

# Parametrisierte Algorithmen

**FPT-Techniken: Suchbäume, Kernbildung, iterative Kompression**



# Online-Lehre

## Vorteile

- gemütlich von zu Hause aus
- erleichtertes Lernen
- Video-Aufzeichnung mit geringem Aufwand möglich

## Häufige Nachteile

- 90 min Vorlesungs-Berieselung ist ermüdend
- keine mündliche Interaktion: fehlende Übung für **mündliche** Prüfung
- erschwertes Kennenlernen
- visuelles Feedback für die Dozenten

## Maßnahmen

- Interaktion via mündlichem Feedback, Chat, Umfragen
- was ihr tun könnt:
  - Fragen stellen
  - auf unsere Fragen antworten/an der Diskussion beteiligen
  - Kamera anschalten
- zum Kennenlernen 15 min vor dem Montags-Termin: [skribbl.io](https://skribbl.io)

Woche $i$							Woche $i + 1$							Woche $i + 2$							Woche $i + 3$						
Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
(i gerade)							Übungsblatt $\frac{i}{2}$														Übungsblatt $\frac{i}{2} + 1$						

## Vorlesung

- Vorlesung mit Folien
- wird aufgezeichnet

## Aktiv-Session

- gemeinsames Erarbeitung weiterführender Aspekte
- Kuriositäten
- gemeinsames Papier-Lesen

## Übung (Woche $i + 1$ )

- mit Marcus
- Besprechung Blatt  $\frac{i}{2} - 1$
- Diskussion zu Blatt  $\frac{i}{2}$

## Prüfung

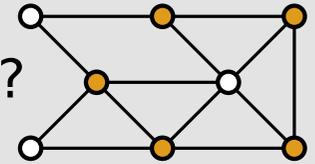
- mündlich
- Zulassungsvoraussetzung: 50% der Punkte für Übungsaufgaben

# Parametrisierte Sichtweise

## Problem: $k$ -VERTEX COVER

Gibt es im Graphen  $G = (V, E)$  ein Vertex Cover der Größe  $k$ ?

(Knotenmenge  $V' \subseteq V$  mit  $e \cap V' \neq \emptyset$  für alle  $e \in E$ )



## Können wir das effizient lösen?

- $k$ -VERTEX COVER ist NP-vollständig

## Und was, wenn die betrachteten Graphen gutartig sind?

- Was, wenn  $G$  kleinen Maximalgrad hat?
- Was, wenn das minimale Vertex Cover in  $G$  klein ist?
- Was, wenn  $G$  kleine chromatische Zahl hat?
- Oder kleine Cliquenzahl? Kleine Baumweite? Kleine ... ?

## Ziel

- Laufzeitanalyse nicht nur bzgl. der Eingabegröße
- sondern außerdem bzgl. eines (oder mehrerer) Parameter

# Grundlegende Definitionen

## Definition

Ein **parametrisiertes Problem** ist eine Sprache  $L \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ . Für eine Instanz  $(x, k) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$  ist  $k$  der **Parameter**.

**Beachte:** ein Algorithmus löst das parametrisierte Problem  $L$ , wenn es für jede Instanz  $(x, k)$  korrekt entscheidet ob  $(x, k) \in L$

## Definition

Ein parametrisiertes Problem  $L$  ist **fixed parameter tractable (FPT)**, wenn es einen Algorithmus gibt, der  $L$  in  $O(f(k)n^c)$  löst. Dabei ist  $f$  eine berechenbare Funktion,  $n$  die Eingabegröße und  $c$  eine Konstante.

Welche der Laufzeiten gehören zu einem FPT-Algorithmus?

$$\begin{array}{ccccc}
 A = 2^k(n^4 + k^2) & B = k^{\log n} & C = 2^{k^2+2\log n} & D = k^2 n! & E = n^{17} k^{k!} \\
 F = n^{\log k} & G = k! n \log n & H = n^k n^2 & I = n^{\frac{3}{2}} & J = 2^{k \log n}
 \end{array}$$

$$\text{FPT} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \blacksquare k \text{ konstant} \Rightarrow \text{polynomielle Laufzeit} \\ \blacksquare k \text{ konstant} \Rightarrow \text{asymptotische Laufzeit unabhängig von } k \end{array} \right.$$

# Beispiel: parametrisiertes Vertex Cover

## Definition

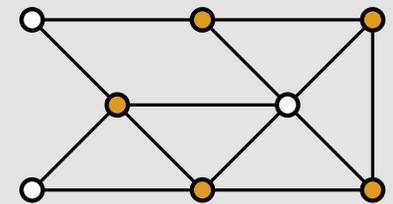
Ein **parametrisiertes Problem** ist eine Sprache  $L \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ . Für eine Instanz  $(x, k) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$  ist  $k$  der **Parameter**.

## Definition

Ein parametrisiertes Problem  $L$  ist **fixed parameter tractable (FPT)**, wenn es einen Algorithmus gibt, der  $L$  in  $O(f(k)n^c)$  löst. Dabei ist  $f$  eine berechenbare Funktion,  $n$  die Eingabegröße und  $c$  eine Konstante.

## Problem: VERTEX COVER

Gegeben sind ein Graph  $G = (V, E)$  und ein Parameter  $k$ .  
 Gibt es ein Vertex Cover der Größe  $k$ ?  
 (Knotenmenge  $V' \subseteq V$  mit  $e \cap V' \neq \emptyset$  für alle  $e \in E$ )



## Komplexität

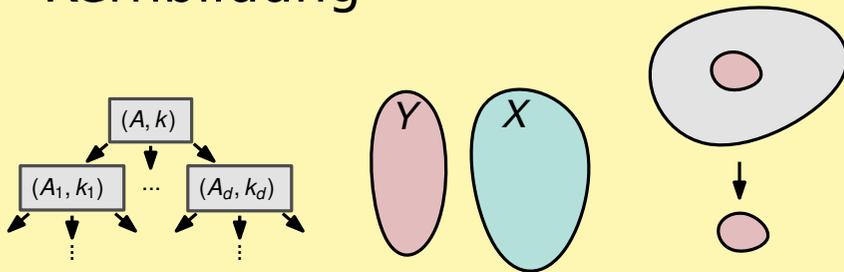
- VERTEX COVER ist NP-vollständig
- Aufzählung aller  $\binom{n}{k}$  Teilmengen der Größe  $k$  (Brute-Force):  $O(n^k m)$
- gilt VERTEX COVER  $\in$  FPT?

polynomiell für konstantes  $k!$

# Inhalt

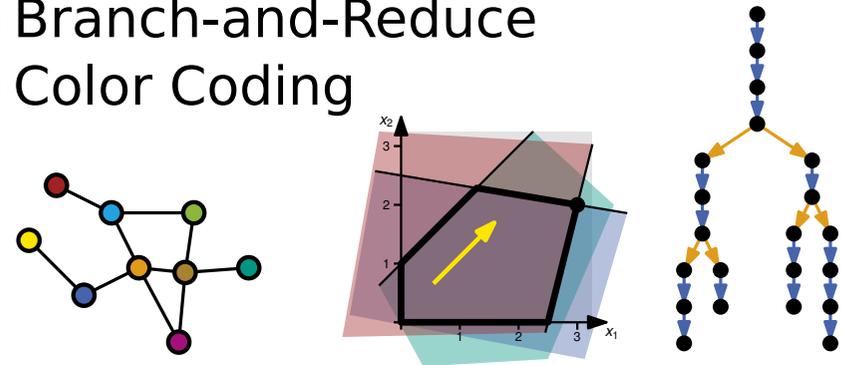
## Basic Toolbox

- beschränkte Suchbäume
- iterative Kompression
- Kernbildung



## Erweiterte Toolbox

- lineare Programme
- Branch-and-Reduce
- Color Coding



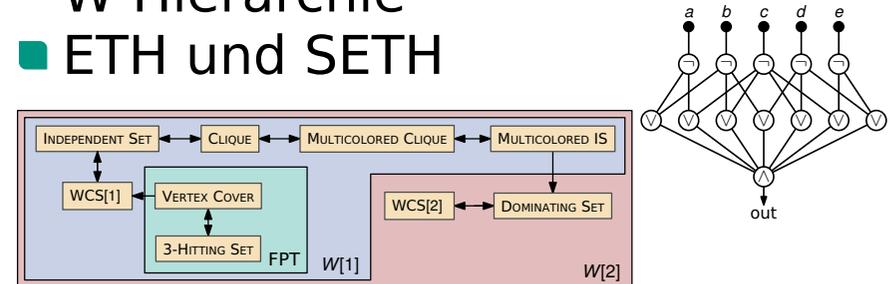
## Baumweite

- dynamische Programme
- chordale & planare Graphen
- Courcelles Theorem



## Untere Schranken

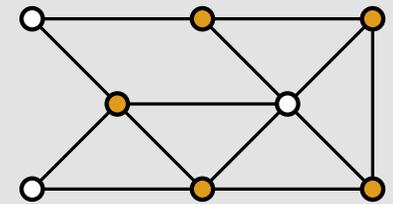
- parametrisierte Reduktionen
- boolesche Schaltkreise und die W-Hierarchie
- ETH und SETH



# Beschränkter Suchbaum

## Problem: VERTEX COVER

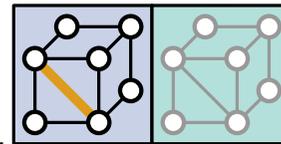
Gegeben sind ein Graph  $G = (V, E)$  und ein Parameter  $k$ .  
 Gibt es ein Vertex Cover der Größe  $k$ ?  
 (Knotenmenge  $V' \subseteq V$  mit  $e \cap V' \neq \emptyset$  für alle  $e \in E$ )



noch zu überdeckender Teilgraph

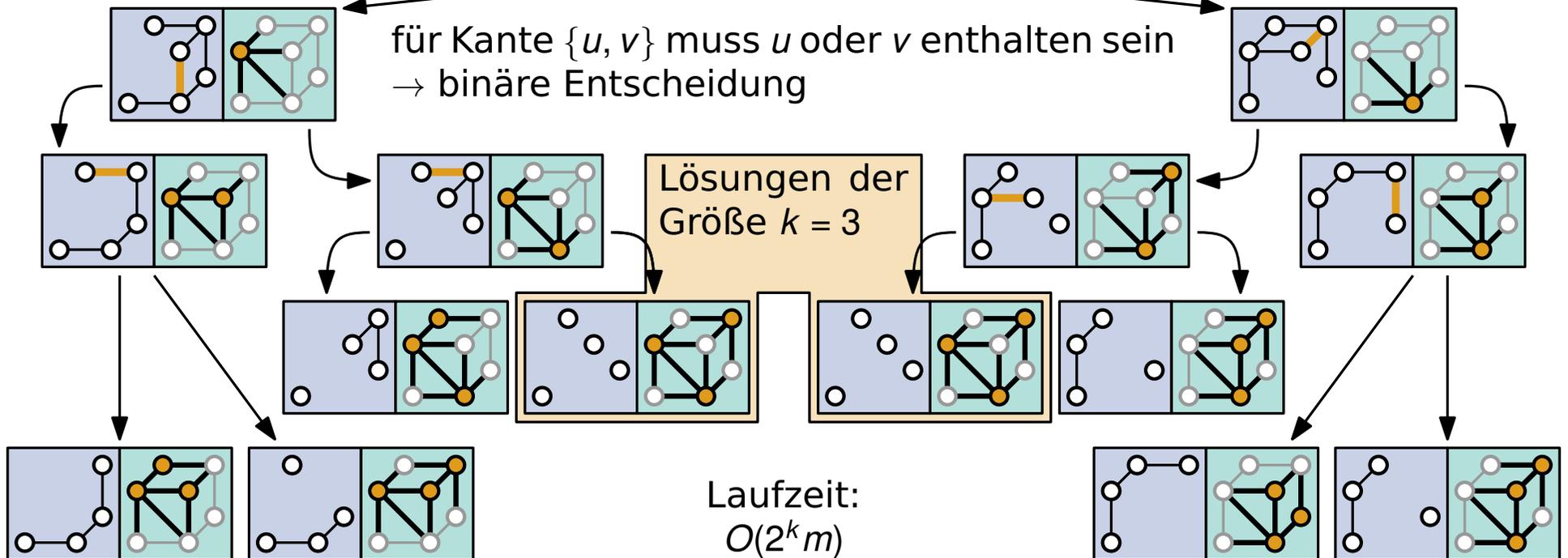
gewählte Knoten & überdeckte Kanten

Jede Kante muss noch überdeckt werden  $\rightarrow$  wähle eine beliebige



**Gibt es ein Vertex Cover mit maximal  $k = 3$  Knoten?**

für Kante  $\{u, v\}$  muss  $u$  oder  $v$  enthalten sein  $\rightarrow$  binäre Entscheidung

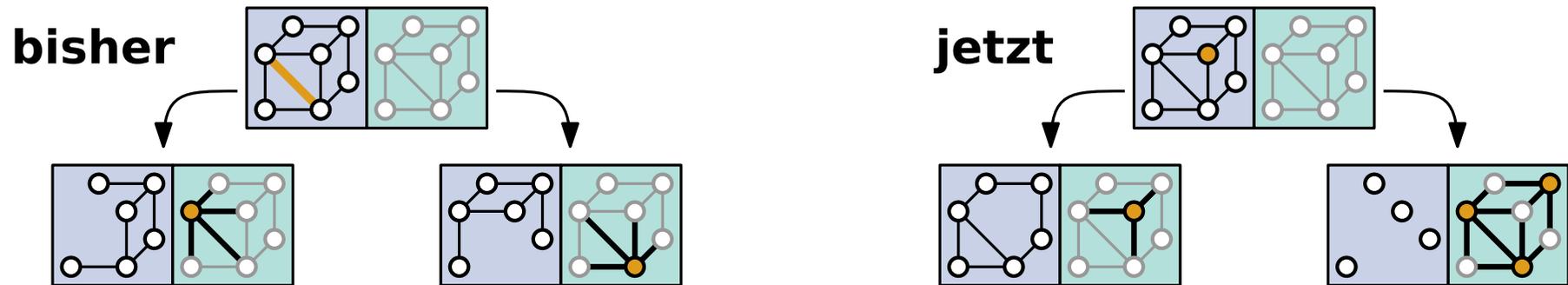


Laufzeit:  
 $O(2^k m)$

# Beschränkterer Suchbaum

## Geht es schneller?

- Ziel: reduziere die Größe des Suchbaums (bisher:  $2^k$  Blätter)
- Verzweigungsregel bisher: für Kante  $\{u, v\}$  wähle entweder  $u$  oder  $v$
- neue Verzweigungsregel: für Knoten  $v$  wähle entweder  $v$  oder  $N(v)$



## Wie viele Blätter hat der resultierende Baum abhängig von $k$ ?

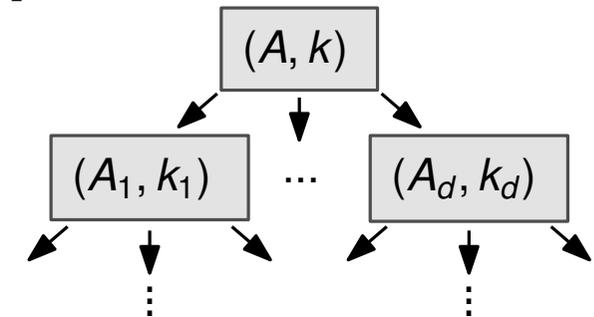
- wähle für  $v$  immer einen Knoten mit  $\text{Grad} \geq 2$
- obere Schranke für #Blätter: 
$$T(k) = \begin{cases} T(k-1) + T(k-2), & \text{für } k \geq 2 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$
- wir erhalten:  $T(k) \leq 1,6181^k$
- Wie kommt man auf 1,6181? Geht es besser?  $\longrightarrow$  nächste Vorlesung

# Grundlegende Techniken

## Beschränkter Suchbaum

(Bounded Search Tree)

- für eine Instanz  $(A, k)$  bilde, in Zeit  $n^c$ ,  $(A_1, k_1), \dots, (A_d, k_d)$ , sodass:  
 $(A, k)$  ist lösbar  $\Leftrightarrow (A_i, k_i)$  ist lösbar für ein  $i \in [1, d]$
- beschränke  $d$  durch eine Funktion  $f_1(k)$
- beschränke Verzweigungstiefe durch  $f_2(k)$   
 (Beispiel: Parameter wird in jedem Schritt kleiner)
- $\Rightarrow$  FPT-Algorithmus mit Laufzeit  $O(f_1(k)^{f_2(k)} n^c)$



# Kernbildung am Beispiel Vertex Cover

## Reduktionsregel 1

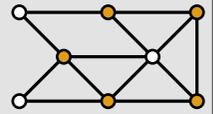
- lösche einen isolierten Knoten

## Reduktionsregel 2

- füge einen Knoten  $v$  mit  $\deg(v) > k$  zum VC hinzu
- neue Instanz: lösche  $v$ , verringere  $k$  um 1

### Problem: VERTEX COVER

Gegeben sind ein Graph  $G = (V, E)$  und ein Parameter  $k$ .  
 Gibt es ein Vertex Cover der Größe  $k$ ?  
 (Knotenmenge  $V' \subseteq V$  mit  $e \cap V' \neq \emptyset$  für alle  $e \in E$ )



### Lemma

Reduktionsregel 1 ist sicher.

(neue Instanz lösbar  $\Leftrightarrow$  alte Instanz lösbar)

**Beweis:** offensichtlich

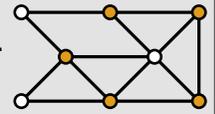
# Kernbildung am Beispiel Vertex Cover

## Reduktionsregel 1

- lösche einen isolierten Knoten

### Problem: VERTEX COVER

Gegeben sind ein Graph  $G = (V, E)$  und ein Parameter  $k$ .  
 Gibt es ein Vertex Cover der Größe  $k$ ?  
 (Knotenmenge  $V' \subseteq V$  mit  $e \cap V' \neq \emptyset$  für alle  $e \in E$ )



## Reduktionsregel 2

- füge einen Knoten  $v$  mit  $\deg(v) > k$  zum VC hinzu
- neue Instanz: lösche  $v$ , verringere  $k$  um 1

### Lemma

Reduktionsregel 2 ist sicher.

(neue Instanz lösbar  $\Leftrightarrow$  alte Instanz lösbar)

### Beweis

- entweder  $v$  oder jeder Nachbar von  $v$  muss im VC enthalten sein
- $\Rightarrow$  wählt man  $v$  nicht, so wird das VC sicher zu groß ( $\deg(v) > k$ )

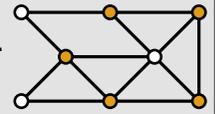
# Kernbildung am Beispiel Vertex Cover

## Reduktionsregel 1

- lösche einen isolierten Knoten

### Problem: VERTEX COVER

Gegeben sind ein Graph  $G = (V, E)$  und ein Parameter  $k$ .  
 Gibt es ein Vertex Cover der Größe  $k$ ?  
 (Knotenmenge  $V' \subseteq V$  mit  $e \cap V' \neq \emptyset$  für alle  $e \in E$ )

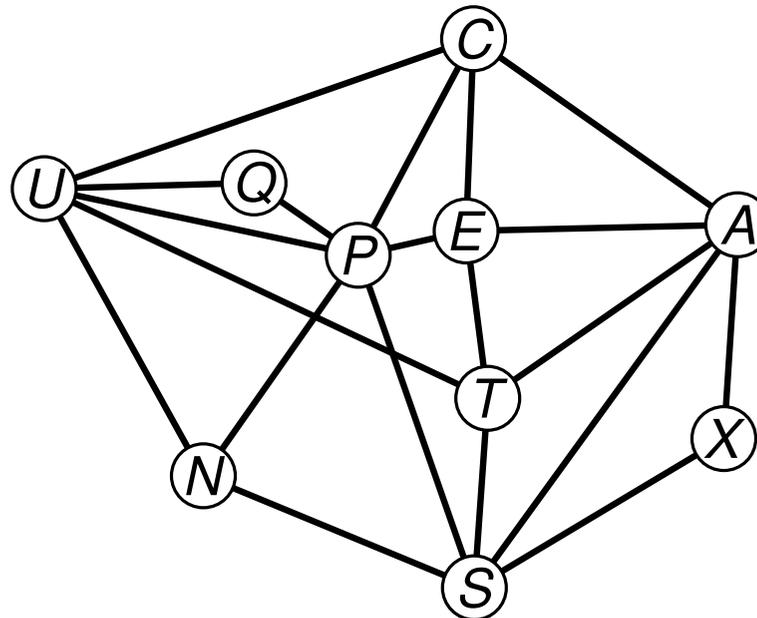


## Reduktionsregel 2

- füge einen Knoten  $v$  mit  $\deg(v) > k$  zum VC hinzu
- neue Instanz: lösche  $v$ , verringere  $k$  um 1

Wende Regel 2 so oft an, wie möglich

$k = 5$



**Lösungswort:**

# Kernbildung am Beispiel Vertex Cover

## Reduktionsregel 1

- lösche einen isolierten Knoten

## Reduktionsregel 2

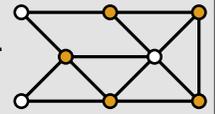
- füge einen Knoten  $v$  mit  $\deg(v) > k$  zum VC hinzu
- neue Instanz: lösche  $v$ , verringere  $k$  um 1

## Reduktionsregel 3

- falls Regel 1 und Regel 2 nicht anwendbar sind und  $m > k^2$
- neue Instanz:  $(H, 0)$ , mit  $H = \text{---}$  (konstant große NEIN-Instanz)

### Problem: VERTEX COVER

Gegeben sind ein Graph  $G = (V, E)$  und ein Parameter  $k$ .  
 Gibt es ein Vertex Cover der Größe  $k$ ?  
 (Knotenmenge  $V' \subseteq V$  mit  $e \cap V' \neq \emptyset$  für alle  $e \in E$ )



## Lemma

Reduktionsregel 3 ist sicher. (neue Instanz lösbar  $\Leftrightarrow$  alte Instanz lösbar)

## Beweis

- Regel 2 nicht anwendbar  $\Rightarrow \deg(v) \leq k$  für alle  $v \in V$
- $\Rightarrow$  jeder Knoten deckt maximal  $k$  Kanten ab
- $\Rightarrow k$  Knoten decken maximal  $k^2$  Kanten ab
- $\Rightarrow$  Instanz nicht lösbar, da  $m > k^2$

# Kernbildung am Beispiel Vertex Cover

## Reduktionsregel 1

- lösche einen isolierten Knoten

## Reduktionsregel 2

- füge einen Knoten  $v$  mit  $\deg(v) > k$  zum VC hinzu
- neue Instanz: lösche  $v$ , verringere  $k$  um 1

## Reduktionsregel 3

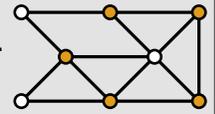
- falls Regel 1 und Regel 2 nicht anwendbar sind und  $m > k^2$
- neue Instanz:  $(H, 0)$ , mit  $H = \text{---}$  (konstant große NEIN-Instanz)

## Kernbildung

- wende Reduktionsregel so lange an, wie möglich
- übrig bleibt der **Problemkern** der Größe  $O(k^2) \rightarrow$  Brute-Force

### Problem: VERTEX COVER

Gegeben sind ein Graph  $G = (V, E)$  und ein Parameter  $k$ .  
 Gibt es ein Vertex Cover der Größe  $k$ ?  
 (Knotenmenge  $V' \subseteq V$  mit  $e \cap V' \neq \emptyset$  für alle  $e \in E$ )



## Theorem

VERTEX COVER hat einen Kern mit  $O(k^2)$  Knoten und  $O(k^2)$  Kanten. Er kann in  $O(m)$  Zeit berechnet werden.

# Kernbildung - Formale Definition

## Definition

Eine **Kernbildung** für ein parametrisiertes Problem  $L$  ist ein Algorithmus, der jede Eingabe  $(x, k)$  in polynomieller Zeit (gemessen in  $|x|$ ) in eine Eingabe  $(x', k')$  (den **Kern**) überführt, sodass:

- $(x, k) \in L$  genau dann wenn  $(x', k') \in L$ , und
- $|x'| + k' \leq g(k)$  für eine von  $x$  unabhängige Funktion  $g$ .

## Theorem

Ein entscheidbares parametrisiertes Problem  $L$  ist in FPT genau dann wenn es eine Kernbildung für  $L$  gibt.

## Beweis (der anderen Richtung)

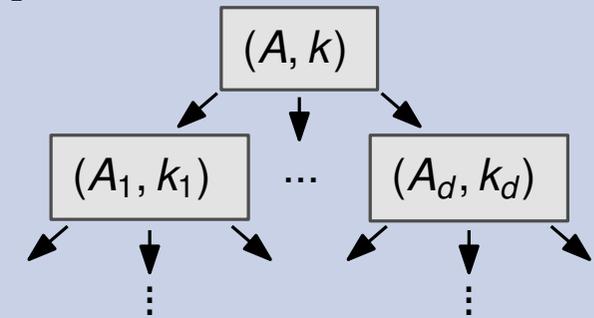
- sei  $\mathcal{A}$  ein Algorithmus, der  $(x, k) \in L$  in  $f(k)|x|^c$  entscheidet
- lasse  $\mathcal{A}$  auf  $(x, k)$  für  $|x|^{c+1}$  Schritten laufen
- falls  $\mathcal{A}$  fertig wird: Problem gelöst  $\rightarrow$  trivialer Kern
- sonst:  $|x|^{c+1} < f(k)|x|^c \Rightarrow |x| < f(k)$
- $(x, k)$  selbst ist schon ein geeigneter Kern  $\rightarrow$  gib  $(x, k)$  zurück

# Grundlegende Techniken

## Beschränkter Suchbaum

(Bounded Search Tree)

- für eine Instanz  $(A, k)$  bilde, in Zeit  $n^c$ ,  $(A_1, k_1), \dots, (A_d, k_d)$ , sodass:  
 $(A, k)$  ist lösbar  $\Leftrightarrow (A_i, k_i)$  ist lösbar für ein  $i \in [1, d]$
- beschränke  $d$  durch eine Funktion  $f_1(k)$
- beschränke Verzweigungstiefe durch  $f_2(k)$   
 (Beispiel: Parameter wird in jedem Schritt kleiner)
- $\Rightarrow$  FPT-Algo mit Laufzeit  $O(f_1(k)^{f_2(k)} n^c)$



## Kernbildung

(Kernelization)

- wende sukzessive sichere Reduktionsregeln an
- zeige: übrig bleibt ein Kern, dessen Größe nur von  $k$  abhängt

# VERTEX COVER COMPRESSION

## Problem: VERTEX COVER COMPRESSION

Gegeben sind ein Graph  $G$ , ein Parameter  $k$  und ein VC  $Z$  der Größe  $k + 1$  in  $G$ . Gibt es ein VC der Größe  $k$  in  $G$ ?

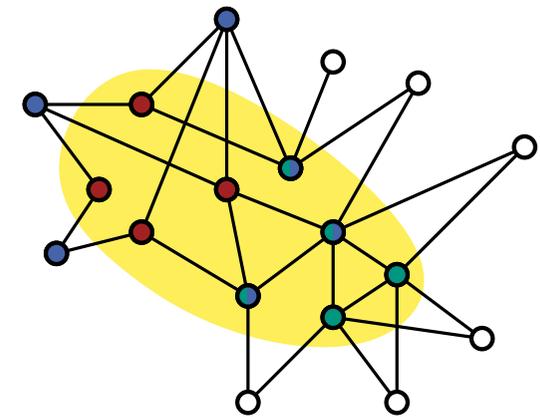
### Idee

- wähle eine Teilmenge  $X \subseteq Z$ ;  $Y = Z \setminus X$
- gibt es VC  $Z'$  mit  $|Z'| \leq k$  und  $Z' \cap Z = X$ ?

**Fall 1:**  $G[Y]$  enthält Kante  $\Rightarrow Z'$  existiert nicht

**Fall 2:** sonst gilt:

- $Z'$  muss alle Nachbarn  $N(Y)$  von  $Y$  enthalten
- $X \cup N(Y)$  ist ein VC
- es gibt das gewünschte VC  $Z' \Leftrightarrow |X \cup N(Y)| \leq k$



### Algorithmus

- wende obige Prozedur auf jede Teilmenge  $X \subseteq Z$  an
- es gibt  $2^{k+1}$  solche Teilmengen
- Laufzeit  $O(m)$  für jedes  $X \Rightarrow$  insgesamt  $O(2^k m)$

# Iterative Kompression

## Problem: VERTEX COVER COMPRESSION

Gegeben sind ein Graph  $G$ , ein Parameter  $k$  und ein VC  $Z$  der Größe  $k + 1$  in  $G$ . Gibt es ein VC der Größe  $k$  in  $G$ ?

**Gerade gesehen:**  $O(2^k m)$ -Algorithmus für VERTEX COVER COMPRESSION

## Algorithmus für VERTEX COVER

- iteriere über die Subgraphen  $G_i$  bestehend aus den Knoten  $v_1, \dots, v_i$
- Initialisierung: in  $G_k$  bilden alle Knoten ein VC der Größe  $k$
- Annahme für  $i > k$ : für  $G_{i-1}$  kennen wir ein VC  $X_{i-1}$  der Größe  $k$
- $\Rightarrow X_{i-1} \cup \{v_i\}$  ist ein VC der Größe  $k + 1$  in  $G_i$
- verwende Algo für VERTEX COVER COMPRESSION:
  - **Fall 1:**  $G_i$  hat ein VC der Größe  $k \Rightarrow$  weiter mit  $G_{i+1}$
  - **Fall 2:**  $G_i$  hat kein VC der Größe  $k \Rightarrow G$  hat kein VC der Größe  $k \Rightarrow$  Abbruch

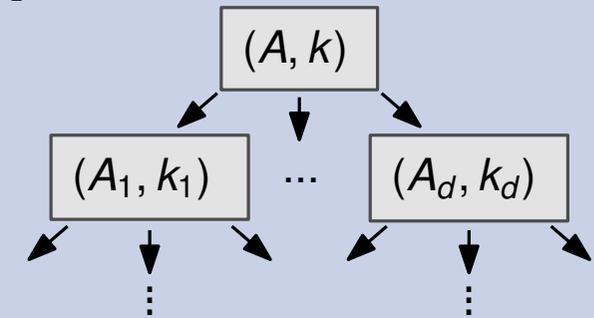
$\Rightarrow$  Algo für VERTEX COVER mit Laufzeit  $O(2^k nm)$

# Grundlegende Techniken

## Beschränkter Suchbaum

(Bounded Search Tree)

- für eine Instanz  $(A, k)$  bilde, in Zeit  $n^c$ ,  $(A_1, k_1), \dots, (A_d, k_d)$ , sodass:  
 $(A, k)$  ist lösbar  $\Leftrightarrow (A_i, k_i)$  ist lösbar für ein  $i \in [1, d]$
- beschränke  $d$  durch eine Funktion  $f_1(k)$
- beschränke Verzweigungstiefe durch  $f_2(k)$   
 (Beispiel: Parameter wird in jedem Schritt kleiner)
- $\Rightarrow$  FPT-Algo mit Laufzeit  $O(f_1(k)^{f_2(k)} n^c)$



## Kernbildung

(Kernelization)

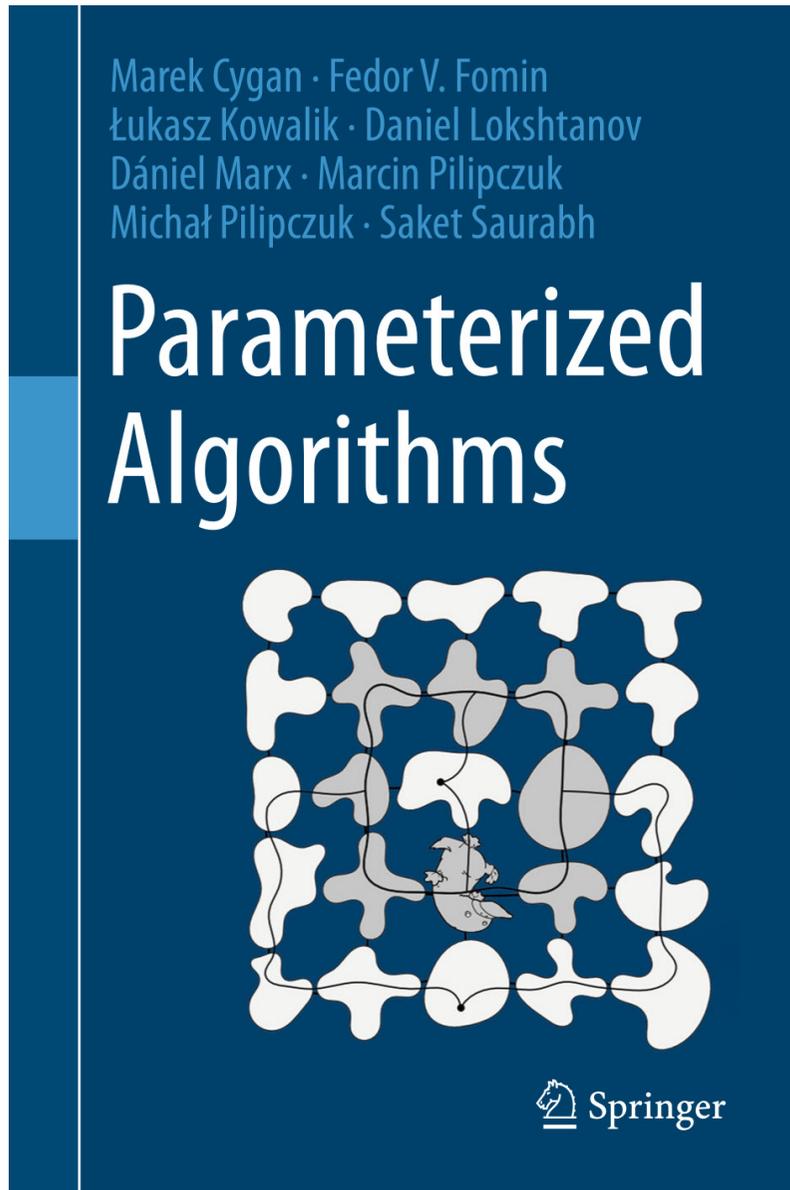
- wende sukzessive sichere Reduktionsregeln an
- zeige: übrig bleibt ein Kern, dessen Größe nur von  $k$  abhängt

## Iterative Kompression

(Iterative Compression)

- Kompressionsalgo: löst das Problem unter der Annahme eine etwas zu große Lösung zu kennen
- vergrößere Instanz schrittweise und halte initiale Lösung durch wiederholte Kompression klein

**VERTEX COVER  $\in$  FPT**  
(wenn man die Lösungsgröße als Parameter verwendet!)



## Anmerkungen

- viele der behandelten Themen findet ihr so oder so ähnlich in diesem Buch
- aus dem Uninetz kostenlos abrufbar

[link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-21275-3](http://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-21275-3)