

Parametrisierte Algorithmen

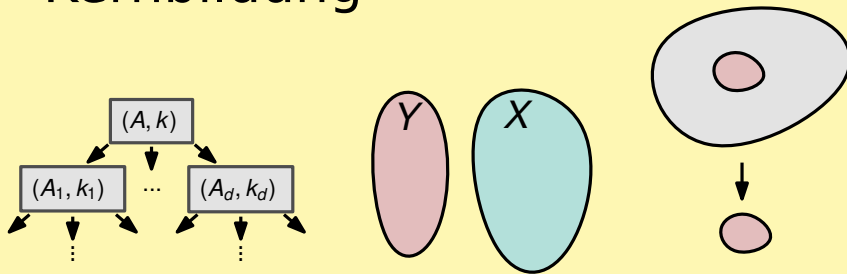
Iterative Kompression: **FEEDBACK VERTEX SET**



Inhalt

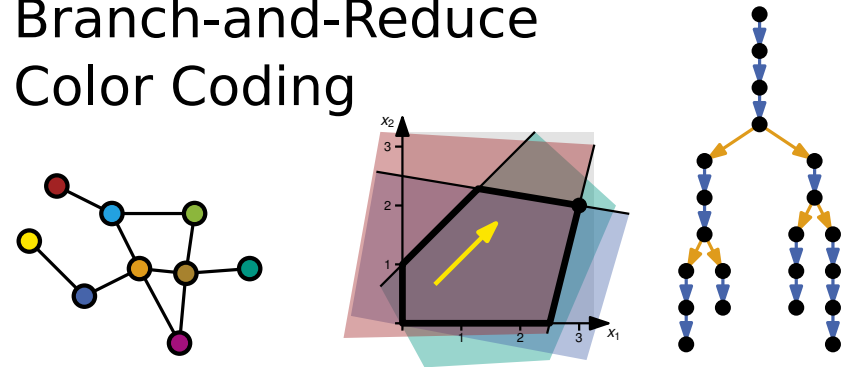
Basic Toolbox

- beschränkte Suchbäume
- iterative Kompression
- Kernbildung



Erweiterte Toolbox

- lineare Programme
- Branch-and-Reduce
- Color Coding



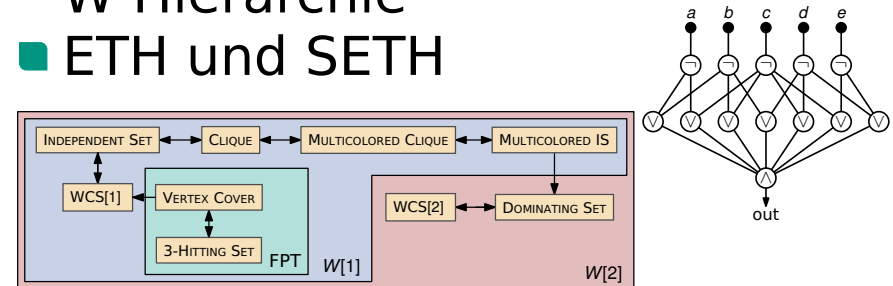
Baumweite

- dynamische Programme
- chordale & planare Graphen
- Courcelles Theorem



Untere Schranken

- parametrisierte Reduktionen
- boolesche Schaltkreise und die W-Hierarchie
- ETH und SETH

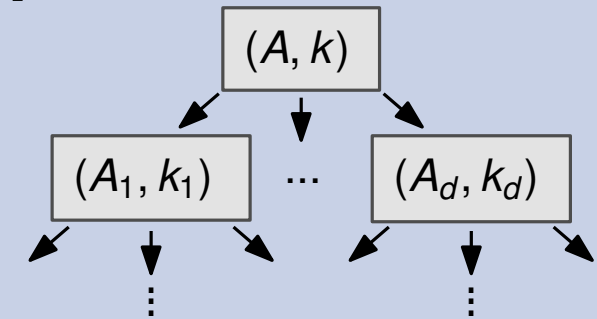


Wiederholung: Grundlegende Techniken

Beschränkter Suchbaum

(Bounded Search Tree)

- für eine Instanz (A, k) bilde, in Zeit n^c , $(A_1, k_1), \dots, (A_d, k_d)$, sodass:
 (A, k) ist lösbar $\Leftrightarrow (A_i, k_i)$ ist lösbar für ein $i \in [1, d]$
- beschränke d durch eine Funktion $f_1(k)$
- beschränke Verzweigungstiefe durch $f_2(k)$
 (Beispiel: Parameter wird in jedem Schritt kleiner)
- \Rightarrow FPT-Algo mit Laufzeit $O(f_1(k)^{f_2(k)} n^c)$



Kernbildung

(Kernelization)

- wende sukzessive sichere Reduktionsregeln an
- zeige: übrig bleibt ein Kern, dessen Größe nur von k abhängt

Iterative Kompression

(Iterative Compression)

- Kompressionsalgo: löst das Problem unter der Annahme eine etwas zu große Lösung zu kennen
- vergrößere Instanz schrittweise und halte initiale Lösung durch wiederholte Kompression klein

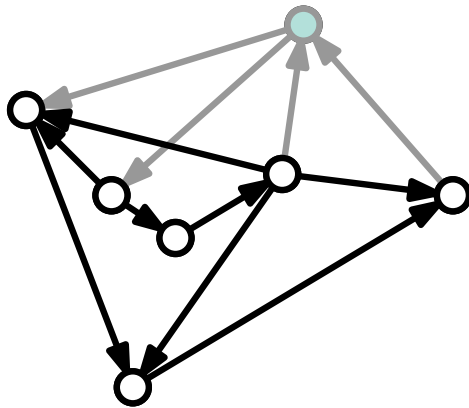
FEEDBACK VERTEX SET und Turniergraphen

Problem: FEEDBACK VERTEX SET

Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k . Gibt es ein Feedback Vertex Set der Größe k ?

($F \subseteq V$ ist ein *Feedback Vertex Set*, wenn $G - F$ azyklisch ist)

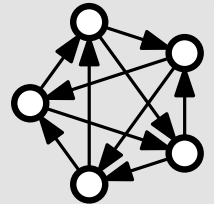
Beispiel



- nicht azyklisch
- alle gerichteten Kreise enthalten ●
- {●} ist Feedback Vertex Set der Größe 1

Definition

Ein $G = (V, E)$ ist ein **Turniergraph**, wenn für je zwei unterschiedliche Knoten $u, v \in V$ entweder $uv \in E$ oder $vu \in E$.



Ziel

- FPT-Algorithmus für FEEDBACK VERTEX SET in Turniergraphen
- nutze dazu iterative Kompression

Kompressionsproblem

Problem: FEEDBACK VERTEX SET COMPRESSION

Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$, ein Parameter k und ein FVS der Größe $k + 1$. Gibt es ein FVS der Größe k ?

Annahme

- wir können das Kompressionsproblem in $f(k) \cdot n^c$ Zeit lösen

Löse FEEDBACK VERTEX SET wie folgt

- sei $V_i = \{v_1, \dots, v_i\}$ und $G_i = G[V_i]$
- Ziel: berechne FVS der Größe maximal k für G_i
 - falls $i \leq k$, dann ist V_i eine gültige Lösung
 - sonst, berechne rekursiv FVS F_{i-1} in G_{i-1} , sodass $|F_{i-1}| \leq k$
 - $F_{i-1} \cup \{v_i\}$ ist FVS der Größe $k + 1$ für G_i
 - benutze Kompressionsalgo um FVS der Größe k zu bestimmen
(gibt es keins, so können wir abbrechen, da es dann auch keins für G gibt)

Problem: FEEDBACK VERTEX SET

Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k . Gibt es ein Feedback Vertex Set der Größe k ?

($F \subseteq V$ ist ein Feedback Vertex Set, wenn $G - F$ azyklisch ist)

Lemma

Wenn wir FEEDBACK VERTEX SET COMPRESSION in $f(k) \cdot n^c$ Zeit lösen können, dann können wir FEEDBACK VERTEX SET in $O(f(k) \cdot n^{c+1})$ Zeit lösen.

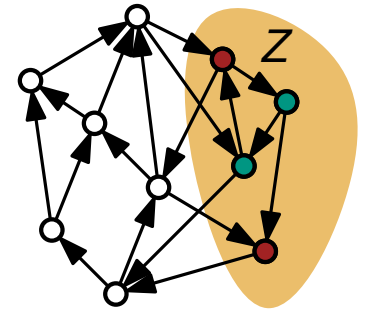
Disjunkte Lösungen

Problem: FEEDBACK VERTEX SET COMPRESSION

Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$, ein Parameter k und ein FVS Z der Größe $k + 1$. Gibt es ein FVS der Größe k ?

Idee

- rate Teilmenge $X \subseteq Z$; $Y = Z \setminus X$
- gibt es FVS Z' mit $|Z'| \leq k$ und $Z' \cap Z = X$?
- äquivalent: gibt es FVS F in $G - X$ mit $|F| \leq k - |X|$ und $F \cap Y = \emptyset$?
- beachte: Y ist ein FVS der Größe $k - |X| + 1$ in $G - X$



Problem: DISJOINT FEEDBACK VERTEX SET

Gegeben sei ein gerichteter Graph G , ein Parameter k und ein FVS Y der Größe $k + 1$. Gibt es ein FVS F der Größe k , sodass $F \cap Y = \emptyset$?

Lemma

Wenn wir DISJOINT FVS in $f(k) \cdot n^c$ Zeit lösen können, dann können wir FVS COMPRESSION in $O\left(\sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} f(k-i) \cdot n^c\right)$ Zeit lösen.

Einschub: spezielle Laufzeiten

Lemma

Wenn wir DISJOINT FVS in $f(k) \cdot n^c$ Zeit lösen können, dann können wir FVS COMPRESSION in $O\left(\sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} f(k-i) \cdot n^c\right)$ Zeit lösen.

DISJOINT-(PROBLEM) in polynomieller Zeit lösbar (n^c)

- es gilt: $\sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} = 2^{k+1} - 1$
- resultierende Laufzeit: $O\left(\sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} \cdot n^c\right) = O(2^k \cdot n^c)$

DISJOINT-(PROBLEM) in $\alpha^k \cdot n^c$ lösbar

- es gilt: $\sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} \alpha^{k-i} \leq (k+1) \cdot \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \alpha^{k-i}$
- resultierende Laufzeit: $O((k+1)(1+\alpha)^k \cdot n^c)$

Erinnerung: $(a+b)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^i b^{k-i}$

Aktueller Stand

Problem: DISJOINT FEEDBACK VERTEX SET

Gegeben sei ein gerichteter Graph G , ein Parameter k und ein FVS Y der Größe $k + 1$. Gibt es ein FVS F der Größe k , sodass $F \cap Y = \emptyset$?

Lemma

Wenn wir DISJOINT FVS in $f(k) \cdot n^c$ Zeit lösen können, dann können wir FVS COMPRESSION in $O\left(\sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} f(k-i) \cdot n^c\right)$ Zeit lösen.

Lemma

Wenn wir FEEDBACK VERTEX SET COMPRESSION in $f(k) \cdot n^c$ Zeit lösen können, dann können wir FEEDBACK VERTEX SET in $O(f(k) \cdot n^{c+1})$ Zeit lösen.

Ziel

- FPT-Algorithmus für FEEDBACK VERTEX SET in Turniergraphen
- ausreichend: FPT-Algorithmus für DISJOINT FVS in Turniergraphen

Beachte

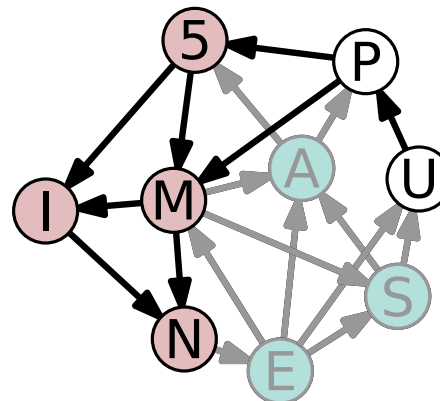
- bisher nicht genutzt, dass G ein Turniergraph ist
- jeder induzierte Teilgraph eines Turniergraphen ist ein Turniergraph

Finde ein minimales FVS ohne Y

Problem: DISJOINT FEEDBACK VERTEX SET

Gegeben sei ein gerichteter Graph G , ein Parameter k und ein FVS Y der Größe $k + 1$. Gibt es ein FVS F der Größe k , sodass $F \cap Y = \emptyset$?

$$Y = \{ \textcircled{5}, \textcircled{I}, \textcircled{M}, \textcircled{N} \}$$



Lösung

- A muss gewählt werden (wegen dem Dreieck $5MA$)
- E muss gewählt werden (wegen dem Dreieck MNE)
- außerdem muss noch P , U oder S gewählt werden

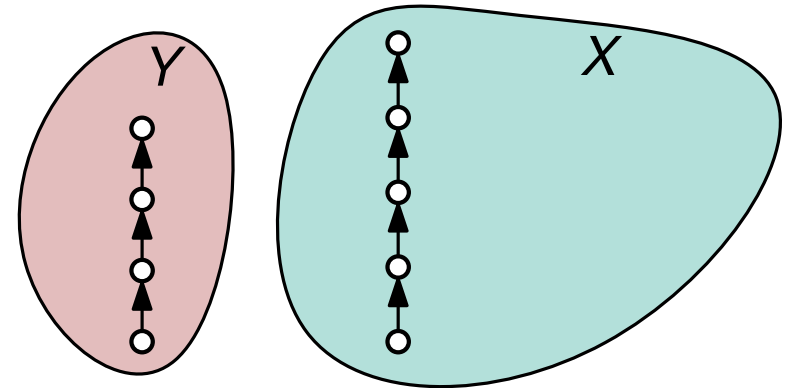
DISJOINT FVS in Turniergraphen

Situation

- wähle Knoten aus X und keine aus Y
- Y ist ein FVS $\Rightarrow G[X]$ ist azyklisch

Beobachtung

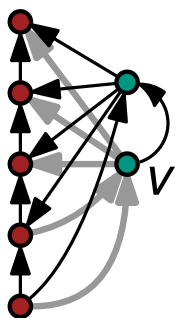
- X muss ebenfalls ein FVS sein (sonst: nein-Instanz) $\Rightarrow G[Y]$ ist azyklisch
- azyklische Turniergraphen definieren totale Ordnungen



Idee

- sortiere möglichst viele Knoten aus X in die Ordnung auf Y ein
- daraus resultierende Ordnung auf X darf der durch $G[X]$ gegebenen Ordnung nicht widersprechen

Einsortieren eines einzelnen Knotens

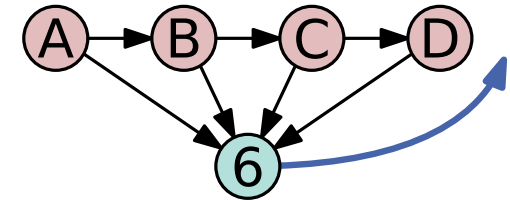
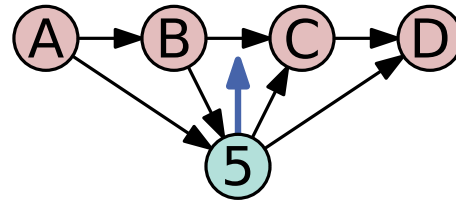
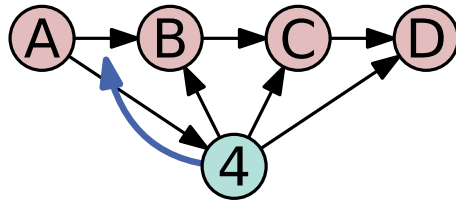
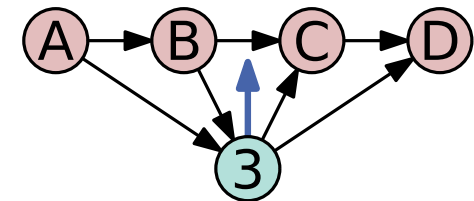
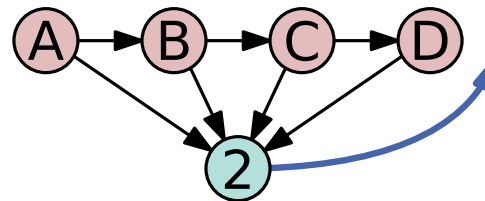
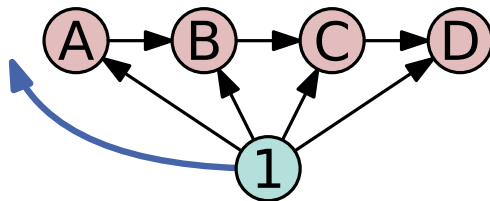
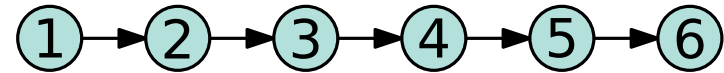


- wenn $G[Y] + v$ zyklisch \Rightarrow lösche v und verringere k um 1
- sonst: eingehende/ausgehende Kanten sind konsekutiv
- Position von v eindeutig festgelegt
- Konflikt, wenn Nachfolger von v vor v einsortiert wird

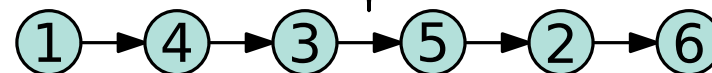
Zwei Ordnungen

Beispiel

- Ordnung auf X gegeben durch $G[X]$
- Ordnung auf X gegeben durch $G[Y]$



löse Gleichstände entsprechend Ordnung in $G[X]$ auf



Beobachtung

- F ist ein FVS \Leftrightarrow beide Ordnungen sind gleich auf $X \setminus F$

Ziel

- finde möglichst große Teilmenge von X , für die beide Ordnungen übereinstimmen \rightarrow LONGEST COMMON SUBSEQUENCE

LONGEST COMMON SUBSEQUENCE

Problem: LONGEST COMMON SUBSEQUENCE

Gegeben seien zwei Folgen a_1, \dots, a_p und b_1, \dots, b_q . Gesucht ist die längste Folge, die Teilfolge beider Folgen ist.

Beobachtung

- falls $a_p = b_q$
 - finde längste gem. Teilfolge von a_1, \dots, a_{p-1} und b_1, \dots, b_{q-1}
 - hänge $a_p = b_q$ an diese Teilfolge an
- falls $a_p \neq b_q$
 - lösche entweder a_p oder b_q
 - berechne längste gem. Teilfolgen von a_1, \dots, a_p und b_1, \dots, b_{q-1} sowie von a_1, \dots, a_{p-1} und $b_1, \dots, b_q \rightarrow$ wähle Maximum
- das liefert ein dynamisches Programm mit Laufzeit $O(pq)$

Lemma

LONGEST COMMON SUBSEQUENCE für zwei Folgen der Länge p bzw. q kann in $O(pq)$ Zeit gelöst werden.

FEEDBACK VERTEX SET auf Turniergraphen

DISJOINT FEEDBACK VERTEX SET: $O(n^2)$ (via LONGEST COMMON SUBSEQUENCE)

Lemma

Wenn wir DISJOINT FVS in $f(k) \cdot n^c$ Zeit lösen können, dann können wir FVS COMPRESSION in $O\left(\sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} f(k-i) \cdot n^c\right)$ Zeit lösen.

FEEDBACK VERTEX SET COMPRESSION: $O(2^k \cdot n^2)$

Lemma

Wenn wir FEEDBACK VERTEX SET COMPRESSION in $f(k) \cdot n^c$ Zeit lösen können, dann können wir FEEDBACK VERTEX SET in $O(f(k) \cdot n^{c+1})$ Zeit lösen.

Theorem

FEEDBACK VERTEX SET kann auf Turniergraphen in $O(2^k \cdot n^3)$ Zeit gelöst werden.

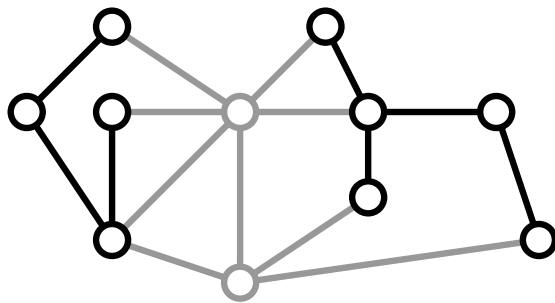
Nochmal FEEDBACK VERTEX SET

Problem: FEEDBACK VERTEX SET (ungerichtet)

Gegeben sei ein **ungerichteter** Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter k .
Gibt es ein Feedback Vertex Set der Größe k ?

($F \subseteq V$ ist ein *Feedback Vertex Set*, wenn $G - F$ azyklisch ist)

Beispiel



- wir müssen alle Kreise erwischen
- mindestens zwei Knoten muss man löschen
- zwei reichen auch aus

Ziel: FPT-Algorithmus für FEEDBACK VERTEX SET

Problem: DISJOINT FEEDBACK VERTEX SET (ungerichtet)

Gegeben sei ein **ungerichteter** Graph $G = (V, E)$, ein Parameter k und ein FVS Y der Größe $k+1$. Gibt es ein FVS F der Größe k , sodass $F \cap Y = \emptyset$?

Liefert ein FPT-Algorithmus für DISJOINT FVS auch hier wieder einen FPT-Algorithmus für FVS?

Ja!

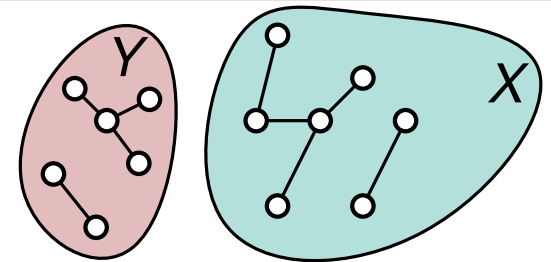
Ein Algorithmus für DISJOINT FVS

Problem: DISJOINT FEEDBACK VERTEX SET (ungerichtet)

Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, ein Parameter k und ein FVS Y der Größe $k+1$. Gibt es ein FVS F der Größe k , sodass $F \cap Y = \emptyset$?

Situation

- wähle Knoten aus $X = V \setminus Y$ und keine aus Y
- Y ist ein FVS $\Rightarrow G[X]$ ist azyklisch
- X ist ein FVS $\Rightarrow G[Y]$ ist azyklisch



(sonst gibt es keine Lösung)

Verzweigungsregel

- betrachte einen Knoten $v \in X$
- Möglichkeit 1: wähle $v \in F$
- Möglichkeit 2: wähle $v \notin F$

Möglichkeit 1

- v zu wählen verringert k um 1
- liefert potentiell einen Baum mit beschränkter Höhe

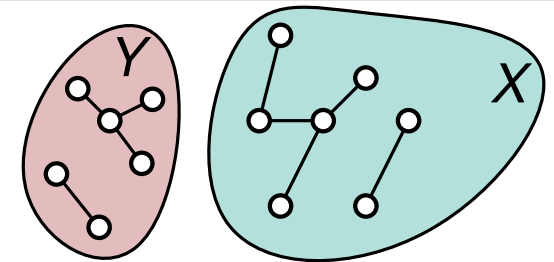
Ein Algorithmus für DISJOINT FVS

Problem: DISJOINT FEEDBACK VERTEX SET (ungerichtet)

Gegeben sei ein **ungerichteter** Graph $G = (V, E)$, ein Parameter k und ein FVS Y der Größe $k+1$. Gibt es ein FVS F der Größe k , sodass $F \cap Y = \emptyset$?

Situation

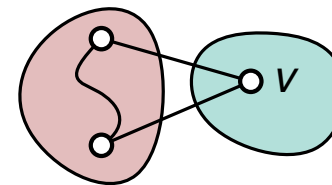
- wähle Knoten aus $X = V \setminus Y$ und keine aus Y
- Y ist ein FVS $\Rightarrow G[X]$ ist azyklisch
- X ist ein FVS $\Rightarrow G[Y]$ ist azyklisch



(sonst gibt es keine Lösung)

Verzweigungsregel

- betrachte einen Knoten $v \in X$
- Möglichkeit 1: wähle $v \in F$
- Möglichkeit 2: wähle $v \notin F$



Möglichkeit 2

- Idee: nimm an, dass v wenigstens zwei Nachbarn in Y hat
- Fall 1: Nachbarn sind verbunden $\Rightarrow v$ muss gewählt werden
 \Rightarrow Möglichkeit 2 kann ignoriert werden

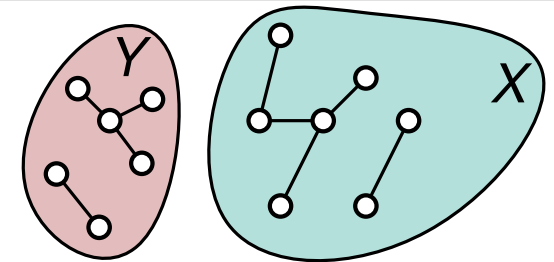
Ein Algorithmus für DISJOINT FVS

Problem: DISJOINT FEEDBACK VERTEX SET (ungerichtet)

Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, ein Parameter k und ein FVS Y der Größe $k+1$. Gibt es ein FVS F der Größe k , sodass $F \cap Y = \emptyset$?

Situation

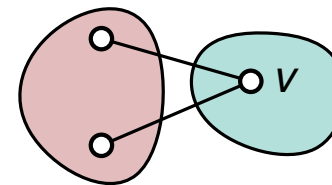
- wähle Knoten aus $X = V \setminus Y$ und keine aus Y
- Y ist ein FVS $\Rightarrow G[X]$ ist azyklisch
- X ist ein FVS $\Rightarrow G[Y]$ ist azyklisch



(sonst gibt es keine Lösung)

Verzweigungsregel

- betrachte einen Knoten $v \in X$
- Möglichkeit 1: wähle $v \in F$
- Möglichkeit 2: wähle $v \notin F$



Möglichkeit 2

- Idee: nimm an, dass v wenigstens zwei Nachbarn in Y hat
- Fall 2: Nachbarn sind nicht verbunden $\Rightarrow v$ verringert die Anzahl der Komponenten in Y um 1 (das kann höchstens k Mal passieren)

Zeige: wir finden immer einen Knoten, der \geq zwei Nachbarn in Y hat

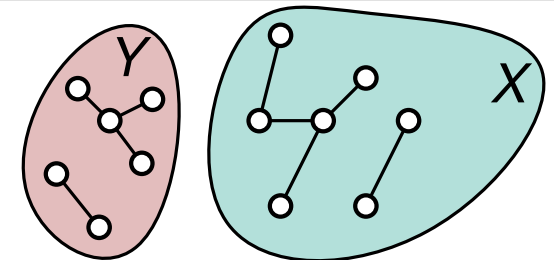
Ein Algorithmus für DISJOINT FVS

Problem: DISJOINT FEEDBACK VERTEX SET (ungerichtet)

Gegeben sei ein **ungerichteter** Graph $G = (V, E)$, ein Parameter k und ein FVS Y der Größe $k+1$. Gibt es ein FVS F der Größe k , sodass $F \cap Y = \emptyset$?

Situation

- wähle Knoten aus $X = V \setminus Y$ und keine aus Y
- Y ist ein FVS $\Rightarrow G[X]$ ist azyklisch
- X ist ein FVS $\Rightarrow G[Y]$ ist azyklisch



(sonst gibt es keine Lösung)

Zeige: wir finden immer einen Knoten, der \geq zwei Nachbarn in Y hat

- wähle $v \in X$ so, dass v in X nur einen Nachbar hat

Warum geht das?

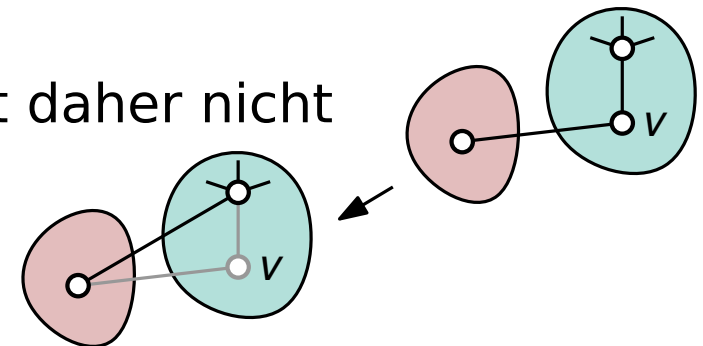
- Fall 1: v hat keinen Nachbar in Y
 - v liegt in G auf keinem Kreis und braucht daher nicht gewählt zu werden

- **Reduktionsregel:** lösche v

- Fall 2: v hat nur einen Nachbarn in Y

- v hat Grad 2 in $G \Rightarrow$ jeder Kreis durch v enthält seine Nachbarn

- **Reduktionsregel:** ersetze v durch eine Kante



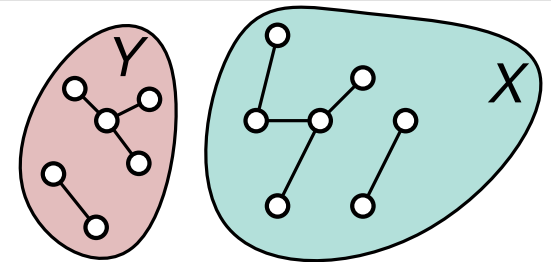
Ein Algorithmus für DISJOINT FVS

Problem: DISJOINT FEEDBACK VERTEX SET (ungerichtet)

Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, ein Parameter k und ein FVS Y der Größe $k+1$. Gibt es ein FVS F der Größe k , sodass $F \cap Y = \emptyset$?

Situation

- wähle Knoten aus $X = V \setminus Y$ und keine aus Y
- Y ist ein FVS $\Rightarrow G[X]$ ist azyklisch
- X ist ein FVS $\Rightarrow G[Y]$ ist azyklisch



(sonst gibt es keine Lösung)

Verzweigungsregel

- betrachte einen Knoten $v \in X$ **(mit mindestens zwei Nachbarn in Y)**
- Möglichkeit 1: wähle $v \in F$ **(k wird kleiner)**
- Möglichkeit 2: wähle $v \notin F$ **(Anzahl Komponenten in Y wird kleiner)**

Laufzeit

- Höhe des Baumes: maximal $2k$
- $\Rightarrow 4^k \cdot n^{O(1)}$

Theorem

FEEDBACK VERTEX SET (ungerichtet) kann in $5^k \cdot n^{O(1)}$ Zeit gelöst werden.

Zusammenfassung

Theorem

FEEDBACK VERTEX SET kann auf Turniergraphen in $O(2^k \cdot n^3)$ Zeit gelöst werden.

Theorem

FEEDBACK VERTEX SET (ungerichtet) kann in $5^k \cdot n^{O(1)}$ Zeit gelöst werden.

Technik: Iterative Kompression

- zeige: (PROBLEM) lösbar \Leftrightarrow (PROBLEM)-COMPRESSION lösbar
- zeige: (PROBLEM)-COMPRESSION lösbar \Leftrightarrow DISJOINT-(PROBLEM) lösbar
- löse: DISJOINT-(PROBLEM) (das ist der schwierige Teil!)

Was macht DISJOINT-(PROBLEM) leichter als PROBLEM?

- Lösung Y der Größe $k + 1$ ist bekannt
- neue Lösung muss disjunkt sein zu Y
- Komplement von Y ist eine Lösung