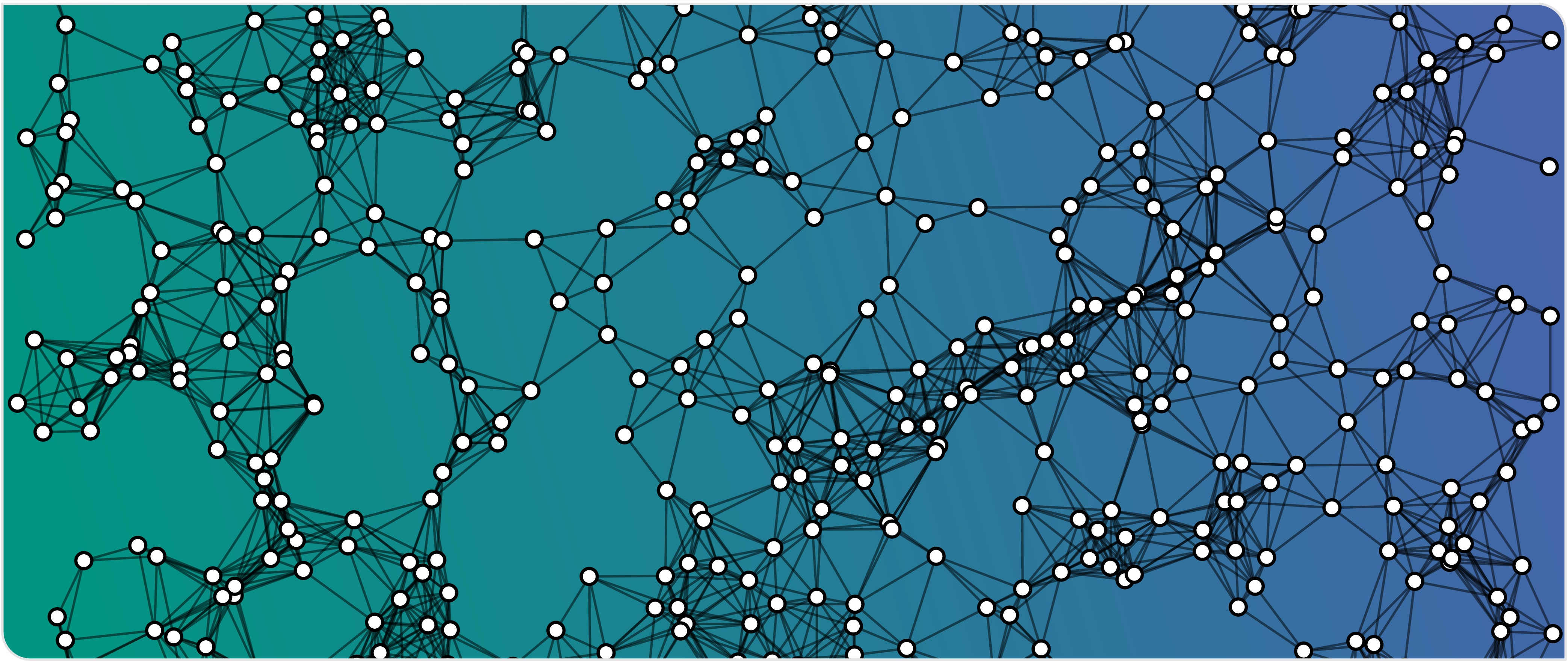
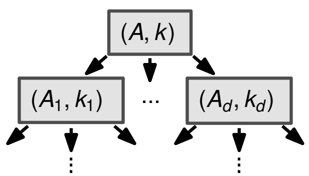
Parametrisierte Algorithmen

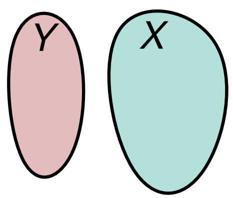
ILP-Relaxierung und Kernbildung

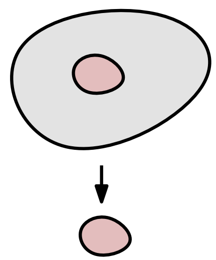


Inhalt

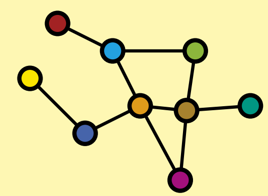
Basic Toolbox
- beschränkte Suchbäume
- iterative Kompression
- Kernbildung

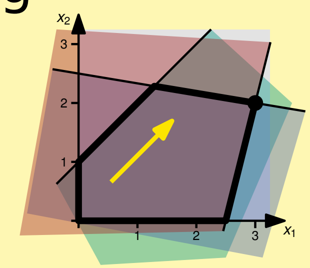


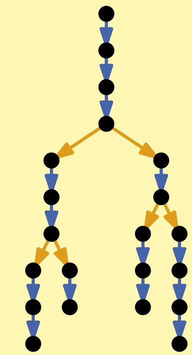




Erweiterte Toolbox
- lineare Programme
- Branch-and-Reduce
- Color Coding

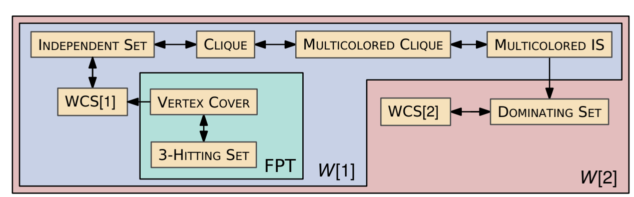


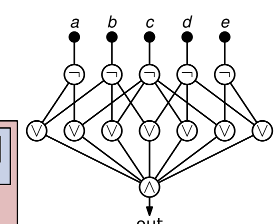




Baumweite
- dynamische Programme
- chordale & planare Graphen
- Courcelles Theorem

Untere Schranken
- parametrisierte Reduktionen
- boolesche Schaltkreise und die W-Hierarchie
- ETH und SETH





Wiederholung: Lenstras Theorem

Theorem (ohne Beweis)
Für $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Z}^m$ kann die Frage, ob es ein $x \in \mathbb{N}^n$ mit $Ax \leq b$ gibt in $O(n^{2,5n}|A, b|)$ entschieden werden, wobei $|A, b|$ die Länge der Binärkodierung für die Instanz bezeichnet.

Folgerungen

- ILP (als Entscheidungsproblem) mit Parameter n = Anzahl der Variablen, auch *Dimension* genannt, ist in FPT
- Anzahl der Ungleichungen geht nur polynomiell in Laufzeit ein
- Größe der Zahlen geht nur logarithmisch in Laufzeit ein

Metatheorem
Ein parametrisiertes Problem mit Parameter k, dass sich als ILP mit $f(k)$ vielen Variablen darstellen lässt, ist in FPT.

Nachtrag: Closest String

Problem: Closest String (*k* wird unser Parameter sein)
Gegeben k Strings $s_1, \ldots, s_k \in \Sigma^n$ und $D \in \mathbb{N}$. Gibt es einen String $s \in \Sigma^n$, der von jedem s_i Hamming Distanz maximal D hat?

s_1	A	B	C	F	G	D	C	G	E	B	A
s_2	B	B	D	A	G	D	B	G	B	E	C
s_3	B	A	E	F	C	A	C	G	B	B	F

Nachtrag: Closest String

Problem: Closest String (*k* wird unser Parameter sein)
Gegeben k Strings $s_1, \dots, s_k \in \Sigma^n$ und $D \in \mathbb{N}$. Gibt es einen String $s \in \Sigma^n$, der von jedem s_i Hamming Distanz maximal D hat?

s_1	A	B	C	F	G	D	C	G	E	B	A
s_2	B	B	D	A	G	D	B	G	B	E	C
s_3	B	A	E	F	C	A	C	G	B	B	F
s	B	B	E	F	G	D	C	G	B	B	C

Nachtrag: Closest String

Problem: Closest String (*k* wird unser Parameter sein)
Gegeben k Strings $s_1, \dots, s_k \in \Sigma^n$ und $D \in \mathbb{N}$. Gibt es einen String $s \in \Sigma^n$, der von jedem s_i Hamming Distanz maximal D hat?

Beobachtung

- nur (Un)gleichheit innerhalb jeder Spalte relevant
- es gibt äquivalente Instanz mit $\Sigma = [k]$

s_1	A	B	C	F	G	D	C	G	E	B	A
s_2	B	B	D	A	G	D	B	G	B	E	C
s_3	B	A	E	F	C	A	C	G	B	B	F

Nachtrag: Closest String

Karlsruher Institut für Technologie

Problem: Closest String (*k* wird unser Parameter sein)
Gegeben k Strings $s_1, \ldots, s_k \in \Sigma^n$ und $D \in \mathbb{N}$. Gibt es einen String $s \in \Sigma^n$, der von jedem s_i Hamming Distanz maximal D hat?

Beobachtung

- nur (Un)gleichheit innerhalb jeder Spalte relevant
- es gibt äquivalente Instanz mit $\Sigma = [k]$

s_1	A	B	C	F	G	D	C	G	E	B	A
s_2	B	B	D	A	G	D	B	G	B	E	C
s_3	B	A	E	F	C	A	C	G	B	B	F

$\downarrow$

s_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
s_2	2	1	2	2	1	1	2	1	2	2	2
s_3	2	2	3	1	2	2	1	1	2	1	3

Nachtrag: Closest String

Problem: Closest String (k wird unser Parameter sein)
Gegeben k Strings $s_1, \dots, s_k \in \Sigma^n$ und $D \in \mathbb{N}$. Gibt es einen String $s \in \Sigma^n$, der von jedem s_i Hamming Distanz maximal D hat?

Beobachtung

- nur (Un)gleichheit innerhalb jeder Spalte relevant
- es gibt äquivalente Instanz mit $\Sigma = [k]$
- Anzahl verschiedener Spalten nur von k abhängig
  ($\leq k!$)

s_1	A	B	C	F	G	D	C	G	E	B	A
s_2	B	B	D	A	G	D	B	G	B	E	C
s_3	B	A	E	F	C	A	C	G	B	B	F

s_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
s_2	2	1	2	2	1	1	2	1	2	2	2
s_3	2	2	3	1	2	2	1	1	2	1	3

Nachtrag: Closest String

Problem: Closest String (*k* wird unser Parameter sein)
Gegeben k Strings $s_1, \dots, s_k \in \Sigma^n$ und $D \in \mathbb{N}$. Gibt es einen String $s \in \Sigma^n$, der von jedem s_i Hamming Distanz maximal D hat?

Beobachtung

- nur (Un)gleichheit innerhalb jeder Spalte relevant
- es gibt äquivalente Instanz mit $\Sigma = [k]$
- Anzahl verschiedener Spalten nur von k abhängig ($\leq k!$)

s_1	A	B	C	F	G	D	C	G	E	B	A
s_2	B	B	D	A	G	D	B	G	B	E	C
s_3	B	A	E	F	C	A	C	G	B	B	F

s_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
s_2	2	1	2	2	1	1	2	1	2	2	2
s_3	2	2	3	1	2	2	1	1	2	1	3

Formulierung als ILP

- reduziere Lösung auf: Wie oft wurde für den Spalten-Typ t der Wert a gewählt?

Nachtrag: Closest String

Problem: Closest String (*k* wird unser Parameter sein)
Gegeben k Strings $s_1, \dots, s_k \in \Sigma^n$ und $D \in \mathbb{N}$. Gibt es einen String $s \in \Sigma^n$, der von jedem s_i Hamming Distanz maximal D hat?

Beobachtung

- nur (Un)gleichheit innerhalb jeder Spalte relevant
- es gibt äquivalente Instanz mit $\Sigma = [k]$
- Anzahl verschiedener Spalten nur von k abhängig ($\leq k!$)

s_1	A	B	C	F	G	D	C	G	E	B	A
s_2	B	B	D	A	G	D	B	G	B	E	C
s_3	B	A	E	F	C	A	C	G	B	B	F

s_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
s_2	2	1	2	2	1	1	2	1	2	2	2
s_3	2	2	3	1	2	2	1	1	2	1	3
s	2	1	3	1	2	1	2	1	2	1	2

Formulierung als ILP

- reduziere Lösung auf: Wie oft wurde für den Spalten-Typ t der Wert a gewählt?

Nachtrag: Closest String

Problem: Closest String (*k* wird unser Parameter sein)
Gegeben k Strings $s_1, \dots, s_k \in \Sigma^n$ und $D \in \mathbb{N}$. Gibt es einen String $s \in \Sigma^n$, der von jedem s_i Hamming Distanz maximal D hat?

Beobachtung

- nur (Un)gleichheit innerhalb jeder Spalte relevant
- es gibt äquivalente Instanz mit $\Sigma = [k]$
- Anzahl verschiedener Spalten nur von k abhängig ($\leq k!$)

Formulierung als ILP

- reduziere Lösung auf: Wie oft wurde für den Spalten-Typ t der Wert a gewählt?

s_1	A	B	C	F	G	D	C	G	E	B	A
s_2	B	B	D	A	G	D	B	G	B	E	C
s_3	B	A	E	F	C	A	C	G	B	B	F

↓

s_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
s_2	2	1	2	2	1	1	2	1	2	2	2
s_3	2	2	3	1	2	2	1	1	2	1	3
s	2	1	3	1	2	1	2	1	2	1	2

0×1	2×2	0×3
2×1	1×2	0×3
0×1	1×2	1×3
2×1	1×2	0×3
1×1	0×2	0×3

Nachtrag: CLOSEST STRING

Karlsruher Institut für Technologie

Problem: CLOSEST STRING (*k* wird unser Parameter sein)
Gegeben k Strings $s_1, \dots, s_k \in \Sigma^n$ und $D \in \mathbb{N}$. Gibt es einen String $s \in \Sigma^n$, der von jedem s_i Hamming Distanz maximal D hat?

Beobachtung

- nur (Un)gleichheit innerhalb jeder Spalte relevant
- es gibt äquivalente Instanz mit $\Sigma = [k]$
- Anzahl verschiedener Spalten nur von k abhängig ($\leq k!$)

Formulierung als ILP

- reduziere Lösung auf: Wie oft wurde für den Spalten-Typ t der Wert a gewählt? $\rightarrow$ Variable $x_{t,a}$

s_1	A	B	C	F	G	D	C	G	E	B	A
s_2	B	B	D	A	G	D	B	G	B	E	C
s_3	B	A	E	F	C	A	C	G	B	B	F

s_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
s_2	2	1	2	2	1	1	2	1	2	2	2
s_3	2	2	3	1	2	2	1	1	2	1	3
s	2	1	3	1	2	1	2	1	2	1	2

$0 \times$ 1	$2 \times$ 2	$0 \times$ 3
$2 \times$ 1	$1 \times$ 2	$0 \times$ 3
$0 \times$ 1	$1 \times$ 2	$1 \times$ 3
$2 \times$ 1	$1 \times$ 2	$0 \times$ 3
$1 \times$ 1	$0 \times$ 2	$0 \times$ 3

Nachtrag: Closest String

Problem: Closest String (k wird unser Parameter sein)
Gegeben k Strings $s_1, \dots, s_k \in \Sigma^n$ und $D \in \mathbb{N}$. Gibt es einen String $s \in \Sigma^n$, der von jedem s_i Hamming Distanz maximal D hat?

Beobachtung

- nur (Un)gleichheit innerhalb jeder Spalte relevant
- es gibt äquivalente Instanz mit $\Sigma = [k]$
- Anzahl verschiedener Spalten nur von k abhängig ($\leq k!$)

Formulierung als ILP

- reduziere Lösung auf: Wie oft wurde für den Spalten-Typ t der Wert a gewählt? $\rightarrow$ Variable $x_{t,a}$
- wähle ein Zeichen für jede Spalte von Typ t:

$$\sum_{a \in \Sigma} x_{t,a} = \text{Anzahl Spalten von Typ } t$$

s_1	A	B	C	F	G	D	C	G	E	B	A
s_2	B	B	D	A	G	D	B	G	B	E	C
s_3	B	A	E	F	C	A	C	G	B	B	F

$\downarrow$

s_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
s_2	2	1	2	2	1	1	2	1	2	2	2
s_3	2	2	3	1	2	2	1	1	2	1	3
s	2	1	3	1	2	1	2	1	2	1	2

0×1	2×2	0×3
2×1	1×2	0×3
0×1	1×2	1×3
2×1	1×2	0×3
1×1	0×2	0×3

Nachtrag: Closest String

Problem: Closest String (k wird unser Parameter sein)
Gegeben k Strings $s_1, \dots, s_k \in \Sigma^n$ und $D \in \mathbb{N}$. Gibt es einen String $s \in \Sigma^n$, der von jedem s_i Hamming Distanz maximal D hat?

Beobachtung

- nur (Un)gleichheit innerhalb jeder Spalte relevant
- es gibt äquivalente Instanz mit $\Sigma = [k]$
- Anzahl verschiedener Spalten nur von k abhängig ($\leq k!$)

Formulierung als ILP

- reduziere Lösung auf: Wie oft wurde für den Spalten-Typ t der Wert a gewählt? $\rightarrow$ Variable $x_{t,a}$
- wähle ein Zeichen für jede Spalte von Typ t:

$$\sum_{a \in \Sigma} x_{t,a} = \text{Anzahl Spalten von Typ } t$$

- Distanz $\leq D$ für jedes s_i: $\displaystyle\sum_{t \in \text{Typen}} \sum_{\substack{a \in \Sigma \\ a \neq t[i]}} x_{t,a} \leq D$

s_1	A	B	C	F	G	D	C	G	E	B	A
s_2	B	B	D	A	G	D	B	G	B	E	C
s_3	B	A	E	F	C	A	C	G	B	B	F

$\downarrow$

s_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
s_2	2	1	2	2	1	1	2	1	2	2	2
s_3	2	2	3	1	2	2	1	1	2	1	3
s	2	1	3	1	2	1	2	1	2	1	2

0×1	2×2	0×3
2×1	1×2	0×3
0×1	1×2	1×3
2×1	1×2	0×3
1×1	0×2	0×3

Nachtrag: Closest String

Problem: Closest String (k wird unser Parameter sein)
Gegeben k Strings $s_1, \dots, s_k \in \Sigma^n$ und $D \in \mathbb{N}$. Gibt es einen String $s \in \Sigma^n$, der von jedem s_i Hamming Distanz maximal D hat?

Beobachtung

- nur (Un)gleichheit innerhalb jeder Spalte relevant
- es gibt äquivalente Instanz mit $\Sigma = [k]$
- Anzahl verschiedener Spalten nur von k abhängig ($\leq k!$)

Formulierung als ILP

- reduziere Lösung auf: Wie oft wurde für den Spalten-Typ t der Wert a gewählt? $\to$ Variable $x_{t,a}$
- wähle ein Zeichen für jede Spalte von Typ t:

$$\sum_{a \in \Sigma} x_{t,a} = \text{Anzahl Spalten von Typ } t$$

- Distanz $\leq D$ für jedes s_i: $\sum_{t \in \text{Typen}} \sum_{\substack{a \in \Sigma \\ a \neq t[i]}} x_{t,a} \leq D$
- $\to$ ILP mit „nur“ $k! \cdot k$ Variablen

s_1	A	B	C	F	G	D	C	G	E	B	A
s_2	B	B	D	A	G	D	B	G	B	E	C
s_3	B	A	E	F	C	A	C	G	B	B	F

↓

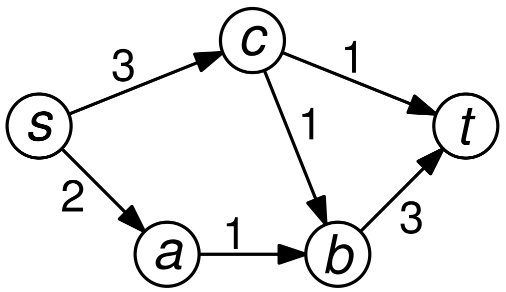
s_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
s_2	2	1	2	2	1	1	2	1	2	2	2
s_3	2	2	3	1	2	2	1	1	2	1	3
s	2	1	3	1	2	1	2	1	2	1	2

0×1	2×2	0×3
2×1	1×2	0×3
0×1	1×2	1×3
2×1	1×2	0×3
1×1	0×2	0×3

LP-Modellierung Beispiel: Fluss

Fluss in einem Netzwerk

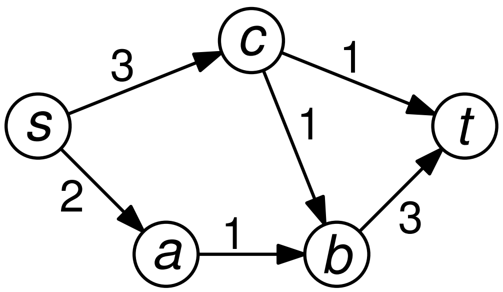
- maximiere Fluss von s nach t
- beachte Kantenkapazitäten
- einkommender = ausgehender Fluss



LP-Modellierung Beispiel: Fluss

Fluss in einem Netzwerk

- maximiere Fluss von s nach t
- beachte Kantenkapazitäten
- einkommender = ausgehender Fluss



Formulierung als LP

- x_{uv} repräsentiert den Fluss auf der Kante uv

$$
\begin{aligned}
\text{max.: } & x_{sa} + x_{sc} \\
\text{sodass: } & 0 \le x_{sa} \le 2 \qquad & x_{sa} - x_{ab} = 0 \\
& 0 \le x_{sc} \le 3 & x_{sc} - x_{cb} - x_{ct} = 0 \\
& 0 \le x_{ab} \le 1 & x_{ab} + x_{cb} - x_{bt} = 0 \\
& 0 \le x_{bt} \le 3 \\
& 0 \le x_{cb} \le 1 \\
& 0 \le x_{ct} \le 1
\end{aligned}
$$

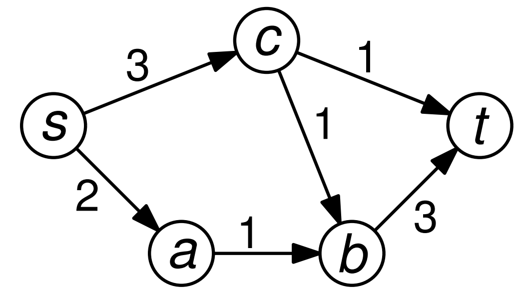
Flusserhaltung

Kapazitäten

LP-Modellierung Beispiel: Fluss

Fluss in einem Netzwerk

- maximiere Fluss von s nach t
- beachte Kantenkapazitäten
- einkommender = ausgehender Fluss



Formulierung als LP

- x_{uv} repräsentiert den Fluss auf der Kante uv

$$
\begin{array}{rll}
\text{max.:} & x_{sa} + x_{sc} & \\
\text{sodass:} & 0 \leq x_{sa} \leq 2 & x_{sa} - x_{ab} = 0 \\
& 0 \leq x_{sc} \leq 3 & x_{sc} - x_{cb} - x_{ct} = 0 \\
& 0 \leq x_{ab} \leq 1 & x_{ab} + x_{cb} - x_{bt} = 0 \\
& 0 \leq x_{bt} \leq 3 & \\
& 0 \leq x_{cb} \leq 1 & \\
& 0 \leq x_{ct} \leq 1 &
\end{array}
$$

Flusserhaltung

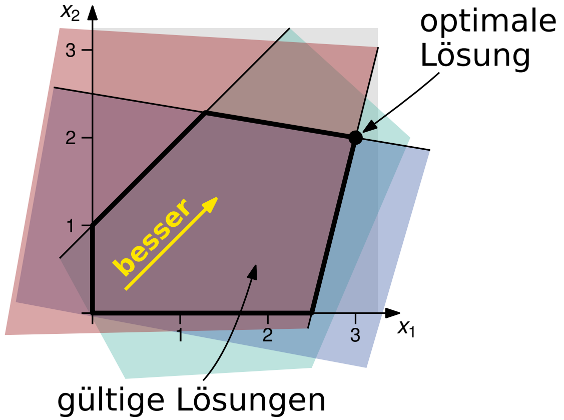
Kapazitäten

ILP für ganzzahlige Flüsse?

Optimale Lösungen von LPs

Lösungen auf dem Rand des Polytops

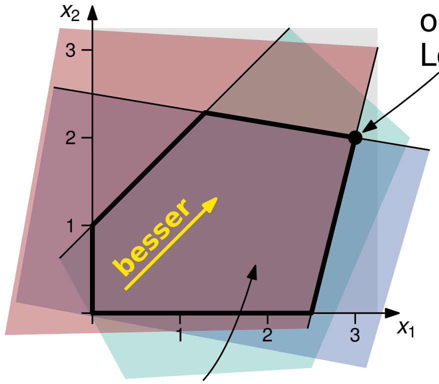
- Ungleichung liefert *n*-dimensionalen Halbraum
- Schnitt dieser Halbräume = Polytop
- optimale Lösung ist ein Eckpunkt des Polytops



Optimale Lösungen von LPs

Lösungen auf dem Rand des Polytops

- Ungleichung liefert *n*-dimensionalen Halbraum
- Schnitt dieser Halbräume = Polytop
- optimale Lösung ist ein Eckpunkt des Polytops



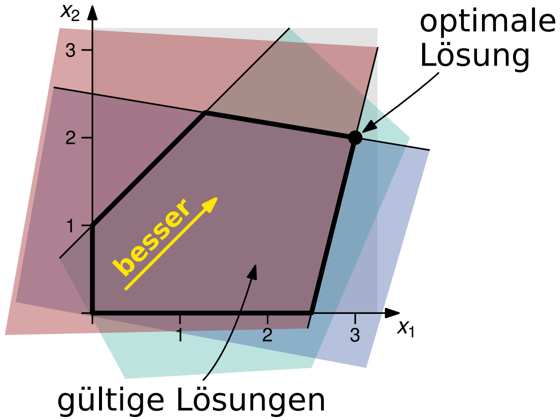
In Matrixschreibweise

$$\text{maximiere } \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ sodass } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Optimale Lösungen von LPs

Lösungen auf dem Rand des Polytops

- Ungleichung liefert n-dimensionalen Halbraum
- Schnitt dieser Halbräume = Polytop
- optimale Lösung ist ein Eckpunkt des Polytops



In Matrixschreibweise

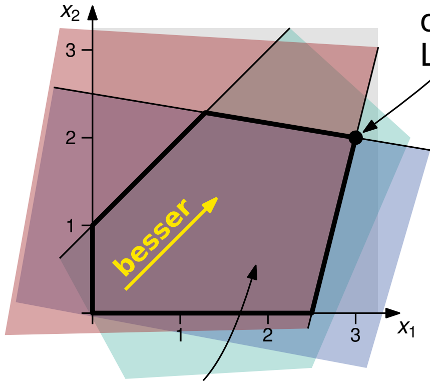
$$\text{maximiere } \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1 \\ x_2\end{pmatrix} \text{ sodass } \begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 4 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1 \\ x_2\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ 1 \\ 15 \\ 10\end{pmatrix}$$

- Teilmatrizen der Größe $n \times n$ liefern einzelnen Punkt (wenn man $\leq$ als $=$ auffasst und die Zeilen linear unabhängig sind)

Optimale Lösungen von LPs

Lösungen auf dem Rand des Polytops

- Ungleichung liefert n-dimensionalen Halbraum
- Schnitt dieser Halbräume = Polytop
- optimale Lösung ist ein Eckpunkt des Polytops

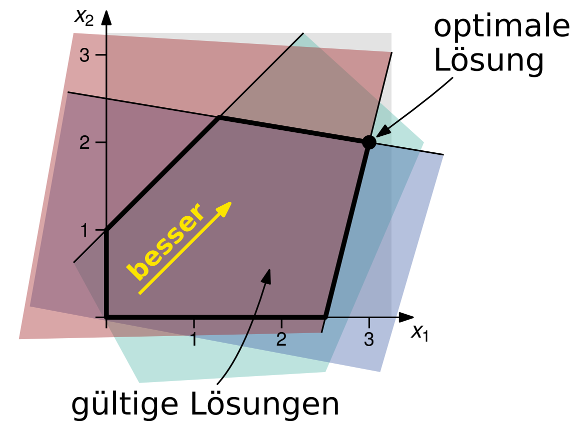


In Matrixschreibweise

$$\text{maximiere } \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ sodass } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

- Teilmatrizen der Größe $n \times n$ liefern einzelnen Punkt
  (wenn man $\leq$ als $=$ auffasst und die Zeilen linear unabhängig sind)
- Bsp.: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \end{pmatrix}$

Optimale Lösungen von LPs



Lösungen auf dem Rand des Polytops

- Ungleichung liefert n-dimensionalen Halbraum
- Schnitt dieser Halbräume = Polytop
- optimale Lösung ist ein Eckpunkt des Polytops

In Matrixschreibweise

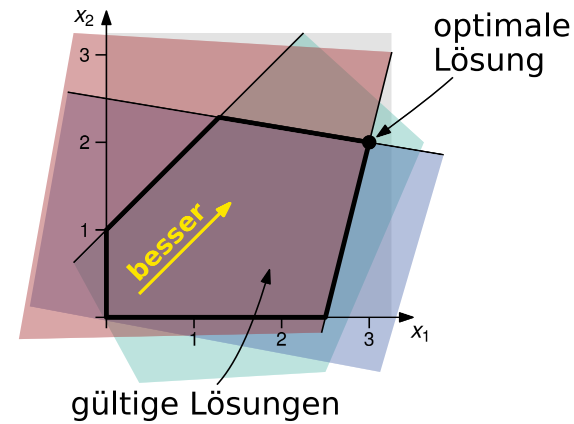
$$\text{maximiere} \quad (1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{sodass} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

- Teilmatrizen der Größe $n \times n$ liefern einzelnen Punkt
  (wenn man $\le$ als $=$ auffasst und die Zeilen linear unabhängig sind)
- Bsp.: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} \\ \frac{16}{7} \end{pmatrix}$

Optimale Lösungen von LPs

Lösungen auf dem Rand des Polytops

- Ungleichung liefert n-dimensionalen Halbraum
- Schnitt dieser Halbräume = Polytop
- optimale Lösung ist ein Eckpunkt des Polytops



In Matrixschreibweise

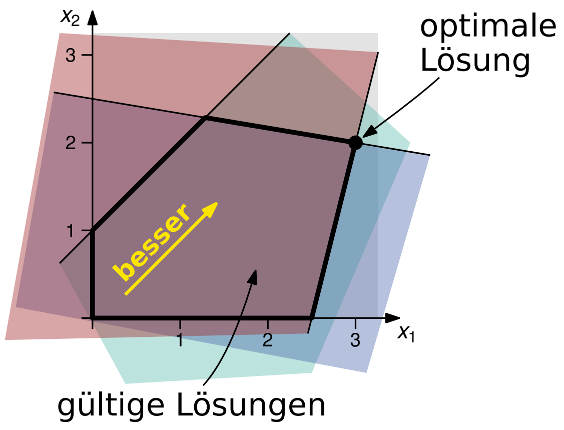
$$\text{maximiere } \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ sodass } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

- Teilmatrizen der Größe $n \times n$ liefern einzelnen Punkt
  (wenn man $\leq$ als $=$ auffasst und die Zeilen linear unabhängig sind)
- Bsp.: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} \\ \frac{16}{7} \end{pmatrix}$ $\quad\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}$

Optimale Lösungen von LPs

Lösungen auf dem Rand des Polytops

- Ungleichung liefert n-dimensionalen Halbraum
- Schnitt dieser Halbräume = Polytop
- optimale Lösung ist ein Eckpunkt des Polytops



In Matrixschreibweise

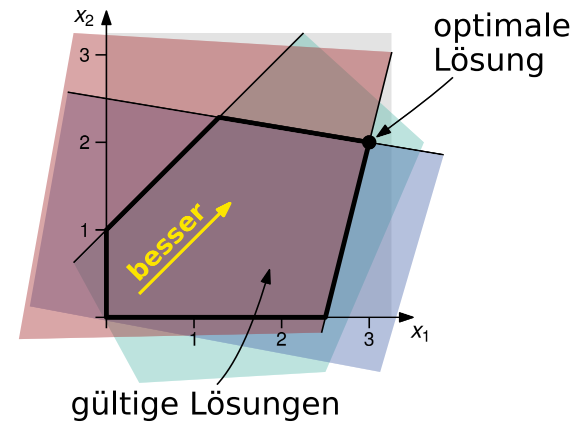
$$\text{maximiere } \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ sodass } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

- Teilmatrizen der Größe $n \times n$ liefern einzelnen Punkt
  (wenn man $\leq$ als = auffasst und die Zeilen linear unabhängig sind)
- Bsp.: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} \\ \frac{16}{7} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Optimale Lösungen von LPs

Lösungen auf dem Rand des Polytops

- Ungleichung liefert n-dimensionalen Halbraum
- Schnitt dieser Halbräume = Polytop
- optimale Lösung ist ein Eckpunkt des Polytops



In Matrixschreibweise

$$\text{maximiere} \quad \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1 \\ x_2\end{pmatrix} \quad \text{sodass} \quad \begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 4 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1 \\ x_2\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ 1 \\ 15 \\ 10\end{pmatrix}$$

- Teilmatrizen der Größe $n \times n$ liefern einzelnen Punkt
  (wenn man $\leq$ als $=$ auffasst und die Zeilen linear unabhängig sind)
- Bsp.: $\begin{pmatrix}-1 & 1 \\ 1 & 6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1 \\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 \\ 15\end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix}\frac{9}{7} \\ \frac{16}{7}\end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix}1 & 6 \\ 4 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1 \\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15 \\ 10\end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix}3 \\ 2\end{pmatrix}$

Definition
Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ist **total unimodular**, wenn die inverse Matrix jeder invertierbaren quadratischen Teilmatrix ganzzahlig ist.

Ganzzahlige Lösungen

Definition
Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ist **total unimodular**, wenn die inverse Matrix jeder invertierbaren quadratischen Teilmatrix ganzzahlig ist.

Ganzzahlige Lösungen

Definition
Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ist **total unimodular**, wenn die inverse Matrix jeder invertierbaren quadratischen Teilmatrix ganzzahlig ist.

Theorem
Gegeben ein lineares Programm der Form

$$\text{maximiere } c^T x \text{ mit } Ax \leq b$$

mit $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ total unimodular und $b \in \mathbb{Z}^m$. Wenn das LP eine optimale Lösung hat, dann hat es auch eine ganzzahlige optimale Lösung.

Ganzzahlige Lösungen

Definition
Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ist **total unimodular**, wenn die inverse Matrix jeder invertierbaren quadratischen Teilmatrix ganzzahlig ist.

Theorem
Gegeben ein lineares Programm der Form

$$\text{maximiere } c^T x \text{ mit } Ax \leq b$$

mit $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ total unimodular und $b \in \mathbb{Z}^m$. Wenn das LP eine optimale Lösung hat, dann hat es auch eine ganzzahlige optimale Lösung.

Beweisidee

- es gibt einen Eckpunkt $x^\star$ des Polytops, der optimale Lösung ist

Ganzzahlige Lösungen

Definition
Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ist **total unimodular**, wenn die inverse Matrix jeder invertierbaren quadratischen Teilmatrix ganzzahlig ist.

Theorem
Gegeben ein lineares Programm der Form

$$\text{maximiere } c^T x \text{ mit } Ax \leq b$$

mit $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ total unimodular und $b \in \mathbb{Z}^m$. Wenn das LP eine optimale Lösung hat, dann hat es auch eine ganzzahlige optimale Lösung.

Beweisidee
- es gibt einen Eckpunkt $x^\star$ des Polytops, der optimale Lösung ist
- dieser ist bestimmt durch $B \cdot x^\star = b$ für eine $n \times n$ Teilmatrix B von A

Ganzzahlige Lösungen

Definition
Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ist **total unimodular**, wenn die inverse Matrix jeder invertierbaren quadratischen Teilmatrix ganzzahlig ist.

Theorem
Gegeben ein lineares Programm der Form

$$\text{maximiere } c^T x \text{ mit } Ax \leq b$$

mit $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ total unimodular und $b \in \mathbb{Z}^m$. Wenn das LP eine optimale Lösung hat, dann hat es auch eine ganzzahlige optimale Lösung.

Beweisidee
- es gibt einen Eckpunkt $x^\star$ des Polytops, der optimale Lösung ist
- dieser ist bestimmt durch $B \cdot x^\star = b$ für eine $n \times n$ Teilmatrix B von A
- B^{-1} ist ganzzahlig $\Rightarrow x^\star = B^{-1} b$ ist ganzzahlig

Ganzzahlige Lösungen

Definition
Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ist **total unimodular**, wenn die inverse Matrix jeder invertierbaren quadratischen Teilmatrix ganzzahlig ist.

Theorem
Gegeben ein lineares Programm der Form
$$\text{maximiere } c^T x \text{ mit } Ax \leq b$$
mit $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ total unimodular und $b \in \mathbb{Z}^m$. Wenn das LP eine optimale Lösung hat, dann hat es auch eine ganzzahlige optimale Lösung.

Beweisidee
- es gibt einen Eckpunkt $x^\star$ des Polytops, der optimale Lösung ist
- dieser ist bestimmt durch $B \cdot x^\star = b$ für eine $n \times n$ Teilmatrix B von A
- B^{-1} ist ganzzahlig $\Rightarrow x^\star = B^{-1} b$ ist ganzzahlig

Total unimodular: äquivalente Definition
- Jede quadratische Submatrix hat Determinante -1, 0 oder 1

Nachweis für totale Unimodularität

Echte LPs mit total unimodularen Matrizen

Nachweis für totale Unimodularität

Echte LPs mit total unimodularen Matrizen

- LP zur Berechnung maximaler Flüsse in Netzwerken

Nachweis für totale Unimodularität

Echte LPs mit total unimodularen Matrizen

- LP zur Berechnung maximaler Flüsse in Netzwerken
- ILP zur Berechnung minimaler Vertex Cover in bipartiten Graphen

Nachweis für totale Unimodularität

Karlsruher Institut für Technologie

Echte LPs mit total unimodularen Matrizen

- LP zur Berechnung maximaler Flüsse in Netzwerken
- ILP zur Berechnung minimaler Vertex Cover in bipartiten Graphen

Nützliche Tools zur Berechnung der Determinante

- Erinnerung: A ist total unimodular, wenn jede quadratische Teilmatrix Determinante -1, 0 oder 1 hat

Nachweis für totale Unimodularität

Echte LPs mit total unimodularen Matrizen

- LP zur Berechnung maximaler Flüsse in Netzwerken
- ILP zur Berechnung minimaler Vertex Cover in bipartiten Graphen

Nützliche Tools zur Berechnung der Determinante

- Erinnerung: A ist total unimodular, wenn jede quadratische Teilmatrix Determinante -1, 0 oder 1 hat
- Laplacescher Entwicklungssatz:

Nachweis für totale Unimodularität

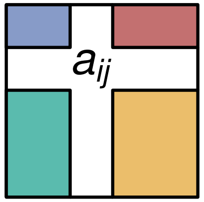
Echte LPs mit total unimodularen Matrizen

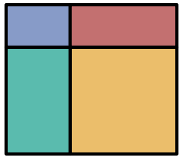
- LP zur Berechnung maximaler Flüsse in Netzwerken
- ILP zur Berechnung minimaler Vertex Cover in bipartiten Graphen

Nützliche Tools zur Berechnung der Determinante

- Erinnerung: A ist total unimodular, wenn jede quadratische Teilmatrix Determinante -1, 0 oder 1 hat
- Laplacescher Entwicklungssatz:

Entwicklung nach i-ter Zeile: $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}$

$A =$ 

$A_{ij} =$ 

Nachweis für totale Unimodularität

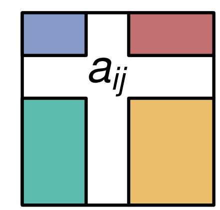
Echte LPs mit total unimodularen Matrizen

- LP zur Berechnung maximaler Flüsse in Netzwerken
- ILP zur Berechnung minimaler Vertex Cover in bipartiten Graphen

Nützliche Tools zur Berechnung der Determinante

- Erinnerung: A ist total unimodular, wenn jede quadratische Teilmatrix Determinante -1, 0 oder 1 hat
- Laplacescher Entwicklungssatz:

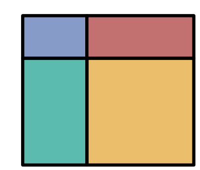
$A =$



Entwicklung nach i-ter Zeile: $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}$

Entwicklung nach j-ter Spalte: $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}$

$A_{ij} =$



Nachweis für totale Unimodularität

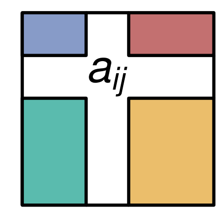
Echte LPs mit total unimodularen Matrizen

- LP zur Berechnung maximaler Flüsse in Netzwerken
- ILP zur Berechnung minimaler Vertex Cover in bipartiten Graphen

Nützliche Tools zur Berechnung der Determinante

- Erinnerung: A ist total unimodular, wenn jede quadratische Teilmatrix Determinante -1, 0 oder 1 hat
- Laplacescher Entwicklungssatz:

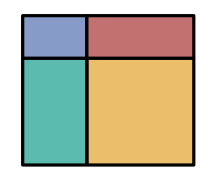
$A =$



Entwicklung nach i-ter Zeile: $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}$

Entwicklung nach j-ter Spalte: $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}$

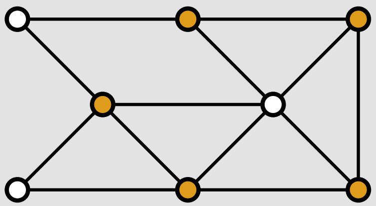
$A_{ij} =$



- Determinante 0 $\Leftrightarrow$ Matrix nicht invertierbar $\Leftrightarrow$ Spalten-/Zeilenvektoren sind linear abhängig

Beste Kernbildung für Vertex Cover

Problem: Vertex Cover
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe k?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)

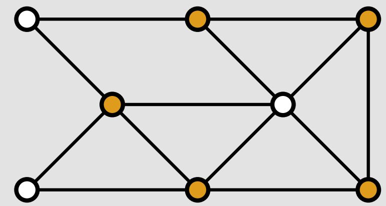


Bisher gesehen

- wähle Knoten, die „offensichtlich" gewählt werden müssen
- wenn „offensichtlich" unlösbar, reduziere zu kleiner nein-Instanz

Beste Kernbildung für Vertex Cover

Problem: Vertex Cover
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe k?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



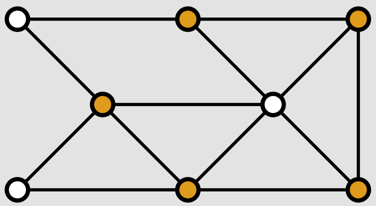
Bisher gesehen

- wähle Knoten, die „offensichtlich“ gewählt werden müssen
- wenn „offensichtlich“ unlösbar, reduziere zu kleiner NEIN-Instanz

Theorem
Vertex Cover hat einen Kern mit $O(k^2)$ Knoten und $O(k^2)$ Kanten. Er kann in $O(m)$ Zeit berechnet werden.

Beste Kernbildung für VERTEX COVER

Problem: VERTEX COVER
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe k?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



Bisher gesehen

- wähle Knoten, die „offensichtlich" gewählt werden müssen
- wenn „offensichtlich" unlösbar, reduziere zu kleiner NEIN-Instanz

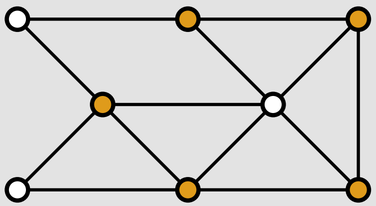
Theorem
VERTEX COVER hat einen Kern mit $O(k^2)$ Knoten und $O(k^2)$ Kanten. Er kann in $O(m)$ Zeit berechnet werden.

Heute

- Kernbildung mithilfe der LP-Relaxierung des VERTEX COVER-ILPs

Beste Kernbildung für Vertex Cover

Problem: Vertex Cover
Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k.
Gibt es ein Vertex Cover der Größe k?
(Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



Bisher gesehen

- wähle Knoten, die „offensichtlich“ gewählt werden müssen
- wenn „offensichtlich“ unlösbar, reduziere zu kleiner nein-Instanz

Theorem
Vertex Cover hat einen Kern mit $O(k^2)$ Knoten und $O(k^2)$ Kanten. Er kann in $O(m)$ Zeit berechnet werden.

Heute

- Kernbildung mithilfe der LP-Relaxierung des Vertex Cover-ILPs
- liefert Kern der Größe $2k$

Grober Plan

Lemma
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Beweis: gleich

$$\begin{aligned} \text{minimiere:} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{sodass:} \quad & 0 \leq x_v \leq 1 \text{ für } v \in V \\ & x_u + x_v \geq 1 \text{ für } uv \in E \end{aligned}$$

Grober Plan

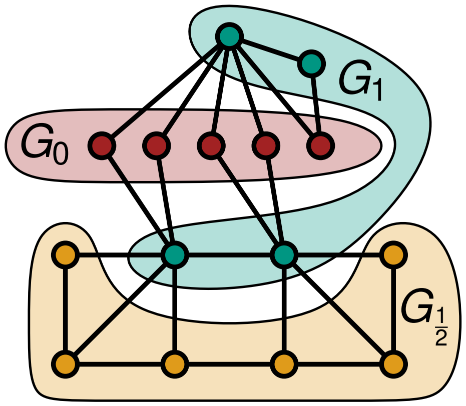
Lemma
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Beweis: gleich

$$\begin{aligned} \text{minimiere:} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{sodass:} \quad & 0 \le x_v \le 1 \text{ für } v \in V \\ & x_u + x_v \ge 1 \text{ für } uv \in E \end{aligned}$$

Teilgraphen

- Lösung zerlegt G in drei Teilgraphen $G_0, G_1, G_{\frac{1}{2}}$



Grober Plan

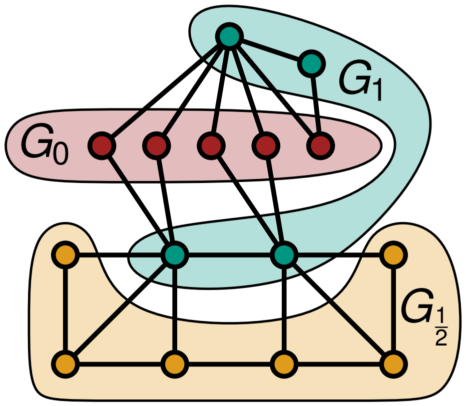
Lemma
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Beweis: gleich

$$\text{minimiere:} \quad \sum_{v \in V} x_v$$
$$\text{sodass:} \quad 0 \leq x_v \leq 1 \text{ für } v \in V$$
$$x_u + x_v \geq 1 \text{ für } uv \in E$$

Teilgraphen

- Lösung zerlegt G in drei Teilgraphen $G_0, G_1, G_{\frac{1}{2}}$
- G_1 zusammen mit optimaler Lösung in $G_{\frac{1}{2}}$ liefert optimale Lösung in G



Grober Plan

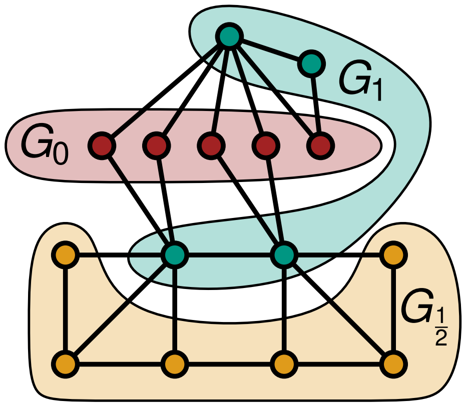
Lemma
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Beweis: gleich

$$\begin{aligned} \text{minimiere:} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{sodass:} \quad & 0 \le x_v \le 1 \text{ für } v \in V \\ & x_u + x_v \ge 1 \text{ für } uv \in E \end{aligned}$$

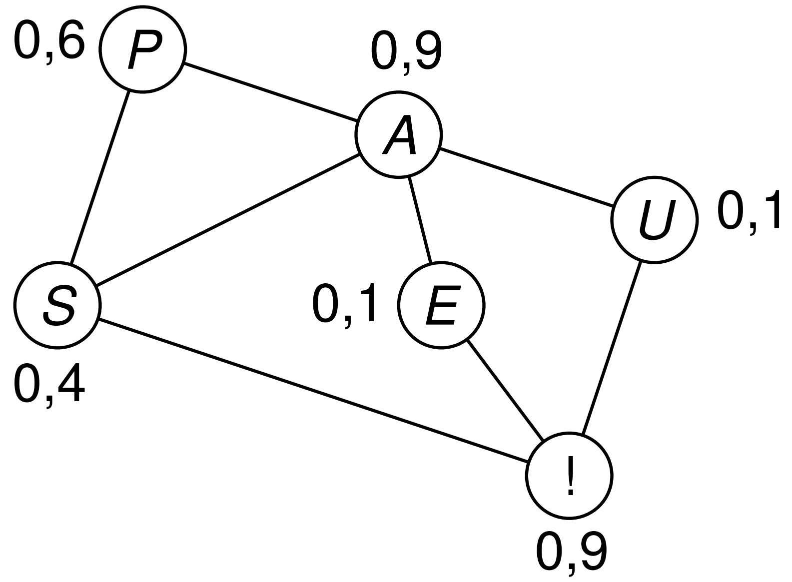
Teilgraphen

- Lösung zerlegt G in drei Teilgraphen $G_0, G_1, G_{\frac{1}{2}}$
- G_1 zusammen mit optimaler Lösung in $G_{\frac{1}{2}}$ liefert optimale Lösung in G
- $\Rightarrow G_{\frac{1}{2}}$ ist der Problemkern



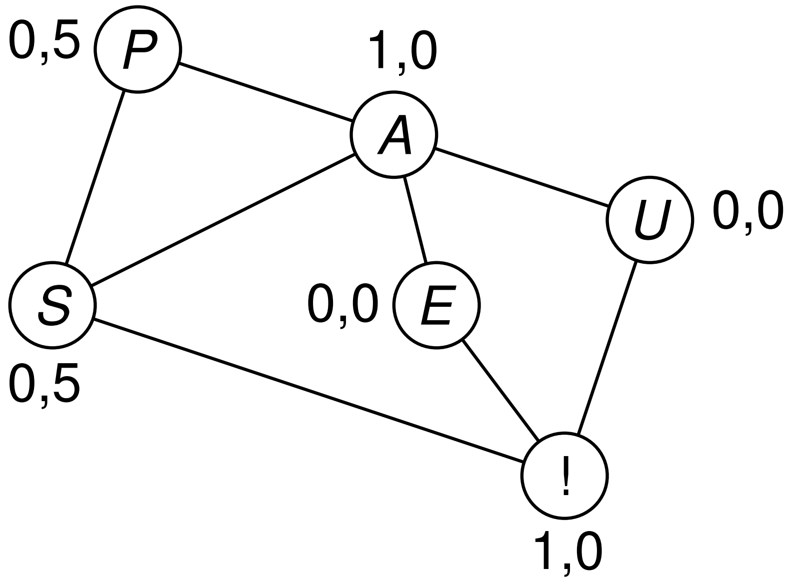
Ganzzahlige Lösung

Kann diese Lösung (fast) ganzzahlig gemacht werden?



Ganzzahlige Lösung

Kann diese Lösung (fast) ganzzahlig gemacht werden?



Fast ganzzahlige Lösungen

Lemma
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Beweis

- Ziel: passe optimale Lösung schrittweise an, bis $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

Fast ganzzahlige Lösungen

Lemma
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Beweis

- Ziel: passe optimale Lösung schrittweise an, bis $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

Zwei neue Lösungen

- $\varepsilon = \min\limits_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Fast ganzzahlige Lösungen

Lemma
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Beweis

- Ziel: passe optimale Lösung schrittweise an, bis $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

Zwei neue Lösungen

- $\varepsilon = \min_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Behauptungen

1. $(x'_v)_{v \in V}$, $(x''_v)_{v \in V}$ sind Lösungen
2. $\sum_{v \in V} x_v = \sum_{v \in V} x'_v = \sum_{v \in V} x''_v$
3. $(x'_v)_{v \in V}$ oder $(x''_v)_{v \in V}$ enthält weniger Variablen, die nicht in $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ sind als $(x_v)_{v \in V}$

Fast ganzzahlige Lösungen

Lemma
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Beweis

- Ziel: passe optimale Lösung schrittweise an, bis $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

Zwei neue Lösungen

- $\varepsilon = \min\limits_{x_v \notin \{0,\frac{1}{2},1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Behauptungen

1. $(x'_v)_{v\in V}$, $(x''_v)_{v\in V}$ sind Lösungen
2. $\sum\limits_{v\in V} x_v = \sum\limits_{v\in V} x'_v = \sum\limits_{v\in V} x''_v$
3. $(x'_v)_{v\in V}$ oder $(x''_v)_{v\in V}$ enthält weniger Variablen, die nicht in $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ sind als $(x_v)_{v\in V}$

$\Rightarrow$ nach maximal n Schritten erhält man die gewünschte Lösung

Fast ganzzahlige Lösungen

Lemma
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung 1: $(x'_v)_{v \in V}$, $(x''_v)_{v \in V}$ sind Lösungen

Zwei neue Lösungen

- $\varepsilon = \min\limits_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Fast ganzzahlige Lösungen

Lemma
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung 1: $(x'_v)_{v\in V}$, $(x''_v)_{v\in V}$ sind Lösungen

- Zu zeigen: $0 \leq x'_v, x''_v \leq 1$ für alle $v \in V$ und $x'_v + x'_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
  $x''_v + x''_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$

Zwei neue Lösungen

- $\varepsilon = \min_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Fast ganzzahlige Lösungen

Lemma
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung 1: $(x'_v)_{v \in V}$, $(x''_v)_{v \in V}$ sind Lösungen

- Zu zeigen: $0 \leq x'_v, x''_v \leq 1$ für alle $v \in V$ und $x'_v + x'_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
  klar, da ε klein genug
  $x''_v + x''_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$

Zwei neue Lösungen
- $\varepsilon = \min_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Fast ganzzahlige Lösungen

Lemma
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung 1: $(x'_v)_{v \in V}$, $(x''_v)_{v \in V}$ sind Lösungen

- Zu zeigen: $0 \le x'_v, x''_v \le 1$ für alle $v \in V$ und $x'_v + x'_w \ge 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
  klar, da ε klein genug
  $x''_v + x''_w \ge 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
- betrachte $\{u, v\} \in E$ und sei $x_u \le x_v$

Zwei neue Lösungen
- $\varepsilon = \min\limits_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Fast ganzzahlige Lösungen

Lemma
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung 1: $(x'_v)_{v \in V}$, $(x''_v)_{v \in V}$ sind Lösungen

- Zu zeigen: $0 \leq x'_v, x''_v \leq 1$ für alle $v \in V$ und $x'_v + x'_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
  klar, da ε klein genug
  $x''_v + x''_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
- betrachte $\{u, v\} \in E$ und sei $x_u \leq x_v$

Zwei neue Lösungen

- $\varepsilon = \min\limits_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Fallunterscheidung nach x_u

- $x_u = 0$

Fast ganzzahlige Lösungen

Lemma
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung 1: $(x'_v)_{v \in V}$, $(x''_v)_{v \in V}$ sind Lösungen

- Zu zeigen: $0 \leq x'_v, x''_v \leq 1$ für alle $v \in V$ und $x'_v + x'_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
  klar, da ε klein genug
  $x''_v + x''_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
- betrachte $\{u, v\} \in E$ und sei $x_u \leq x_v$

Fallunterscheidung nach x_u

- $x_u = 0 \Rightarrow x_v = 1 \Rightarrow x'_v = 1$ und $x''_v = 1$

Zwei neue Lösungen

- $\varepsilon = \min_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Fast ganzzahlige Lösungen

Karlsruher Institut für Technologie

Lemma
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung 1: $(x'_v)_{v\in V}$, $(x''_v)_{v\in V}$ sind Lösungen

- Zu zeigen: $0 \leq x'_v, x''_v \leq 1$ für alle $v \in V$ und $x'_v + x'_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
  klar, da ε klein genug
  $x''_v + x''_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
- betrachte $\{u, v\} \in E$ und sei $x_u \leq x_v$

Zwei neue Lösungen

- $\varepsilon = \min\limits_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Fallunterscheidung nach x_u

- $x_u = 0 \Rightarrow x_v = 1 \Rightarrow x'_v = 1$ und $x''_v = 1$
- $x_u \geq \frac{1}{2}$

Fast ganzzahlige Lösungen

Lemma
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung 1: $(x'_v)_{v \in V}$, $(x''_v)_{v \in V}$ sind Lösungen

- Zu zeigen: $0 \leq x'_v, x''_v \leq 1$ für alle $v \in V$ und $x'_v + x'_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
  klar, da ε klein genug
  $x''_v + x''_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
- betrachte $\{u, v\} \in E$ und sei $x_u \leq x_v$

Zwei neue Lösungen

- $\varepsilon = \min\limits_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Fallunterscheidung nach x_u

- $x_u = 0 \Rightarrow x_v = 1 \Rightarrow x'_v = 1$ und $x''_v = 1$
- $x_u \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x'_u, x'_v \geq \frac{1}{2}$ und $x''_u, x''_v \geq \frac{1}{2}$

Fast ganzzahlige Lösungen

Karlsruher Institut für Technologie

Lemma
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung 1: $(x'_v)_{v \in V}$, $(x''_v)_{v \in V}$ sind Lösungen

- Zu zeigen: $0 \leq x'_v, x''_v \leq 1$ für alle $v \in V$ und $x'_v + x'_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
  klar, da ε klein genug
  $x''_v + x''_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
- betrachte $\{u, v\} \in E$ und sei $x_u \leq x_v$

Zwei neue Lösungen

- $\varepsilon = \min\limits_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Fallunterscheidung nach x_u

- $x_u = 0 \Rightarrow x_v = 1 \Rightarrow x'_v = 1$ und $x''_v = 1$
- $x_u \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x'_u, x'_v \geq \frac{1}{2}$ und $x''_u, x''_v \geq \frac{1}{2}$
- $0 < x_u < \frac{1}{2}$

Fast ganzzahlige Lösungen

Lemma
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung 1: $(x'_v)_{v \in V}$, $(x''_v)_{v \in V}$ sind Lösungen

- Zu zeigen: $0 \leq x'_v, x''_v \leq 1$ für alle $v \in V$ und $x'_v + x'_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
  klar, da ε klein genug $\quad$ $x''_v + x''_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
- betrachte $\{u, v\} \in E$ und sei $x_u \leq x_v$

Zwei neue Lösungen

- $\varepsilon = \min\limits_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Fallunterscheidung nach x_u

- $x_u = 0 \Rightarrow x_v = 1 \Rightarrow x'_v = 1$ und $x''_v = 1$
- $x_u \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x'_u, x'_v \geq \frac{1}{2}$ und $x''_u, x''_v \geq \frac{1}{2}$
- $0 < x_u < \frac{1}{2} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_v = 1 \\ \text{oder } \frac{1}{2} < x_v < 1 \end{array} \right.$

Fast ganzzahlige Lösungen

Lemma
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung 1: $(x'_v)_{v\in V}$, $(x''_v)_{v\in V}$ sind Lösungen

- Zu zeigen: $0 \leq x'_v, x''_v \leq 1$ für alle $v \in V$ und $x'_v + x'_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
  klar, da ε klein genug — $x''_v + x''_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
- betrachte $\{u, v\} \in E$ und sei $x_u \leq x_v$

Fallunterscheidung nach x_u

- $x_u = 0 \Rightarrow x_v = 1 \Rightarrow x'_v = 1$ und $x''_v = 1$
- $x_u \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x'_u, x'_v \geq \frac{1}{2}$ und $x''_u, x''_v \geq \frac{1}{2}$
- $0 < x_u < \frac{1}{2} \Rightarrow$ $x_v = 1 \Rightarrow x'_v = 1$ und $x''_v = 1$
  oder $\frac{1}{2} < x_v < 1$

Zwei neue Lösungen

- $\varepsilon = \min\limits_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Fast ganzzahlige Lösungen

Lemma
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung 1: $(x'_v)_{v \in V}$, $(x''_v)_{v \in V}$ sind Lösungen

- Zu zeigen: $0 \leq x'_v, x''_v \leq 1$ für alle $v \in V$ und $x'_v + x'_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
  klar, da ε klein genug $\qquad$ $x''_v + x''_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
- betrachte $\{u, v\} \in E$ und sei $x_u \leq x_v$

Zwei neue Lösungen

- $\varepsilon = \min_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Fallunterscheidung nach x_u

- $x_u = 0 \Rightarrow x_v = 1 \Rightarrow x'_v = 1$ und $x''_v = 1$
- $x_u \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x'_u, x'_v \geq \frac{1}{2}$ und $x''_u, x''_v \geq \frac{1}{2}$
- $0 < x_u < \frac{1}{2} \Rightarrow$ $\Big|$ $x_v = 1 \Rightarrow x'_v = 1$ und $x''_v = 1$
  oder $\frac{1}{2} < x_v < 1$

$$\Rightarrow x'_u + x'_v = x_u + \varepsilon + x_v - \varepsilon = x_u + x_v \geq 1$$

$$\Rightarrow x''_u + x''_v = x_u - \varepsilon + x_v + \varepsilon = x_u + x_v \geq 1$$

Fast ganzzahlige Lösungen

Lemma
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung 2: $\sum_{v \in V} x_v = \sum_{v \in V} x'_v = \sum_{v \in V} x''_v$

Zwei neue Lösungen

- $\varepsilon = \min_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Fast ganzzahlige Lösungen

Lemma
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung 2: $\sum_{v \in V} x_v = \sum_{v \in V} x'_v = \sum_{v \in V} x''_v$

- für alle $v \in V$ gilt:

$$x_v = \frac{1}{2}\left(x'_v + x''_v\right)$$

Zwei neue Lösungen

- $\varepsilon = \min_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Fast ganzzahlige Lösungen

Lemma
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung 2: $\sum_{v \in V} x_v = \sum_{v \in V} x'_v = \sum_{v \in V} x''_v$

- für alle $v \in V$ gilt:

$$x_v = \frac{1}{2}\left(x'_v + x''_v\right)$$

- und damit auch:

$$\sum_{v \in V} x_v = \frac{1}{2}\left(\sum_{v \in V} x'_v + \sum_{v \in V} x''_v\right)$$

Zwei neue Lösungen

- $\varepsilon = \min_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Fast ganzzahlige Lösungen

Lemma
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung 2: $\sum_{v \in V} x_v = \sum_{v \in V} x'_v = \sum_{v \in V} x''_v$

- für alle $v \in V$ gilt:

$$x_v = \frac{1}{2}\left(x'_v + x''_v\right)$$

- und damit auch:

$$\sum_{v \in V} x_v = \frac{1}{2}\left(\sum_{v \in V} x'_v + \sum_{v \in V} x''_v\right)$$

- aus der Optimalität der Lösung $(x_v)_{v \in V}$ folgt:

$$\sum_{v \in V} x_v = \sum_{v \in V} x'_v = \sum_{v \in V} x''_v$$

Zwei neue Lösungen

- $\varepsilon = \min_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Fast ganzzahlige Lösungen

Lemma
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung 3: $(x'_v)_{v \in V}$ oder $(x''_v)_{v \in V}$ enthält weniger Variablen, die nicht in $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ sind als $(x_v)_{v \in V}$

Zwei neue Lösungen

- $\varepsilon = \min\limits_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Fast ganzzahlige Lösungen

Lemma
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung 3: $(x'_v)_{v \in V}$ oder $(x''_v)_{v \in V}$ enthält weniger Variablen, die nicht in $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ sind als $(x_v)_{v \in V}$

- $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\} \Rightarrow x'_v, x''_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

  $\rightarrow$ es geht also keine Variable verloren

Zwei neue Lösungen

- $\varepsilon = \min\limits_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Fast ganzzahlige Lösungen

Lemma
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung 3: $(x'_v)_{v \in V}$ oder $(x''_v)_{v \in V}$ enthält weniger Variablen, die nicht in $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ sind als $(x_v)_{v \in V}$

- $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\} \Rightarrow x'_v, x''_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$
  $\rightarrow$ es geht also keine Variable verloren
- Wahl von $\varepsilon \Rightarrow$ mindestens eine Variable kommt hinzu

Zwei neue Lösungen

- $\varepsilon = \min\limits_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Fast ganzzahlige Lösungen

Lemma

Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Beweis

- Ziel: passe optimale Lösung schrittweise an, bis $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

Zwei neue Lösungen

- $\varepsilon = \min\limits_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Behauptungen

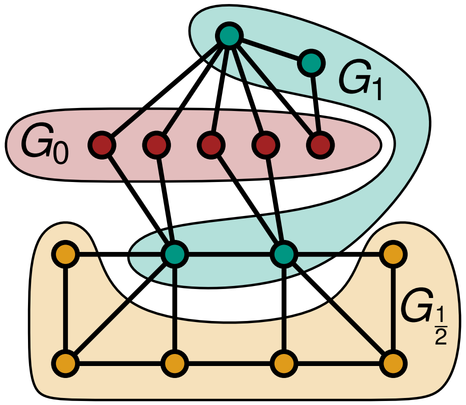
1. $(x'_v)_{v \in V}$, $(x''_v)_{v \in V}$ sind Lösungen
2. $\sum\limits_{v \in V} x_v = \sum\limits_{v \in V} x'_v = \sum\limits_{v \in V} x''_v$
3. $(x'_v)_{v \in V}$ oder $(x''_v)_{v \in V}$ enthält weniger Variablen, die nicht in $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ sind als $(x_v)_{v \in V}$

$\Rightarrow$ nach maximal n Schritten erhält man die gewünschte Lösung

LP-Lösung $\rightarrow$ Vertex Cover

Drei Teilgraphen

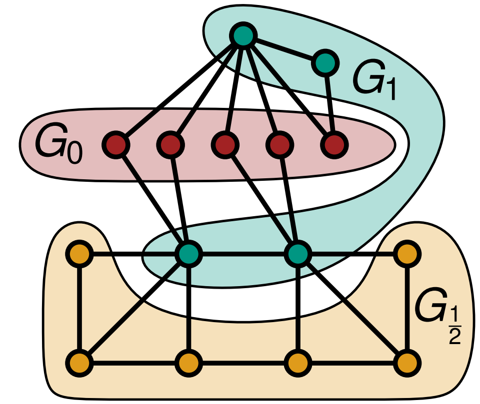
- betrachte LP-Lösung $(x_v)_{v \in V}$ mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$
- $V_r = \{v \in V \mid x_v = r\}$ für $r \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ und $G_r = G[V_r]$



LP-Lösung $\rightarrow$ Vertex Cover

Drei Teilgraphen

- betrachte LP-Lösung $(x_v)_{v \in V}$ mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$
- $V_r = \{v \in V \mid x_v = r\}$ für $r \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ und $G_r = G[V_r]$

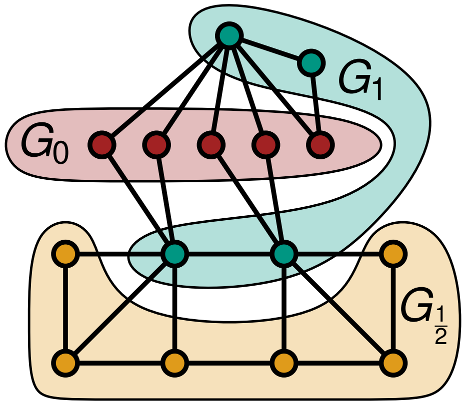


Lemma
Sei $S_{\frac{1}{2}}$ ein Vertex Cover von $G_{\frac{1}{2}}$. Dann ist $S_{\frac{1}{2}} \cup V_1$ ein Vertex Cover von G.

LP-Lösung $\rightarrow$ Vertex Cover

Drei Teilgraphen

- betrachte LP-Lösung $(x_v)_{v \in V}$ mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$
- $V_r = \{v \in V \mid x_v = r\}$ für $r \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ und $G_r = G[V_r]$



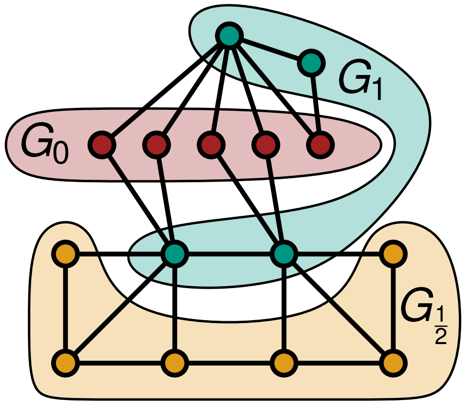
Lemma
Sei $S_{\frac{1}{2}}$ ein Vertex Cover von $G_{\frac{1}{2}}$. Dann ist $S_{\frac{1}{2}} \cup V_1$ ein Vertex Cover von G.

Beweis: betrachte Kante $\{u, v\}$

LP-Lösung $\to$ Vertex Cover

Drei Teilgraphen

- betrachte LP-Lösung $(x_v)_{v \in V}$ mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$
- $V_r = \{v \in V \mid x_v = r\}$ für $r \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ und $G_r = G[V_r]$



Lemma
Sei $S_{\frac{1}{2}}$ ein Vertex Cover von $G_{\frac{1}{2}}$. Dann ist $S_{\frac{1}{2}} \cup V_1$ ein Vertex Cover von G.

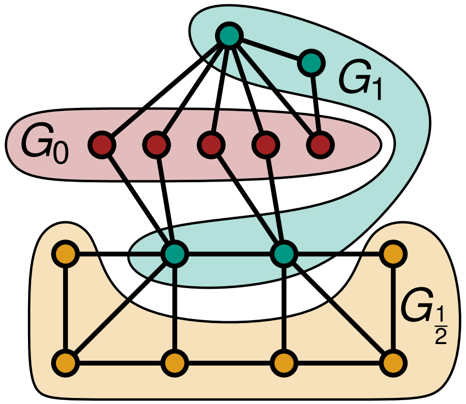
Beweis: betrachte Kante $\{u, v\}$

- **Fall 1:** $u \in V_1$ oder $v \in V_1 \Rightarrow \{u, v\}$ wird abgedeckt

LP-Lösung $\rightarrow$ Vertex Cover

Drei Teilgraphen

- betrachte LP-Lösung $(x_v)_{v \in V}$ mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$
- $V_r = \{v \in V \mid x_v = r\}$ für $r \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ und $G_r = G[V_r]$



> **Lemma**
> Sei $S_{\frac{1}{2}}$ ein Vertex Cover von $G_{\frac{1}{2}}$. Dann ist $S_{\frac{1}{2}} \cup V_1$ ein Vertex Cover von G.

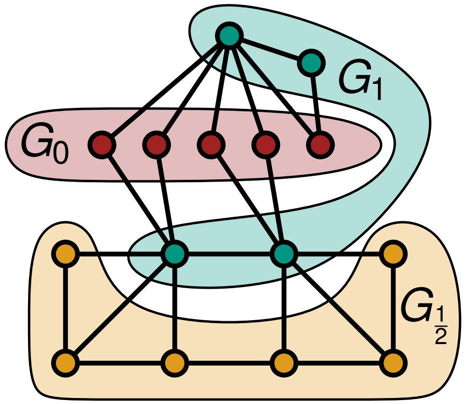
Beweis: betrachte Kante $\{u, v\}$

- **Fall 1:** $u \in V_1$ oder $v \in V_1 \Rightarrow \{u, v\}$ wird abgedeckt
- **Fall 2:** $u, v \in V_{\frac{1}{2}} \Rightarrow u \in S_{\frac{1}{2}}$ oder $v \in S_{\frac{1}{2}} \Rightarrow \{u, v\}$ wird abgedeckt

LP-Lösung $\to$ Vertex Cover

Drei Teilgraphen

- betrachte LP-Lösung $(x_v)_{v \in V}$ mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$
- $V_r = \{v \in V \mid x_v = r\}$ für $r \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ und $G_r = G[V_r]$



Lemma
Sei $S_{\frac{1}{2}}$ ein Vertex Cover von $G_{\frac{1}{2}}$. Dann ist $S_{\frac{1}{2}} \cup V_1$ ein Vertex Cover von G.

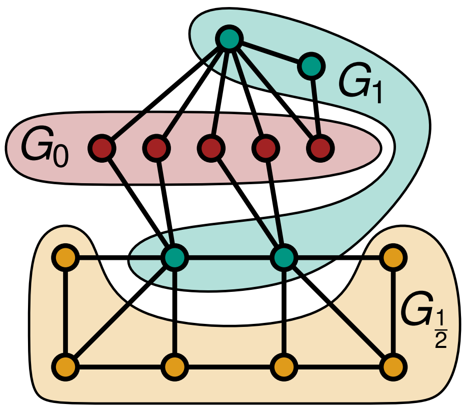
Beweis: betrachte Kante $\{u, v\}$

- **Fall 1:** $u \in V_1$ oder $v \in V_1 \Rightarrow \{u, v\}$ wird abgedeckt
- **Fall 2:** $u, v \in V_{\frac{1}{2}} \Rightarrow u \in S_{\frac{1}{2}}$ oder $v \in S_{\frac{1}{2}} \Rightarrow \{u, v\}$ wird abgedeckt
- weitere Fälle gibt es nicht, da sonst $x_u + x_v < 1$

LP-Lösung $\rightarrow$ Vertex Cover

Drei Teilgraphen

- betrachte LP-Lösung $(x_v)_{v \in V}$ mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$
- $V_r = \{v \in V \mid x_v = r\}$ für $r \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ und $G_r = G[V_r]$



Lemma
Sei $S_{\frac{1}{2}}$ ein Vertex Cover von $G_{\frac{1}{2}}$. Dann ist $S_{\frac{1}{2}} \cup V_1$ ein Vertex Cover von G.

Beweis: betrachte Kante $\{u, v\}$

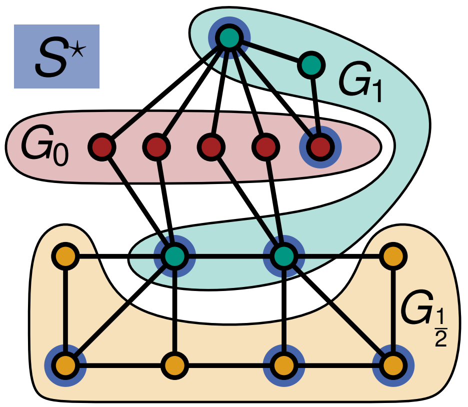
- **Fall 1:** $u \in V_1$ oder $v \in V_1 \Rightarrow \{u, v\}$ wird abgedeckt
- **Fall 2:** $u, v \in V_{\frac{1}{2}} \Rightarrow u \in S_{\frac{1}{2}}$ oder $v \in S_{\frac{1}{2}} \Rightarrow \{u, v\}$ wird abgedeckt
- weitere Fälle gibt es nicht, da sonst $x_u + x_v < 1$

Lemma
Sei $S_{\frac{1}{2}}$ ein minimales Vertex Cover von $G_{\frac{1}{2}}$ und sei $S^\star$ ein minimales Vertex Cover in G. Dann gilt $|S_{\frac{1}{2}}| + |V_1| \leq |S^\star|$.

Minimalität

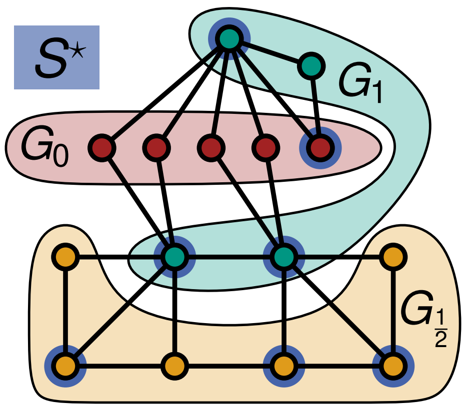
Lemma
Sei $S_{\frac{1}{2}}$ ein minimales VC von $G_{\frac{1}{2}}$ und sei $S^\star$ ein minimales VC in G. Dann gilt $|S_{\frac{1}{2}}| + |V_1| \leq |S^\star|$.

Beweis



Minimalität

Lemma
Sei $S_{\frac{1}{2}}$ ein minimales VC von $G_{\frac{1}{2}}$ und sei $S^\star$ ein minimales VC in G. Dann gilt $|S_{\frac{1}{2}}| + |V_1| \leq |S^\star|$.

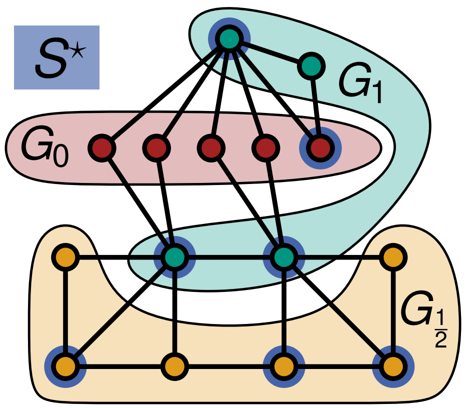


Beweis

- betrachte $S^\star = S^\star_{\frac{1}{2}} \cup S^\star_0 \cup S^\star_1$

Minimalität

Lemma
Sei $S_{\frac{1}{2}}$ ein minimales VC von $G_{\frac{1}{2}}$ und sei $S^\star$ ein minimales VC in G. Dann gilt $|S_{\frac{1}{2}}| + |V_1| \leq |S^\star|$.

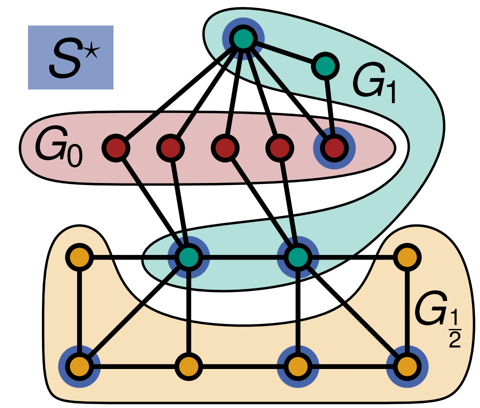


Beweis

- betrachte $S^\star = S^\star_{\frac{1}{2}} \cup S^\star_0 \cup S^\star_1$
- $S^\star_{\frac{1}{2}}$ ist VC in $G_{\frac{1}{2}} \Rightarrow |S_{\frac{1}{2}}| \leq |S^\star_{\frac{1}{2}}|$

Minimalität

Lemma
Sei $S_{\frac{1}{2}}$ ein minimales VC von $G_{\frac{1}{2}}$ und sei $S^\star$ ein minimales VC in G. Dann gilt $|S_{\frac{1}{2}}| + |V_1| \leq |S^\star|$.



Beweis

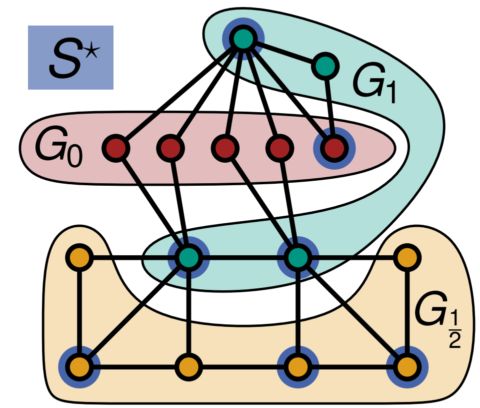
- betrachte $S^\star = S^\star_{\frac{1}{2}} \cup S^\star_0 \cup S^\star_1$
- $S^\star_{\frac{1}{2}}$ ist VC in $G_{\frac{1}{2}} \Rightarrow |S_{\frac{1}{2}}| \leq |S^\star_{\frac{1}{2}}|$
- noch zu zeigen: $|V_1| \leq |S^\star_0| + |S^\star_1|$

Minimalität

Lemma
Sei $S_{\frac{1}{2}}$ ein minimales VC von $G_{\frac{1}{2}}$ und sei $S^\star$ ein minimales VC in G. Dann gilt $|S_{\frac{1}{2}}| + |V_1| \leq |S^\star|$.

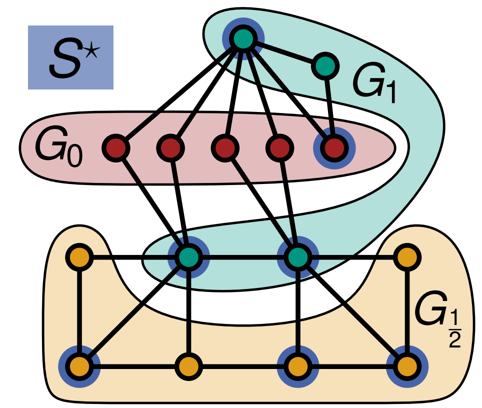
Beweis

- betrachte $S^\star = S^\star_{\frac{1}{2}} \cup S^\star_0 \cup S^\star_1$
- $S^\star_{\frac{1}{2}}$ ist VC in $G_{\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow |S_{\frac{1}{2}}| \leq |S^\star_{\frac{1}{2}}|$
- noch zu zeigen: $|V_1| \leq |S^\star_0| + |S^\star_1| \quad \Leftrightarrow \quad |V_1 \setminus S^\star_1| \leq |S^\star_0|$



Minimalität

Lemma
Sei $S_{\frac{1}{2}}$ ein minimales VC von $G_{\frac{1}{2}}$ und sei $S^\star$ ein minimales VC in G. Dann gilt $|S_{\frac{1}{2}}| + |V_1| \leq |S^\star|$.

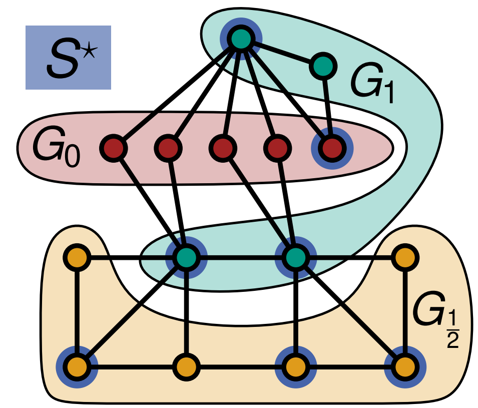


Beweis

- betrachte $S^\star = S^\star_{\frac{1}{2}} \cup S^\star_0 \cup S^\star_1$
- $S^\star_{\frac{1}{2}}$ ist VC in $G_{\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow |S_{\frac{1}{2}}| \leq |S^\star_{\frac{1}{2}}|$
- noch zu zeigen: $|V_1| \leq |S^\star_0| + |S^\star_1| \quad \Leftrightarrow \quad |V_1 \setminus S^\star_1| \leq |S^\star_0|$
- zeige: andernfalls gibt es bessere Lösung für das LP

Minimalität

Lemma
Sei $S_{\frac{1}{2}}$ ein minimales VC von $G_{\frac{1}{2}}$ und sei $S^\star$ ein minimales VC in G. Dann gilt $|S_{\frac{1}{2}}| + |V_1| \leq |S^\star|$.



Beweis

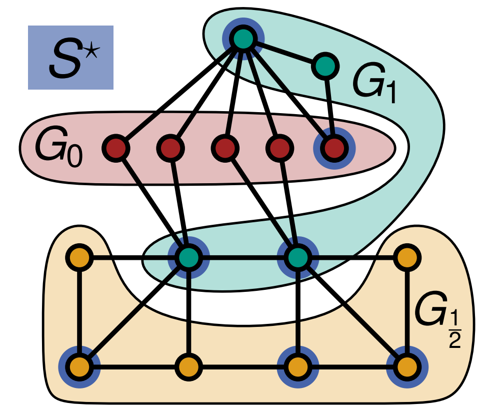
- betrachte $S^\star = S^\star_{\frac{1}{2}} \cup S^\star_0 \cup S^\star_1$
- $S^\star_{\frac{1}{2}}$ ist VC in $G_{\frac{1}{2}} \Rightarrow |S_{\frac{1}{2}}| \leq |S^\star_{\frac{1}{2}}|$
- noch zu zeigen: $|V_1| \leq |S^\star_0| + |S^\star_1| \quad \Leftrightarrow \quad |V_1 \setminus S^\star_1| \leq |S^\star_0|$
- zeige: andernfalls gibt es bessere Lösung für das LP

Neue Lösung fürs LP

$$x'_v = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } v \in V_1 \setminus S^\star_1 \\ & \text{oder } v \in S^\star_0 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$$

Minimalität

Lemma
Sei $S_{\frac{1}{2}}$ ein minimales VC von $G_{\frac{1}{2}}$ und sei $S^\star$ ein minimales VC in G. Dann gilt $|S_{\frac{1}{2}}| + |V_1| \leq |S^\star|$.



Beweis

- betrachte $S^\star = S^\star_{\frac{1}{2}} \cup S^\star_0 \cup S^\star_1$
- $S^\star_{\frac{1}{2}}$ ist VC in $G_{\frac{1}{2}} \Rightarrow |S_{\frac{1}{2}}| \leq |S^\star_{\frac{1}{2}}|$
- noch zu zeigen: $|V_1| \leq |S^\star_0| + |S^\star_1| \quad \Leftrightarrow \quad |V_1 \setminus S^\star_1| \leq |S^\star_0|$
- zeige: andernfalls gibt es bessere Lösung für das LP

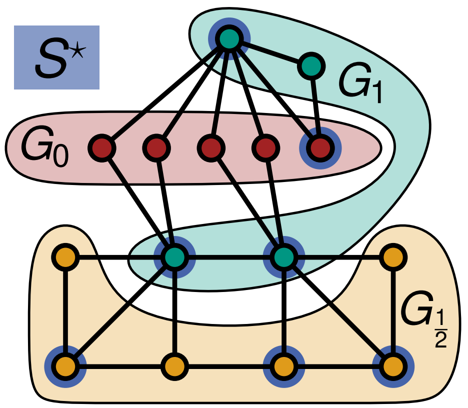
Neue Lösung fürs LP

$$x'_v = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } v \in V_1 \setminus S^\star_1 \\ & \text{oder } v \in S^\star_0 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$$

Warum ist das eine Lösung?

Minimalität

Lemma
Sei $S_{\frac{1}{2}}$ ein minimales VC von $G_{\frac{1}{2}}$ und sei $S^\star$ ein minimales VC in G. Dann gilt $|S_{\frac{1}{2}}| + |V_1| \le |S^\star|$.



Beweis

- betrachte $S^\star = S^\star_{\frac{1}{2}} \cup S^\star_0 \cup S^\star_1$
- $S^\star_{\frac{1}{2}}$ ist VC in $G_{\frac{1}{2}} \Rightarrow |S_{\frac{1}{2}}| \le |S^\star_{\frac{1}{2}}|$
- noch zu zeigen: $|V_1| \le |S^\star_0| + |S^\star_1| \quad \Leftrightarrow \quad |V_1 \setminus S^\star_1| \le |S^\star_0|$
- zeige: andernfalls gibt es bessere Lösung für das LP

Neue Lösung fürs LP

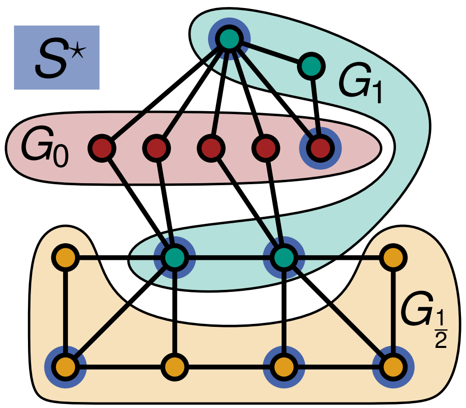
$$x'_v = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } v \in V_1 \setminus S^\star_1 \\ & \text{oder } v \in S^\star_0 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$$

Es folgt:

Warum ist das eine Lösung?

Minimalität

Lemma
Sei $S_{\frac{1}{2}}$ ein minimales VC von $G_{\frac{1}{2}}$ und sei $S^\star$ ein minimales VC in G. Dann gilt $|S_{\frac{1}{2}}| + |V_1| \leq |S^\star|$.



Beweis

- betrachte $S^\star = S^\star_{\frac{1}{2}} \cup S^\star_0 \cup S^\star_1$
- $S^\star_{\frac{1}{2}}$ ist VC in $G_{\frac{1}{2}} \Rightarrow |S_{\frac{1}{2}}| \leq |S^\star_{\frac{1}{2}}|$
- noch zu zeigen: $|V_1| \leq |S^\star_0| + |S^\star_1| \quad \Leftrightarrow \quad |V_1 \setminus S^\star_1| \leq |S^\star_0|$
- zeige: andernfalls gibt es bessere Lösung für das LP

Neue Lösung fürs LP

$$x'_v = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } v \in V_1 \setminus S^\star_1 \\ & \text{oder } v \in S^\star_0 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$$

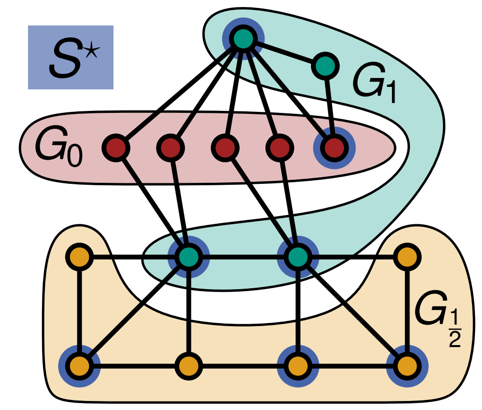
Es folgt:

$$\sum_{v \in V} x'_v = \sum_{v \in V} x_v - \frac{|V_1 \setminus S^\star_1|}{2} + \frac{|S^\star_0|}{2}$$

Warum ist das eine Lösung?

Minimalität

Lemma
Sei $S_{\frac{1}{2}}$ ein minimales VC von $G_{\frac{1}{2}}$ und sei $S^\star$ ein minimales VC in G. Dann gilt $|S_{\frac{1}{2}}| + |V_1| \leq |S^\star|$.



Beweis

- betrachte $S^\star = S^\star_{\frac{1}{2}} \cup S^\star_0 \cup S^\star_1$
- $S^\star_{\frac{1}{2}}$ ist VC in $G_{\frac{1}{2}} \Rightarrow |S_{\frac{1}{2}}| \leq |S^\star_{\frac{1}{2}}|$
- noch zu zeigen: $|V_1| \leq |S^\star_0| + |S^\star_1| \quad \Leftrightarrow \quad |V_1 \setminus S^\star_1| \leq |S^\star_0|$
- zeige: andernfalls gibt es bessere Lösung für das LP

Neue Lösung fürs LP

$$x'_v = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } v \in V_1 \setminus S^\star_1 \\ & \text{oder } v \in S^\star_0 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$$

Warum ist das eine Lösung?

Es folgt:

$$\sum_{v \in V} x'_v = \sum_{v \in V} x_v - \frac{|V_1 \setminus S^\star_1|}{2} + \frac{|S^\star_0|}{2}$$

$(x_v)_{v \in V}$ ist optimal $\Rightarrow$ $|V_1 \setminus S^\star_1| \leq |S^\star_0|$

Kernbildung

Reduktionsregel

- löse die LP-Relaxierung $\rightarrow (x_v)_{v \in V}$
- falls $\sum_{v \in V} x_v > k \Rightarrow$ NEIN-Instanz

$$\begin{aligned} \text{minimiere: } & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{sodass: } & 0 \leq x_v \leq 1 \text{ für } v \in V \\ & x_u + x_v \geq 1 \text{ für } uv \in E \end{aligned}$$

Kernbildung

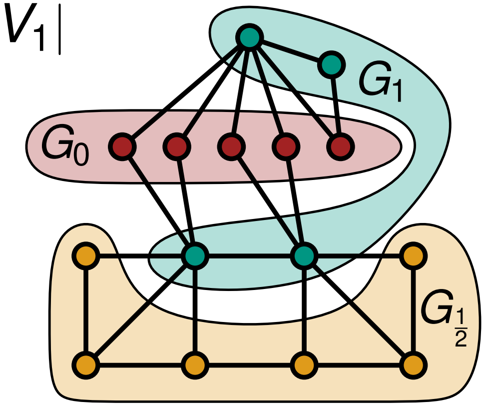
Reduktionsregel

minimiere: $\sum_{v \in V} x_v$

sodass: $0 \leq x_v \leq 1$ für $v \in V$

$x_u + x_v \geq 1$ für $uv \in E$

- löse die LP-Relaxierung $\rightarrow (x_v)_{v \in V}$
- falls $\sum_{v \in V} x_v > k \Rightarrow$ NEIN-Instanz
- sonst wähle V_1, lösche $V_0 \cup V_1$ und verringere k um $|V_1|$



Kernbildung

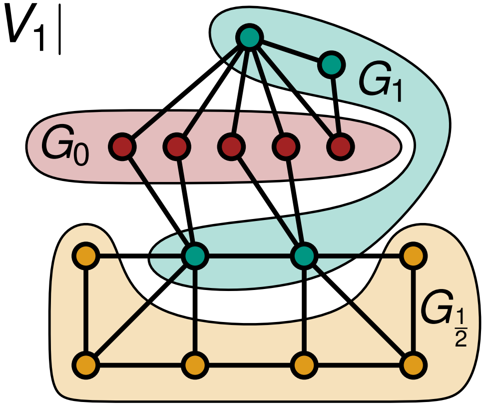
Reduktionsregel

- löse die LP-Relaxierung $\to (x_v)_{v \in V}$
- falls $\sum_{v \in V} x_v > k \Rightarrow$ NEIN-Instanz
- sonst wähle V_1, lösche $V_0 \cup V_1$ und verringere k um $|V_1|$

minimiere: $\sum_{v \in V} x_v$

sodass: $0 \leq x_v \leq 1$ für $v \in V$

$x_u + x_v \geq 1$ für $uv \in E$



Lemma: Die Reduktionsregel ist sicher.

Beweis

Kernbildung

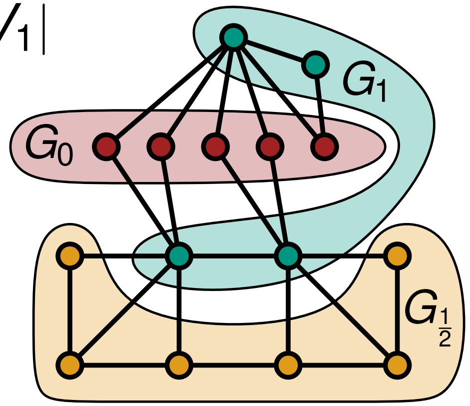
Reduktionsregel

- löse die LP-Relaxierung $\to (x_v)_{v \in V}$
- falls $\sum_{v \in V} x_v > k \Rightarrow$ NEIN-Instanz
- sonst wähle V_1, lösche $V_0 \cup V_1$ und verringere k um $|V_1|$

minimiere: $\sum_{v \in V} x_v$

sodass: $0 \leq x_v \leq 1$ für $v \in V$

$x_u + x_v \geq 1$ für $uv \in E$



Lemma: Die Reduktionsregel ist sicher.

Beweis

- optimale Lösung des ILPs ist nicht kleiner als optimale Lösung der Relaxierung

Kernbildung

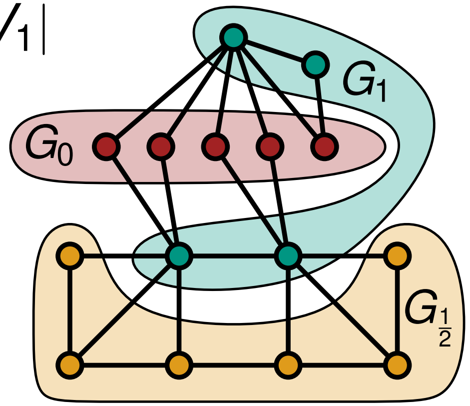
Reduktionsregel

- löse die LP-Relaxierung $\rightarrow (x_v)_{v \in V}$
- falls $\sum\limits_{v \in V} x_v > k \Rightarrow$ NEIN-Instanz
- sonst wähle V_1, lösche $V_0 \cup V_1$ und verringere k um $|V_1|$

minimiere: $\sum\limits_{v \in V} x_v$

sodass: $0 \leq x_v \leq 1$ für $v \in V$

$x_u + x_v \geq 1$ für $uv \in E$



Lemma: Die Reduktionsregel ist sicher.

Beweis

- optimale Lösung des ILPs ist nicht kleiner als optimale Lösung der Relaxierung
- falls $\sum\limits_{v \in V} x_v > k$, so gibt es keine VC der Größe k

Kernbildung

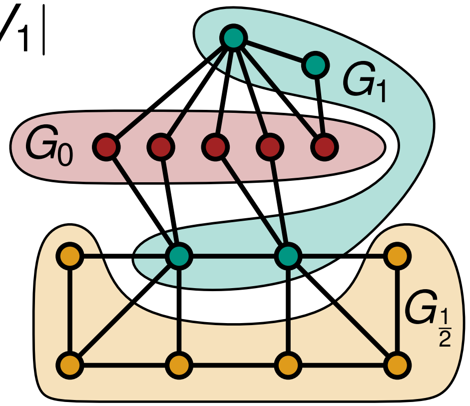
Reduktionsregel

minimiere: $\sum_{v \in V} x_v$

sodass: $0 \leq x_v \leq 1$ für $v \in V$

$x_u + x_v \geq 1$ für $uv \in E$

- löse die LP-Relaxierung $\rightarrow (x_v)_{v \in V}$
- falls $\sum_{v \in V} x_v > k \Rightarrow$ NEIN-Instanz
- sonst wähle V_1, lösche $V_0 \cup V_1$ und verringere k um $|V_1|$



Lemma: Die Reduktionsregel ist sicher.

Beweis

- optimale Lösung des ILPs ist nicht kleiner als optimale Lösung der Relaxierung
- falls $\sum_{v \in V} x_v > k$, so gibt es keine VC der Größe k
- es gibt ein minimales VC, das V_1 enthält und V_0 nicht enthält, denn:

Lemma
Sei $S_{\frac{1}{2}}$ ein VC von $G_{\frac{1}{2}}$. Dann ist $S_{\frac{1}{2}} \cup V_1$ ein VC von G.

Lemma
Sei $S_{\frac{1}{2}}$ ein minimales VC von $G_{\frac{1}{2}}$ und sei $S^\star$ ein minimales VC in G. Dann gilt $|S_{\frac{1}{2}}| + |V_1| \leq |S^\star|$.

Kernbildung

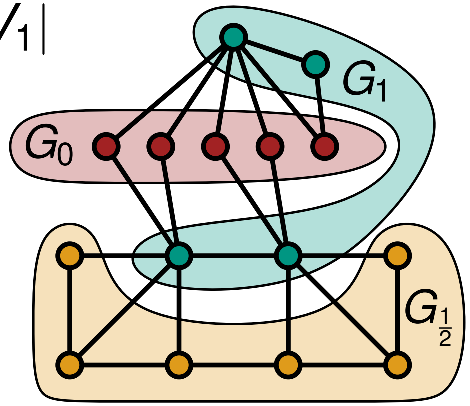
Reduktionsregel

minimiere: $\sum_{v \in V} x_v$

sodass: $0 \leq x_v \leq 1$ für $v \in V$

$x_u + x_v \geq 1$ für $uv \in E$

- löse die LP-Relaxierung $\rightarrow (x_v)_{v \in V}$
- falls $\sum_{v \in V} x_v > k \Rightarrow$ NEIN-Instanz
- sonst wähle V_1, lösche $V_0 \cup V_1$ und verringere k um $|V_1|$



Lemma: Die Reduktionsregel ist sicher.

Theorem
Für Vertex Cover kann ein Kern mit maximal $2k$ Knoten in $O(??)$ Zeit berechnet werden.

Beweis

Kernbildung

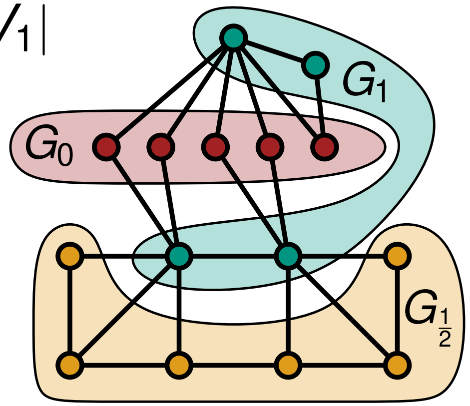
Reduktionsregel

- löse die LP-Relaxierung $\rightarrow (x_v)_{v \in V}$
- falls $\sum_{v \in V} x_v > k \Rightarrow$ NEIN-Instanz
- sonst wähle V_1, lösche $V_0 \cup V_1$ und verringere k um $|V_1|$

minimiere: $\sum_{v \in V} x_v$

sodass: $0 \leq x_v \leq 1$ für $v \in V$

$x_u + x_v \geq 1$ für $uv \in E$



Lemma: Die Reduktionsregel ist sicher.

Theorem
Für Vertex Cover kann ein Kern mit maximal $2k$ Knoten in $O(??)$ Zeit berechnet werden.

Beweis

- wir können annehmen, dass $\sum_{v \in V} x_v \leq k$ (sonst: triviale Nein-Instanz)

Kernbildung

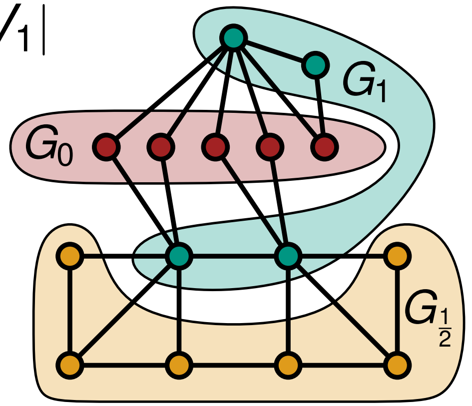
Reduktionsregel

- löse die LP-Relaxierung $\rightarrow (x_v)_{v \in V}$
- falls $\sum_{v \in V} x_v > k \Rightarrow$ NEIN-Instanz
- sonst wähle V_1, lösche $V_0 \cup V_1$ und verringere k um $|V_1|$

minimiere: $\sum_{v \in V} x_v$

sodass: $0 \leq x_v \leq 1$ für $v \in V$

$x_u + x_v \geq 1$ für $uv \in E$



Lemma: Die Reduktionsregel ist sicher.

Theorem
Für VERTEX COVER kann ein Kern mit maximal $2k$ Knoten in $O(??)$ Zeit berechnet werden.

Beweis

- wir können annehmen, dass $\sum_{v \in V} x_v \leq k$ (sonst: triviale Nein-Instanz)
- $\Rightarrow \frac{1}{2}|V_{\frac{1}{2}}| \leq \sum_{v \in V} x_v \leq k \Rightarrow |V_{\frac{1}{2}}| \leq 2k$

Kernbildung

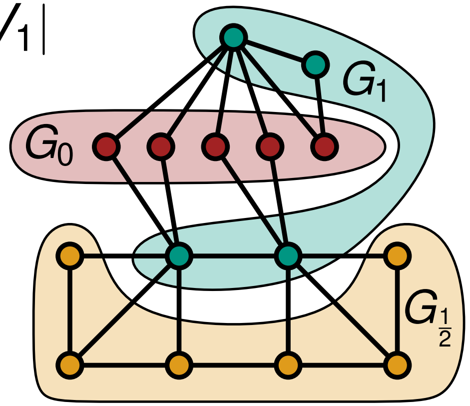
Reduktionsregel

minimiere: $\sum_{v \in V} x_v$

sodass: $0 \leq x_v \leq 1$ für $v \in V$

$x_u + x_v \geq 1$ für $uv \in E$

- löse die LP-Relaxierung $\to (x_v)_{v \in V}$
- falls $\sum_{v \in V} x_v > k \Rightarrow$ NEIN-Instanz
- sonst wähle V_1, lösche $V_0 \cup V_1$ und verringere k um $|V_1|$



Lemma: Die Reduktionsregel ist sicher.

Theorem
Für VERTEX COVER kann ein Kern mit maximal $2k$ Knoten in $O(??)$ Zeit berechnet werden.

Beweis

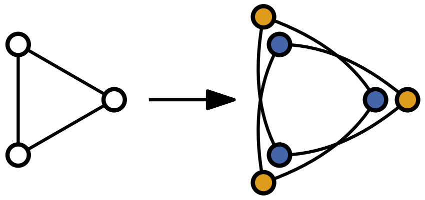
- wir können annehmen, dass $\sum_{v \in V} x_v \leq k$ (sonst: triviale Nein-Instanz)
- $\Rightarrow \frac{1}{2}|V_{\frac{1}{2}}| \leq \sum_{v \in V} x_v \leq k \Rightarrow |V_{\frac{1}{2}}| \leq 2k$

Laufzeit: dominiert durch lösen des LPs

Verbesserte Laufzeit

Konstruktion einen Hilfsgraphen

- spalte jeden Knoten v auf in v_g (gelb) und v_b (blau)
- übernehme Kanten aber nur zwischen gelb und blau
- resultierender bipartiter Graph: H mit Knotenmenge $V_g \cup V_b$

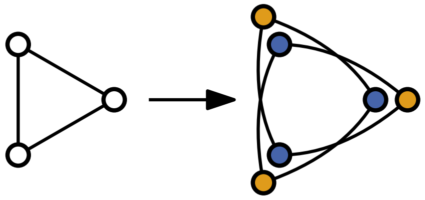


$$\begin{aligned} \text{minimiere:} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{sodass:} \quad & 0 \leq x_v \leq 1 \text{ für } v \in V \\ & x_u + x_v \geq 1 \text{ für } uv \in E \end{aligned}$$

Verbesserte Laufzeit

Konstruktion einen Hilfsgraphen

- spalte jeden Knoten v auf in v_g (gelb) und v_b (blau)
- übernehme Kanten aber nur zwischen gelb und blau
- resultierender bipartiter Graph: H mit Knotenmenge $V_g \cup V_b$



$$\begin{aligned} \text{minimiere:} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{sodass:} \quad & 0 \leq x_v \leq 1 \text{ für } v \in V \\ & x_u + x_v \geq 1 \text{ für } uv \in E \end{aligned}$$

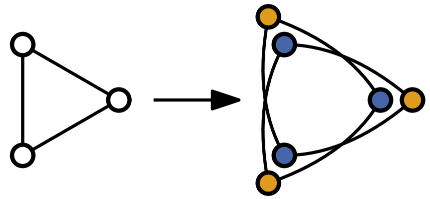
Behauptung

- VC S in H liefert Lösung fürs LP mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ und umgekehrt, sodass $\frac{1}{2}|S| = \sum_{v \in V} x_v$

Verbesserte Laufzeit

Konstruktion einen Hilfsgraphen

- spalte jeden Knoten v auf in v_g (gelb) und v_b (blau)
- übernehme Kanten aber nur zwischen gelb und blau
- resultierender bipartiter Graph: H mit Knotenmenge $V_g \cup V_b$



$$\begin{aligned} \text{minimiere:} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{sodass:} \quad & 0 \leq x_v \leq 1 \text{ für } v \in V \\ & x_u + x_v \geq 1 \text{ für } uv \in E \end{aligned}$$

Behauptung

- VC S in H liefert Lösung fürs LP mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ und umgekehrt, sodass $\frac{1}{2}|S| = \sum_{v \in V} x_v$

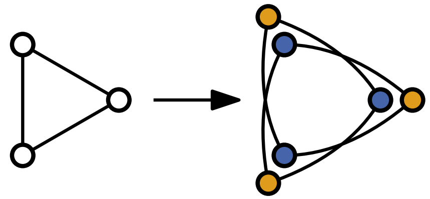
VC $\rightarrow$ LP-Lösung

- für VC S in H: setze $x_v = \frac{1}{2}|\{v_g, v_b\} \cap S|$ für alle $v \in V$

Verbesserte Laufzeit

Konstruktion einen Hilfsgraphen

- spalte jeden Knoten v auf in v_g (gelb) und v_b (blau)
- übernehme Kanten aber nur zwischen gelb und blau
- resultierender bipartiter Graph: H mit Knotenmenge $V_g \cup V_b$



minimiere: $\sum_{v \in V} x_v$

sodass: $0 \leq x_v \leq 1$ für $v \in V$

$x_u + x_v \geq 1$ für $uv \in E$

Behauptung

- VC S in H liefert Lösung fürs LP mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ und umgekehrt, sodass $\frac{1}{2}|S| = \sum_{v \in V} x_v$

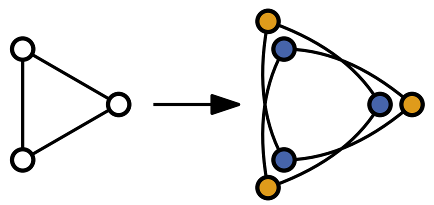
VC $\rightarrow$ LP-Lösung

- für VC S in H: setze $x_v = \frac{1}{2}|\{v_g, v_b\} \cap S|$ für alle $v \in V$
- klar: $\frac{1}{2}|S| = \sum_{v \in V} x_v$

Verbesserte Laufzeit

Konstruktion einen Hilfsgraphen

- spalte jeden Knoten v auf in v_g (gelb) und v_b (blau)
- übernehme Kanten aber nur zwischen gelb und blau
- resultierender bipartiter Graph: H mit Knotenmenge $V_g \cup V_b$



$$\begin{aligned} \text{minimiere:} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{sodass:} \quad & 0 \leq x_v \leq 1 \text{ für } v \in V \\ & x_u + x_v \geq 1 \text{ für } uv \in E \end{aligned}$$

Behauptung

- VC S in H liefert Lösung fürs LP mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ und umgekehrt, sodass $\frac{1}{2}|S| = \sum_{v \in V} x_v$

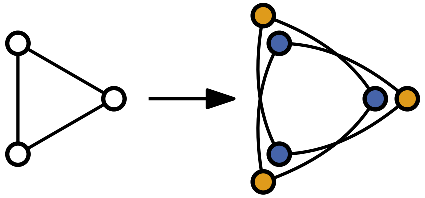
VC $\to$ LP-Lösung

- für VC S in H: setze $x_v = \frac{1}{2}|\{v_g, v_b\} \cap S|$ für alle $v \in V$
- klar: $\frac{1}{2}|S| = \sum_{v \in V} x_v$
- außerdem: $\{u, v\} \in E$ impliziert $|\{u_g, u_b, v_g, v_b\} \cap S| \geq 2 \Rightarrow x_u + x_v \geq 1$

Verbesserte Laufzeit

Konstruktion einen Hilfsgraphen

- spalte jeden Knoten v auf in v_g (gelb) und v_b (blau)
- übernehme Kanten aber nur zwischen gelb und blau
- resultierender bipartiter Graph: H mit Knotenmenge $V_g \cup V_b$



$$\begin{aligned} \text{minimiere:} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{sodass:} \quad & 0 \leq x_v \leq 1 \text{ für } v \in V \\ & x_u + x_v \geq 1 \text{ für } uv \in E \end{aligned}$$

Behauptung

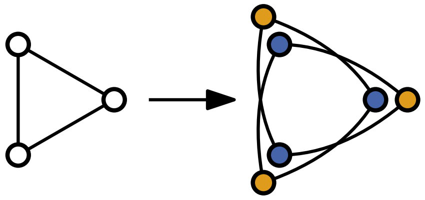
- VC S in H liefert Lösung fürs LP mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ und umgekehrt, sodass $\frac{1}{2}|S| = \sum_{v \in V} x_v$

LP-Lösung $\rightarrow$ VC

Verbesserte Laufzeit

Konstruktion einen Hilfsgraphen

- spalte jeden Knoten v auf in v_g (gelb) und v_b (blau)
- übernehme Kanten aber nur zwischen gelb und blau
- resultierender bipartiter Graph: H mit Knotenmenge $V_g \cup V_b$



$$\begin{aligned} \text{minimiere:} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{sodass:} \quad & 0 \leq x_v \leq 1 \text{ für } v \in V \\ & x_u + x_v \geq 1 \text{ für } uv \in E \end{aligned}$$

Behauptung

- VC S in H liefert Lösung fürs LP mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ und umgekehrt, sodass $\frac{1}{2}|S| = \sum_{v \in V} x_v$

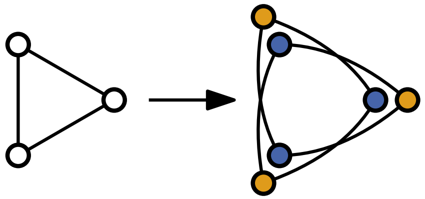
LP-Lösung $\rightarrow$ VC

- für LP-Lösung $(x_v)_{v \in V}$ definiere S: $v_g \in S \Leftrightarrow x_v \geq \frac{1}{2}$ und $v_b \in S \Leftrightarrow x_v = 1$

Verbesserte Laufzeit

Konstruktion einen Hilfsgraphen

- spalte jeden Knoten v auf in v_g (gelb) und v_b (blau)
- übernehme Kanten aber nur zwischen gelb und blau
- resultierender bipartiter Graph: H mit Knotenmenge $V_g \cup V_b$



minimiere: $\sum_{v \in V} x_v$

sodass: $0 \leq x_v \leq 1$ für $v \in V$

$x_u + x_v \geq 1$ für $uv \in E$

Behauptung

- VC S in H liefert Lösung fürs LP mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ und umgekehrt, sodass $\frac{1}{2}|S| = \sum_{v \in V} x_v$

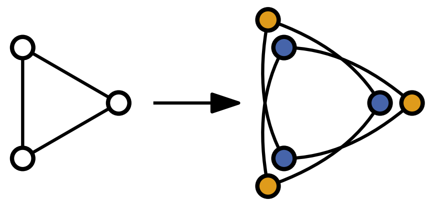
LP-Lösung $\rightarrow$ VC

- für LP-Lösung $(x_v)_{v \in V}$ definiere S: $v_g \in S \Leftrightarrow x_v \geq \frac{1}{2}$ und $v_b \in S \Leftrightarrow x_v = 1$
- klar: $\frac{1}{2}|S| = \sum_{v \in V} x_v$

Verbesserte Laufzeit

Konstruktion einen Hilfsgraphen

- spalte jeden Knoten v auf in v_g (gelb) und v_b (blau)
- übernehme Kanten aber nur zwischen gelb und blau
- resultierender bipartiter Graph: H mit Knotenmenge $V_g \cup V_b$



$$\text{minimiere: } \sum_{v \in V} x_v$$
$$\text{sodass: } 0 \leq x_v \leq 1 \text{ für } v \in V$$
$$x_u + x_v \geq 1 \text{ für } uv \in E$$

Behauptung

- VC S in H liefert Lösung fürs LP mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ und umgekehrt, sodass $\frac{1}{2}|S| = \sum_{v \in V} x_v$

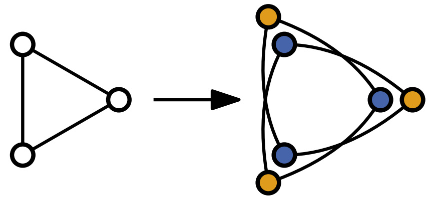
LP-Lösung $\rightarrow$ VC

- für LP-Lösung $(x_v)_{v \in V}$ definiere S: $v_g \in S \Leftrightarrow x_v \geq \frac{1}{2}$ und $v_b \in S \Leftrightarrow x_v = 1$
- klar: $\frac{1}{2}|S| = \sum_{v \in V} x_v$
- außerdem: $x_u + x_v \geq 1$ sorgt dafür, dass jede Kante abgedeckt wird

Verbesserte Laufzeit

Konstruktion einen Hilfsgraphen

- spalte jeden Knoten v auf in v_g (gelb) und v_b (blau)
- übernehme Kanten aber nur zwischen gelb und blau
- resultierender bipartiter Graph: H mit Knotenmenge $V_g \cup V_b$



minimiere: $\sum_{v \in V} x_v$

sodass: $0 \leq x_v \leq 1$ für $v \in V$

$x_u + x_v \geq 1$ für $uv \in E$

Behauptung

- VC S in H liefert Lösung fürs LP mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ und umgekehrt, sodass $\frac{1}{2}|S| = \sum_{v \in V} x_v$

Lemma
Das LP kann gelöst werden, indem man ein VC in einem bipartiten Graphen ausrechnet. Dies geht in $O(m\sqrt{n})$.

Laufzeit: siehe Übung

Zusammenfassung

Unimodularität

- ILPs sind effizient lösbar für total unimodulare Matrizen
- Nachweis von Unimodularität mit Determinanten-Entwicklungssatz

Zusammenfassung

Unimodularität

- ILPs sind effizient lösbar für total unimodulare Matrizen
- Nachweis von Unimodularität mit Determinanten-Entwicklungssatz

Kernbildung mittels LP

- ILP für Vertex Cover ist halbwegs gutartig
- nutze Lösung der LP-Relaxierung zur Kernbildung
- löse LP-Relaxierung mittels Vertex Cover in bipartiten Graphen

> **Theorem**
> Für Vertex Cover kann ein Kern mit maximal $2k$ Knoten in $O(m\sqrt{n})$ Zeit berechnet werden.