

Musterlösung zum Übungsblatt 6

Erstellt von Michael & Nadine

Aufgabe 1: Schöne Zerlegung

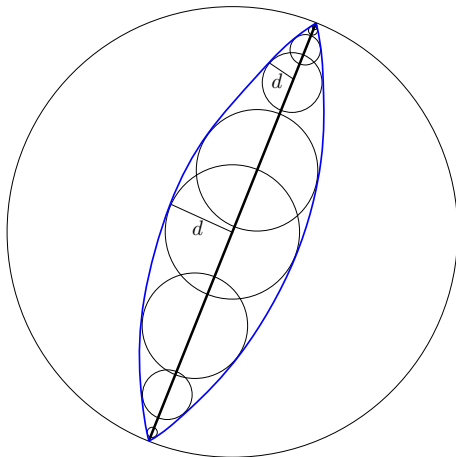
5 Punkte

Zu Punkt (1): Sei B die Menge in der jede $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$ -te Strecke aus S drin liegt, wenn man bei s_0 anfängt. Außerdem unterteilen wir 2^{ℓ_L} (bzw. 2^{ℓ_R}) in 2^h Teilintervalle der Länge 2^{ℓ_L-h} (bzw. 2^{ℓ_R-h}). Wir wählen s_0 nun als die unterste Strecke. Wenn wir nun s_i definiert haben, können wir s_{i+1} wählen, indem wir das größte Element aus B nehmen, welches entweder den linken oder den rechten Endpunkt im gleichen Teilintervall wie s_i hat, oder wenn es so eins nicht gibt, dann nehmen wir einfach das nächste Element aus B . Dies machen wir solange, bis wir keine Strecken mehr in B haben. Damit stellen wir sicher, dass entweder die Endpunkte von zwei aufeinander folgenden Strecken s_i und s_{i+1} nur einen kleinen Abstand haben, welches (1b) bzw. (1c) erfüllt. Oder aber wir haben nur $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$ Strecken aus S zwischen s_i und s_{i+1} liegen, weil wir B so gewählt haben.

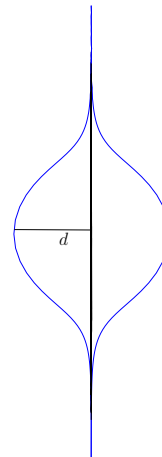
Zu Punkt (2): Um sicher zu stellen, dass die Endpunkte der Strecken immer auf Vielfachen von 2^{ℓ_L-h} (bzw. 2^{ℓ_R-h}) liegen und somit (2b) und (2c) gelten, können wir die Strecken s_i nehmen und sie in Stecken \tilde{s}_i umwandeln, indem wir die Endpunkte auf Vielfache davon aufrunden. Wir haben entweder s_i und s_{i+1} so gewählt, dass es keine andere Strecke in B gibt, die größeren Endpunkt als s_{i+1} hat und trotzdem im gleichen Teilintervall wie s_i liegt (egal auf welcher Seite). Oder aber die Endpunkte s_i und s_{i+1} liegen auf beiden Seiten in unterschiedlichen Teilintervallen. In beiden Fällen ist aber klar, dass die Endpunkte von s_i und s_{i+2} in unterschiedlichen Teilintervallen liegen müssen. Daraus folgt, dass $\tilde{s}_i < s_{i+2}$. Und somit gilt (2a).

Aufgabe 2: „Parallelen“

2 Punkte



(a) Poincaré Modell



(b) Natives Modell

Abbildung 1: Ursprungsgerade (dick schwarz) und Punkte mit Distanz d zur Gerade (auf blauer Kurve)

Wie kommt man drauf?

Um die Parallelen im Poincaré Modell zu zeichnen haben wir das Poincaré Ipelet benutzt, eine Ursprungsgerade gezeichnet und dann Kreise mit Mittelpunkte auf der Gerade und gleichem Radius d gezeichnet. Dann haben wir die Kreise durch eine Kurve verbunden. Es gilt nun für alle Punkte auf dieser Kurve, dass sie Abstand d von der Geraden haben.

Für das Native Modell haben wir das Hipe Tool benutzt. Wir haben wieder eine Ursprungsgerade gezeichnet und dann mit der 'h' Taste die Funktion angeschaltet, die uns den Hyperkreis mit gegebener Distanz d angibt. Da der Hyperkreis gerade die Kurve angibt deren Punkte die gleiche orthogonale Distanz d zu einer gegebenen Gerade angeben, liefert uns dies das gewünschte.

Aufgabe 3: Abkürzung?

3 Punkte

Im Folgenden beweisen wir für die absolute Ebene, dass die Konkatenation von $b_{A,B}$ und $b_{B,C}$ die Translation $b_{A,C}$ ergibt.

Translationen sind kommutativ, da sie Relationen erhalten (siehe Vorlesung 12 Folie 11). Daraus folgt das für jeden Punkt D gilt:

$$(b_{D,A} \circ b_{A,C} \circ b_{A,D})(D) \quad (1)$$

$$=(b_{D,A} \circ b_{A,D} \circ b_{A,C})(D) \quad (2)$$

$$=((b_{D,A} \circ b_{A,D}) \circ b_{A,C})(D) \quad (3)$$

$$=(ID) \circ b_{A,C}(D) \quad (4)$$

$$=b_{A,C}(D). \quad (5)$$

Offensichtlich gilt aber auch $(b_{A,B} \circ b_{B,C})(A) = b_{A,C}(A) = C$, da $b_{A,B}(A) = B$ d.h. der Punkt A wird wirklich zu C verschoben. Dadurch können wir jedoch in Gleichung (1) $b_{A,C}$ durch $b_{A,B} \circ b_{B,C}$ ersetzen. Somit gilt für jeden Punkt $(b_{A,B} \circ b_{B,C})(D) = b_{A,C}(D)$.

Aufgabe 4: Teufelskreis

2 Punkte

Gegeben seien drei nicht-kollineare Punkte. In der hyperbolischen Ebene gibt es höchstens einen Kreis auf dem diese liegen.

Wie kommt man drauf?

Nach Vorlesung gilt das hyperbolische Kreis den euklidischen Kreisen in der Poincaré Disk entsprechen und in der euklidischen Ebene gibt es genau einen Kreis auf dem drei nicht-kollineare Punkte liegen. Daraus folgt, dass das auch für die hyperbolische Ebene gilt ... oder?

Nein, denn der *eindeutige* euklidische Kreis könnte die Poincaré Disk schneiden, in diesem Fall gibt es keinen hyperbolischen Kreis. Alternativ könnte man 3 Punkte wählen die Euklidisch kollinear sind, auch in diesem Fall kann es keinen Kreis geben.

Aufgabe 5: Da beißt sich die Katze in den Schwanz

2 + 3 = 5 Punkte

Teilaufgabe (a) Zwei Strecken der Länge l mit Winkel φ ergeben drei nicht kollineare Punkte. Diese drei Punkte liegen daher auf einem Kreis und alle weiteren Punkte liegen auch auf diesem Kreis. Da der Kreis endlichen Umfang hat muss, spätestens wenn die Länge von P größer als der Umfang ist, P sich selbst schneiden. Je größer l ist, desto schlechter ist diese Abschätzung, das heißt wir werden uns für große l wesentlich früher treffen. Die genaue Anzahl lässt sich berechnen indem wir die Größe des Kreissegments berechnen das eine Strecke der Länge l abdeckt. Dieser Winkel beträgt $\pi - \varphi$, also schneidet sich P sobald es mehr als $\frac{2\pi}{\pi-\varphi}$ Segmente enthält.

Teilaufgabe (b) Wähle 3 Punkte so in dem Poincaré Disk Modell, das der euklidische Kreis die Disk schneidet. Beachte dabei, dass diese 3 Punkte nicht auf einer Geraden liegen, i.e. Der Kreis die Disk nicht im rechten Winkel schneidet. In diesem Fall läuft P auf den Rand der Disk zu, wird ihn aber nie erreichen, denn der Rand der Disk ist unendlich weit entfernt.

Aufgabe 6: Perspektivenwechsel

3 Punkte

Um C in Abhängigkeit von A als Ursprung und Strahl AB^+ anzugeben, müssen wir zum einen den Radius \tilde{r}_C als Distanz zwischen A und C angeben, und zum anderen den Winkel $\tilde{\varphi}_C$ als den Winkel zwischen AB^+ und AC^+ .

Für die Distanz $\tilde{r}_C = d(A, C)$ zwischen A und C können wir die Distanz-Formal aus der Vorlesung verwenden:

$$d(A, C) = \operatorname{arccosh}(\cosh(r_A) \cosh(r_C) - \sinh(r_A) \sinh(r_C) \cos(\Delta_\varphi))$$

mit $\Delta_\varphi = \min\{|\varphi_A - \varphi_C|, 2\pi - |\varphi_A - \varphi_C|\}$.

Für den Winkel $\tilde{\varphi}_C = \angle BAC$ können wir 'The Cosine Rule for Hyperbolic Triangles' von den gelben Seiten benutzen, welche uns sagt:

$$\begin{aligned} & \sinh(d(A, C)) \sinh(d(A, B)) \cos(\tilde{\varphi}_C) \\ &= \cosh(d(A, C)) \cosh(d(A, B)) - \cosh(d(B, C)) \end{aligned}$$

Wenn wir das nun nach $\tilde{\varphi}_C$ auflösen, erhalten wir:

$$\tilde{\varphi}_C = \arccos\left(\frac{\cosh(d(A, C)) \cosh(d(A, B)) - \cosh(d(B, C))}{\sinh(d(A, C)) \sinh(d(A, B))}\right)$$

Dann wird C angegeben durch $(\tilde{r}_C, \tilde{\varphi}_C)$.