq X_i$ berechne max IS $U_i$ in $G_i$ mit $U_i \cap X_i = X_i'$

**Beispiel**

introduce-Knoten

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Teilmengen von $X_8$** | $\emptyset$ | | $\{4\}$ | | $\{6\}$ | | $\{4, 6\}$ | |
| **Größe max. IS in $G_8$** | 2 | | 2 | | 2 | | $-\infty$ | |
| **Teilmengen von $X_9$** | $\emptyset$ | $\{7\}$ | $\{4\}$ | $\{4, 7\}$ | $\{6\}$ | $\{6, 7\}$ | $\{4, 6\}$ | $\{4, 6, 7\}$ |
| **Größe max. IS in $G_9$** | 2 | 3 | 2 | $-\infty$ | 2 | 3 | $-\infty$ | $-\infty$ |

**Theorem**
Independent Set ist FPT bezüglich der Pfadweite $p$ (das DP hat Laufzeit $O(2^p n^2)$). (angenommen, wir kennen eine entsprechende Pfadzerlegung)

# Baumweite

**Pfadzerlegung**

betrachte Pfad $x_1, \dots, x_r$ mit *Bags* $X_1, \dots, X_r$ ($X_i \subseteq V$), sodass

1. $X_1 \cup \dots \cup X_r = V$
2. $\{u, v\} \in E \Rightarrow u, v \in X_i$ für mindestens ein Bag $X_i$
3. die Bags jedes Knotens $v \in V$ bilden einen Teilpfad

**Das gleiche Spiel nochmal. . . jetzt auf Bäumen!**

betrachte Baum auf den Knoten $x_1, \dots, x_r$ mit Bags $X_1, \dots, X_r$, sodass

1. $X_1 \cup \dots \cup X_r = V$
2. $\{u, v\} \in E \Rightarrow u, v \in X_i$ für mindestens ein Bag $X_i$
3. die Bags jedes Knotens $v \in V$ bilden einen Teilbaum

**Baumweite**

- Weite einer Zerlegung: $\max\{|X_i|\} - 1$
- Baumweite eines Graphen: minimale Weite einer Baumzerlegung

# Baumweite

**Das gleiche Spiel nochmal. . . jetzt auf Bäumen!**

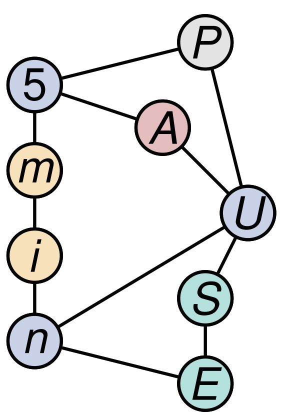
betrachte Baum auf den Knoten $x_1, \dots, x_r$ mit Bags $X_1, \dots, X_r$, sodass

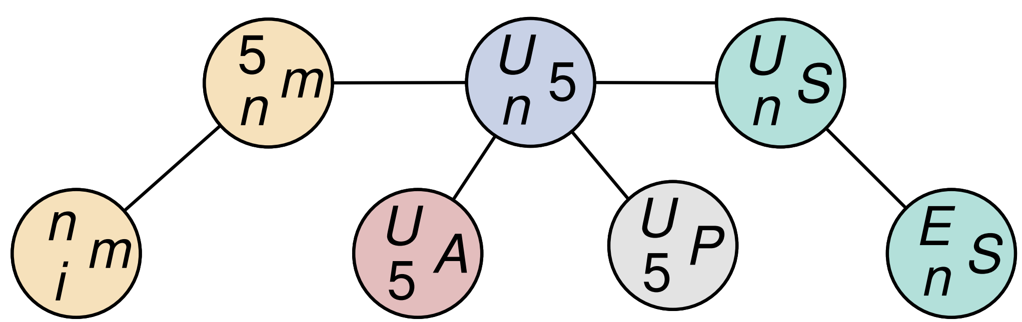
1. $X_1 \cup \dots \cup X_r = V$
2. $\{u, v\} \in E \Rightarrow u, v \in X_i$ für mindestens ein Bag $X_i$
3. die Bags jedes Knotens $v \in V$ bilden einen Teilbaum

**Baumweite**

- Weite einer Zerlegung: $\max\{|X_i|\} - 1$
- Baumweite eines Graphen: minimale Weite einer Baumzerlegung

**Welche Baumweite hat der folgende Graph?**



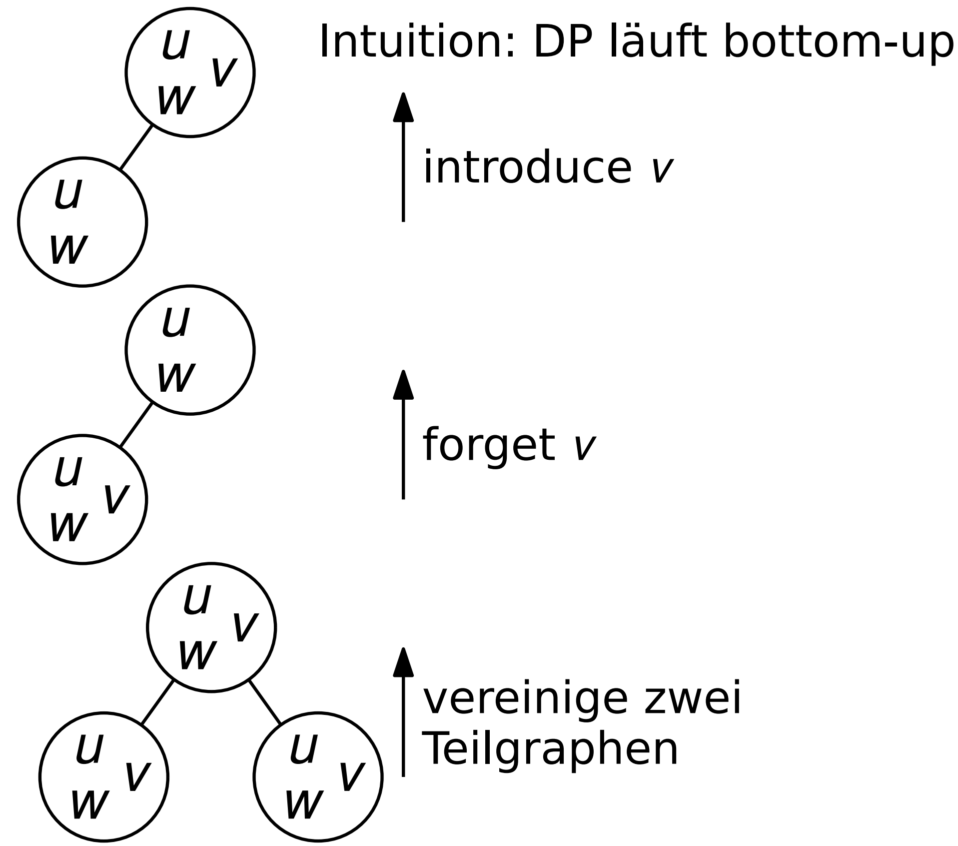




$\Rightarrow$ Baumweite 2

# Schöne Baumzerlegungen

## Drei Typen von Knoten

- $x_i$ ist **introduce-Knoten** wenn
  - $x_i$ hat genau ein Kind $x_j$ und
  - $X_i = X_j \cup \{v\}$ für ein $v \in V$
- $x_i$ ist **forget-Knoten** wenn
  - $x_i$ hat genau ein Kind $x_j$ und
  - $X_i = X_j \setminus \{v\}$ für ein $v \in V$
- $x_i$ ist **join-Knoten** wenn
  - $x_i$ hat genau zwei Kinder $x_j, x_k$
  - und $X_i = X_j = X_k$

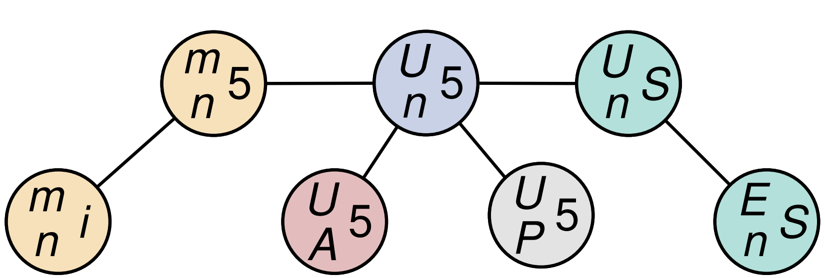


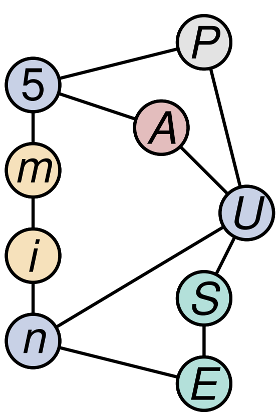

**Theorem**
Wenn $G$ eine Baumzerlegung mit Weite $t$ hat, dann hat $G$ auch eine schöne Baumzerlegung mit Weite $t$.

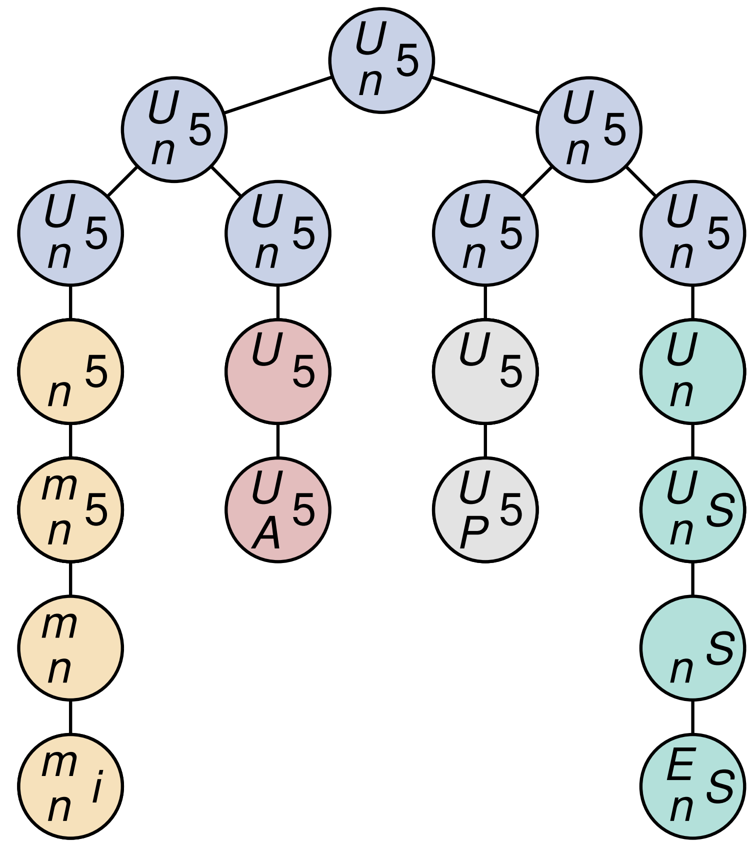
# Schöne Baumzerlegungen

**Theorem**
Wenn $G$ eine Baumzerlegung mit Weite $t$ hat, dann hat $G$ auch eine schöne Baumzerlegung mit Weite $t$.

## Beispiel

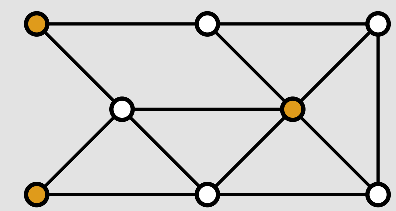






# DP über eine schöne Baumzerlegung

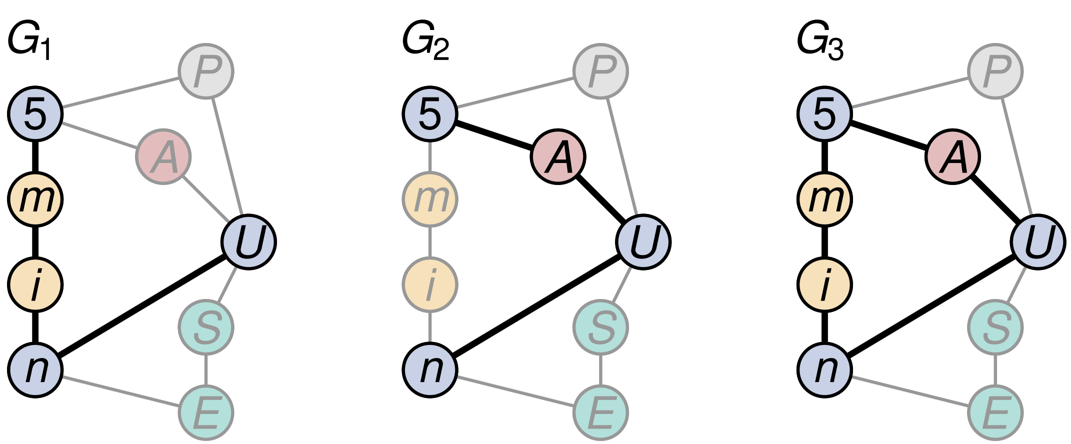
**Problem: INDEPENDENT SET**
Gegeben seien ein Graph, ein Parameter $t$ und eine Baumzerl. der Weite $t$. Gibt es ein independent Set der Größe $k$? (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)

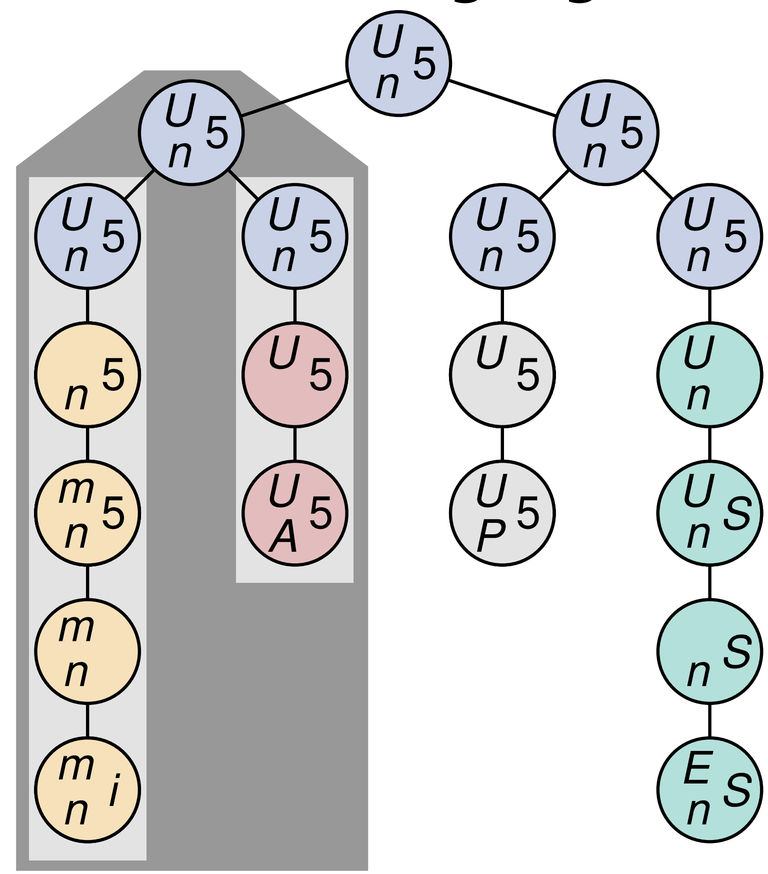


## Dynamisches Programm über eine schöne Baumzerlegung

- join-Knoten:

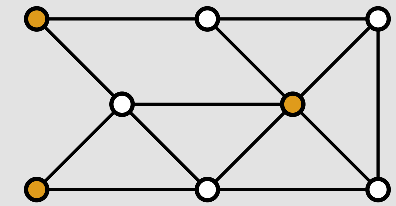
| | $\emptyset$ | $\{U\}$ | $\{5\}$ | $\{n\}$ | $\{U,5\}$ | $\{U,n\}$ | $\{n,5\}$ | $\{U,n,5\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $G_1$ | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | $-\infty$ | 2 | $-\infty$ |
| $G_2$ | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | $-\infty$ | 2 | $-\infty$ |
| $G_3$ | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | $-\infty$ | 2 | $-\infty$ |



# DP über eine schöne Baumzerlegung

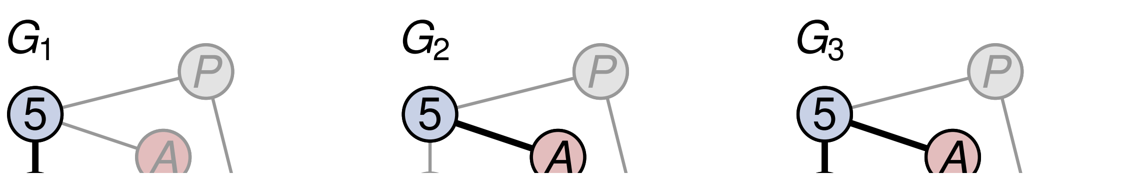
**Problem: Independent Set**
Gegeben seien ein Graph, ein Parameter $t$ und eine Baumzerl. der Weite $t$. Gibt es ein independent Set der Größe $k$? (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$)

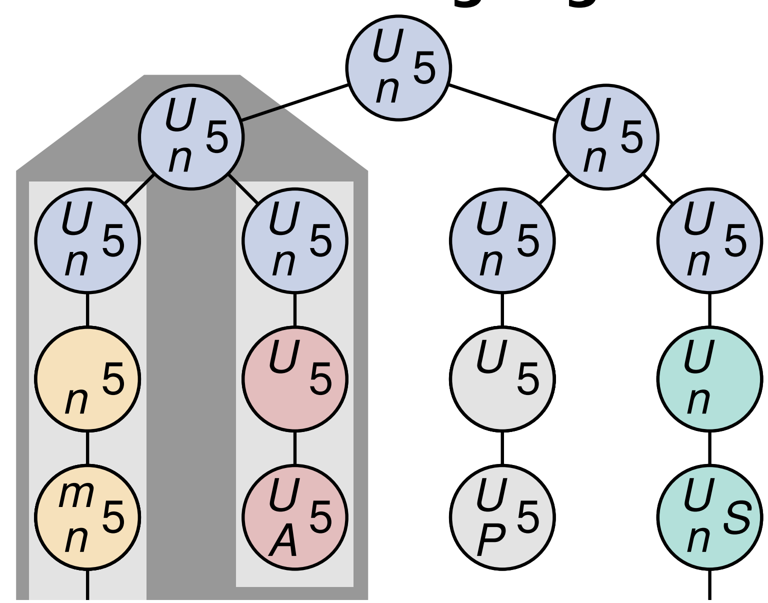


## Dynamisches Programm über eine schöne Baumzerlegung

- join-Knoten:

| | $\emptyset$ | $\{U\}$ | $\{5\}$ | $\{n\}$ | $\{U, 5\}$ | $\{U, n\}$ | $\{n, 5\}$ | $\{U, n, 5\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $G_1$ | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | $-\infty$ | 2 | $-\infty$ |
| $G_2$ | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | $-\infty$ | 2 | $-\infty$ |
| $G_3$ | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | $-\infty$ | 2 | $-\infty$ |



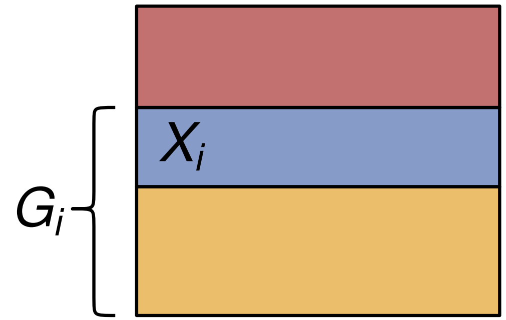



**Theorem**
Independent Set ist FPT bezüglich der Baumweite $t$ (das DP hat Laufzeit $O(2^t n^2)$). (angenommen, wir kennen eine entsprechende Baumzerlegung)

# DPs auf Baumzerlegungen

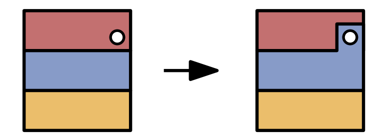
## Notation und grundlegende Eigenschaften

- für Knoten $x_i$ in der Baumzerlegung ist $V_i = X_i \cup \{v \in V \mid v \in X_j$ für Nachfolger $x_j$ von $x_i\}$
- $G_i = G[V_i]$; $X_i$ ist das **Interface** von $G_i$
- $X_i$ separiert $G_i$ vom Restgraph

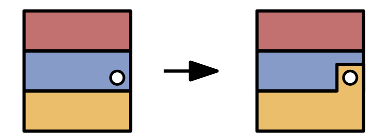



## Knotentypen aus Sicht der $G_i$

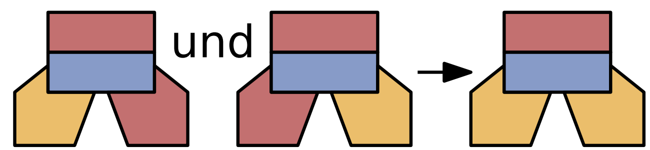
- **introduce:** füge Knoten zu $G_i$ und zum Interface hinzu



- **forget:** entferne Knoten aus dem Interface von $G_i$



- **join:** vereinige zwei Teilgraphen mit dem selben Interface

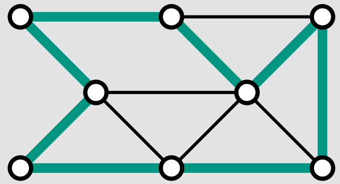



## Eigenschaften der für $(G_i, X_i)$ berechneten Teillösungen

- für $G_i = G$ ist die tatsächliche Lösung enthalten
- in jedem Schritt lassen sich alle neuen Teillösungen aus den alten berechnen

# DP für Hamiltonkreis

**Problem: HAMILTONKREIS**
Gibt es in einem gegebenen Graphen einen Kreis, der alle Knoten enthält?

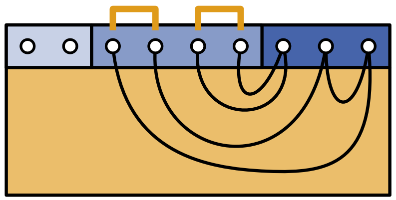


**Ziel:** FPT-Laufzeit bezüglich Baumweite

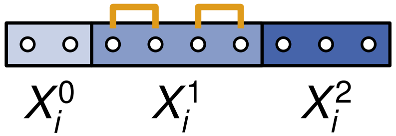
(entsprechende Baumzerlegung wird als gegeben angenommen)

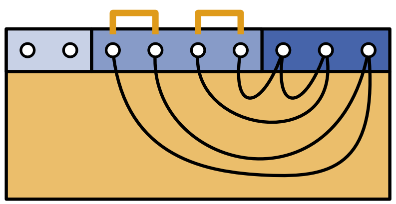
**Was sind sinnvolle Teillösungen?**

- Beobachtung: Hamiltonkreis in $G$ liefert Menge von Pfaden in $G_i$
- $\Rightarrow$ Teillösung = Menge von Pfaden in $G_i$
- Problem: es gibt zu viele solche Pfadmengen
- Beobachtung: unterschiedliche Pfademengen sehen von außen gleich aus, wenn
  - die gleichen Knoten sind in $G_i$ inzident zu 0, 1 bzw. 2 Kreiskanten
  - die gleichen Paare von 1-er Knoten gehören zum gleichen Pfad

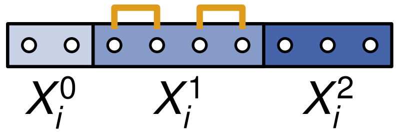


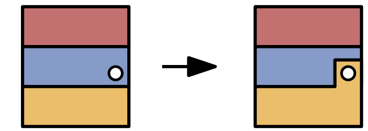
- Teillösung:



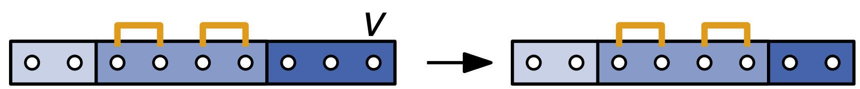



# DP für Hamiltonkreis

**Teillösung:** 

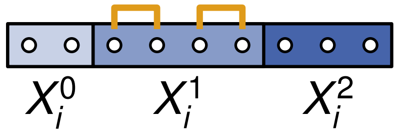
**Berechnung neuer Teillösungen: forget-Knoten**

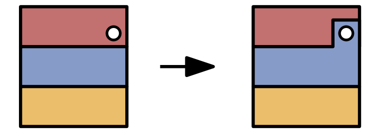
- sei $v$ der zu vergessende Knoten
- Fall 1: $v \in X_i^2$: 

- Fall 2: $v \notin X_i^2 \Rightarrow v$ hat keine Chance mehr, in den Hamiltonkreis zu kommen

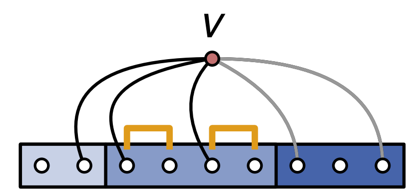
  $\Rightarrow$ Teillösung ist eine Sackgasse und kann ignoriert werden

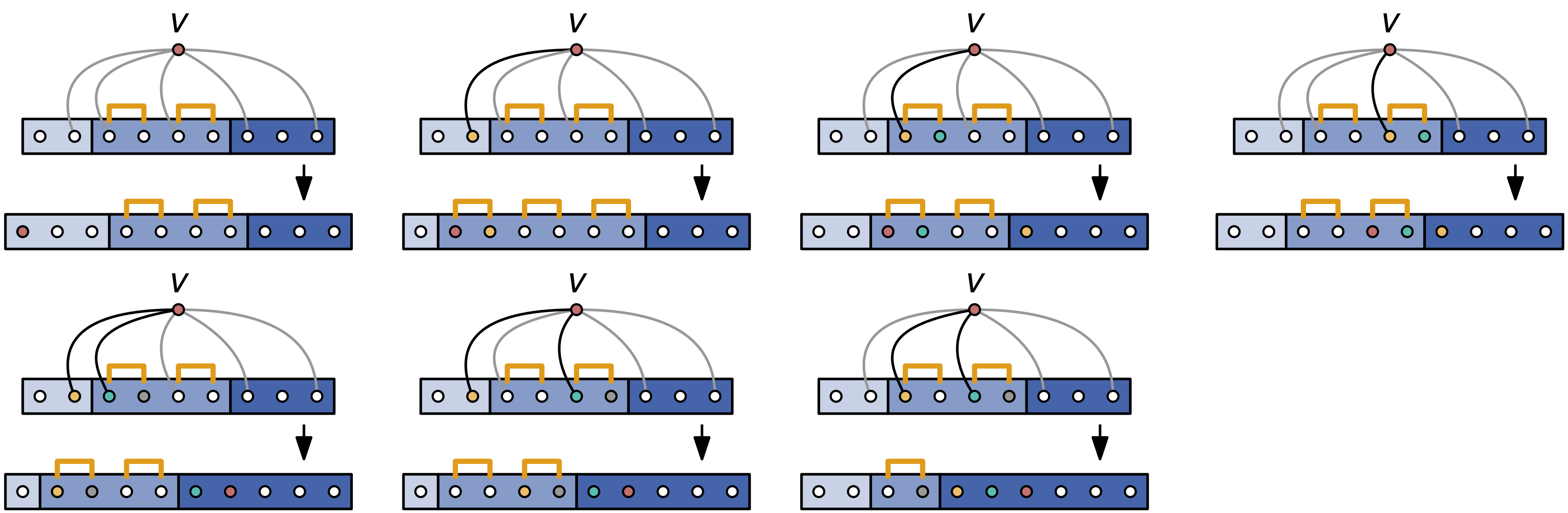
# DP für Hamiltonkreis

**Teillösung:** 


**Berechnung neuer Teillösungen: introduce-Knoten** 

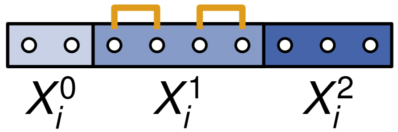
- sei $v$ der neue Knoten; betrachte Kanten von $v$ zu Knoten in $X_i$
- Kanten zu $X_i^2$ sind nicht relevant
- jede Teilmenge mit maximal zwei der übrigen Kanten liefert neue Teillösung

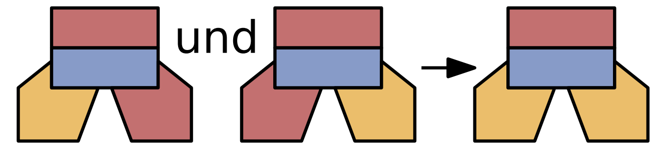


# DP für Hamiltonkreis

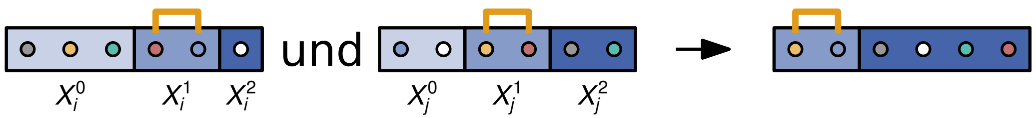
**Teillösung:**



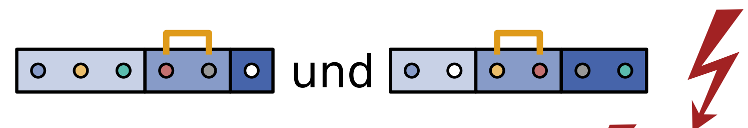




**Berechnung neuer Teillösungen: join-Knoten**

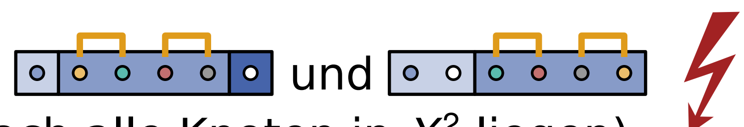
- Vereinigung zweier Teillösungen $\equiv$ Vereinigung der Kantenmengen




- keine Vereinigung möglich, wenn:
  - Summe der Grade aus $G_i$ und $G_j > 2$




  - ein Kreis wird geschlossen

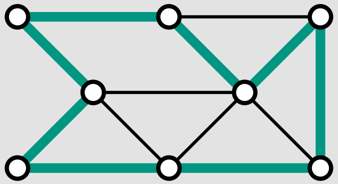



(Sonderfall Wurzel: schließe Kreis, sodass danach alle Knoten in $X_i^2$ liegen)

- sonst:
  - addiere die Knotengrade für neue Eingruppierung
  - berechne, welche 1-er Knoten zum selben Pfad gehören

# DP für Hamiltonkreis

**Problem: HAMILTONKREIS**
Gibt es in einem gegebenen Graphen einen Kreis, der alle Knoten enthält?



**Ziel:** FPT-Laufzeit bezüglich Baumweite

(entsprechende Baumzerlegung wird als gegeben angenommen)

**Laufzeit (grob)**

- pro Knoten in der Baumzerlegung: #Teillösungen hängt nur von der Baggröße (= Interfacegröße) ab
- Berechnung neuer Teillösungen: ebenfalls nur von Baggröße abhängig

**Theorem**
HAMILTONKREIS ist FPT bezüglich der Baumweite $t$.

(angenommen, wir kennen eine entsprechende Baumzerlegung)

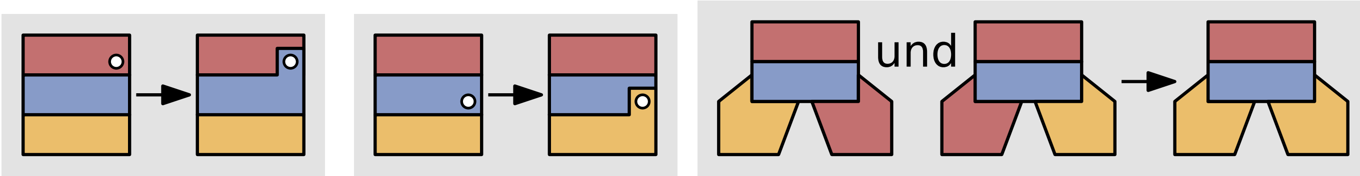
# Zusammenfassung

## Baumweite

- strukutreller Graphparameter
- Maß für die Ähnlichkeit zu Bäumen (bezüglich Separatoren)

## DP auf Baumzerlegungen

- schöne Baumzerlegungen sind schön




- Schwierigkeit: gute Definition für „Teillösung“
  - Anzahl Teillösungen nur abhängig von der Interfacegröße
  - Berechnung neuer Teillösungen aus den alten Teillösungen möglich (für alle drei Knotentypen)

## Wie groß ist Baumweite in echten Graphen?

- heuristische Berechnung auf zwei „zufällig“ ausgewählte Graphen:
  - Links zwischen politischen Blogs: $n = 642$, $m = 2280$, $t \leq 42$
  - Co-Autoren-Netzwerk: $n = 226413$, $m = 716460$, $t \leq 11775$