Algorithmische Geometrie
Wintersemester 2020/2021
Thomas Bläsius & Marcus Wilhelm

Karlsruher Institut für Technologie

Übungsblatt 6

Abgabe bis 17. Februar 2021

Aufgabe 1: Schöne Zerlegung — 5 Punkte

Gegeben seien zwei vertikale Strecken der Längen 2^{ℓ_L} und 2^{ℓ_R}. Zudem sei eine Menge S mit n überschneidungsfreien Strecken zwischen den beiden vertikalen Strecken gegeben. Zeigt, dass man $\mathcal{O}(b)$ Strecken $s_0, s_1, \dots \in S$ so wählen kann, dass (1) und (2) gelten.

(1) Für jedes i gilt mindestens eine der folgenden Aussagen:

   (a) zwischen s_i und s_{i+1} liegen maximal n/b Strecken;

   (b) die linken Endpunkte von s_i und s_{i+1} liegen auf einem Teilintervall der Länge $2^{\ell_L - h}$;

   (c) die rechten Endpunkte von s_i und s_{i+1} liegen auf einem Teilintervall der Länge $2^{\ell_R - h}$.

(2) Es gibt Strecken $\tilde{s}_0, \tilde{s}_2, \dots$ zwischen den zwei vertikalen Strecken, sodass:

   (a) $s_0 \prec \tilde{s}_0 \prec s_2 \prec \tilde{s}_2 \prec \cdots$;

   (b) die Distanzen zwischen linken Endpunkten der $\tilde{s}_i$ sind Vielfache von $2^{\ell_L - h}$;

   (c) die Distanzen zwischen den rechten Endpunkten der $\tilde{s}_i$ Vielfache von $2^{\ell_R - h}$.

Aufgabe 2: „Parallelen“ — 2 Punkte

Zeichnet eine Ursprungsgerade und für eine Distanz d die Menge aller Punkte, die Abstand d zu dieser Geraden haben. Benutzt dazu einmal das Poincaré Disk Modell und einmal das native Modell.

Aufgabe 3: Abkürzung? — 3 Punkte

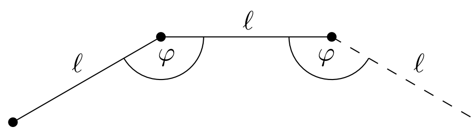
Für zwei Punkte A und B sei $b_{A,B}$ die Translation, die durch den Strahl AB^+ definiert ist und A auf B abbildet. Beweist oder widerlegt für die absolute Ebene, dass die Konkatenation von $b_{A,B}$ und $b_{B,C}$ die Translation $b_{A,C}$ ergibt.

Aufgabe 4: Teufelskreis — 2 Punkte

Gegeben seien drei nicht-kollineare Punkte. In der euklidischen Ebene gibt es genau einen Kreis auf dem diese liegen. Beweist oder widerlegt, dass dasselbe auch in der hyperbolischen Ebene gilt.

Aufgabe 5: Da beißt sich die Katze in den Schwanz **2 + 3 = 5 Punkte**

Gegeben sei ein unendlicher langer Polygonzug P, bei dem die Länge jeder Strecke $\ell > 0$ ist. Des Weiteren sei der Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Strecken $\varphi \in (0, \pi)$ immer auf der gleichen Seite von P.



Teilaufgabe (a) Beweist oder widerlegt, dass sich P in der euklidischen Ebene für jede Wahl von ℓ und φ selbst schneidet.

Teilaufgabe (b) Beweist oder widerlegt, dass sich P in der hyperbolischen Ebene für jede Wahl von ℓ und φ selbst schneidet.

Aufgabe 6: Perspektivenwechsel **3 Punkte**

Gegeben seien die Punkte A, B und C in Polarkoordinaten (natives Modell). Gib die Polarkoordinaten von C bezüglich Ursprung A und Strahl AB^+ an.

Aufgabe 7: Stimmt das wirklich? **5 Bonuspunkte**

Gegeben seien drei nicht-kollineare Punkte A, B und C. Beweist, dass es in der absoluten Ebene keinen Punkt $D \in ABC^+$ mit $D \neq C$ gibt, sodass $d(A, C) = d(A, D)$ und $d(B, C) = d(B, D)$.