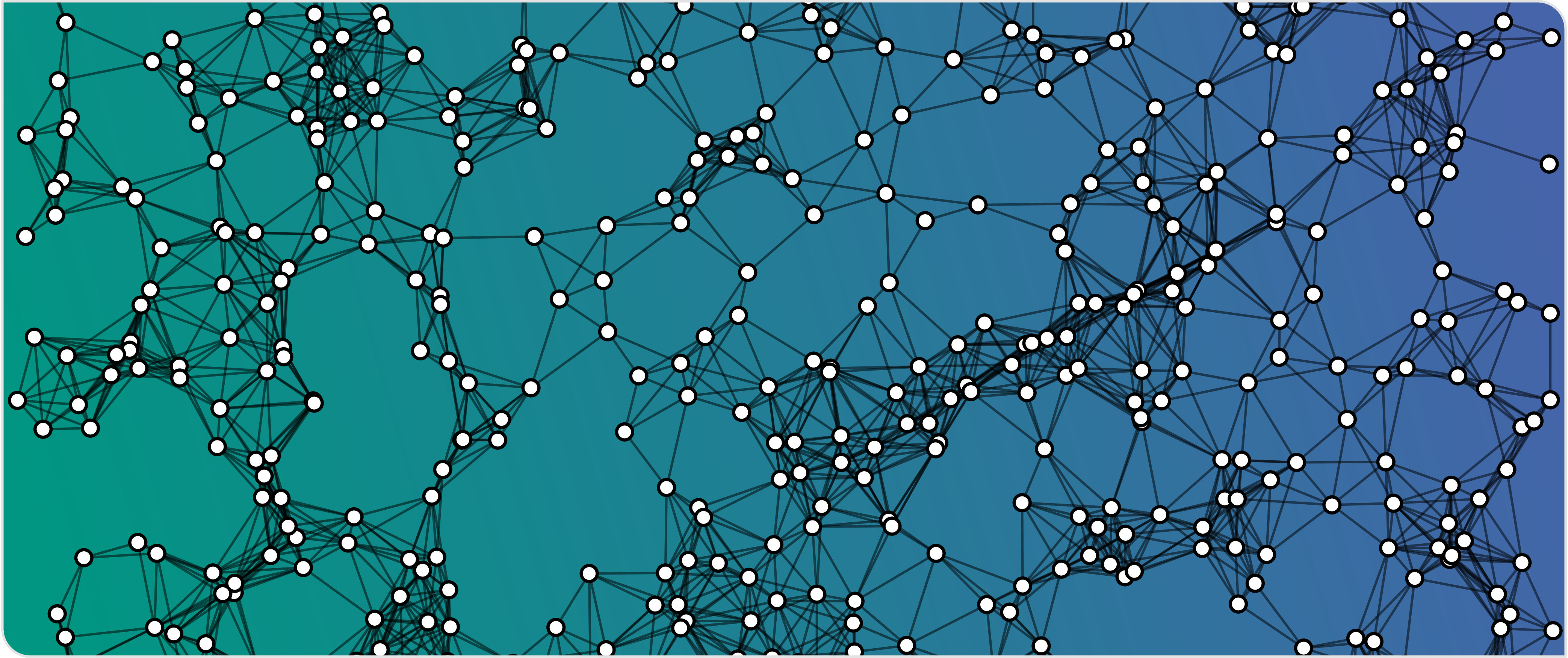
Karlsruher Institut für Technologie

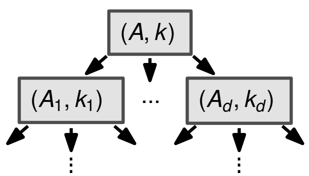
Parametrisierte Algorithmen

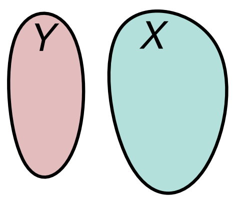
Branch and Reduce: Above Lower Bound

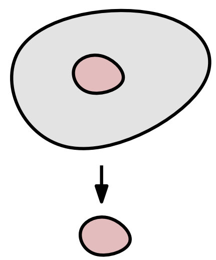


Inhalt

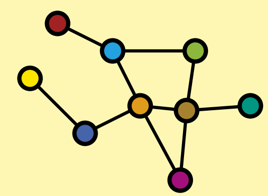
Basic Toolbox
- beschränkte Suchbäume
- iterative Kompression
- Kernbildung

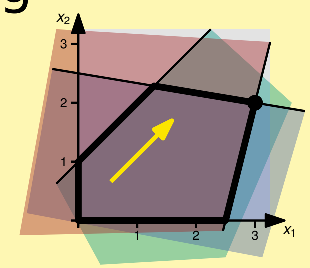


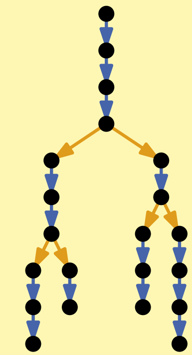




Erweiterte Toolbox
- lineare Programme
- Branch-and-Reduce
- Color Coding

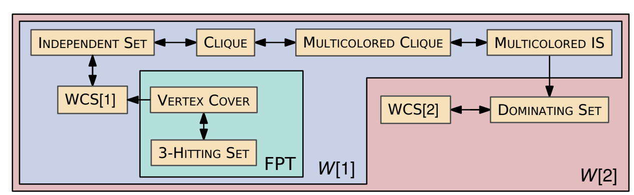


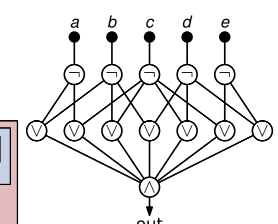




Baumweite
- dynamische Programme
- chordale & planare Graphen
- Courcelles Theorem

Untere Schranken
- parametrisierte Reduktionen
- boolesche Schaltkreise und die W-Hierarchie
- ETH und SETH





Wiederholung: Kernbildung

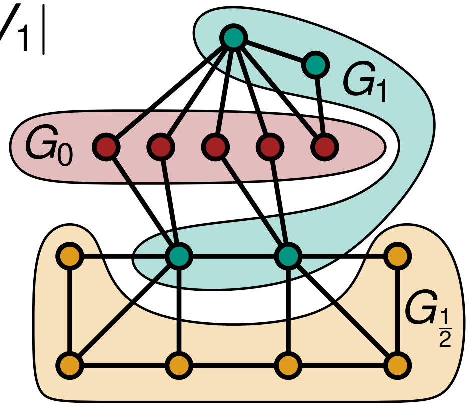
Reduktionsregel

- löse die LP-Relaxierung $\rightarrow (x_v)_{v \in V}$
- falls $\sum_{v \in V} x_v > k \Rightarrow$ NEIN-Instanz
- sonst wähle V_1, lösche $V_0 \cup V_1$ und verringere k um $|V_1|$

minimiere: $\sum_{v \in V} x_v$

sodass: $0 \leq x_v \leq 1$ für $v \in V$

$x_u + x_v \geq 1$ für $uv \in E$



Lemma: Die Reduktionsregel ist sicher.

Theorem
Für VERTEX COVER kann ein Kern mit maximal $2k$ Knoten in $O(??)$ Zeit berechnet werden.

Beweis

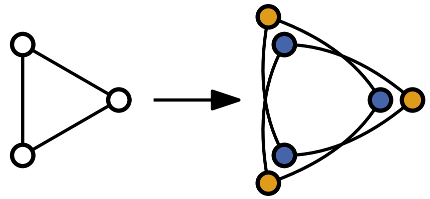
- wir können annehmen, dass $\sum_{v \in V} x_v \leq k$ (sonst: triviale Nein-Instanz)
- $\Rightarrow \frac{1}{2}|V_{\frac{1}{2}}| \leq \sum_{v \in V} x_v \leq k \Rightarrow |V_{\frac{1}{2}}| \leq 2k$

Laufzeit: dominiert durch lösen des LPs

Nachtrag: Verbesserte Laufzeit

Konstruktion einen Hilfsgraphen

- spalte jeden Knoten v auf in v_g (gelb) und v_b (blau)
- übernehme Kanten aber nur zwischen gelb und blau
- resultierender bipartiter Graph: H mit Knotenmenge $V_g \cup V_b$



minimiere: $\sum_{v \in V} x_v$

sodass: $0 \leq x_v \leq 1$ für $v \in V$

$x_u + x_v \geq 1$ für $uv \in E$

Behauptung

- VC S in H liefert Lösung fürs LP mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ und umgekehrt, sodass $\frac{1}{2}|S| = \sum_{v \in V} x_v$

VC $\rightarrow$ LP-Lösung

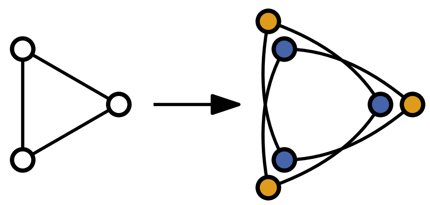
- für VC S in H: setze $x_v = \frac{1}{2}|\{v_g, v_b\} \cap S|$ für alle $v \in V$
- klar: $\frac{1}{2}|S| = \sum_{v \in V} x_v$
- außerdem: $\{u, v\} \in E$ impliziert $|\{u_g, u_b, v_g, v_b\} \cap S| \geq 2 \Rightarrow x_u + x_v \geq 1$

Nachtrag: Verbesserte Laufzeit

Karlsruher Institut für Technologie

Konstruktion einen Hilfsgraphen

- spalte jeden Knoten v auf in v_g (gelb) und v_b (blau)
- übernehme Kanten aber nur zwischen gelb und blau
- resultierender bipartiter Graph: H mit Knotenmenge $V_g \cup V_b$



minimiere: $\sum_{v \in V} x_v$

sodass: $0 \leq x_v \leq 1$ für $v \in V$

$x_u + x_v \geq 1$ für $uv \in E$

Behauptung

- VC S in H liefert Lösung fürs LP mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ und umgekehrt, sodass $\frac{1}{2}|S| = \sum_{v \in V} x_v$

LP-Lösung $\rightarrow$ VC

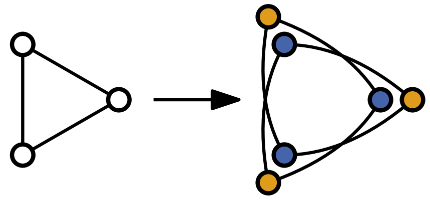
- für LP-Lösung $(x_v)_{v \in V}$ definiere S: $v_g \in S \Leftrightarrow x_v \geq \frac{1}{2}$ und $v_b \in S \Leftrightarrow x_v = 1$
- klar: $\frac{1}{2}|S| = \sum_{v \in V} x_v$
- außerdem: $x_u + x_v \geq 1$ sorgt dafür, dass jede Kante abgedeckt wird

Nachtrag: Verbesserte Laufzeit

Karlsruher Institut für Technologie

Konstruktion einen Hilfsgraphen

- spalte jeden Knoten v auf in v_g (gelb) und v_b (blau)
- übernehme Kanten aber nur zwischen gelb und blau
- resultierender bipartiter Graph: H mit Knotenmenge $V_g \cup V_b$



minimiere: $\sum_{v \in V} x_v$

sodass: $0 \leq x_v \leq 1$ für $v \in V$

$x_u + x_v \geq 1$ für $uv \in E$

Behauptung

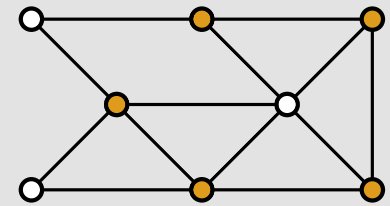
- VC S in H liefert Lösung fürs LP mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ und umgekehrt, sodass $\frac{1}{2}|S| = \sum_{v \in V} x_v$

Lemma
Das LP kann gelöst werden, indem man ein VC in einem bipartiten Graphen ausrechnet. Dies geht in $O(m\sqrt{n})$.

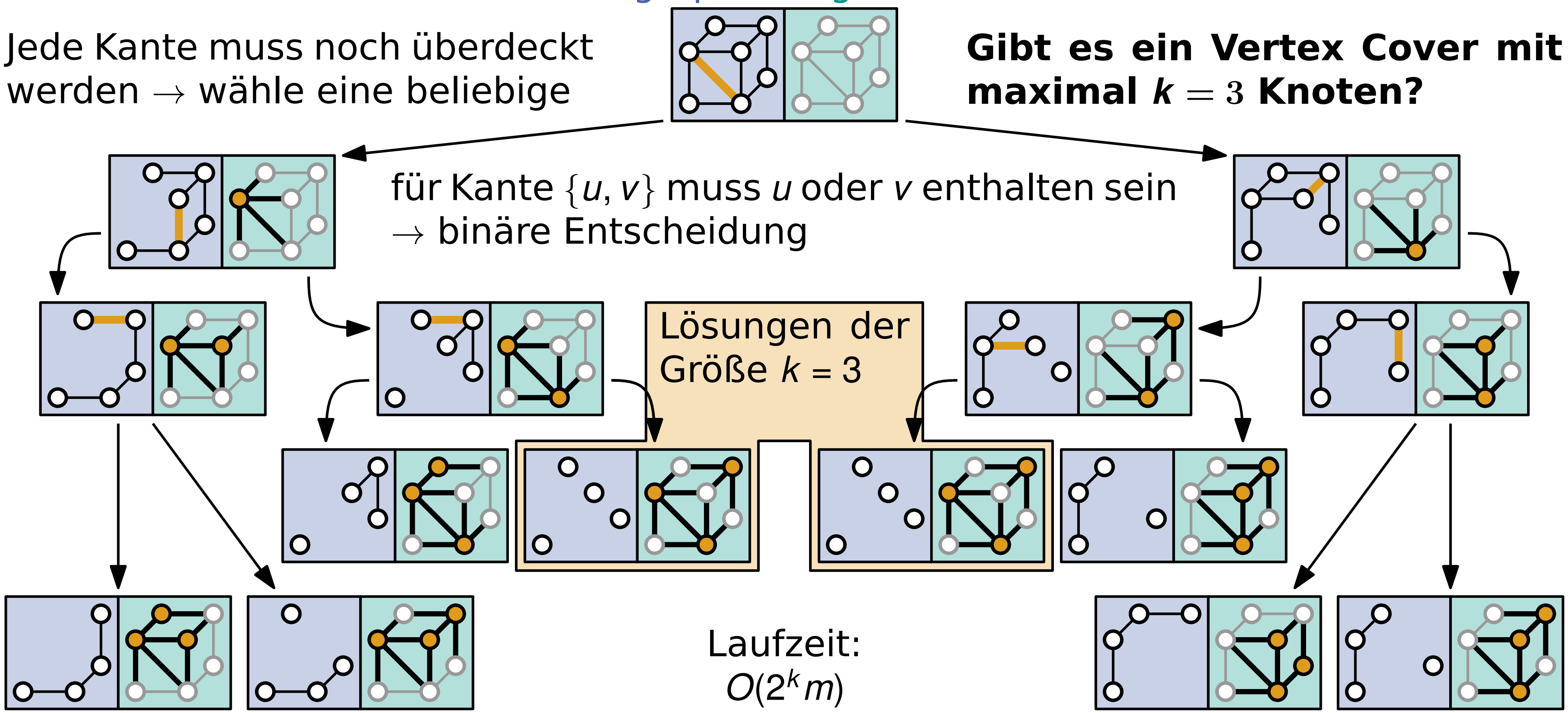
Laufzeit: siehe Übung

Wiederholung: Beschränkter Suchbaum

Problem: Vertex Cover
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe k?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



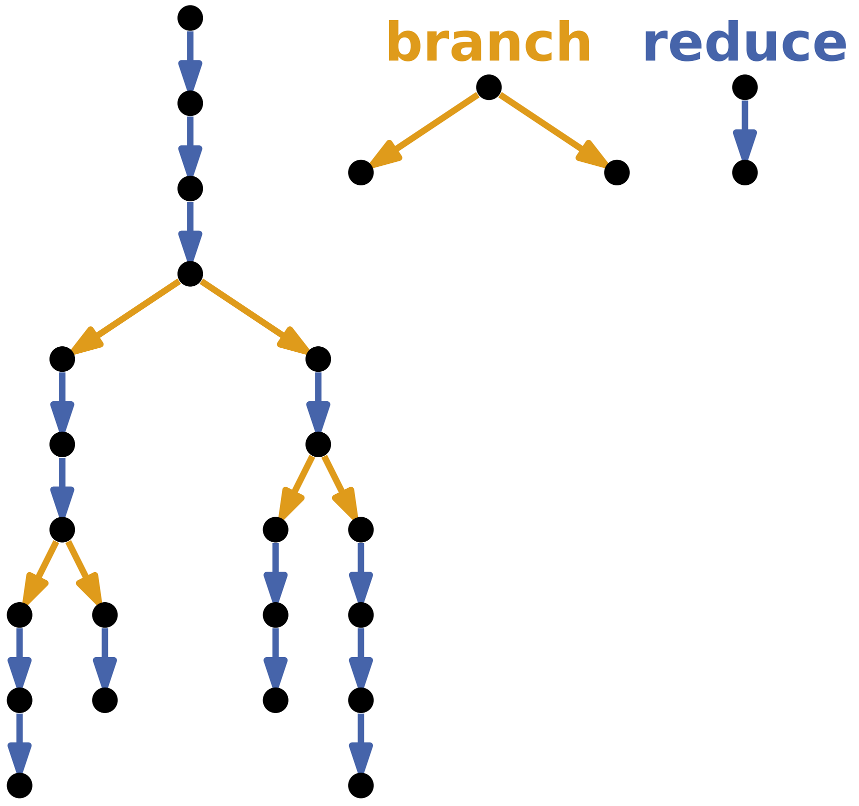
noch zu überdeckender Teilgraph — gewählte Knoten & überdeckte Kanten



Kernbildung und Suchbäume

Branch-and-Reduce

- wende Reduktionsregeln so lange wie möglich an
- keine Regel anwendbar: verzweige einmal

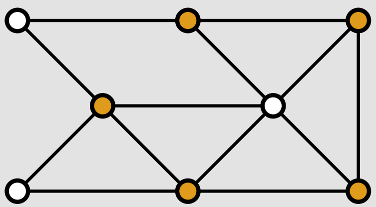


Untere Schranken und Parameter

Bessere Parameter als Lösungsgröße

- sei $\ell(G)$ Untere Schranke für das minimale Vertex Cover in G
- $\ell(G)$ sollte effizient berechenbar sein
- Beispiel: $\ell_{\text{LP}}(G)$ = optimale Lösung der LP-Relaxierung

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\text{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



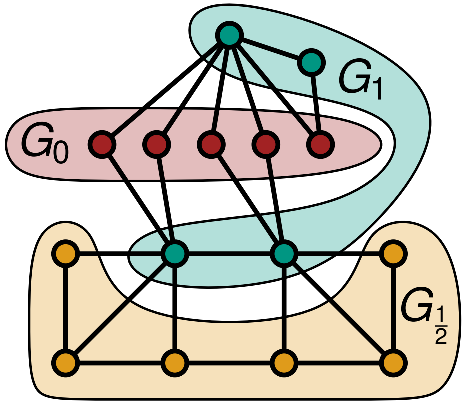
Heute

- FPT-Algorithmus für Vertex Cover above LP
- beachte: $\text{vc}(G)$ (bisheriger Parameter) ist meist deutlich größer als $\text{vc}(G) - \ell_{\text{LP}}(G)$ (neuer Parameter)

Branch-and-Reduce

Reduktionsregel

- wenn die LP-Relaxierung eine Lösung hat, bei der nicht $|V_{\frac{1}{2}}| = n$, dann reduziere auf $G_{\frac{1}{2}}$



Verzweigungsregel

- für eine Kante uv, betrachte die Instanzen $G - u$ und $G - v$

Wie muss der Parameter angepasst werden?

Reduktionsregel

- es werden $|V_1|$ Knoten zum VC hinzugefügt
- $\ell_{\mathrm{LP}}(G_{\frac{1}{2}}) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - |V_1|$
- G hat VC der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k \Leftrightarrow$ $G_{\frac{1}{2}}$ hat VC der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k - |V_1| = \ell_{\mathrm{LP}}(G_{\frac{1}{2}}) + k$

$\Rightarrow$ der Parameter wird nicht verändert

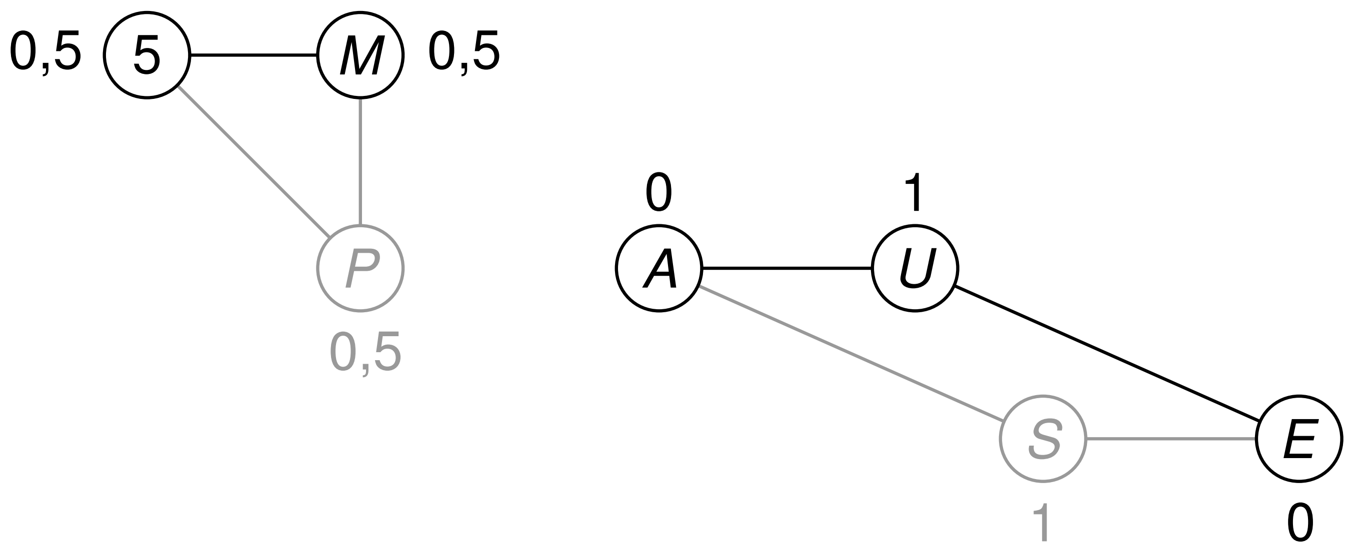
Verzweigungsregel

- ein Knoten zum VC hinzugefügt
- aber wie verändert sich $\ell_{\mathrm{LP}}(G)$?

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

Untere Schranken

Wie groß ist $\ell_{\mathrm{LP}}(G)$? Wie verändert es sich beim Branching?



untere Schranke: 1,5 2

nach Branching: 1 1

Wie groß ist $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v)$?

Lemma
Die LP-Lösung, die alles auf $\frac{1}{2}$ setzt ist die einzige Lösung genau dann, wenn $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$.

Beweis

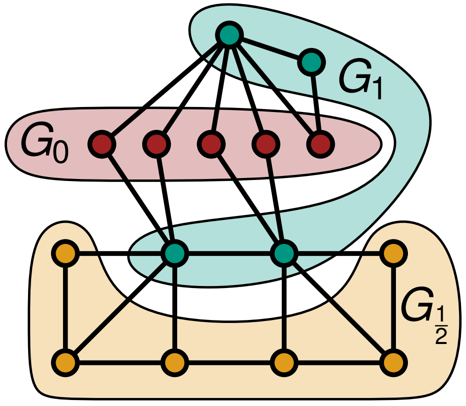
alles auf $\frac{1}{2}$ ist die einzige Lösung $\Leftarrow \ell_{\mathrm{LP}}(G - v) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$

- angenommen, es gibt eine Lösung mit $x_v = 1$ für einen Knoten v
- die gleichen Werte (abgesehen von x_v) liefern Lösung für $G - v$
- also hat $G - v$ eine Lösung der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) - 1$

alles auf $\frac{1}{2}$ ist die einzige Lösung $\Rightarrow \ell_{\mathrm{LP}}(G - v) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$

- klar: $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v) \leq \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ (lösche v aus Lösung für G)
- angenommen, $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v) < \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$
- dann gibt es Lösung für $G - v$ mit Wert maximal $\ell_{\mathrm{LP}}(G) - 1$
- hinzufügen von v mit $x_v = 1$ liefert optimale Lösung für G

Branch-and-Reduce



Reduktionsregel

- wenn die LP-Relaxierung eine Lösung hat, bei der nicht $|V_{\frac{1}{2}}| = n$, dann reduziere auf $G_{\frac{1}{2}}$
- Parameter bleibt unverändert

Reduktionsregel ist sicher

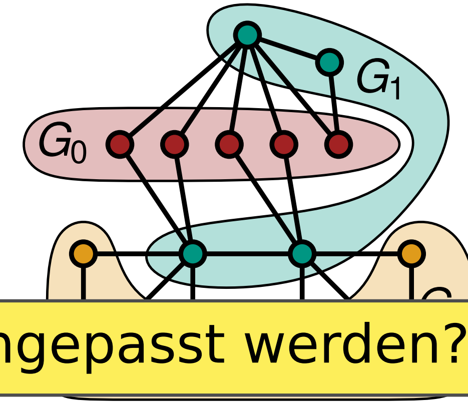
- siehe Beweis zur Kernbildung in letzter Vorlesung
- Parameter unverändert lassen ist korrekt: vorhin gesehen

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

Branch-and-Reduce

Reduktionsregel

- wenn die LP-Relaxierung eine Lösung hat, bei der nicht $|V_{\frac{1}{2}}| = n$, dann reduziere auf $G_{\frac{1}{2}}$
- Parameter bleibt unverändert



Wie muss der Parameter angepasst werden?

Verzweigungsregel

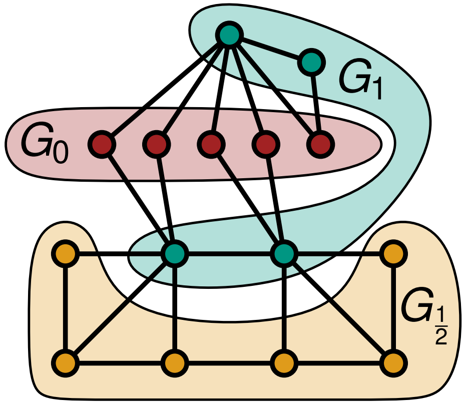
- für eine Kante uv, betrachte die Instanzen $G - u$ und $G - v$
- es wird ein Knoten zum VC hinzugefügt
- $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ (siehe Lemma)
- G hat VC der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k \Leftrightarrow$
  $G - v$ hat VC der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k - 1 = \ell_{\mathrm{LP}}(G - v) + k - \frac{1}{2}$ oder
  $G - u$ hat VC der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k - 1 = \ell_{\mathrm{LP}}(G - u) + k - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Parameter um $\frac{1}{2}$ verringern

Lemma
Die LP-Lösung, die alles auf $\frac{1}{2}$ setzt ist die einzige Lösung genau dann, wenn $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$.

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

Branch-and-Reduce



Reduktionsregel

- wenn die LP-Relaxierung eine Lösung hat, bei der nicht $|V_{\frac{1}{2}}| = n$, dann reduziere auf $G_{\frac{1}{2}}$
- Parameter bleibt unverändert

Verzweigungsregel

- für eine Kante uv, betrachte die Instanzen $G - u$ und $G - v$
- verkleinere k um $\frac{1}{2}$ (in beiden Instanzen)

Laufzeit

- Verzweigungsbaum hat maximal $2k$ Level
- und damit maximal $2^{2k} = 4^k$ Blätter
- Reduktionsregel: polynomiell

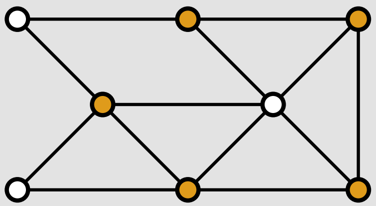
Wie? $\longrightarrow$ Nutze das Lemma!

Lemma
Die LP-Lösung, die alles auf $\frac{1}{2}$ setzt ist die einzige Lösung genau dann, wenn $\ell_{\mathrm{LP}}(G - v) = \ell_{\mathrm{LP}}(G) - \frac{1}{2}$ für alle $v \in V$.

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{\mathrm{LP}}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

Zusammenfassung

Problem: Vertex Cover above LP
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe $\ell_{LP}(G) + k$?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



Theorem
Für Vertex Cover above LP gibt es einen FPT-Algo mit Laufzeit $4^k \cdot n^{O(1)}$.

Matching als untere Schranken

- die Größe $\ell_M(G)$ eines maximalen Matchings in G ist untere Schranke
- beachte: $\ell_M(G) \leq \ell_{LP}(G)$ (Dualität der linearen Programme)
- Algo von heute zeigt auch FPT für Vertex Cover above Matching

Bessere untere Schranke

- $2\ell_{LP}(G) - \ell_M(G)$ ist ebenfalls eine untere Schranke
- die Schranke ist stärker als $\ell_{LP}(G)$
- Vertex Cover above $2\ell_{LP}(G) - \ell_M(G)$ ist FPT

Literaturhinweise

Raising The Bar For Vertex Cover: Fixed-parameter Tractability Above A Higher Guarantee

- Shivam Garg, Geevarghese Philip [2016]
- eben genanntes Ergebnis für Vertex Cover above $2\ell_{\mathrm{LP}}(G) - \ell_{\mathrm{M}}(G)$
- enthält viele weitere Referenzen zum Thema

doi.org/10.1137/1.9781611974331.ch80

Branch-and-Reduce Exponential/FPT Algorithms in Practice: A Case Study of Vertex Cover

- Takuya Akiba, Yoichi Iwata [2016]
- Branch-and-Reduce für Vertex Cover in der Praxis

doi.org/10.1016/j.tcs.2015.09.023

WeGotYouCovered: The Winning Solver from the PACE 2019 Challenge, Vertex Cover Track

- Demian Hespe, Sebastian Lamm, Christian Schulz, Darren Strash [2020]
- schneller Algo für Vertex Cover in der Praxis

doi.org/10.1137/1.9781611976229.1