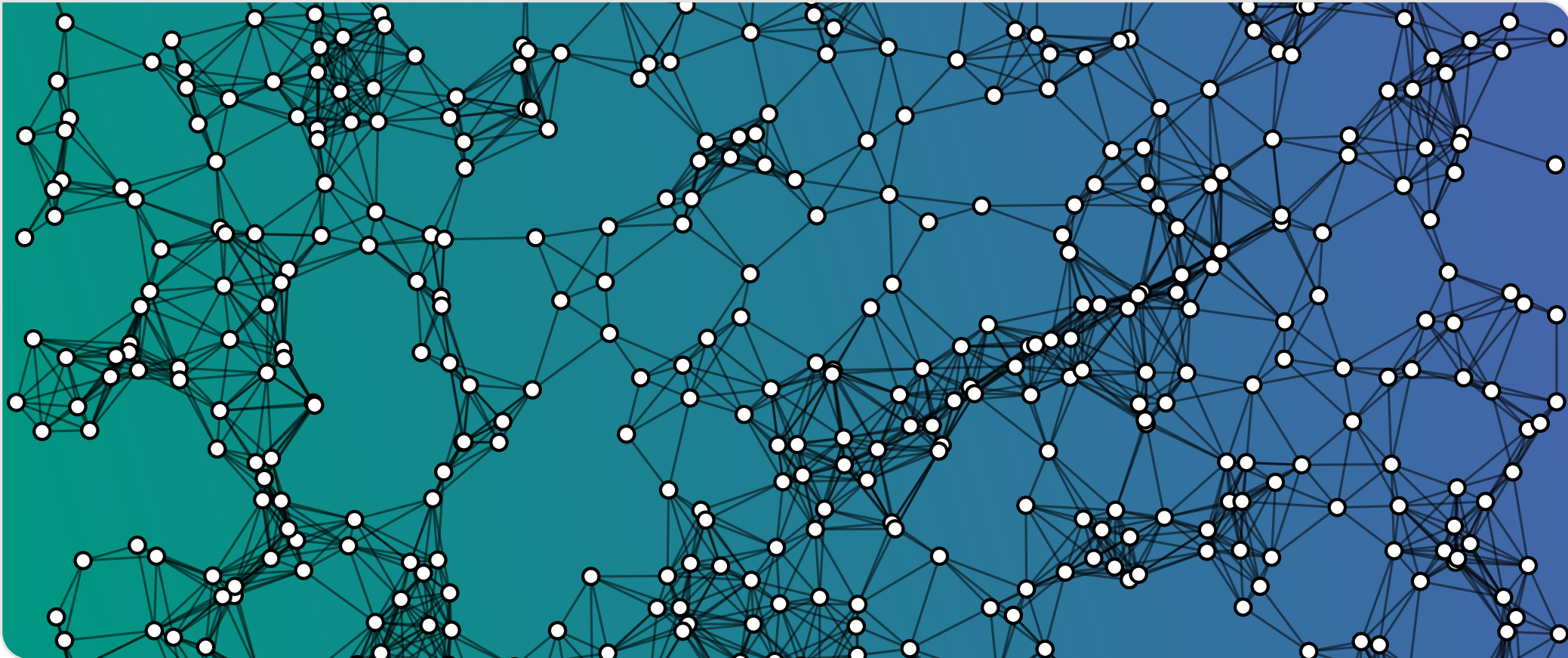


# Parametrisierte Algorithmen

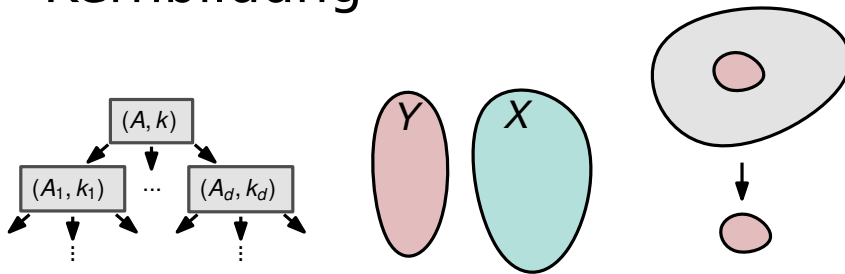
## ILP-Relaxierung und Kernbildung



# Inhalt

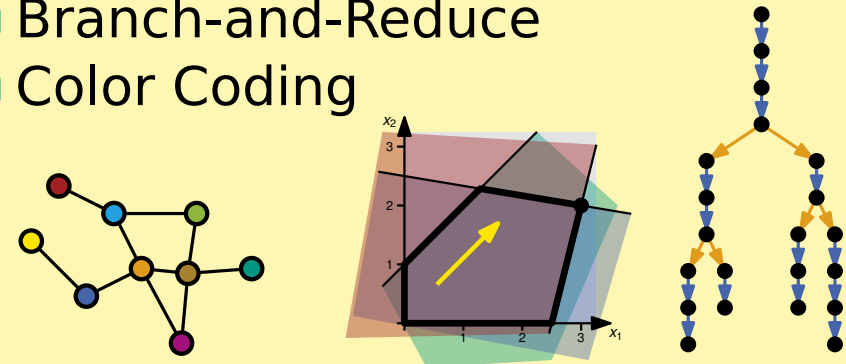
## Basic Toolbox

- beschränkte Suchbäume
- iterative Kompression
- Kernbildung



## Erweiterte Toolbox

- lineare Programme
- Branch-and-Reduce
- Color Coding



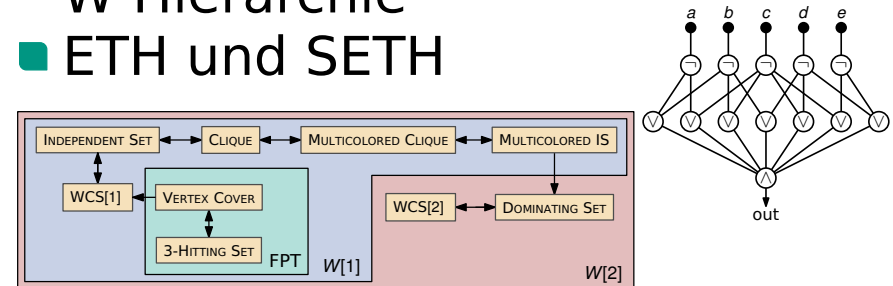
## Baumweite

- dynamische Programme
- chordale & planare Graphen
- Courcelles Theorem



## Untere Schranken

- parametrisierte Reduktionen
- boolesche Schaltkreise und die W-Hierarchie
- ETH und SETH



# Wiederholung: Lenstras Theorem

## Theorem (ohne Beweis)

Für  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$  und  $b \in \mathbb{Z}^m$  kann die Frage, ob es ein  $x \in \mathbb{N}^n$  mit  $Ax \leq b$  gibt in  $O(n^{2,5n}|A, b|)$  entschieden werden, wobei  $|A, b|$  die Länge der Binärokodierung für die Instanz bezeichnet.

## Folgerungen

- ILP (als Entscheidungsproblem) mit Parameter  $n =$  Anzahl der Variablen, auch *Dimension* genannt, ist in FPT
- Anzahl der Ungleichungen geht nur polynomiell in Laufzeit ein
- Größe der Zahlen geht nur logarithmisch in Laufzeit ein

## Metatheorem

Ein parametrisiertes Problem mit Parameter  $k$ , das sich als ILP mit  $f(k)$  vielen Variablen darstellen lässt, ist in FPT.

# Nachtrag: CLOSEST STRING

## Problem: CLOSEST STRING

( $k$  wird unser Parameter sein)

Gegeben  $k$  Strings  $s_1, \dots, s_k \in \Sigma^n$  und  $D \in \mathbb{N}$ . Gibt es einen String  $s \in \Sigma^n$ , der von jedem  $s_i$  Hamming Distanz maximal  $D$  hat?

## Beobachtung

- nur (Un)gleichheit innerhalb jeder Spalte relevant
- es gibt äquivalente Instanz mit  $\Sigma = [k]$
- Anzahl verschiedener Spalten nur von  $k$  abhängig

( $\leq k!$ )

## Formulierung als ILP

- reduziere Lösung auf: Wie oft wurde für den Spalten-Typ  $t$  der Wert  $a$  gewählt?  $\rightarrow$  Variable  $x_{t,a}$
- wähle ein Zeichen für jede Spalte von Typ  $t$ :

$$\sum_{a \in \Sigma} x_{t,a} = \text{Anzahl Spalten von Typ } t$$

- Distanz  $\leq D$  für jedes  $s_i$ :  $\sum_{t \in \text{Typen}} \sum_{\substack{a \in \Sigma \\ a \neq t[i]}} x_{t,a} \leq D$

- $\rightarrow$  ILP mit „nur“  $k! \cdot k$  Variablen

$s_1$  A B C F G D C G E B A  
 $s_2$  B B D A G D B G B E C  
 $s_3$  B A E F C A C G B B F



$s_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$s_2$	2	1	2	2	1	1	2	1	2	2
$s_3$	2	2	3	1	2	2	1	1	2	1

$s$	2	1	3	1	2	1	2	1	2	1
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

$0 \times$	1	$2 \times$	2	$0 \times$	3
------------	---	------------	---	------------	---

$2 \times$	1	$1 \times$	2	$0 \times$	3
------------	---	------------	---	------------	---

$0 \times$	1	$1 \times$	2	$1 \times$	3
------------	---	------------	---	------------	---

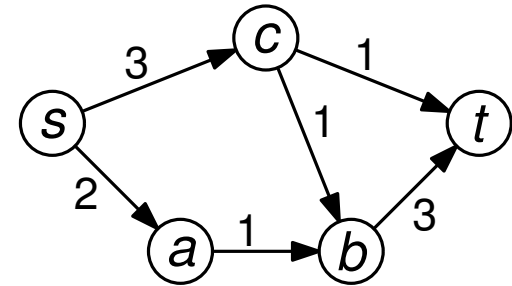
$2 \times$	1	$1 \times$	2	$0 \times$	3
------------	---	------------	---	------------	---

$1 \times$	1	$0 \times$	2	$0 \times$	3
------------	---	------------	---	------------	---

# LP-Modellierung Beispiel: Fluss

## Fluss in einem Netzwerk

- maximiere Fluss von  $s$  nach  $t$
- beachte Kantenkapazitäten
- einkommender = ausgehender Fluss



## Formulierung als LP

- $x_{uv}$  repräsentiert den Fluss auf der Kante  $uv$

max.:  $x_{sa} + x_{sc}$

sodass:  $0 \leq x_{sa} \leq 2$                        $x_{sa} - x_{ab} = 0$

$0 \leq x_{sc} \leq 3$                        $x_{sc} - x_{cb} - x_{ct} = 0$

$0 \leq x_{ab} \leq 1$                        $x_{ab} + x_{cb} - x_{bt} = 0$

$0 \leq x_{bt} \leq 3$

$0 \leq x_{cb} \leq 1$

$0 \leq x_{ct} \leq 1$

Kapazitäten

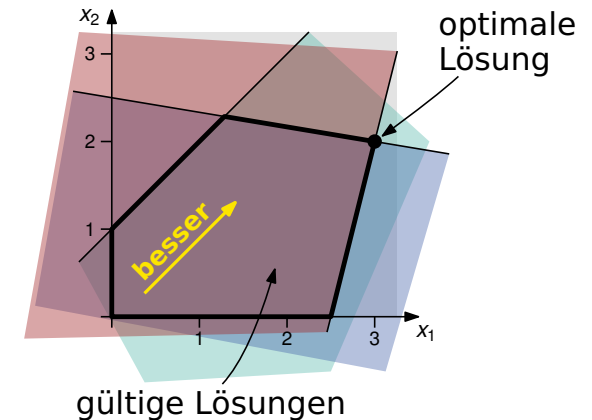
Flusserhaltung

**ILP für ganzzahlige Flüsse?**

# Optimale Lösungen von LPs

## Lösungen auf dem Rand des Polytops

- Ungleichung liefert  $n$ -dimensionalen Halbraum
- Schnitt dieser Halbräume = Polytop
- optimale Lösung ist ein Eckpunkt des Polytops



## In Matrixschreibweise

$$\text{maximiere } (1 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ sodass } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

- Teilmatrizen der Größe  $n \times n$  liefern einzelnen Punkt  
(wenn man  $\leq$  als  $=$  auffasst und die Zeilen linear unabhängig sind)

- Bsp.:  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} \\ \frac{16}{7} \end{pmatrix}$        $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

### Definition

Eine Matrix  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$  ist **total unimodular**, wenn die inverse Matrix jeder invertierbaren quadratischen Teilmatrix ganzzahlig ist.

# Ganzzahlige Lösungen

## Definition

Eine Matrix  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$  ist **total unimodular**, wenn die inverse Matrix jeder invertierbaren quadratischen Teilmatrix ganzzahlig ist.

## Theorem

Gegeben ein lineares Programm der Form

$$\text{maximiere } c^T x \text{ mit } Ax \leq b$$

mit  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$  total unimodular und  $b \in \mathbb{Z}^m$ . Wenn das LP eine optimale Lösung hat, dann hat es auch eine ganzzahlige optimale Lösung.

## Beweisidee

- es gibt einen Eckpunkt  $x^*$  des Polytops, der optimale Lösung ist
- dieser ist bestimmt durch  $B \cdot x^* = b$  für eine  $n \times n$  Teilmatrix  $B$  von  $A$
- $B^{-1}$  ist ganzzahlig  $\Rightarrow x^* = B^{-1}b$  ist ganzzahlig

## Total unimodular: äquivalente Definition

- Jede quadratische Submatrix hat Determinante  $-1$ ,  $0$  oder  $1$

# Nachweis für totale Unimodularität

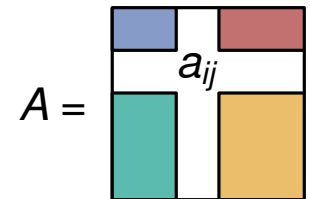
## Echte LPs mit total unimodularen Matrizen

- LP zur Berechnung maximaler Flüsse in Netzwerken
- ILP zur Berechnung minimaler Vertex Cover in bipartiten Graphen

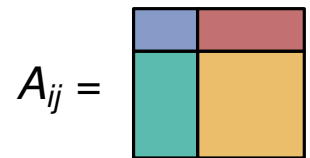
## Nützliche Tools zur Berechnung der Determinante

- Erinnerung:  $A$  ist total unimodular, wenn jede quadratische Teilmatrix Determinante  $-1$ ,  $0$  oder  $1$  hat
- Laplacescher Entwicklungssatz:

Entwicklung nach  $i$ -ter Zeile:  $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}$



Entwicklung nach  $j$ -ter Spalte:  $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}$



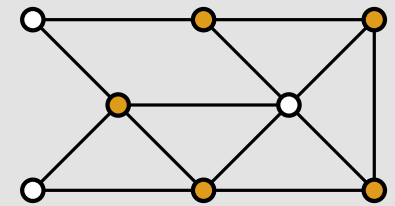
- Determinante  $0 \Leftrightarrow$  Matrix nicht invertierbar  $\Leftrightarrow$  Spalten-/Zeilenvektoren sind linear abhängig



# Beste Kernbildung für VERTEX COVER

## Problem: VERTEX COVER

Gegeben sind ein Graph  $G = (V, E)$  und ein Parameter  $k$ .  
 Gibt es ein Vertex Cover der Größe  $k$ ?  
 (Knotenmenge  $V' \subseteq V$  mit  $e \cap V' \neq \emptyset$  für alle  $e \in E$ )



## Bisher gesehen

- wähle Knoten, die „offensichtlich“ gewählt werden müssen
- wenn „offensichtlich“ unlösbar, reduziere zu kleiner NEIN-Instanz

## Theorem

VERTEX COVER hat einen Kern mit  $O(k^2)$  Knoten und  $O(k^2)$  Kanten. Er kann in  $O(m)$  Zeit berechnet werden.

## Heute

- Kernbildung mithilfe der LP-Relaxierung des VERTEX COVER-ILPs
- liefert Kern der Größe  $2k$

# Grober Plan

## Lemma

Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit  $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$  für alle  $v \in V$ . Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

**Beweis:** gleich

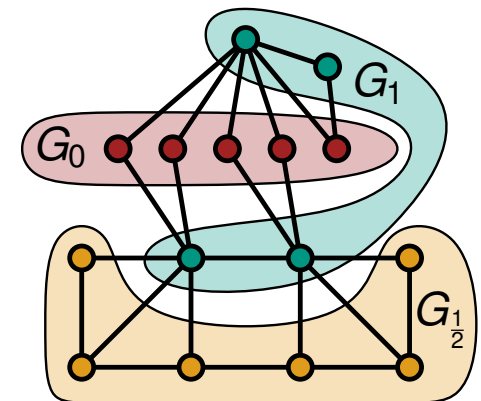
$$\text{minimiere: } \sum_{v \in V} x_v$$

$$\text{sodass: } 0 \leq x_v \leq 1 \text{ für } v \in V$$

$$x_u + x_v \geq 1 \text{ für } uv \in E$$

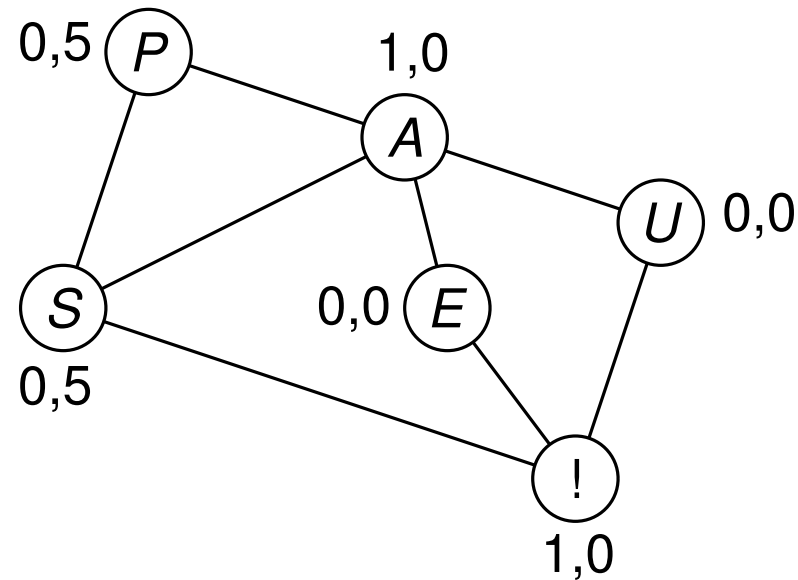
## Teilgraphen

- Lösung zerlegt  $G$  in drei Teilgraphen  $G_0, G_1, G_{\frac{1}{2}}$
- $G_1$  zusammen mit optimaler Lösung in  $G_{\frac{1}{2}}$  liefert optimale Lösung in  $G$
- $\Rightarrow G_{\frac{1}{2}}$  ist der Problemerkern



# Ganzzahlige Lösung

Kann diese Lösung (fast) ganzzahlig gemacht werden?



# Fast ganzzahlige Lösungen

## Lemma

Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit  $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$  für alle  $v \in V$ . Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

## Beweis

- Ziel: passe optimale Lösung schrittweise an, bis  $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

### Zwei neue Lösungen

- $\varepsilon = \min_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{ |x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1| \}$

- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

### Behauptungen

1.  $(x'_v)_{v \in V}, (x''_v)_{v \in V}$  sind Lösungen
2.  $\sum_{v \in V} x_v = \sum_{v \in V} x'_v = \sum_{v \in V} x''_v$
3.  $(x'_v)_{v \in V}$  oder  $(x''_v)_{v \in V}$  enthält weniger Variablen, die nicht in  $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$  sind als  $(x_v)_{v \in V}$

⇒ nach maximal  $n$  Schritten erhält man die gewünschte Lösung

# Fast ganzzahlige Lösungen

## Lemma

Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit  $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$  für alle  $v \in V$ . Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

## Behauptung 1: $(x'_v)_{v \in V}, (x''_v)_{v \in V}$ sind Lösungen

- Zu zeigen:  $0 \leq x'_v, x''_v \leq 1$  für alle  $v \in V$  und  $x'_v + x'_w \geq 1$  für alle  $\{v, w\} \in E$   
klar, da  $\varepsilon$  klein genug  $x''_v + x''_w \geq 1$  für alle  $\{v, w\} \in E$
- betrachte  $\{u, v\} \in E$  und sei  $x_u \leq x_v$

## Fallunterscheidung nach $x_u$

- $x_u = 0 \Rightarrow x_v = 1 \Rightarrow x'_v = 1$  und  $x''_v = 1$
- $x_u \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x'_u, x'_v \geq \frac{1}{2}$  und  $x''_u, x''_v \geq \frac{1}{2}$
- $0 < x_u < \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_v = 1 \Rightarrow x'_v = 1 \text{ und } x''_v = 1 \\ \text{oder } \frac{1}{2} < x_v < 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow x'_u + x'_v = x_u + \varepsilon + x_v - \varepsilon = x_u + x_v \geq 1$$

$$\Rightarrow x''_u + x''_v = x_u - \varepsilon + x_v + \varepsilon = x_u + x_v \geq 1$$

## Zwei neue Lösungen

$$\varepsilon = \min_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{ |x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1| \}$$

$$x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$$

$$x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$$

# Fast ganzzahlige Lösungen

## Lemma

Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit  $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$  für alle  $v \in V$ . Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

**Behauptung 2:**  $\sum_{v \in V} x_v = \sum_{v \in V} x'_v = \sum_{v \in V} x''_v$

- für alle  $v \in V$  gilt:

$$x_v = \frac{1}{2} (x'_v + x''_v)$$

- und damit auch:

$$\sum_{v \in V} x_v = \frac{1}{2} \left( \sum_{v \in V} x'_v + \sum_{v \in V} x''_v \right)$$

- aus der Optimalität der Lösung  $(x_v)_{v \in V}$  folgt:

$$\sum_{v \in V} x_v = \sum_{v \in V} x'_v = \sum_{v \in V} x''_v$$

## Zwei neue Lösungen

- $\varepsilon = \min_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{ |x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1| \}$

- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

# Fast ganzzahlige Lösungen

## Lemma

Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit  $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$  für alle  $v \in V$ . Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

**Behauptung 3:**  $(x'_v)_{v \in V}$  oder  $(x''_v)_{v \in V}$  enthält weniger Variablen, die nicht in  $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$  sind als  $(x_v)_{v \in V}$

- $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\} \Rightarrow x'_v, x''_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$   
 → es geht also keine Variable verloren
- Wahl von  $\varepsilon \Rightarrow$  mindestens eine Variable kommt hinzu

### Zwei neue Lösungen

$$\varepsilon = \min_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{ |x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1| \}$$

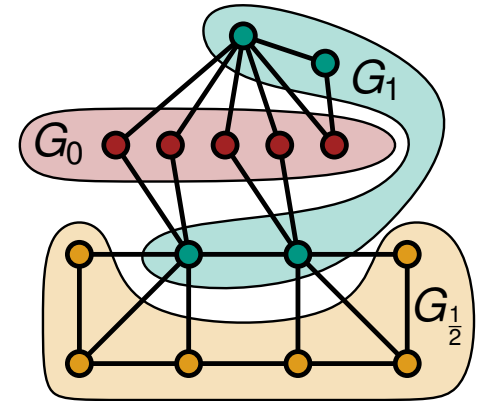
$$x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$$

$$x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$$

# LP-Lösung $\rightarrow$ Vertex Cover

## Drei Teilgraphen

- betrachte LP-Lösung  $(x_v)_{v \in V}$  mit  $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$
- $V_r = \{v \in V \mid x_v = r\}$  für  $r \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$  und  $G_r = G[V_r]$



### Lemma

Sei  $S_{\frac{1}{2}}$  ein Vertex Cover von  $G_{\frac{1}{2}}$ . Dann ist  $S_{\frac{1}{2}} \cup V_1$  ein Vertex Cover von  $G$ .

**Beweis:** betrachte Kante  $\{u, v\}$

- **Fall 1:**  $u \in V_1$  oder  $v \in V_1 \Rightarrow \{u, v\}$  wird abgedeckt
- **Fall 2:**  $u, v \in V_{\frac{1}{2}} \Rightarrow u \in S_{\frac{1}{2}}$  oder  $v \in S_{\frac{1}{2}} \Rightarrow \{u, v\}$  wird abgedeckt
- weitere Fälle gibt es nicht, da sonst  $x_u + x_v < 1$

### Lemma

Sei  $S_{\frac{1}{2}}$  ein minimales Vertex Cover von  $G_{\frac{1}{2}}$  und sei  $S^*$  ein minimales Vertex Cover in  $G$ . Dann gilt  $|S_{\frac{1}{2}}| + |V_1| \leq |S^*|$ .



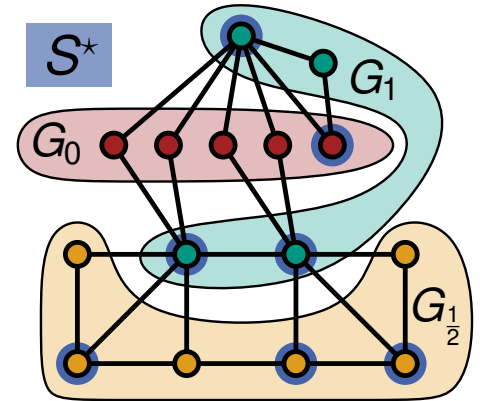
# Minimalität

## Lemma

Sei  $S_{\frac{1}{2}}$  ein minimales VC von  $G_{\frac{1}{2}}$  und sei  $S^*$  ein minimales VC in  $G$ . Dann gilt  $|S_{\frac{1}{2}}| + |V_1| \leq |S^*|$ .

## Beweis

- betrachte  $S^* = S_{\frac{1}{2}}^* \cup S_0^* \cup S_1^*$
- $S_{\frac{1}{2}}^*$  ist VC in  $G_{\frac{1}{2}} \Rightarrow |S_{\frac{1}{2}}| \leq |S_{\frac{1}{2}}^*|$
- noch zu zeigen:  $|V_1| \leq |S_0^*| + |S_1^*| \Leftrightarrow |V_1 \setminus S_1^*| \leq |S_0^*|$
- zeige: andernfalls gibt es bessere Lösung für das LP



## Neue Lösung fürs LP

## Es folgt:

$$x'_v = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } v \in V_1 \setminus S_1^* \quad \bullet \\ \text{oder } v \in S_0^* & \bullet \\ x_v & \text{sonst} \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{cases}$$

$$\sum_{v \in V} x'_v = \sum_{v \in V} x_v - \frac{|V_1 \setminus S_1^*|}{2} + \frac{|S_0^*|}{2}$$

$$\Rightarrow |V_1 \setminus S_1^*| \leq |S_0^*|$$

$(x_v)_{v \in V}$  ist optimal

Warum ist das eine Lösung?

# Kernbildung

## Reduktionsregel

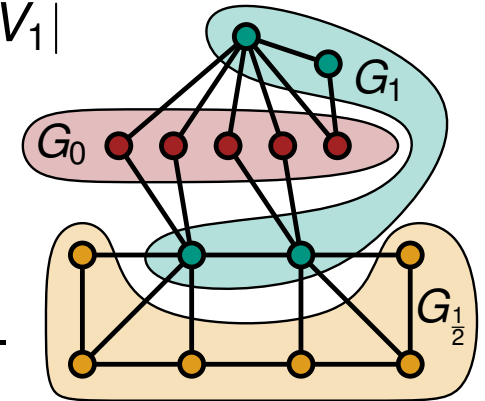
- löse die LP-Relaxierung  $\rightarrow (x_v)_{v \in V}$
- falls  $\sum_{v \in V} x_v > k \Rightarrow$  NEIN-Instanz
- sonst wähle  $V_1$ , lösche  $V_0 \cup V_1$  und verringere  $k$  um  $|V_1|$

minimiere:  $\sum_{v \in V} x_v$   
 sodass:  $0 \leq x_v \leq 1$  für  $v \in V$   
 $x_u + x_v \geq 1$  für  $uv \in E$

**Lemma:** Die Reduktionsregel ist sicher.

## Beweis

- optimale Lösung des ILPs ist nicht kleiner als optimale Lösung der Relaxierung
- falls  $\sum_{v \in V} x_v > k$ , so gibt es keine VC der Größe  $k$
- es gibt ein minimales VC, das  $V_1$  enthält und  $V_0$  nicht enthält, denn:



### Lemma

Sei  $S_{\frac{1}{2}}$  ein VC von  $G_{\frac{1}{2}}$ . Dann ist  $S_{\frac{1}{2}} \cup V_1$  ein VC von  $G$ .

### Lemma

Sei  $S_{\frac{1}{2}}$  ein minimales VC von  $G_{\frac{1}{2}}$  und sei  $S^*$  ein minimales VC in  $G$ . Dann gilt  $|S_{\frac{1}{2}}| + |V_1| \leq |S^*|$ .

# Kernbildung

## Reduktionsregel

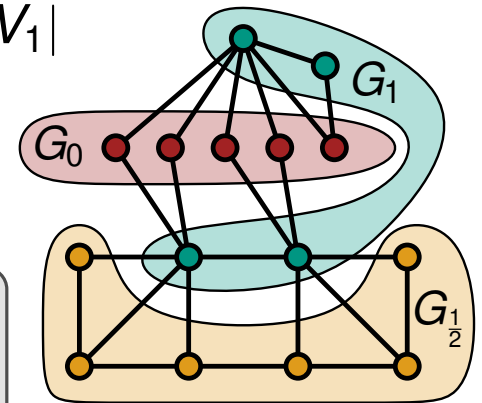
- löse die LP-Relaxierung  $\rightarrow (x_v)_{v \in V}$
- falls  $\sum_{v \in V} x_v > k \Rightarrow$  NEIN-Instanz
- sonst wähle  $V_1$ , lösche  $V_0 \cup V_1$  und verringere  $k$  um  $|V_1|$

minimiere:  $\sum_{v \in V} x_v$   
 sodass:  $0 \leq x_v \leq 1$  für  $v \in V$   
 $x_u + x_v \geq 1$  für  $uv \in E$

**Lemma:** Die Reduktionsregel ist sicher.

## Theorem

Für VERTEX COVER kann ein Kern mit maximal  $2k$  Knoten in  $O(??)$  Zeit berechnet werden.



## Beweis

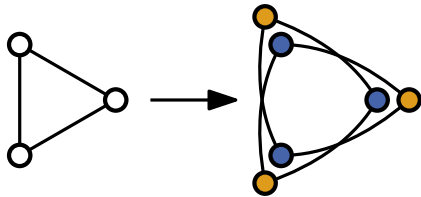
- wir können annehmen, dass  $\sum_{v \in V} x_v \leq k$  (sonst: triviale Nein-Instanz)
- $\Rightarrow \frac{1}{2}|V_{\frac{1}{2}}| \leq \sum_{v \in V} x_v \leq k \Rightarrow |V_{\frac{1}{2}}| \leq 2k$

**Laufzeit:** dominiert durch lösen des LPs

# Verbesserte Laufzeit

## Konstruktion einen Hilfsgraphen

- spalte jeden Knoten  $v$  auf in  $v_g$  (gelb) und  $v_b$  (blau)
- übernehme Kanten aber nur zwischen gelb und blau
- resultierender bipartiter Graph:  $H$  mit Knotenmenge  $V_g \cup V_b$



$$\begin{aligned} \text{minimiere: } & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{sodass: } & 0 \leq x_v \leq 1 \text{ für } v \in V \\ & x_u + x_v \geq 1 \text{ für } uv \in E \end{aligned}$$

## Behauptung

- VC  $S$  in  $H$  liefert Lösung fürs LP mit  $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$  und umgekehrt, sodass

$$\frac{1}{2}|S| = \sum_{v \in V} x_v$$

## VC $\rightarrow$ LP-Lösung

- für VC  $S$  in  $H$ : setze  $x_v = \frac{1}{2}|\{v_g, v_b\} \cap S|$  für alle  $v \in V$

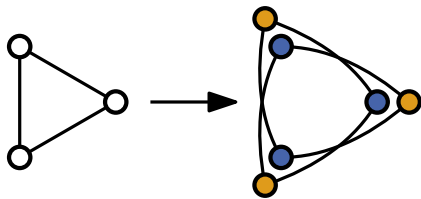
$$\text{klar: } \frac{1}{2}|S| = \sum_{v \in V} x_v$$

- außerdem:  $\{u, v\} \in E$  impliziert  $|\{u_g, u_b, v_g, v_b\} \cap S| \geq 2 \Rightarrow x_u + x_v \geq 1$

# Verbesserte Laufzeit

## Konstruktion einen Hilfsgraphen

- spalte jeden Knoten  $v$  auf in  $v_g$  (gelb) und  $v_b$  (blau)
- übernehme Kanten aber nur zwischen gelb und blau
- resultierender bipartiter Graph:  $H$  mit Knotenmenge  $V_g \cup V_b$



$$\begin{aligned} \text{minimiere: } & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{sodass: } & 0 \leq x_v \leq 1 \text{ für } v \in V \\ & x_u + x_v \geq 1 \text{ für } uv \in E \end{aligned}$$

## Behauptung

- VC  $S$  in  $H$  liefert Lösung fürs LP mit  $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$  und umgekehrt, sodass
 
$$\frac{1}{2}|S| = \sum_{v \in V} x_v$$

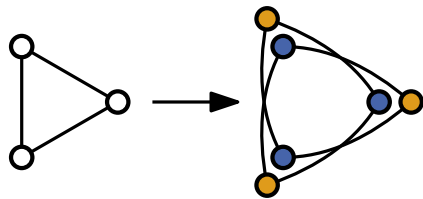
## LP-Lösung $\rightarrow$ VC

- für LP-Lösung  $(x_v)_{v \in V}$  definiere  $S$ :  $v_g \in S \Leftrightarrow x_v \geq \frac{1}{2}$  und  $v_b \in S \Leftrightarrow x_v = 1$
- klar:  $\frac{1}{2}|S| = \sum_{v \in V} x_v$
- außerdem:  $x_u + x_v \geq 1$  sorgt dafür, dass jede Kante abgedeckt wird

# Verbesserte Laufzeit

## Konstruktion eines Hilfsgraphen

- spalte jeden Knoten  $v$  auf in  $v_g$  (gelb) und  $v_b$  (blau)
- übernehme Kanten aber nur zwischen gelb und blau
- resultierender bipartiter Graph:  $H$  mit Knotenmenge  $V_g \cup V_b$



$$\begin{aligned} \text{minimiere: } & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{sodass: } & 0 \leq x_v \leq 1 \text{ für } v \in V \\ & x_u + x_v \geq 1 \text{ für } uv \in E \end{aligned}$$

## Behauptung

- VC  $S$  in  $H$  liefert Lösung fürs LP mit  $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$  und umgekehrt, sodass
 
$$\frac{1}{2}|S| = \sum_{v \in V} x_v$$

### Lemma

Das LP kann gelöst werden, indem man ein VC in einem bipartiten Graphen ausrechnet. Dies geht in  $O(m\sqrt{n})$ .

**Laufzeit:** siehe Übung

# Zusammenfassung

## Unimodularität

- ILPs sind effizient lösbar für total unimodulare Matrizen
- Nachweis von Unimodularität mit Determinanten-Entwicklungssatz

## Kernbildung mittels LP

- ILP für VERTEX COVER ist halbwegs gutartig
- nutze Lösung der LP-Relaxierung zur Kernbildung
- löse LP-Relaxierung mittels VERTEX COVER in bipartiten Graphen

### Theorem

Für VERTEX COVER kann ein Kern mit maximal  $2k$  Knoten in  $O(m\sqrt{n})$  Zeit berechnet werden.